Christina-Theresia Dan

Sabina-Tatiana Chiosa

Didactica matematicii

Editura UNIVERSITARIA
CRAIOVA
2008

Cuprins

Introducere

Alegerea viitoarei meserii (în principiu, a facultăţii ce trebuie urmată) trebuie să fie considerată o decizie esenţială în evoluţia vieţii fiecărei persoane. Dacă opţiunea este făcută având la bază doar motivaţia materială (un venit consistent şi rapid), structura social economică a societăţii la acel moment sau dorinţele unor părinţi prea autoritari, de multe ori se ajunge la insatisfacţie sau eşec profesional. Nu spunem că aceste aspecte nu trebuie luate în seamă, dar ele nu trebuie să fie dominante în hotărârea fiecăruia (oricum, la ritmul de schimbare a configuraţiei socio-profesionale actuale, ele pot fi înşelătoare). E bine să alegem o specialitate care poate oferi posibilitatea de a lucra în mai multe domenii, care este indispensabilă dezvoltării anumitor ramuri economice, ştiinţifice, etc. Opţiunea trebuie să se bazeze în primul rând pe o analizare critică a aptitudinilor, posibilităţilor, dorinţelor personale, deoarece profesiunea aleasă trebuie să fie practicată din plăcere.

Alături de medic şi preot, profesorul joacă un rol important în viaţa fiecăruia. Dacă primii doi au grijă de sufletul şi trupul nostru şi ne învaţă cum să le îngrijim, dascălul ne îndrumă în a acumula experienţe, cunoştinţe, modelează gândirea, dezvoltă personalitatea, oferă exemple de viaţă şi criterii de valoare morală. Din acest motiv, profesiunea de dascăl este una vocaţională.

Marele matematician Grigore Moisil spunea că *profesorul este cel care într-o anumită disciplină, ştie în fiecare zi mai mult decât ieri, învăţându-l pe altul ce ştie el azi, îl pregăteşte pentru ce va afla mâine şi care poate să fundeze ceea ce ştie într-o anumită disciplină, pe ceea ce ştie din celelalte discipline pe care aceasta se reazemă.*

În cadrul pregătirii profesionale a unui profesor se îmbină două laturi: cea ştiinţifică şi cea pedagogică. Este evident că un dascăl bun trebuie să fie o persoană cu o pregătire ştiinţifică bogată, bine fundamentată, net superioară nivelului la care se predă. Chiar dacă un profesor predă doar la gimnaziu, el trebuie să cunoască ceea ce se predă la orele de matematică în liceu pentru a pregăti corespunzător elevii făcând legătura dintre noţiunile predate de el şi cele viitoare, asigurând continuitatea învăţării. Considerăm că cea mai mare răspundere în formarea abilităţilor şi gândirii matematice a elevilor o are profesorul de matematică din gimnaziu. El este primul profesor de specialitate care trebuie să-i facă pe copii să îndrăgească matematica şi să-i iniţieze cu răbdare în tainele acesteia. Pentru aceasta, el are menirea dificilă de a transpune noţiuni, greu de aprofundat în această etapă, într-un limbaj accesibil vârstei, fără a renunţa la rigoarea matematică. Profesorul care predă doar la liceu trebuie să cunoască exact noţiunile predate în perioada gimnazială, acestea fiind fundamentul pe care va clădi şi va dezvolta în continuare. De asemenea, este necesar ca el să fie familiarizat cu metodele specifice de abordare a matematicii în gimnaziu pentru a realiza o punte de legătură cu noile metode din liceu. Ţinând cont de faptul că noţiunile din liceu devin din ce în ce mai abstracte (analiza matematică, în special), profesorul trebuie să creeze motivaţii puternice, să pună accentul pe caracterul interdisciplinar al matematicii, să încurajeze căutarea şi cercetarea elevilor.

Dacă profesorul pune accentul pe latura problematică a matematicii, adică explică probleme care conduc la introducerea unor noţiuni noi sub forma precizată (de ce a apărut?, la ce foloseşte?, de ce aşa?), se vor dezvolta motivaţiile care stau la baza acestora. Cărţile de cultură matematică generală joacă aici un rol important. Spre deosebire de manualele, revistele, culegerile de matematică care au o formă conservatoare şi rigidă, acestea prezintă rezultate matematice sub o formă mai plăcută, stabilesc mai uşor motivaţii şi conexiuni cu alte domenii. Dintre aceste cărţi, este bine să nu lipsească din bibliografia de studiu următoarele: *Licuricii din adâncuri, Aventura geometriilor neeuclidiene, Istoria numărului pi* (Florica T. Câmpan), *Vraja geometriei demodate* (Viorel Vodă), etc.

Un prim pas în dezvoltarea creativităţii, inteligenţei elevilor constă în încurajarea acestora în a întreba (chiar dacă uneori răspunsurile sunt elementare) fără a-i admonesta că sunt obraznici sau a-i face să se simtă stânjeniți. Matematicianul Solomon Marcus subliniază acest fapt precizând că „*discursul matematic are totdeauna caracter deschis, generator de întrebări. A învăța să te nedumereşti este lucrul cel mai important. Restul vine aproape ca un corolar*."

Atitudinea elevului relativ la învățarea matematicii trebuie să fie activă. El trebuie învățat să gândească singur, să abordeze şi să caute soluții personale la anumite probleme sau demonstrații de teoreme pe care apoi să le confrunte cu altele. Acesta este şi începutul activității sale de cercetare (care are loc la orice nivel, chiar şi în gimnaziu). Oferirea unor „rețete" sau soluții „de-a gata" nu dezvoltă imaginația, căutarea, judecata elevilor. De exemplu, în cazul construcțiilor ajutătoare în problemele de geometrie, dacă nu „se vede" modul de demonstrație, printr-un lanț de întrebări, adecvat alese, elevul poate găsi singur, la un anumit pas, rezolvarea şi, pentru a o reține, va avea o motivație mult mai profundă decât cea clasică „pentru că aşa se face". În cadrul concursurilor şcolare, am găsit de multe ori abordări originale care nu urmează şablonul clasic, rezolvări inedite, care arată că elevii sunt capabili de activități creatoare începând chiar din cele mai mici clase.

Gândirea matematică presupune capacitatea de a raționa în etape riguros alcătuite, fiecare legată de cele anterioare dar şi capacitatea de concentrare a atenției pe durată mare. În acest sens, exercițiile de calcul suficient de lung, atât de desconsiderate de mulți, le dovedesc elevilor cât sunt de pregătiți în canalizarea atenției şi concentrarea asupra lucrului curent. Concursul „Cangurul" cere şi el atenție şi concentrare maximă; printre altele, participanții află cât de importantă este citirea cu atenție a enunțului unei probleme. Elevii trebuie să fie conştienți de faptul că greşelile de calcul conduc la penalizări, chiar dacă raționamentul este corect; ei au datoria ca, prin exercițiu personal, să-şi dezvolte capacitatea de concentrare.

Problemele de tipul „unde este greşeala?" contribuie atât la formarea spiritului de rigoare cât şi la testarea cunoştințelor asimilate. De asemenea, dacă vom propune analizarea unor texte matematice din cărți, reviste de specialitate, lucrări ale elevilor sau ale profesorului, elevii vor putea comenta forma estetică, modul de expunere, neclaritățile, ambiguitățile, eventualele greşeli şi se vor acomoda cu studiul ştiințific. Astfel, ei vor cerceta învățând.

Ținând cont de influența tehnicii computaționalizate în viața curentă, profesorul de matematică trebuie să pună accentul pe dezvoltarea gândirii algoritmice a elevilor.

Formarea capacității de abstractizare este un alt deziderat în activitatea desfăşurată la orele de matematică. Procesul începe încă din gimnaziu prin exerciții de recunoaştere a unor noțiuni, formule, proprietăți, teoreme, indiferent de notație. Pentru aceasta, este important să exprimăm şi în cuvinte orice enunț formulat simbolic (mai ales la analiză matematică şi algebră). Chiar dacă redactarea simbolică este de cele mai multe ori mai concisă, riguroasă şi comodă, pentru a fi reținută şi aplicată în alte demonstrații ea trebuie înțeleasă în profunzime. Enunțul matematic transpus numai în cuvinte face apel la un limbaj mult mai familiar elevilor şi evidențiază în mod direct semnificația avută în vedere, făcând apel atât la logică cât şi la intuiția fiecăruia.

Doar pregătirea ştiințifică superioară a unui cadru didactic nu reprezintă garantul unui profesor bun. Esențială este şi capacitatea de a comunica elevilor cunoştințele, de a le prezenta într-o formă accesibilă, comodă, motivată, care să conducă la obținerea unor rezultate cât mai bune. Pentru aceasta, profesorul trebuie să cunoască psihologia copilului, să-şi perfecționeze metodica de predare-învățare-evaluare, deținând noțiuni de pedagogie; să aibă tact; să fie deschis la nou.

Profesorul de matematică nu are menirea doar de a-i învăța pe elevi matematica. El trebuie să le sublinieze acestora rolul disciplinei în dezvoltarea societății, oferind motivații puternice învățării; prin metodele de lucru şi limbajul ştiințific, el dezvoltă inteligența, spiritul creator, talentul elevilor, îi învață să gândească logic, să caute adevărul şi noutatea, să lucreze singuri, dar şi în echipă. De asemenea, el trebuie să le dezvolte spiritul de obiectivitate, de corectitudine, de etică, fiind un exemplu pentru ei în acest sens.

Lucrarea de față dezvoltă ideile prezentate şi încearcă să ofere o privire de ansamblu asupra actualelor tendințe de dezvoltare a didacticii matematice. Ea face subiectul cursului *Didactica matematicii din programa studenților anului II matematică ai Facultății de Matematică-Informatică din Craiova*. Deoarece am conceput-o şi ca un *ghid* *pentru tinerii profesori în activitatea desfăşurată la clasă şi pentru pregătirea examenelor de definitivat, de gradul al II-lea, de titularizare*, am înglobat tematica precizată la metodică în programele corespunzătoare la momentul editării. Se pare că în prezent, conceperea unei lucrări nu poate ține pasul cu modificările apărute în sistemul de învățământ; acesta este motivul pentru care pot apărea anumite divergențe între unele probleme tratate în carte şi cele specificate în documentele şcolare, dar principiul didactic are o remanență mult mai mare; de obicei forma se schimbă mai repede decât fondul.

La început, cartea prezintă conceptul de didactică şi principiile acesteia, oferind pentru fiecare dintre ele câteva exemple de aplicare ale acestora.

Pentru studierea metodicii matematice, capitolul al II-lea este esențial. El oferă informații legate strict de pedagogia predării-învățării acestei discipline, fiind menționate sarcinile didacticii matematicii şi strategiile didactice. Dintre metodele didactice, sunt selectate doar cele frecvent întâlnite în activitatea unui profesor de matematică, propunând exemple practice de aplicare ale acestora. Rolul mijloacelor de învățământ în activitatea de predare-învățare-evaluare este subliniat prin modele practice la clasele a VI-a şi a VII-a. Obiectivele educaționale, fundamentale în obținerea unui proces educativ cu un randament ridicat, sunt tratate în mod tradițional, dar şi ținând cont de reforma curriculară din învățământ, subliniind rolul obiectivelor operaționale în realizarea strategiilor procesului de instruire pe termen imediat (la fiecare lecție), cu importanță maximă în evaluarea tacticii alese.

Capitolul III prezintă finalitățile sistemului românesc de învățământ şi problemele actuale, caracteristice reformei curriculare din învățământ: planul-cadru, finalități pe cicluri curriculare, curriculum la decizia şcolii. Produsele curriculare sunt prezentate în forma lor actuală (pentru anul şcolar 2006-2007), putând varia, în funcție de modificările ce pot surveni pe parcurs.

Esența unei proiectări corecte, riguroase a activităților instructive considerăm că nu este trecătoare, ci doar forma ei de redactare (cerută la un anumit moment). Ceea ce trebuie avut în vedere când parcurgem capitolul al IV-lea, nu este grija de a avea „documentele la zi”, ci efortul constant de a te pregăti pentru fiecare lecție susținută la clasă, chiar dacă ea a fost predată mulți ani: o lecție care tratează o tematică stabilită devine diferită ca mod de abordare în funcție de clasa la care este predată şi de experiența noastră pedagogică acumulată. Ținând cont de acest fapt, putem elimina atributul de „monoton" legat de activitatea de predare a matematicii. Capitolul mai furnizează o formă de proiect pentru o unitate de învățare şi a unui opțional.

Chiar dacă forma actuală de proiectare este unitatea de învățare, forma fundamentală este lecția. În capitolul V sunt prezentate tipurile clasice de lecție, punând accentul asupra evaluării eficienței acesteia.

Procesul de verificare şi evaluare în procesul de învățământ este esențial în evaluarea rezultatelor şcolare, în stabilirea eficienței activității de predare-învățare. În acest cadru sunt precizate criterii de gradare a evoluării performanțelor şcolare, sunt prezentate metode tradiționale şi complementare de verificare şi evaluare şi este subliniat rolul itemilor în formularea unor teste docimologice cât mai performante.

Capitolul VII subliniază câteva aspecte ale comunicării didactice: relația profesor-elev, latura psihopedagogică a comunicării.

Definirea corectă a noțiunilor matematice este esențială în înțelegerea conceptelor de bază. Elevii nu trebuie să reproducă mecanic definițiile introduse ci trebuie să ajungă să le folosească în cazuri concrete care nu specifică cadrul capitolului tematic în care se încadrează. În capitolul VIII sunt prezentate: elementele structurale ale unei noțiuni, legătura dintre acestea; raporturile existente între diferite noțiuni; tipuri de definire a unui concept, fiecare însoțit de exemple; operațiile logice de diviziune a noțiunilor şi de clasificare a obiectelor.

Deoarece limbajul matematic se realizează folosind limba română, se spune că limba română este *metalimbajul* folosit în studiul *limbajului-obiect*, cel matematic. Acestea se întrepătrund de cele mai multe ori în sensul că orice text matematic are o componentă naturală (limba română) şi una artificială (simboluri, formule, etc.). Ținând cont de faptul că la baza expunerii matematice (definiții, teoreme, demonstrații) stau propozițiile logice, am considerat necesară introducerea unui capitol de logică matematică. Capitolul IX subliniază succint rezultate importante legate de calculul propozițional, predicate şi raționament matematic. Elevii trebuie să ştie să formeze propoziții corecte din punctul de vedere al logicii matematice; să diferențieze propozițiile logice de predicate; să identifice cuantificatorii logici într-un text matematic şi să efectueze corect operația de negare a unei afirmații, operație cu rol esențial în raționamentul prin reducere la absurd; să distingă ipoteza de concluzie, condiția necesară de cea suficientă; să generalizeze un concept; să înțeleagă ideea de reciprocă a unei teoreme; să raționeze deductiv.

Aplicațiile cuprinse în capitolul al X-lea evidențiază aria largă de aplicabilitate a două metode de raționament deductiv: reducerea la absurd şi inducția matematică.

Ultimul capitol este rezervat rezolvării de probleme. Temele tratate pot constitui capitole în cadrul unor opționale, activități suplimentare de pregătire a elevilor pentru concursurile şcolare, puncte de pornire în activități de cercetare ale şcolarilor. Atât principiul lui Dirichlet cât şi principiul includerii şi excluderii sunt metode des întâlnite în rezolvarea problemelor propuse la olimpiade. Problemele de loc geometric şi cele de construcții cu rigla şi compasul sunt doar două tipuri de aplicații care şi-au pierdut importanța în programele actuale dar au o contribuție majoră în dezvoltarea intuiției, raționamentului, înțelegerii proprietăților geometrice şi stabilirii de legături interdisciplinare (de exemplu, numărul de aur).

Mulțumim pe această cale tuturor dascălilor care au contribuit prin exemplul lor de adevărați profesionişti la formarea noastră ştiințifică şi metodică.

CAPITOLUL I

Didactica. Principiile didacticii

1.1. Conceptul de didactică

Didactica este o ramură a pedagogiei care se ocupă cu studiul procesului de învățământ, principală modalitate de realizare a instruirii şi educației.

Din punct de vedere etimologic, cuvântul „*didactică*” provine din termenii greceşti *didaskein* = a învăța, *didactikos* = instrucție, instruire, *didasko* = învățare, învățământ, *didactike* = arta învățării.

Conceptul de didactică a fost consacrat de *Jan Amos Comenius* (1592 - 1670) în lucrarea sa „*Didactica Magna*”, publicată în anul 1657. Prin principiile inovatoare pe care le susținea, Comenius a produs modificări revoluționare în teoria şi practica învățământului şi este considerat „*părintele didacticii moderne*.” Conform părerii sale, învățământul reprezenta principala formă de realizare a educației. „*Arta de a-i învăța pe toți de toate*” constă în opinia sa în introducerea metodică, sistematică, după anumite principii, a tinerilor în tainele cunoaşterii, ale ştiinței, bunelor moravuri şi pietății. El propune ca însuşirea cunoştințelor să se facă treptat, gradat, printr-o continuă extindere a volumului de informație, asemenea unor cercuri concentrice. Pe baza *teoriei cercurilor concentrice* a elaborat un plan de învățământ şi programe şcolare. Tot el a fost cel care a introdus sistemul vacanțelor, a folosit expresia de „an şcolar” şi a fixat data începerii studiilor la 1 septembrie. El nu a fost doar preocupat de probleme de ordin administrativ ci şi de cele legate de obiectivele, principiile, conținutul, metodele şi formele de organizare ale activității instructiv-educative, oferind profesorului orientare şi instrumente de lucru.

În semn de recunoaştere a valorii deosebite a operei sale pedagogice putem menţiona că medalia „Comenius” este unul din cele mai prestigioase premii ce se acordă pentru realizări deosebite în domeniul cercetării şi inovaţiei educaţionale. În Cehia, ţara sa natală, de ziua de naştere a marelui pedagog, 28 martie, se sărbătoreşte „ziua profesorului.”

Dintre pedagogii care au continuat ideile pedagogice ale lui Comenius se distinge *Johann Friedrich Herbart* (1776 - 1841), filozof şi psiholog german, fondator al pedagogiei, ca disciplină ştiinţifică. El este primul care elaborează o *teorie a interesului*, considerând interesul ca verigă esenţială între idee şi acţiune. Pentru el, latura cea mai importantă a educaţiei este învăţământul. Meritul său este acela de a fi încercat să identifice un algoritm procedural care să faciliteze procesul de predare şi asimilare a cunoştinţelor.

În prezent, ***didactica*** reprezintă o ramură complexă a ştiinţelor educaţiei. Ea studiază şi fundamentează ştiinţific analiza, proiectarea, desfăşurarea şi evaluarea predării şi învăţării ca proces de instruire şi educare în şcoli, alte instituţii, cât şi prin autoinstruire.

Domeniul de cuprindere al conceptului de didactică este în zilele noastre lărgit, fiind stabilite niveluri ale didacticii: *didactica tradiţională* sau *clasică* şi *didactica modernă* sau *psihologică.*

Didactica clasică studiază esenţa procesului de învăţământ, cu scopul şi sarcinile sale, conţinutul învăţământului, principiile, metodele şi formele organizatorice ale activităţii instructiv-educative, organizarea învăţământului (clasa, şcoala şi sistemul educaţional), profesorul.

Didactica modernă înglobează întreaga sferă de cuprindere a didacticii tradiţionale şi îşi extinde conţinutul cu teme noi, cum ar fi: didactica adulţilor, instruire şi autoinstruire asistată de calculator, programarea pedagogică.

Astfel, didactica, ramură a ştiinţelor educaţiei, studiază patru mari domenii:

- învăţământul în ansamblul său, pe toate treptele de şcolarizare şi autoinstruirea, caz în care se numeşte ***didactică generală***.

- procesul de învățământ din perspectiva pedagogică a predării şi învățării obiectelor de studiu, situație în care poartă numele de ***didactică specială*** sau ***metodică***.
- ***didactica adulților***
- ***autoinstruirea***.

Didactica generală sintetizează experiența pozitivă acumulată în practica şcolară, oglindită în metodici şi elaborează reguli valabile pentru procesul de învățământ, în ansamblul său. În acelaşi timp, ea asigură baza dezvoltării didacticilor speciale şi a adulților cu care se află în relații de interdependență. De fapt, didacticile speciale şi didactica adulților pot fi considerate subramuri ale didacticii generale.

1.2. Principiile didacticii

Principiile procesului de învățământ sau principiile didacticii sunt norme generale care stau la baza proiectării, organizării şi desfăşurării activităților de predare – învățare, în vederea realizării optime a obiectivelor educaționale.

Principiul participării conştiente şi active a elevilor în activitatea de predare-învățare-evaluare.

Premisa de la care se pleacă în acest principiu este că elevul trebuie considerat un subiect al învățării, implicat şi cointeresat activ în a cunoaşte şi a face. *Cunoaşterea* prezintă mai multe niveluri:

- *mecanică* – recepteză, reține şi foloseşte informația în mod brut (de exemplu o regulă).
- *inductivă* – foloseşte regula de mai multe ori şi vede că funcționează corect, inclusiv în circumstanțe mult schimbate.
- *rațională* – înțelege mecanismul şi poate să aplice regula cu oarecare variații.
- *integrativă* – înglobează regula într-un sistem şi poate să o folosească adaptând-o creativ.

Învățarea conştientă se bazează în primul rând pe structura cognitivă preexistentă a elevului şi pe natura materialului de învățat. Trebuie descurajată însuşirea mecanică a cunoştințelor. De aceea, în procesul de predare–învățare-evaluare, profesorul trebuie să parcurgă următoarele etape principale:

- să reactualizeze atent cunoştinţele anterioare ale elevilor care îi sunt necesare;
- să marcheze, când este cazul, că aceste cunoştinţe pot fi completate într-o anumită direcţie;
- să prezinte cunoştinţele noi pe paşi: itemi uşor de învăţat succesiv, dar cu semnificaţia lor logică;
- să se asigure că fiecare secvenţă este urmărită atent şi conştient, realizându-se reconexarea logică a secvenţelor;
- să verifice prin exerciţii sau întrebări nivelul de înţelegere;
- să fixeze noile cunoştinţe în structura cognitivă a elevului.

Principiul caracterului intuitiv al învăţământului.

Conceptul de intuiţie în psihologie şi în pedagogie are sensul de cunoaştere directă, prin intermediul analizatorilor, al obiectelor şi fenomenelor. Intuiţia se concretizează într-o imagine care este totdeauna concretă, individualizată. Ca urmare, concreteţea poate fi de ordin obiectural (un obiect poate fi atins, văzut, manipulat), dar şi de ordin logic (unele cuvinte sunt mai concrete sau mai abstracte, de exemplu conceptul de caiet este mai concret decât cel de relaţie).

Elevii trebuie să treacă prin etapa operării directe cu obiecte sau imagini ale acestora pentru a ajunge la nivelul gândirii abstracte.

De exemplu, în clasa a VI-a, se introduce în mod intuitiv *simetria în raport cu un punct sau o dreaptă*. Pentru a diversifica activitatea, se pot studia axele şi centrele de simetrie pentru figuri simple: litere, panouri rutiere, logo-uri (Volkswagen, Chrysler, de exemplu).

Rolul axelor şi centrelor de simetrie poate fi evidenţiat reconstituind figuri care au fost parţial şterse, dar la care se cunosc centrele/ axele de simetrie, realizând frize sau modele obţinute prin construcţia simetricului figurii alese în raport cu un punct şi/sau o dreaptă dată. Cu aceste exerciţii se evaluează nivelul de înţelegere al noţiunilor predate, elevul fiind nevoit să aplice practic cele învăţate.

De asemenea, rezolvând în clasa a VIII-a *sisteme de inecuaţii liniare* (cu 2 necunoscute) mai întâi pe cale grafică, se intuieşte mai uşor modul de determinare a soluţiilor (dacă ele există).

La descrierea *corpurilor geometrice* se pot folosi exemple atractive, care fac legătura cu alte discipline şi care oferă şi informații noi. De exemplu, la piramidele patrulatere regulate putem considera două piramide celebre, precizând şi dimensiunile lor: piramida lui Keops ($h = 138$ m, $b = 230$ m) şi cea de la Luvru ($h = 21$ m, $b = 34$ m). Pentru acestea, cerem:

- să se calculeze volumele şi să se compare (de câte ori este mai mic volumul piramidei Luvrului decât cel al piramidei lui Keops);
- să se afle aria totală a plăcilor de sticlă care acoperă piramida de la Luvru.

La prezentarea conului putem folosi exerciții de tipul:

- Pălăriile chinezeşti au forma unui con în care înălțimea este egală cu raza cercului de bază. Aflați unghiul de la vârful conului;
- Vulcanul Orono din Chile are forma unui con aproape perfect de înălțime $h = 266$ m. Ştiind că măsura unghiului de la vârf este de aproximativ 130°, calculați raza cercului de bază;
- Zona de protecție a unui paratrăznet este un con a cărui înălțime este jumătate din lungimea razei cercului de bază. Presupunem că un paratrăznet este situat la 30 m de sol, pe o clădire aflată la 24 m distanță de o casă. Dacă considerăm că terenul este orizontal, putem preciza dacă acea casă este situată în totalitate în conul de protecție al paratrăznetului? Ce mai trebuie să determinăm pentru a putea da un răspuns la problema propusă?

Considerăm că la corpuri geometrice cum sunt piramidele şi prismele, foarte importante sunt desfăşurările plane ale acestora.

Elevii îşi pot dezvolta reprezentarea spațială, imaginația, încercând ca din anumite desfăşurări plane să vadă dacă se pot reconstitui piramide şi prisme.

În enunțarea definițiilor sau teoremelor putem folosi exemple şi reprezentări intuitive, iar în demonstrații şi în rezolvarea problemelor anumite analogii utilizate pot crea un sprijin intuitiv pentru elevi.

O latură importantă a principiului enunțat este analiza raporturilor dintre general şi particular. Prin anumite particularizări putem intui cerința unei probleme. De asemenea, unele probleme admit generalizări.

Principiul legării teoriei de practică.

Spre deosebire de alte ştiinţe cum ar fi biologia, fizica, chimia, legăturile matematicii cu realitatea nu sunt atât de uşor de remarcat. Conexiunile bilaterale existente între aceasta şi multe alte ştiinţe, l-au determinat pe academicianul Solomon Marcus să denumească matematica „*o punte de legătură între toate disciplinele*".

În acest sens, anumite domenii ale matematicii au apărut din nevoia de a lămuri unele situaţii ivite în cadrul altor discipline. Astfel: calculul integral şi diferenţial îşi bazează conceptele fundamentale pe necesitatea rezolvării unor probleme de mecanică; teoria matematică a jocurilor de strategie a fost iniţiată în timpul celui de-al doilea război mondial pentru a soluţiona probleme de tactică şi strategie militară; teoria probabilităţilor a pornit de la studiul jocurilor de noroc şi s-a dezvoltat în cadrul mecanicii, fizicii, economiei, lingvisticii.

Deoarece matematica ajută doar acele domenii de activitate care sunt suficient de dezvoltate şi ajung la studiul aspectelor structurale, sistemice, ea este considerată de domnul Marcus „*o ştiinţă aristocratică*". Activitatea matematicianului conduce la crearea unor universuri care aparent nu au legătură cu lumea reală; ele trebuie totuşi cercetate, chiar dacă în acel moment sunt lipsite de semnificaţie. Acesta este, de exemplu, cazul teoriei geometriilor neeuclidiene care şi-a găsit sensul în momentul în care a fost elaborată teoria relativităţii, a studiului algebrelor Boole cu aplicaţii în tehica computerelor.

Uneori, apare şi situaţia inversă: matematica nu este suficient de pregătită pentru a susţine rezultatele obţinute în cadrul unor discipline nematematice. În astfel de cazuri au apărut ramuri noi matematice, în general la graniţa dintre aceste discipline.

Sublinierea caracterului puternic interdisciplinar al matematicii crează motivaţii puternice pentru învăţarea acesteia. Elevii vor realiza că domeniile de aplicabilitate sunt foarte numeroase şi că profesia de matematician oferă variate posibilităţi, dacă nu în prezent, mai mult ca sigur, în viitor.

Noţiunile matematice predate în şcoală asigură bagajul necesar frecventării cursurilor unei facultăţi care studiază discipline ce aplică aparatul matematic în teorie şi practică. Aici, studenţii vor întâlni aplicații complexe ce modelează matematic procese tehnologice din diverse domenii (tehnic, informațional, economic, lingvistic, medical, etc.).

Principiul corelației dintre teorie şi practică subliniază faptul că tot ceea ce se însuşeşte în activitatea didactică trebuie valorificat în activitățile ulterioare, fie că acestea sunt activități de învățare sau activități materiale.

În cazul matematicii şcolare, latura practică este considerată a fi alcătuită din algoritmi ce se obțin în urma unei teorii prezentate, din seturi de exerciții şi probleme, etc.

Este indicat să se sublinieze aplicații ale matematicii în viața curentă (calcule, măsuri, dobânzi, ecuații, etc.). De exemplu, în clasa a VI-a, elevii încep să studieze despre „*rapoarte şi proporții*”. Această temă presupune multe aplicații practice. Este evident că toți vor lega noțiunea de procent de exercițiile cu conținut economic. Mai putem considera următorul exercițiu (la nivelul clasei a VII-a):

Mergând cu maşina, întâlnim la un moment dat un panou de semnalizare rutieră care avertizează că urmează o coborâre periculoasă (panta specificată este de 10%). Determinați măsura unghiului α *al pantei.*

Procentul din enunț reprezintă raportul dintre diferența de altitudine a două puncte (unul pe planul înclinat şi celălalt la baza acestuia) şi distanța orizontală dintre acestea. Astfel, $\mathrm{tg}\alpha = 0{,}1$. Folosind tabelele trigonometrice, obținem o valoare aproximativă $\alpha = 5°42'$. Problema poate fi pusă şi invers: ştiind măsura unghiului, să se determine panta corespunzătoare.

Mărimile direct şi invers proporționale sunt întâlnite şi ele în situații variate. Astfel, se pot rezolva multe exerciții şi probleme care modelează situații cotidiene (probleme de tipul „la cumpărături”, „echipe de muncitori”, de deplasare, de transport).

Elevii au folosit deja hărți la istorie, geografie, au văzut în manualul şi atlasul de biologie imagini realizate cu ajutorul microscopului electronic. Putem defini *scara de realizare a unei hărți* ca fiind raportul dintre unitatea de distanță de pe hartă şi distanța corespunzătoare în realitate. Ca aplicații practice, putem propune: calcularea distanței minime dintre două oraşe având la dispoziție o hartă rutieră, citirea şi realizarea planului unui apartament (sunt activități pe care, în mod sigur, le vor efectua la un moment dat).

În clasa a VII-a, rapoartele şi proporțiile sunt formate cu lungimi de segmente. Trebuie subliniate aici aplicații ale *teoremei lui Thales* şi ale *reciprocei* sale: determinarea înălțimii unui copac, turn (se poate aminti modul în care Thales calcula înălțimea unei piramide folosind un băț); împărțirea unui segment într-un raport număr rațional dat; găsirea lungimii unui segment; demonstrarea paralelismului unor drepte.

Reprezentarea datelor prin grafice (cu bare) şi *elementele de organizarea datelor* predate în clasa a VI-a, se continuă în clasa următoare folosind tabele, diagrame şi grafice pentru reprezentarea anumitor dependențe funcționale. Elevii au întâlnit deja astfel de reprezentări la alte materii (istorie, geografie, biologie, fizică). Considerăm că este important ca ei să poată „citi" şi realiza grafice, histograme, diagrame circulare, piramide de populație; să înțeleagă semnificația matematică a acestora; să ştie domeniile în care este recomandată folosirea fiecărui tip de reprezentare prezentat. Prin aceste activități, elevii se vor familiariza cu câteva noțiuni introductive de *statistică*.

De asemenea, noțiunile de calcul vectorial, numerele complexe, calculul ariilor figurilor plane şi de rotație în jurul lui *Ox*, al volumelor corpurilor de rotație, determinarea lungimii arcelor de curbă, a centrelor de greutate ale plăcilor, lucru mecanic, etc., predate în liceu, au mare aplicabilitate în fizică şi mecanică.

Principiul învățământului sistematic şi continuu.

Învățământul sistematic şi continuu este realizat de planurile de învățământ, la nivelul ansamblului mai multor discipline; de programa analitică, pentru structurarea disciplinei şi a capitolelor acesteia; de planurile de lecții realizate de fiecare profesor.

Cunoştințele noi trebuie să aibă legătură cu ceea ce s-a însuşit până la momentul respectiv (realizându-se continuitatea învățării). Deoarece acestea se integrează treptat, în sisteme din ce în ce mai complexe, se ajunge la sistematizare.

De exemplu, predarea primitivelor presupune o sistematizare pentru fiecare din lecțiile: calculul primitivelor, care are o sistematizare proprie, primitivarea prin părți şi schimbarea de variabile. După ce se dobândesc aceste cunoştinţe este necesară o sistematizare care le include pe toate şi care mai conţine în plus reguli de aplicare succesivă a metodelor respective: integrarea funcţiilor raţionale, a funcţiilor trigonometrice, etc.

Predarea sistematică poate fi asigurată prin însăşi logica de constituire a disciplinei. Ordonarea unei discipline poate fi *liniară* - se predau cunoştinţele fără a se reveni şi a îmbogăţi fondul iniţial; *concentrică sau în spirală* - se revine la fondul iniţial de informaţii care se amplifică cu noi date ce pot fi asimilate la vârste diferite; *genetică sau istorică* - se prezintă procesele şi fenomenele în raport cu temporalitatea istorică.

Sistematizarea în spirală este preferată în predarea matematicii. Cunoştinţele de algebră şi de geometrie dobândite în primele clase asigură formarea unei structuri cognitive operaţionale şi a unei baze acceptabile de modelare intuitivă. Aceste discipline sunt continuate şi sistematizate apoi în liceu. La sfârşitul clasei a X-a se consideră că s-a realizat o structură cognitivă suficientă predării analizei şi algebrei abstracte. Acestea, fiind materii ce se predau în anii terminali conţin multe teme ce nu se mai pot organiza în spirală, preferând ordonarea liniară.

Principiul însuşirii temeinice a cunoştinţelor.

Îndeplinirea acestui principiu presupune că elevul poate folosi cunoştinţele dobândite în activităţi ulterioare aplicative cât şi la autoinstruire.

Pentru a asigura o învăţare temeinică şi durabilă se cere:

- o atentă dimensionare a cantităţii şi calităţii informaţiei date şi a cerinţelor;
- informaţia trebuie introdusă graduat, valorificându-se de fiecare dată vechile date, prin corelare cu cele noi;
- reanalizarea noţiunilor dobândite prin recapitulare;
- stimularea motivaţiei şi creşterea capacităţii de autoevaluare.

În concluzie, acest principiu se opune superficialităţii în învăţare: învăţare în salturi, cu lacune, învăţare formală.

Principiul respectării particularităţilor de vârstă şi individuale.

Actul de comunicare între profesor şi elev se face pornind de la niveluri diferite de dezvoltare a gândirii. Astfel, profesorul trebuie să îşi conceapă lecţia în vocabularul şi în formele de gândire specifice elevului de diferite vârste.

Pentru aceasta trebuie să se ţină cont de reperele psihogenetice relevante pentru dezvoltarea intelectuală:

- până la 6-7 ani domină *gândirea în imagini*, cantonată în concret şi în actual, care acumulează informaţii prin percepţie, dar acestea rămân disparate.
- între 6-7 ani şi 11 ani copilul are o *gândire concretă*: percepţia lucrurilor rămâne globală, domină operaţiile concrete (de exemplu, verificarea proprietăţii de tranzitivitate a unei relaţii o poate face pe elemente concrete, nu pe un material pur verbal); anumite raţionamente deductive de genul „dacă... atunci" pot fi realizate pe exemple; clasificările se realizează pe baza unui singur criteriu, raţionamentul este progresiv, de la cauză la efect.
- *gândirea formală*, abstractă începe să se contureze pe la 10-11 ani şi devine *sistematică* pe la 14-15 ani: se dezvoltă demersul analitico-sintetic; se multiplică punctele de vedere; stăpâneşte instrumentele deductive; se instituie demersul ipotetico-deductiv; clasificările se realizează pe mai multe criterii; alternează raţionamentele directe cu cele inverse; demersul progresiv cu cel regresiv.
- în perioada adolescenţei, între 14-15 ani şi 18-19 ani, *gândirea* devine din ce în ce mai *independentă* şi *creativă.* Inteligenţa teoretică permite elevului să elaboreze judecăţi de valoare, să-şi pună probleme şi să le rezolve; poate efectua raţionamente de toate categoriile: ipotetico-inductive şi combinatorii, generalizând operaţiile de clasificare şi seriere.

De exemplu:

1. Noţiunea de *ecuaţie* poate fi introdusă prin mai multe feluri: intuitiv (o balanţă care îşi echilibrează braţele în condiţii definite), în clasele primare; ca o egalitate valabilă pentru anumite valori date literelor, în gimnaziu; ca un predicat în care apare o singură dată semnul „egal", în liceu.

2. *Formulele de calcul prescurtat* nu reprezintă doar formule ce trebuie memorate, ci ele rezultă în urma unui raționament care poate fi oricând refăcut. Dacă lucrăm în planul simbolurilor sau al semnelor într-o etapă mai timpurie de dezvoltare intelectuală (înainte de vârsta de 10 ani) riscăm să pierdem semnificația acestora.

3. Încercarea de a prefigura *noțiuni de teoria mulțimilor* la preşcolari s-a soldat cu un eşec deoarece copilul, la această vârstă, nu se poate desprinde de referința obiecturală şi nu poate atinge noțiunea abstractă introdusă (de exemplu, noțiunea de element al unei mulțimi).

Mai mult, există ritmuri diferite de asimilare în clasă, niveluri diferite de inteligență şcolară şi de motivație de care trebuie să se țină cont. Fiecare profesor are obligația de a trata diferențiat, în funcție de calitățile psihice individuale, fiecare elev. În acest scop se pot folosi mai multe procedee, cum ar fi:

1. *acțiuni individualizate subordonate activităților frontale* – profesorul are în atenție câțiva elevi, în timp ce ceilalți continuă să-şi realizeze sarcinile;
2. *acțiuni individualizate în cadrul procesului de învățământ, dar realizate în afara acestuia* – teme diferențiate pentru acasă, recomandarea unei bibliografii suplimentare;
3. *activități pe grupe de nivel* – împărțirea clasei în grupe relativ apropiate sub aspectul potențialului intelectual, fiecare cu sarcini diferite, pe măsura grupelor respective;
4. *activități în clase speciale* – pentru elevi cu abilități deosebite sau pentru elevi cu handicapuri.

Principiul accesibilității cunoştințelor, priceperilor şi deprinderilor.

Principiul accesibilității este o consecință a principiului precedent şi presupune ca materialul prezentat să poată fi asimilat la vârsta respectivă, pe baza cunoştințelor anterioare, în timpul prevăzut, iar activitățile cerute elevilor să se poată realiza fără a diminua timpul necesar pentru odihnă, divertisment, alte activități desfăşurate de către elev.

Ca urmare, profesorul trebuie să capteze atenția elevului prin explicații, conversație euristică; definirea oricărei noțiuni să fie însoțită de exemple, de reprezentări intuitive.

Principiul conexiunii inverse.

Pentru a putea controla activitatea de învățare-predare şi a o optimiza, este necesară evaluarea sa. Aceasta se realizează prin: stimularea elevilor la autoevaluare, verificarea continuă a temei şi prin valorificarea „greşelilor." Profesorul trebuie să sublinieze erorile tipice ce pot apărea într-o secvență de cunoştințe pentru a preveni apariția lor.

Principiul caracterului ştiințific al învățământului matematic.

Acest principiu este asigurat în primul rând de corectitudinea informațiilor matematice ce provin, în special, prin manuale, de nivelul de rigoare adoptat în predarea matematicii şi de însuşirea unui limbaj ştiințific, cel specific disciplinei.

Principiul motivației optime.

Orice acțiune de învățare şcolară prezintă două aspecte: aspectul motivațional şi aspectul procesual al învățării.

Există o lege a optimului motivațional. Cum orice act de învățare este plurimotivat, din compunerea motivelor şi imboldurilor apare un grad de motivație față de sarcina respectivă, care capătă expresie concretă într-o anumită mobilizare energetică numită nivel de activare cerebrală. Sub un nivel minim de activare învățarea nu are loc; randamentul creşte paralel cu nivelul activării până la un nivel critic, după care, un plus de activare conduce la un declin al prestației. Există astfel un optim motivațional, situat între nivelul minim şi cel maxim al activării, care diferă de la o persoană la alta în funcție de gradul de dificultate al sarcinii, de aptitudini, de echilibrul emotiv, temperamental.

Practic, învățarea are la bază motive externe, cum ar fi lauda, nota, pedeapsa, cât şi motive interioare (enumerate mai sus). Nivelul de motivare este întreținut şi de conştiința unui spor de cunoştințe, de nevoia de deprinderi de tehnici, de crearea unor situații problemă, de demonstrații.

Principiul problematizării.

Acest principiu este introdus de metodiştii de specialitate fiind caracteristic predării matematicii, el neregăsindu-se în sistemul principiilor didacticii.

În matematică, un exercițiu presupune în general o abordare algoritmică (operații de recunoaștere, transfer specific, aplicare simplă de proprietăți), pe când o problemă presupune o abordare euristică (operații de analiză, sinteză, evaluarea unor variante). Problemele sunt considerate în matematica școlară concretul.

Principiul problematizării presupune realizarea unei corelații între teoria matematică și probleme. De obicei, procesul de predare trebuie să înceapă cu crearea unei situații problematice care să justifice demersul rezolutiv, activizează și conștientizează elevii. Aceste situații problematice se transformă pe parcursul predării și învățării teoriei în probleme care necesită de multe ori anumite aprofundări teoretice și, astfel, ciclul inițial se reia.

Acest principiu își afirmă importanța prin faptul că ușurează dezvoltarea la elevi a unor strategii de rezolvare care se cristalizează în strategii cognitive, un pas de început într-o activitate de cercetare.

De exemplu, în clasa a V-a, elevii trebuie să învețe să adune fracții cu același numitor sau cu numitori care sunt multipli ai unuia dintre ei. Pentru aceasta, putem folosi jocul *Tangram*.

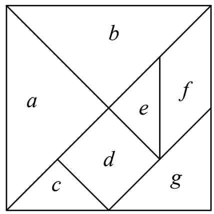


Fig. 1.1.

Decupând un pătrat ca în figura 1.1., se obțin șapte piese numite *tanuri*. Acestea sunt: 5 triunghiuri dreptunghice isoscele (*a* și *b* cu catetele de lungime 2, *c* și *e* cu catetele de lungime 1, *g* cu catetele de lungime $\sqrt{2}$), un pătrat *d* de latură 1, un paralelogram *f* de laturi 1 și $\sqrt{2}$ (am considerat latura pătratului inițial de lungime $2\sqrt{2}$). Tangram este un joc care urmărește realizarea unor figuri folosind toate cele 7 piese, fără a le suprapune. Bineînțeles că la nivelul clasei a V-a nu vom discuta despre numere iraționale ($\sqrt{2}$) și vom considera aplicații în care nu este necesară cunoașterea dimensiunilor pieselor (alte tipuri de probleme pot fi abordate începând din clasa a VII-a).

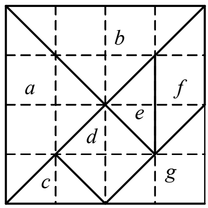


Fig. 1.2.

Atingerea obiectivului menționat (la clasa a V-a), se poate realiza cerând elevilor:

- să scrie aria fiecărei piese sub forma unei fracții, raportând la aria pătratului mare (pentru determinarea ariilor se folosește modul intuitiv de definire a ariei, Fig. 1.2.), rezultând:

$S_a = S_b = \frac{1}{4}S,\ S_d = S_f = S_g = \frac{1}{8}S,$

$S_c = S_e = \frac{1}{16}S$;

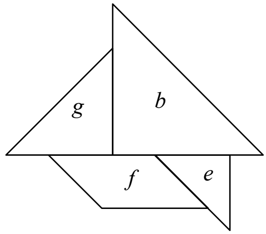


Fig. 1.3.

- să determine ce fracție din aria pătratului inițial reprezintă aria unei figuri asemănătoare cu cea din figura 1.3.

Principiul educației permanente și continue.

Dacă ținem cont de varietatea situațiilor de învățare și de gradul diferit de intenționalitate acțională, putem evidenția mai multe forme de educație:

- *educația formală*, care cuprinde totalitatea influențelor intenționate și sistematice, elaborate în cadrul unor instituții instituționalizate (școală, universitate), în vederea formării personalității umane.
- *educația nonformală*, care se referă la toate influențele educative derulate în afara clasei sau prin intermediul unor activități opționale sau facultative.
- *educația informală*, care include totalitatea informațiilor neintenționate, difuze, eterogene, cu care este confruntat orice individ în practica de toate zilele, dar care nu sunt selectate din punct de vedere pedagogic.

Studiul matematicii se concentrează în cea mai mare parte a sa în educația formală. O pondere mai mică se încadrează în educația nonformală și informală, cum anumite influențe educaționale se exercită prin intermediul cercurilor, olimpiadelor școlare, concursurilor, mass-media.

CAPITOLUL II

Obiectul metodicii matematicii

2.1. Obiectul metodicii matematicii

Metodica predării matematicii este o disciplină de graniță între matematică, pedagogie şi psihologie. Ea studiază învățământul matematic sub toate aspectele sale: scop, sarcini, conținut, metode, forme de organizare, principii, personalitatea profesorului.

Această disciplină trebuie să precizeze cum se organizează predarea – învățarea eficientă a noțiunilor de aritmetică, algebră, geometrie, analiză matematică din învățământul preuniversitar, ținând cont de indicațiile pedagogiei generale. Astfel, *matematica devine conținutul asupra căruia metodica predării îşi exersează metodele*.

2.2. Sarcinile didacticii matematice

Principalele sarcini ale metodicii predării matematicii sunt:

a. Selectarea din ştiința matematică a conceptelor, rezultatelor şi ideilor fundamentale care vor fi predate elevilor ținând cont de stadiul de dezvoltare a matematicii şi perspectivele ei, de comenzile sociale pe termen scurt şi lung, de legile învățării stabilite de psihologie.

b. Organizarea cunoştințelor ce urmează a fi predate pe anumite grade de rigoare şi complexitate.

c. Identificarea principalelor trăsături, instrumente, metode şi aplicații, caracteristice diferitelor discipline matematice şi indicarea tiparelor de gândire matematică accesibile elevilor la vârste diferite.

Aceaste sarcini încep de la vârful structurii organizatorice, Ministerul Educației şi Cercetării realizând programe elaborate de Comisia Națională pentru Curriculum şi Comisia Națională de Matematică. Prin intermediul Inspectoratelor Şcolare, programele ajung la profesori care detaliază şi înlănțuie programa alcătuind programa calendaristică şi proiectul didactic pentru fiecare lecție. În paralel, programele trec şi pe la edituri care colaborează cu colective de profesori pentru a elabora manuale.

d. Furnizarea de instrumente eficiente în dezvoltarea capacității de abstractizare şi generalizare, a creativității şi perseverenței elevilor, folosind metode matematice.

e. Corelarea matematicii cu alte discipline studiate.

f. Detalierea metodologică a fiecărei teme de studiu, precizând căile cele mai potrivite pentru o explicare cât mai accesibilă.

g. Stabilirea mijloacelor specifice în activitatea de control a activității matematice a elevilor şi a celor specifice evaluării progresului de învățare.

h. Organizarea studiului individual cu referire la folosirea manualelor, a revistelor de matematică, a culegerilor de probleme şi a unor activități din afara clasei: cercuri de matematică, olimpiade.

2.3. Strategii didactice

În didactica modernă, procesul de predare – învățare îmbină un act de comunicare cu un efort de însuşire din partea elevului. Profesorul este cel care inițiază dialogul, selectează şi structurează materialul, propune şi organizează activitatea elevului cu acest material, inclusiv fixarea sa în memorie. Elevul îşi formează noi mecanisme de achiziție (noțiuni, operații) pentru a prelua informații noi prin participare activă.

Activitatea de predare semnifică mult mai mult decât a spune sau a dicta lecția. Ea reuneşte următoarele aspecte:

- prezintă exemple, rezultate, modele;
- propune elevilor o activitate asupra acestora: de analiză, de comparare, etc.;
- extrage esențialul care este condensat în definiții, reguli, teoreme;

- organizează şi îndrumă actul de învățare;
- face operante cunoştințele în exerciții, probleme (indiferent dacă acestea sunt teoretice sau calculatorii).

Strategiile didactice sunt modalități complexe de organizare şi conducere a procesului de instruire pe baza combinării metodelor, a mijloacelor de învățământ şi a formelor de grupare a elevilor, în scopul realizării obiectivelor pedagogice.

Ele contribuie la optimizarea procesului de instruire şi de formare a personalității elevilor, profesorul dirijând, conducând şi reglând continuu acțiunea instructivă în direcția impusă de finalitățile actului de învățământ.

Strategiile didactice au caracter dinamic, ele fiind într-o permanentă înnoire în scopul realizării unui învățământ formativ-educativ. Profesorul îşi stabileşte strategiile didactice având în vedere conținutul şi obiectivele situației de instruire, diferitele tipuri de învățare, principiile didacticii, sistemul de gândire şi nivelul de cunoştințe al elevilor, spațiul şcolar unde se desfăşoară lecția şi timpul afectat acesteia.

În predarea cunoştințelor se poate porni fie de la exemple (fapte concrete) ajungând prin analiză, sinteză şi generalizare la definirea noțiunii, la stabilirea unei reguli (calea inductivă) fie se introduc inițial definiții care se ilustrează apoi cu cazuri concrete (calea deductivă). Cele două procedee pot alterna sau se îmbină în moduri diferite.

Unele exemple ilustrează nemijlocit o noțiune, având *valoare de prototip*, pe când altele sunt *exemple de contrast*, de diferențiere sau contraexemple, care relevă prin opoziție ceea ce nu constituie sau nu aparține unui concept. Cantonarea în exemple–prototip folosite la lecție duce la îngustarea conținutului noțiunilor ce se formează la elevi. Spre exemplu:

- Mulți elevi concep înălțimea ca fiind mereu interioară unui triunghi; ei devin derutați în cazul unui triunghi care are un unghi obtuz în care înălțimile corespunzătoare unghiurilor ascuțite cad în afara triunghiului.
- Triunghiul dreptunghic nu trebuie construit doar într-o anumită poziție (cu unghiul drept la bază, în stânga, jos, de exemplu); pentru a fi uşor de recunoscut şi în alte situații.
- De multe ori elevii cred că un cerc are doar două diametre.

În aceste situații, este necesară prezentarea unui material intuitiv variat pentru a discerne uşor între esențial şi neesențial. Profesorul trebuie să introducă aceleaşi noțiuni pe trepte diferite de complexitate, complicând progresiv aspectul lor intuitiv.

Contraexemplul sau elementul de contrast este necesar să fie introdus ori de câte ori apare tendința spre generalizare pripită. Astfel, se pot inventaria din practică dificultăți şi greşeli specifice, indicând surse posibile de eroare în organizarea secvenței de predare–învățare, precum şi felul exemplelor de contrast.

Procesul de comunicare, de transmitere a informației nu se încheie cu dezvăluirea conținutului noțiunilor, ci înseamnă şi încadrarea acestora în sistemul de noțiuni conexe şi în conceptul care le înglobează. Astfel, secvențele de predare se articulează, formând sisteme, rezultatul fiind o structură bine definită care, în mintea elevului, conturează corelații între cunoştințe.

Desfăşurarea procesuală a activității şcolare presupune mai multe faze: receptarea materialului, înțelegerea, fixarea în memorie, actualizarea şi transferul informației.

În formarea cunoştințelor, a prototipurilor şi a conceptelor, elevul avansează pe patru niveluri psihogenetice:

- *nivelul concret*, unde termenul corespunzător este un prototip: elevul recunoaşte un obiect întâlnit în experiența anterioară, îl distinge de celelalte şi îi atribuie denumirea anterioară (alege un triunghi dintr-o mulțime de piese, fără a putea să-i dea o definiție);
- *nivelul identificării* presupune recunoaşterea unui obiect în diferite ipostaze sau forme, fiind considerat acelaşi (triunghi isoscel, dreptunghic);
- *nivelul clasificator* care presupune că elevul separă corect exemplarele care ilustrează un concept, dar nu reuşeşte să dea o definiție;
- *nivelul formal*, în care elevul poate defini precis conceptul, evaluând corect atât exemplele cât şi contra-exemplele.

Strategiile de instruire comportă o împărțire şi o clasificare după mai multe criterii.

Dintre acestea menționăm:
- *după operațiile cognitive predominante*:
  a. *strategii inductive*, în care demersul didactic porneşte de la concret la abstract, adică de la analiza unor exemple, date, fenomene, la formularea de reguli, legi, principii;
  b. *strategii deductive*, în care calea urmată este inversă celei inductive, pornind de la general la particular, de la legi şi principii la concretizarea lor în exemple;
  c. *strategii analogice*, în care se translatează unele explicații de la un domeniu la altul;
  d. *strategii transductive*, care fac apel la raționamente mai sofisticate, de natură metaforică, eseistică, jocuri de limbaj;
  e. *strategii mixte*, care îmbină unele procedee de mai sus (inductiv-deductiv, de exemplu).
- *după gradul de structurare a sarcinilor de instruire:*
  a. *strategii algoritmice*, bazate pe structuri fixe;
  b. *strategii semi-prescrise*, cu registre largi privind libertatea de intervenție;
  c. *strategii euristice*, ce încurajează căutarea, descoperirea pe cont propriu, prin încercare şi eroare.

Strategia didactică se poate construi pe mai multe paliere sau componente:
- mediul de organizare a situațiilor de învățare:
  a. *formal,* la nivelul orei;
  b. *semiformal*, înainte sau după intervalele stricte ale programului;
  c. *extraşcolar,* prin activități complementare traseelor didactice.
- forma de organizare a elevilor*:*
  a. *individuală:*
  b. *pe grupe;*
  c. *frontală.*
- gradul de explicitate al conținuturilor*:*
  a. *directe;*
  b. *sugerate;*

c. *ascunse.*

- dimensiunea cantitativă a conținutului transmis:
  a. *secvențial;*
  b. *integrat, pe unități tematice;*
  c. *global.*
- gradul de intervenție sau asistență al cadrului didactic:
  a. *permanent;*
  b. *episodic;*
  c. *combinat.*
- gradul de legătură dintre diferitele secvențe:
  a. *episoade independente, autonome;*
  b. *episoade corelate pe un plan sincronic;*
  c. *episoade derivate, pe un plan diacronic*.

2.4. Metodele metodicii predării matematicii

Metodica predării matematicii foloseşte ca metode un set caracteristic, preluat din matematică, pedagogie, didactică.

Metoda didactică este selecționată de profesor, fiind pusă în aplicare în lecții cu ajutorul elevilor; ea presupune întotdeauna o strânsă cooperare între elev şi profesor.

Metodele didactice sunt multiple. Ele îndeplinesc următoarele funcții:

- *funcția cognitivă* – cale de acces pentru elev la cunoaştere;
- *funcția formativ-educativă* – formează la elevi noi deprinderi intelectuale şi structuri cognitive, noi atitudini, capacități;
- *funcția instrumentală* – tehnică de execuție, mijlocind atingerea obiectivelor instructiv-educaționale;
- *funcția normativă* – arată cum să se predea şi să se învețe pentru a obține rezultate optime.

În învățământul modern se accentuează latura formativ-educativă a metodei, se extind metodele de căutare şi identificare a cunoştințelor, de autoinstrucție şi autoeducație permanentă. De asemenea, se recomandă o folosire pe scară largă a metodelor activ-participative şi a celor care solicită componentele relaționale ale activității didactice: profesor – elev, elev – elev.

Eficiența şi valoarea unei metode este condiționată de calitatea, alegerea corectă şi corelarea procedeelor din care este compusă.

Metodele pot fi clasificate după mai multe criterii:

I. din punct de vedere istoric:
   a. *tradiționale* (expunerea, conversația, exercițiul);
   b. *moderne* (algoritmizarea, problematizarea, instruire programată, brainstorming-ul).
II. din punct de vedere al extensivității sferei de aplicabilitate:
   a. *generale* - expunerea, conversația euristică, prelegerea;
   b. *particulare*.
III. prin modalitatea de prezentare:
   a. *verbale*;
   b. *intuitiv-senzoriale*.
IV. după gradul de angajare al elevilor:
   a. *active;*
   b. *pasive*.
V. după funcția didactică preponderentă:
   a. *predare şi comunicare;*
   b. *fixare şi consolidare;*
   c. *verificare şi evaluare*.
VI. din punctul de vedere al abordării problemelor:
   a. *algoritmice*, bazate pe secvențe operaționale, stabile;
   b. *euristice*, bazate pe descoperirea proprie şi rezolvarea de probleme.
VII. după organizarea muncii profesorului:
   a. *individuale;*
   b. *pe grupuri;*
   c. *frontale.*
VIII. din punctul de vedere al învățării (mecanică, prin receptare conştientă, prin descoperire):
   a. *metode bazate pe învățarea prin receptare* (expunerea, demonstrația cu caracter expoziv);
   b. *metode care aparțin preponderent descoperirii dirijate* (conversația euristică, observația dirijată, instruirea programată);

c. *metode de descoperire propriu-zisă* (observarea independentă, exercițiul euristic, descoperirea, rezolvarea de probleme, brainstorming-ul).

Prin metodele intuitiv-senzoriale, metodica predării matematicii se referă la prezentări de materiale didactice auxiliare: truse de corpuri geometrice, programe pe computer, planşe, chiar materialul construit de elev în anumite scopuri.

Dintre principalele metode folosite în activitatea de predare-învățare a matematicii enumerăm:

Expunerea constă în prezentarea de către profesor a unor cunoştințe noi, pe cale orală, în structuri bine închegate, în scopul transmiterii unui volum mare de informații într-o unitate de timp determinată. Ea cunoaşte mai multe variante: *povestirea*, *explicația*, *prelegerea*, *expunerea universitară*.

În cadrul predării matematicii în gimnaziu şi liceu, mai des întâlnite sunt explicația şi prelegerea, utilizate mai ales pentru prezentarea unor fragmente cu grad ridicat de dificultate şi pentru a face sistematizări.

Explicația foloseşte diferite operații logice mai complicate ca de exemplu inducția, deducția, comparația, sinteza, analiza, analogia, dar accentul cade pe receptare şi mai puțin pe interpretarea rezultatelor.

Prelegerea constă în expunerea de către profesor a unui volum mare de cunoştințe, bine organizate şi sistematizate, şi presupune o maturitate receptivă ridicată a elevilor. Este recomandată claselor mari.

Metoda expunerii didactice este o cale simplă, directă şi rapidă de transmitere a cunoştințelor, oferind elevilor cunoştințe de-a gata. Comunicarea profesor – elev este unidirecțională, iar feed-back-ul este slab. De aceea se recomandă apelarea la strategii euristice (descoperirea pe cont propriu a unor cunoştințe noi).

Conversația catihetică (examinatoare) are ca scop examinarea elevului pentru a stabili dacă sunt cunoscute anumite formule şi reguli. Trebuie să subliniem aici faptul că formulele matematice nu trebuie memorate ca „o poezie”, ci ele ajung să se rețină în urma folosirii lor repetate în rezolvarea de probleme.

Conversația euristică este o metodă de dialog, de descoperire dirijată, în care rolul profesorului este permanent, iar elevul este invitat să apeleze la propriile cunoştinţe, să facă o serie de conexiuni pentru a găsi alte aspecte ale cunoaşterii.

Întrebările formulate de către profesor trebuie să fie precise, univoce, variate, cu precădere de tip productiv (de ce?, cum?), ipotetice (dar dacă?), de evaluare (ce e mai bine?), divergente (orientează gândirea pe traiectorii diverse), convergente (analiza, sinteza, comparația). Se impune o graduare eşalonată a dificultăților, un timp bine dozat între întrebare şi răspuns, pentru a nu descuraja elevii. Răspunsurile oferite de aceştia vor fi atent analizate, insistând asupra corectitudinii formulării lor, a clarității de exprimare. În cazul găsirii de către elevi a unei metode corecte de rezolvare, dar mai anevoioasă (mai puțin directă), profesorul nu trebuie să refuze din start demonstrația; ea este acceptată inițial, discutată în paralel cu o variantă mai simplă (sau mai elegantă), subliniind avantajele celei din urmă şi, doar după aceea, eventual înlocuită cu varianta mai accesibilă tuturor elevilor.

La lecțiile de matematică, metoda este folosită în foarte multe situații: descoperirea unor enunțuri, demonstrații, soluții, exemple, etc.

Demonstrația didactică înseamnă a prezenta obiecte, procese, acțiuni în vederea inducerii teoretice la elevi a unor proprietăți, constante care constituie elemente fundamentale ale cunoaşterii. În cazul matematicii, se mai admite şi prezentarea unor obiecte matematice, construite anterior şi asimilate de elevi, sau a unor reprezentări intuitive ale acestora. Această metodă nu trebuie să fie confundată cu demonstrația matematică (deductivă, teoretică).

Matematica studiază relații de mare generalitate; predarea intuitivă este folositoare mărind accesibilitatea matematicii.

Pornind de la un suport material (natural, figurativ sau simbolic), prin demonstrație se construiesc reprezentări, constatări, interpretări. Ea are un caracter ilustratic, conducând la reproducerea unor acțiuni sau la asimilarea unor cunoştințe pe baza unor surse intuitive.

De exemplu, se pot folosi graficele funcțiilor elementare ca suport intuitiv pentru a descoperi şi demonstra proprietățile acestor funcții. De asemenea, în clasele a V-a şi a VI-a, geometria este predată mai mult figurativ, intuitiv. În clasa a VIII-a, la corpuri geometrice, se dezvoltă capacitatea de a vedea relațiile spațiale ale unei figuri geometrice folosind machete ale corpul respectiv, eventual în secțiune. Teoria mulțimilor recurge la schițe care uşurează înțelegerea şi, de multe ori, conduce la evitarea unor greşeli. Considerând două mulțimi finite A şi B (cu elementele precizate), putem realiza câte o schiță pentru produsele carteziene $A \times B$ şi $B \times A$. În acest fel, elevii pot observa mai uşor că produsul cartezian nu este comutativ.

Observația didactică constă în urmărirea atentă a unor obiecte, figuri (geometrice) şi fenomene de către elevi, fie sub îndrumarea profesorului (observație sistematică), fie în mod autonom (observație independentă). Observația are o valoare euristică şi participativă, deoarece ea se bazează pe receptivitatea elevilor, dezvoltând-o. Astfel, comparând, de exemplu, prisma cu cilindrul, folosind analogia şi deducția logică, se poate determina aria laterală a cilindrului circular drept prin produsul perimetrului bazei cu înălțimea, unde baza este acum un poligon (ca şi la prismă) însă, în urma generalizării, cu o infinitate de laturi.

Această metodă conduce şi la formarea unor calități comportamentale cum ar fi consecvența, răbdarea, perseverența, perspicacitatea, imaginația.

Exercițiul didactic reprezintă o modalitate de efectuare a unor operații şi acțiuni mintale (sau motrice), în mod conştient şi repetat, ce conduce la adâncirea înțelegerii noțiunilor, regulilor, principiilor învățate, la dezvoltarea operațiilor mintale şi constituirea lor în structuri operaționale, la prevenirea uitării şi la evitarea tendințelor de interferență (confuzie). Un exercițiu presupune un set de acțiuni ce se reiau relativ identic, având, în principiu, un caracter algoritmic.

Însuşirea cunoştințelor de matematică este strâns legată şi condiționată de rezolvarea de exerciții şi probleme. Această metodă formează gândirea productivă, dezvoltă raționamentul, oferă o anumită independență în activitatea elevului; acesta are posibilitatea să discute metode diferite de lucru, să o aleagă pe cea mai bună, să-şi analizeze greşelile.

Pentru aplicarea metodei exercițiului trebuie să fie îndeplinite mai multe condiții, ca de exemplu:

- enunțul este înțeles cu uşurință de către elevi, căci analiza enunțului este mai sumară decât la rezolvarea problemelor;
- cunoştințele folosite în rezolvare sunt accesibile;
- rezolvarea exercițiului nu trebuie să fie mecanică;
- se alege un set de exerciții asemănătoare, iar elementele noi vor fi introduse treptat;
- se asigură acuratețe şi precizie în rezolvare.

Exercițiul didactic poate fi clasificat după mai multe criterii. Astfel, după funcțiile îndeplinite, exercițiile pot fi: *introductive, de bază, de consolidare, operatorii, structurale*; după numărul de participanți, ele sunt: *individuale, de echipă, colective*; după gradul de intervenție al profesorului, întâlnim *exerciții dirijate, semidirijate, autodirijate, combinate*.

Metoda cazului se foloseşte atât în cunoaşterea inductivă (de la premise particulare se obțin concluzii generale: reguli, legi, principii) cât şi în cunoaşterea deductivă (prin particularizări şi concretizări ale unor aspecte generale). Prezentarea studiului de caz parcurge etapele: sesizarea sau descoperirea cazului, examinarea acestuia din mai multe perspective, selectarea celor mai potrivite metode pentru analiză, prelucrarea cazului respectiv din punct de vedere pedagogic şi stabilirea unor concluzii. Această metodă o putem folosi de exemplu, în a prezenta în mod inductiv anumite noțiuni.

Descoperirea didactică este o metodă de tip euristic cu rol formativ pentru că dezvoltă percepția, reprezentarea, memoria, gândirea, limbajul, interesele elevului. În funcție de relația profesor – elev, *descoperirea* poate fi *independentă* (profesorul supraveghează şi controlează procesul, dar elevul este actorul principal), şi *dirijată* (profesorul conduce descoperirea prin sugestii, puncte de sprijin, întrebări, soluții parțiale).

Ținând cont de relația ce se stabilește între cunoștințele anterioare și cele la care se ajunge, distingem, în funcție de operațiile cognitive predominante:

- *descoperirea inductivă*, prin trecerea de la particular la general. Astfel, pentru obținerea formulelor de calcul prescurtat (clasa a VII-a), se pornește de la exemple concrete de înmulțire, cerând elevilor ca la înmulțirea a două binoame cu aceiași termeni să compare termenii din paranteze cu cei ai produsului.

După câteva exemple, se poate găsi regula care va fi aplicată.

La fel, după ce s-a predat teorema lui Pitagora, putem propune elevilor să descopere modul de construcție al unui segment de lungime $\sqrt{n}$ unde n este număr natural nenul (eventual facem observația că se folosește acea teoremă).

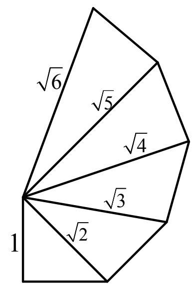


Fig. 2.1.

Pornind de la un triunghi dreptunghic isoscel cu catetele de lungime 1, obținem ipotenuza acestuia de lungime $\sqrt{2}$. Construind la fiecare pas k un nou triunghi dreptunghic în care o catetă este de lungime 1 iar cealaltă de lungime egală cu cea a ipotenuzei triunghiului dreptunghic de la pasul precedent, $\sqrt{k+1}$, vom obține, în $n-1$ pași, segmentul de lungime dorită (vezi Fig. 2.1.). Legat de această problemă, putem menționa un rezultat important: conform teoremei lui Lagrange, orice număr natural n se poate scrie ca sumă de 4 pătrate de numere întregi (uneori, în funcție de forma lui n, chiar mai puține). Astfel, rezultă că numărul de triunghiuri ce trebuie construite este cel mult 3.

Un alt exemplu interesant de descoperire inductivă poate fi considerat cel în care se cere elevilor să determine formula ariei unui poligon convex în plan cu vârfurile puncte laticeale (încercăm să reconstituim formula precizată în teorema lui Pick). Pentru aceasta definim punctul laticeal în plan ca fiind orice punct din plan ale cărui coordonate sunt numere întregi. Vom nota cu i numărul punctelor laticeale interioare poligonului şi cu f numărul celor aflate pe laturile poligonului (vezi figura 2.2.).

Studiind mai multe situaţii, putem obţine $S = i + \frac{f}{2} - 1$, formulă ce va fi demonstrată în cadrul exerciţiului 24 din capitolul 10.2.

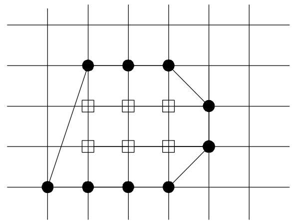


Fig. 2.2.

- *descoperirea deductivă*, prin trecere de la general la particular. În acest sens, pornind de la definiţia derivatei unei funcţii (clasa a XI-a), se pot obţine regulile de derivare ale funcţiilor elementare.
- *descoperire transductivă*, prin stabilirea de relaţii analogice între diferite serii de date. Astfel, la clasa a VIII-a, se descoperă regulile de calcul pentru operaţii cu fracţii algebrice cunoscând regulile de calcul pentru fracţiile aritmetice.

Aplicând această metodă, pentru a arăta veridicitatea unor teoreme, putem oferi demonstraţii de tip descoperire în loc de cele de tip verificare. În acest sens, în loc să pornim de la enunţul unei teoreme şi apoi să arătăm că ea este adevărată, începem prin a propune o problemă căreia i se caută o soluţie; soluţia găsită va conduce la formularea rezultatului conţinut în enunţul teoremei iniţiale.

Descoperirea presupune nu numai aflarea de către elev a unei demonstraţii, formularea unei teoreme sau generalizarea ei. Ea poate conduce şi la găsirea unui procedeu de lucru. De exemplu, putem propune elevilor să arate că $\sin x \le x$ atunci când $x \ge 0$, indicând studiul monotoniei unei funcţii convenabil alese. Unii elevi vor alege ca funcţie $f(x) = \sin x$, dar vor fi şi elevi care vor descoperi că alegerea corectă este $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = x - \sin x$. Deoarece, pentru orice x număr real, $g'(x) = 1 - \cos x \ge 0$, se va obţine $g(x) \ge g(0)$, pentru $x \ge 0$. În mod evident, profesorul va stabili în final concluzia generalizatoare, utilă în rezolvarea problemelor de acest tip.

Problematizarea (predare prin rezolvare de probleme) este una dintre cele mai utile metode datorită caracterului ei euristic, activizator şi puternic formator (cultivă autonomia); ea creează dificultăţi practice sau teoretice a căror rezolvare trebuie să fie rezultatul propriei activităţi de cercetare a elevului.

Situaţiile-problemă pot fi de mai multe tipuri:

- contradicţii între posibilităţile existente ale elevului şi cerinţele în care este pus de noua problemă;
- necesitatea selectării din cunoştinţele anterioare a celor care sunt folositoare;
- integrarea noţiunilor selectate într-un sistem, stabilirea ineficienţei sale operaţionale şi precizarea necesităţii completării acestuia.

Pentru utilizarea acestei metode, trebuie să fie îndeplinite mai multe condiţii: este necesar să existe la elevi un fond aperceptiv suficient; dozarea dificultăţilor se face în funcţie de o anumită gradaţie; se alege cel mai potrivit moment de plasare a problemei în lecţie; se manifestă un real interes pentru rezolvarea problemei.

Spre deosebire de metoda anterioară, unde elevul găseşte enunţul pe baza unor formulări sumare, incomplete, şi trebuie să justifice că enunţul este cel corect, în cazul problematizării, profesorul trebuie să prezinte enunţul complet şi, eventual, indicaţii de rezolvare. Misiunea profesorului este dificilă pentru că el trebuie să descopere, să genereze „situaţii-problemă" care să solicite gândirea elevilor, să clarifice datele, să regrupeze cunoştinţele deschizând căi de rezolvare a situaţiilor date.

În acest context, dacă ne gândim la predarea *operaţiilor cu funcţii derivabile*, derivata sumei a două funcţii derivabile rezultă imediat folosind conversaţia euristică. Pentru a stabili proprietăţi referitoare la derivarea produsului a două funcţii derivabile, putem folosi problematizarea sau descoperirea didactică. Astfel, profesorul utilizând metoda problematizării oferă enunţul proprietăţii şi cere demonstrarea acestuia, în timp ce, prin descoperire, se cere să se studieze derivata produsului furnizând (sau nu) informaţii vagi referitoare la termenul ce trebuie adunat şi scăzut.

Problematizarea nu trebuie să se confunde cu rezolvarea de probleme matematice. Se poate aplica pentru activități destinate asimilării enunțurilor şi pentru demonstrații.

Un exemplu interesant, care considerăm că trebuie menționat, este aplicarea metodei de problematizare în lecții pe bază de exerciții, cum ar fi lecția „*Despre cazurile exceptate la limite de funcții*”, în care se urmăreşte descoperirea şi însuşirea de către elevi a transformărilor care se pot aplica funcției de sub limită în cazul exceptat al „operațiilor” de tipul $\frac{0}{0}$. Pe scurt, momentele aplicării strategiei sunt:

- se reamintesc anumite limite remarcabile, cum ar fi:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1,\ \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1,\ \lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a,\ (a>0),$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^r-1}{x}=r,\ \text{pentru orice } r \text{ număr real;}$$

şi proprietatea conform căreia dacă P şi Q sunt două polinoame care au o rădăcină comună x_0, atunci fracția $\frac{P(x)}{Q(x)}$ se poate simplifica cu $x-x_0$;

- se rezolvă câteva exerciții de genul:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x^2-3x+2},\ \lim_{x\to 0}\frac{2tgx-\sin x}{x},\ \lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-e^x}{x},$$

precizând ca variante de abordare a acestora metoda simplificării prin $x-x_0$ sau folosirea unor limite tip, ca cele repetate anterior;

- elevii sunt antrenați în a rezolva „situații-problemă” ce constau în exerciții care, deşi sunt de tipul anterior, au fiecare elemente de noutate ce trebuie soluționate de către aceştia. De exemplu:

1. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^m-1}{x^n-1}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^{m-1}+...+x+1)}{(x-1)(x^{n-1}+...+x+1)}=\frac{m}{n}$, pentru $m,n\in\mathbb{N}^*$.

2. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x\sqrt{\cos 2x}}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x\cdot\cos 2x}{x^2(1+\cos x\sqrt{\cos 2x})}=$

$$= \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x(1-2\sin^2 x)}{x^2} = \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x(3-2\sin^2 x)}{x^2} = \frac{3}{2}.$$

3. $$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(n\arcsin x)}{\ln(1+x^2)} = \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(n\arcsin x)}{x^2}\cdot\frac{x^2}{\ln(1+x^2)} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(n\arcsin x)}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\left(\dfrac{n\arcsin x}{2}\right)}{x^2} =$$

$$= \lim_{y\to 0}\frac{2\sin^2\dfrac{ny}{2}}{\sin^2 y} = 2\left(\lim_{y\to 0}\frac{\sin\dfrac{ny}{2}}{\sin y}\right)^2 = \frac{n^2}{2} \text{ (punând } y = \arcsin x\text{).}$$

Modelarea didactică presupune existența unor modele care sunt sisteme simple, ce permit o descriere esențializată a unui ansamblu existențial, dificil de sesizat şi de cercetat în mod direct. Modelele pot fi: obiectuale (obiectele însele), iconice (mulaje, machete, scheme grafice care seamănă structural şi funcțional cu obiectul de studiat), simbolice (formalisme matematice, formule, scheme cinematice), bazate pe simboluri convenționale, având funcții ilustrative şi cognitive.

Modelarea presupune două etape de aplicare. Într-o primă etapă, învățarea se face folosind modele construite de profesori, se analizează trăsăturile modelului şi se compară cu originalul. Pentru a sublinia condițiile ce trebuie îndeplinite de model, se pot da contraexemple sau exemple de modele cu eficiență scăzută. În a doua etapă, elevul este învățat să-şi construiască singur modelul.

Insistând ca elevul să poată descoperi singur modelul, ne asigurăm că el poate matematiza anumite situații, îi dezvoltăm spiritul de observație, capacitatea de analiză, sinteză, creativitatea şi raționamentul. În clasele elementare sunt utile modelele obiectuale şi cele iconice.

Algoritmizarea este o metodă ce se bazează pe folosirea algoritmilor în actul de predare. Algoritmii sunt un grupaj de scheme procedurale, un set de operații standard, cu o succesiune aproximativ fixă de operații, prestabilită de profesor sau propusă de logica disciplinei, uneori putând fi construiți chiar de elevi. Prin utilizarea lor se pot rezolva probleme asemănătoare. Învățarea de tip algoritmic se poate îmbina cu învățarea euristică: în faza de început a învățării se recurge la algoritmi; prin repetare şi conştientizare se pot găsi soluții algoritmice alternative sau total noi, mai rafinate decât cele inițiale. Această metodă este apropiată de metoda exercițiului fiind folosită cu succes la lecțiile de formare a priceperilor şi deprinderilor sau de consolidare a acestora.

Instruirea programată cu manualul sau asistată de calculator se bazează pe parcurgerea unui algoritm prestabilit de învățare, alcătuit din alternări de secvențe informatice, cu momente rezolutive, cu seturi suplimentare de cunoştințe. Dimensionarea unei astfel de programe se face în conformitate cu următoarele principii:

- *principiul paşilor mici şi al progresului gradat* – se fragmentează dificultățile în unități gradate care să conducă, din aproape în aproape, la soluționarea integrală;
- *principiul participării active* – elevul rezolvă, răspunde, selectează întrebări, propune soluții în mod independent;
- *principiul verificării imediate a răspunsului* – soluțiile date de elev sunt confruntate cu cele valide, acesta neputând să treacă la secvențele următoare de învățare înainte ca răspunsurile să fie confirmate;
- *principiul respectării ritmului individual de studiu* – fiecare elev parcurge programul în funcție de posibilități;
- *principiul reuşitei* (*al răspunsurilor corecte*) – programa este astfel dimensionată încât elevul să fie capabil să o parcurgă integral şi satisfăcător.

Se poate concepe o programare *liniară* (de tip Crowder), în care fragmentarea dificultăților este mai amănunțită, sau *ramificată* (de tip Skinner), la care secvențele prezintă dificultăți mai mari şi elevul primeşte informații suplimentare, în cazul când nu poate depăşi o anumită etapă din prima încercare.

Brainstorming-ul (metoda *asaltului de idei*) este mai degrabă o metodă de stimulare a creativității, a imaginației, a spontaneității decât o metodă didactică. Caracteristica sa principală rezultă din separarea procesului de producere a ideilor de cel de evaluare a acestora: pe moment, este acceptată orice idee formulată de elevi; aceştia, ştiind că nu sunt notați imediat, sunt mai creativi. Metoda constă în: acumularea a cât mai multor soluții (corecte sau nu) propuse pentru rezolvarea unei probleme enunțate inițial prin antrenarea tuturor elevilor în acest proces; analiza acestora; selectarea variantei optime de soluționare a problemei.

2.5. Mijloace de învățământ

Mijloacele de învățământ sunt instrumente sau complexe instrumentale care facilitează transmiterea unor cunoştințe, formarea unor deprinderi, realizarea unei aplicații practice în cadrul procesului instructiv-educativ. Pe lângă funcția informativă (de transmitere de cunoştințe), ele au şi o funcție formativă, familiarizând elevii cu mânuirea, selectarea unor instrumente indispensabile pentru descrierea şi înțelegerea de noi aspecte ale realității.

Mijloacele de învățământ se pot grupa în două mari categorii:

- *ce cuprind mesaj didactic* (manuale, culegeri, modele, planşe, tabele cu formule, scheme structurale, seturi de teste);
- *care facilitează transmiterea mesajelor didactice* (computerul, internet).

Mijloacele de învățământ se dovedesc utile atâta timp cât sunt integrate organic în contextul lecțiilor; suplimentează explicațiile verbale, cărora le oferă mai mult suport vizibil, intuitiv; îi familiarizează pe elevi cu o realitate mai greu accesibilă pe cale directă; consolidează cunoştințe şi deprinderi; eficientizează folosirea timpului de instruire.

Profesorul poate folosi seturi tematice de exerciții, gradate după dificultate. La acestea se anexează seturi diferite ce cuprind indicațiile de rezolvare, răspunsurile sau chiar rezolvările complete ale exercițiilor inițiale, material la care elevul poate apela după caz.

În definirea noțiunilor (mai ales în cadrul analizei matematice), reprezentările intuitive se dovedesc deosebit de folositoare dacă sunt utilizate înainte de a da definiții formalizate.

În activitatea de predare, este recomandat ca profesorul să întrebuințeze anumite planşe care să faciliteze accesul la informație al elevului. Ele trebuie să fie corect realizate, să evidențieze esențialul şi să poată fi văzute din orice colț al clasei.

Spre exemplu, acestea pot conține, printre altele:

- grafice de funcții elementare;
- clasificarea şirurilor (din punctul de vedere al monotoniei, mărginirii, convergenței) folosind reprezentarea pe axă şi graficul, cu menționarea unor termeni ai şirurilor alese, poziția unor puncte de pe grafic şi definiția formalizată;
- grafice ale unor funcții cu ajutorul cărora se poate introduce noțiunea de continuitate (folosind planşa, elevii să poată preciza care funcții sunt continue într-un punct dat şi care nu, să determine punctele de discontinuitate ale unei funcții, să poată prelungi prin continuitate o funcție);
- interpretarea geometrică a derivatelor laterale;
- limite fundamentale de şiruri şi de funcții, derivate, primitive;
- aplicațiile integralelor definite;
- operații şi relații cu mulțimi;
- tipuri de ecuații algebrice;
- structuri algebrice;
- formule trigonometrice;
- corpuri geometrice;
- patrulatere, relații metrice, etc;

În ultima perioadă, computerele şi tehnica informațională au devenit un mijloc de învățământ foarte utilizat. Studiile pedagogice au dovedit eficiența materialelor de instruire interactive, multimedia, arătând că ele stimulează creativitatea şi facilitează învățarea prin exersare, descoperire, nu prin memorare.

Specialiştii companiei SIVECO România S.A., sprijiniți de pedagogi, psihologi şi metodişti cu experiență au dezvoltat un sistem complet de instruire asistată de calculator, *AeL Educational*. Această platformă de eLearning este un sistem integrat de predare, învățare şi gestiune a conținutului, bazat pe principii educaționale moderne. Ea oferă suport pentru predare şi învăţare, pentru testare şi evaluare, pentru administrarea conţinutului, monitorizarea procesului de învăţământ. În prezent, există implementări AeL în învăţământul preuniversitar, universitar şi la corporaţii, pentru nevoile de instruire internă. Sistemul poate fi utilizat de către toţi participanţii la actul educaţional (profesori, elevi, părinţi, realizatori de conţinut educaţional, etc.). Aceştia au astfel acces la materiale interactive de tip multimedia, ghiduri interactive, exerciţii, simulări, jocuri educaţionale. Dintre principalele caracteristici ale acestui sistem, menţionăm:

- profesorul poate controla şi monitoriza procesul educativ;
- sistemul poate fi folosit atât în activitatea dirijată cât şi în cea independentă, fiind un instrument complementar (nu alternativ) metodelor clasice de predare;
- în procesul de predare-învăţare, sunt integrate mijloace informatice moderne în acord cu noile principiile psiho-pedagogice;
- stimulează la elevi competiţia, creativitatea, lucrul în echipă.

În final, prezentăm câteva sugestii de proiectare, confecţionare şi utilizare a unor materiale didactice, în concordanţă cu obiectivele urmărite şi cu nivelul de achiziţii anterioare ale elevilor. Materialele prezentate pot fi realizate din hârtie. Exemplele de activităţi de învăţare şi sugestiile privind confecţionarea materialului didactic necesar sunt grupate în funcţie de obiectivele vizate.

A. Demonstrarea şi verificarea unor proprietăţi geometrice

Obiective vizate

- Formarea de abilităţi matematice, prin folosirea unui suport intuitiv uşor de manevrat şi uşor de procurat.

Exemplu: Cereţi elevilor să decupeze din hârtie sau din carton câte un triunghi ascuţitunghic, iar apoi să construiască înălţimile (respectiv bisectoarele, medianele) triunghiului doar prin îndoirea figurii din hârtie. Solicitaţi justificarea construcţiei făcute, apoi cereţi-le să formuleze observaţii în legătură cu figura formată.

- Verificarea practică a unor proprietăți la care s-a ajuns în urma unui raționament matematic.

Exemplu: Cereți elevilor să decupeze din hârtie sau din carton un pătrat, un paralelogram şi un romb. Solicitați verificarea următoarelor proprietăți, folosind îndoirea figurilor realizate:

- diagonalele pătratului sunt axe de simetrie;
- diagonalele pătratului sunt bisectoarele unghiurilor;
- paralelogramul are centru de simetrie;
- diagonalele rombului sunt axe de simetrie.

Exemple de probe de evaluare în care este utilizat materialul didactic:

Exemplul 1. (clasa a VI-a, semestrul al II-lea):

1. Prin îndoirea unei foi dreptunghiulare de hârtie, construiți un triunghi isoscel pe care îl notăm ABC ($AB = AC$).
2. Construiți bisectoarea AD a triunghiului, folosind doar îndoituri din hârtie. Justificați corectitudinea construcției.
3. Construiți linia mijlocie MN (cu $M \in AB$ şi $N \in AC$) a triunghiului folosind doar îndoituri ale figurii. Demonstrați corectitudinea construcției.
4. Verificați practic şi demonstrați că MN trece prin mijlocul bisectoarei AD.
5. Construiți înălțimea CE folosind îndoirea figurii din hârtie, apoi construiți linia mijlocie paralelă cu BA. Enunțați, verificați şi demonstrați o proprietate a acestor segmente.

Exemplul 2. (clasa a VII-a, semestrul I):

1. Considerăm că am decupat anterior două paralelograme. Descrieți modul în care obținem din acestea un romb, respectiv un trapez.
2. Folosind simboluri matematice, scrieți câteva proprietăți ale acestora.

3. Verificați aceste proprietăți folosind îndoituri ale figurii obținute şi descrieți în scris aceste verificări.

4. Construiți, folosind îndoituri ale hârtiei, linia mijlocie a trapezului. Măsurați linia mijlocie şi segmentul determinat de diagonalele trapezului pe aceasta. Comparați aceste lungimi cu suma, respectiv diferența bazelor trapezului. Stabiliți şi demonstrați formulele de calcul ale celor două segmente în funcție de lungimile bazelor.

5. Marcați un punct pe latura rombului. Folosiți îndoiri ale hârtiei pentru a construi simetricul acestui punct față de centrul rombului. Verificați practic, apoi demonstrați riguros că cele două puncte de pe laturi şi două dintre vârfurile opuse ale rombului formează un paralelogram.

Exemplul 3. (clasa a VII-a, semestrul I):

1. Dintr-o foaie de hârtie dreptunghiulară, decupați un triunghi dreptunghic isoscel. Argumentați în scris construcția făcută.

2. Construiți liniile mijlocii ale triunghiului, doar prin îndoirea hârtiei.

3. Precizați ce proprietăți au două dintre liniile mijlocii.

4. Verificați prin îndoirea figurii proprietatea: lungimea medianei corespunzătoare ipotenuzei este jumătate din lungimea ipotenuzei.

5. Ştim că aria unui pătrat este egală cu pătratul lungimii laturii pătratului. Verificați prin îndoirea triunghiului dreptunghic isoscel că aria acestuia este jumătate din pătratul lungimii unei catete.

B. Utilizarea unor construcții din hârtie în scopul ilustrării unor teoreme sau formule.

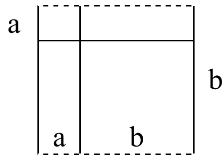
Obiective vizate:

- Interpretarea geometrică a unor formule algebrice.

Exemplu: Pentru a interpreta geometric formula

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$

decupați din carton două pătrate şi două dreptunghiuri şi aşezați-le pentru a forma un pătrat după cum urmează:



- Precizarea unor proprietăți prin observarea corpurilor geometrice.

Exemplul 1. Cereți elevilor să construiască din carton mai multe cuburi de laturi egale. Folosiți 8 astfel de cuburi pentru a forma un cub cu latura de două ori mai mare. Solicitați precizarea relației dintre latura cubului şi volum, înainte de actualizarea formulei de calcul a volumului.

Exemplul 2. Construiți din carton trei tetraedre ce formează prin asamblare o prismă triunghiulară. Comparați bazele şi înălțimile tetraedrelor, apoi cereți elevilor să găsească formula de calcul pentru volumul piramidei. *Considerăm că formula pentru volumul piramidei nu se poate înțelege fără un astfel de suport intuitiv.*

Exemplu de probă de evaluare (clasa a VI-a, semestrul al II-lea):

1. Decupați din carton 2 dreptunghiuri având dimensiunile 0,5 cm şi 1 cm, respectiv, 0,5 cm şi 0,25 cm, un pătrat cu latura de 0,5 cm şi două pătrate cu latura de 0,25 cm. Arătați că, prin alăturarea lor, se obține un pătrat.

2. Calculați ariile figurilor inițiale şi aria pătratului obținut. Folosind aceste rezultate, deduceți apoi egalitatea:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}=1-\frac{1}{16}.$$

3. Ce construcție asemănătoare ar trebui realizată pentru a calcula:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+...+\frac{1}{2^n}?$$

2.6. Finalitățile metodicii predării matematicii

Scopul educației vizează finalitatea unei acțiuni educaționale bine determinate. Putem identifica astfel scopul unei lecții, al unei teme, al unei laturi a educației.

Obiectivele educaționale se deduc din scopurile educației şi se referă la achiziții concrete, observabile în mod direct. Ele sunt redate în termeni de comportamente vizibile, măsurabile şi exprimabile.

Dacă la începutul oricărei activități didactice obiectivele nu sunt clar precizate, apar în mod sigur efecte negative ale procesului instructiv: dificultăți în activitatea de planificare şi proiectare a activității, neclaritate în privința evoluției dorite a elevilor.

Ținând cont de aceasta, este evident că obiectivele educaționale influențează toate componentele strategiei didactice, ele exercitând mai multe funcții:

- *de orientare axiologică*, prin scopul de a realiza o direcționare a elevilor către valorile educaționale dorite;
- *de anticipare a rezultatelor educației*;
- *evaluativă*, ținând cont că tehnicile de evaluare sunt determinate de obiectivele proiectate;
- *de organizare şi autoreglare a proceselor didactice*, obiectivele fiind criterii de referință în proiectarea, desfăşurarea, evaluarea proceselor educative.

Unii autori clasifică obiectivele în două mari grupe: obiective ale formării şi obiective ale învățării.

Obiectivele formării sunt scopuri de atins exprimate în termeni de cunoştințe, competențe şi atitudini indicate ca fiind necesare într-o situație dată. De exemplu, la nivelul învățământului primar şi secundar, dintre obiectivele ce trebuie realizate putem enumera: dezvoltarea competențelor de citire, scriere şi comunicare orală, stimularea dezvoltării gândirii logice, a capacităților de abstractizare şi generalizare, dezvoltarea capacităților creative în materie de activități cultural-artistice, etc.

Obiectivele de învățare se referă la diferite discipline de învățământ şi se exprimă în termeni de achiziții concrete în situații educative organizate. De exemplu, pentru matematică: elevii să construiască anumite figuri geometrice, să rezolve un sistem de ecuații liniare, etc.

Pentru a deveni funcționale, obiectivele au fost delimitate şi clasificate în mai multe grupe, după mai multe criterii, dintre care menționăm:

După domeniul la care se referă, obiectivele pot fi:

- *cognitive*, care precizează ce cunoştințe, deprinderi, capacități trebuie să-şi însuşească elevul;
- *afective*, care se referă la formarea de interese, atitudini, convingeri şi sentimente;
- *psihomotorii*, care desemnează comportamentele fizice (rapiditatea mişcărilor, dexteritate manuală).

Conform *taxonomiei* (ştiința legilor de clasificare) obiectivelor, realizată de *B. S. Bloom*, obiectivele cognitive se ordonează în funcție de gradul de complexitate al acestora, cuprinzând: cunoaşterea, înțelegerea, aplicarea, analiza, sinteza şi evaluarea. Taxonomia obiectivelor afective cuprinde următoarele etape: receptarea (participarea), răspunsul (reacția), aprecierea (evaluarea), organizarea, caracterizarea prin apreciere.

După nivelul de generalitate distingem obiective:

- *generale*, cu caracter global, care se referă la o anumită latură a educației. Ele cuprind de fapt, finalitățile şi scopurile corespunzătoare laturii educației vizate şi stau la baza realizării programelor de instruire (se stabilesc în ordine firească domeniile, cursurile, conținuturile ce trebuie asigurate) şi a scopurilor generale ce trebuie urmărite de către şcoală pe mai mulți ani (nivel elementar, secundar, etc.), în concordanță cu idealurile educaționale.
- *medii*, finalități referitoare la disciplinele şcolare (matematica, în cazul nostru), stabilite pe trepte de şcolaritate, adaptate la particularitățile de vârstă ale elevilor. Dacă la nivelul sistemului de învățământ se urmăreşte realizarea obiectivelor generale, la nivelul ciclului şi a tipului de şcoală se prevede realizarea obiectivelor medii (intermediare). Acest tip de obiective este precizat în programele şcolare şi evidențiază sensul în care este valorificat conținutul informațional

specific disciplinei, schimbările comportamentale (cognitive, afective, psihomotorii) ale elevilor.

- *particulare*, cele care vizează performanţe concrete şi sunt stabilite pentru fiecare materie de studiu pornind de la programa şcolară şi manual. Aceste obiective au un caracter concret şi se finalizează în comportamente măsurabile.

Din punctul de vedere al rezultatului aşteptat, întâlnim:

- obiective centrate pe performanţă;
- obiective centrate pe capacităţi şi atitudini.

Pornind de la scopurile metodicii predării matematice trebuie urmărite atât rezultatele proiectate, anticipate conştient cât şi rezultatele obţinute de fapt.

Prin *operaţionalizarea obiectivelor* înţelegem identificarea sarcinilor educative şi explicitarea lor verbală. Astfel, se transpun obiectivele generale în obiective particulare, precizând comportamentele cognitive, afective, psihomotorii, urmărite în desfăşurarea procesului didactic.

Obiectivele operaţionale permit realizarea strategiilor şi tacticilor instruirii, în cadrul fiecărei lecţii, oferind o imagine concretă a ceea ce trebuie evaluat.

Pentru a exprima un obiectiv este suficient să răspundem la întrebările următoare:

- cine va realiza comportamentul dorit? (elevul, clasa)
- ce comportament observabil va dovedi că obiectivul este atins? (...trebuie să rezolve/să dea exemple/să calculeze/să aplice formula/să motiveze...)
- care este performanţa finală ce trebuie obţinută? (...soluţia finală a problemei/exerciţiului,..)
- în ce condiţii/unde/când va avea loc comportamentul vizat? (aplicarea unui algoritm, rezolvare după model, studiu individual/la şcoală, acasă/ la sfârşitul, în cadrul orei...)

- pe baza căror criterii stabilim dacă rezultatul activității este satisfăcător? (...numărul minim de răspunsuri corecte, calitatea rezolvărilor, timpul minim de lucru,...).

Astfel, în procesul de dimensionare şi formulare a obiectivelor trebuie să se țină cont de o multitudine de condiții. Dintre acestea enumerăm:

- obiectivul vizează activitatea elevilor, nu a profesorului;
- obiectivul trebuie să fie în principiu realizabil, să corespundă particularităților de vârstă, experienței anterioare a elevilor;
- obiectivul operațional desemnează un rezultat imediat al instruirii, nu unul de perspectivă;
- în obiectiv se vor enunța atât condițiile de realizare a sarcinilor, cât şi criteriul performanței, al realizării acestora;
- fiecare obiectiv va viza o singură operație, şi nu un comportament compus, greu de analizat sau de evaluat.

Operaționalizarea poate fi realizată prin indicarea reuşitei sau a prestației minimale. Aceasta vizează limita temporală – durata până la care apare comportamentul menționat de obiectiv, limita numerică – numărul minim de conduite preconizate; limita de exactitate – gradul de exactitate a efectuării unei operații, a unei estimări.

În formularea obiectivelor apar deseori greşeli. Dintre acestea, putem menționa cîteva, mai frecvent întâlnite:

- confundarea obiectivelor cu programa, cu temele care trebuie însuşite;
- confundarea obiectivului cu ceea ce are intenția să facă profesorul, nevizând activitatea elevului;
- includerea a mai mult de un obiectiv în formularea rezultatului unei învățări, ceea ce devine greu de evaluat.

Pentru a identifica obiectivele operaționale trebuie parcurse mai multe etape:

1. *Formularea obiectivelor folosind verbe ce descriu comportamente ce pot fi măsurate, evaluate*, cum ar fi:

a. *de cunoaştere* – să recunoască, să observe, să găsească, să identifice;

b. *de înțelegere* – să exprime în cuvinte proprii, să diferențieze, să explice;
c. *de aplicare* – să aplice, să clasifice, să compare, să identifice, să utilizeze;
d. *de analiză* – să observe, să descompună, să clasifice, să compare;
e. *de sinteză* – să compună, să grupeze, să deducă, să construiască;
f. *de evaluare* – să aprecieze, să compare, să aleagă, să motiveze, să argumenteze.

2. *Alegerea modului corect de utilizare a materialului didactic în realizarea sarcinilor didactice de către elevi.*

3. *Evaluarea comportamentului, deprinderilor, priceperilor şi abilităților matematice* care indică profesorului nivelul achizițiilor învățării şi oferă totodată informații asupra realizării obiectivelor propuse.

Obiectivele operaționale ale activităților matematice se clasifică de cele mai multe ori în:

- *obiective de învățare* (cognitive), care se referă la cunoştințe cu caracter matematic;
- *obiective de transfer* (formative), care privesc capacitatea de a utiliza cunoştințele asimilate în situații noi sau similare;
- *obiective de verbalizare* (de exprimare), care se raportează la capacitatea de a comunica şi motiva acțiunile care trebuie efectuate folosind un limbaj matematic.

Reforma curriculară din învățământ este prezentată în capitolul următor. Restructurarea sistemului de învățământ pe cicluri curriculare şi gruparea unor obiecte de studiu pe arii curriculare au condus la redefinirea finalităților educației, într-un mod total diferit de cel clasic.

Finalitățile sunt prezentate *pe niveluri de şcolaritate* (primar, gimnazial şi liceal) şi reprezintă sistemul de referință pentru elaborarea programelor şcolare şi pentru orientarea demersului didactic la clasă.

Distingem astfel:

Obiectivele-cadru, cu un înalt grad de generalitate, a căror atingere este un proces complex, de lungă durată (pe mai mulți ani de studiu). Ele au o structură comună pentru toate disciplinele ce aparțin unei arii curriculare şi asigură coerența în cadrul acesteia.

Obiectivele de referință descriu performanța optimală ce trebuie formată la elevi până la sfârşitul unui an de studiu şi urmăresc progresul în formarea şi achiziționarea cunoştințelor elevului de la un an de studiu la altul. Din acest tip de obiective, la fiecare lecție se stabilesc obiectivele operaționale.

Alături de obiective, în calitate de finalități, sunt explicitate şi alte rezultate ale învățării, definite drept ***competențe***. Acestea reprezintă un nou sistem de referință pentru stabilirea finalităților la nivelul ciclului liceal.

Competențele reprezintă ansambluri structurate de cunoştințe şi deprinderi dobândite prin învățare. Ele sunt de două feluri: competențe generale şi specifice.

Competențele generale, cu grad ridicat de generalitate şi complexitate, se definesc la nivelul unei discipline de studiu şi se formează pe durata unui ciclu de învățământ.

Competențe specifice se definesc pe un obiect de studiu şi se formează pe parcursul unui an şcolar, derivând din competențele generale. Competențelor specifice li se asociază prin programă unități de conținut.

Finalitățile pe cicluri curriculare vor fi prezentate în capitolul următor.

2.7. Formarea profesorilor

Procesul de formare a cadrelor didactice din România cuprinde două etape:

Pregătirea inițială este realizată pe parcursul studiilor universitare. Se urmăreşte ca, prin activități teoretice şi practice specifice, viitorul cadru didactic să fie introdus în sfera profesională pentru care se formează.

Spre deosebire de sistemul superior de pregătire a profesorilor din străinătate, în România încă nu s-a realizat o separare evidentă a traseului formativ cu orientare didactică (profesor de matematică) de cel cu finalitate ştiințifică (cercetare în Institute de Cercetare de Matematică, în industrie, domeniul bancar, firme şi instituții (SRI)). Pentru cei care într-adevăr ar dori să opteze pentru cariera didactică (şi trebuie să recunoaştem că sunt din ce în ce mai puțini) ar fi necesară absolvirea unui test de aptitudini iar dimensionarea disciplinelor specifice, a celor cu pondere ridicată în pregătirea lor didactică, să fie mult crescută. Bineînțeles că latura ştiințifică nu trebuie înlăturată, dar ea trebuie adaptată corespunzător, prin cât mai multe exerciții de didactizare, la necesitățile cu care se va confrunta absolventul în profesorat: la „ceea ce se predă acum în şcoală la matematică" şi „cum se predă în matematică". Astfel, aceşti absolvenți vor fi adaptați la situația actuală a învățământului preuniversitar, vor putea fi pregătiți să facă față diverselor situații cu care sunt confruntați imediat, îşi vor putea construi singuri programe, suporturi curriculare. Din păcate, pregătirea pedagogică este facultativă; ea este privită de cele mai multe ori ca fiind calea de ales în ultimă instanță (să fiu orice, numai profesor nu).

De multe ori apar situații care pot părea paradoxale: studentul cel mai bun nu este neapărat necesar să devină un foarte bun profesor; aceasta se întâmplă deoarece, pentru profesor, nu doar pregătirea de specialitate contează, ci şi cea psihopedagogică, de relaționare şi formatoare.

Pregătirea inițială, în cadrul universitar, a viitorilor dascăli este realizată prin intermediul Departamentului pentru Pregătirea Personalului Didactic (DPPD) care coordonează activitățile privind conținutul şi metodologia specifică fiecărei profesii de cadru didactic, implementează soluții de modernizare a învățământului şi de sprijinire a reformei acestuia.

O deosebită importanță în formarea inițială o deține practica pedagogică. Aceasta se desfăşoară pe grupe de aproximativ 10 studenți în unități din învățământul preuniversitar, având ca mentori profesori de specialitate desemnați de Inspectoratele Şcolare.

Practica pedagogică cuprinde:

- activități de cunoaştere generală a şcolii (profil, clase, laboratoare, cabinete de specialitate, activitatea comisiilor metodice, a comisiei diriginților, activități cultural-educative);
- activități instructiv-educative de observație, de simulare şi de analiză desfăşurate în clase, cabinete (asistență la lecții de tipuri diferite, la activități de dirigenție, şedințe cu părinții, activități ale comisiei metodice);
- activități instructiv-educative practice, de probă şi finale, efectuate de studenți (studierea manualelor şcolare, a planificărilor cadrelor didactice, confecționarea de material didactic, elaborarea de proiecte didactice, susținerea unui număr precizat de lecții de probă şi finale, studierea şi caracterizarea psihopedagogică a unui elev);
- activități extraşcolare (la solicitarea profesorului îndrumător).

De foarte multe ori, practicanții doresc să-şi desfăşoare orele de practică pedagogică sub îndrumarea foştilor lor profesori. Acest fapt arată cât de puternică este înrâurirea unui adevărat profesor asupra celui care se formează sub ochii lui. În acest sens, considerăm că adevăratul profesor de matematică este cel care, în afară de activitatea ireproşabilă desfăşurată la clasă, a îndrumat primii paşi ai unui tânăr absolvent în profesiune, în cercetare, şi-a format un discipol care poate să-l depăşească din punct de vedere profesional.

Pregătirea continuă se realizează prin perfecționare în timpul profesării. Ea constă în activități de formare care presupun actualizarea, completarea, specializarea de ordin teoretic, metodic, practic. Formarea continuă poate fi în prelungirea celei inițiale sau complementară acesteia.

Astfel, spre deosebire de unele idei avansate, nu este necesar ca profesiunea dobândită sau aleasă (în mod voit sau nu) la un moment dat să fie exact cea pentru care s-a optat în cadrul pregătirii iniţiale. Pentru aceste situaţii există, în domeniul pregătirii continue, cursuri de reconversie sau alte variante de perfecţionare în profesia desfăşurată la momentul respectiv.

DPPD este cel care organizează activităţi de perfecţionare a pregătirii de specialitate, psihopedagogice, şi metodice a cadrelor didactice din învăţământul preuniversitar (examene de definitivat, gradul II şi gradul I) şi furnizează îndrumătoare didactice, publicaţii şi consultanţă în domeniu.

Din direcţiile propuse pentru o îmbunătăţire a pregătirii continue putem menţiona:

- formarea profesorilor bi- şi tri-disciplinari, care pot preda pachete de discipline (de exemplu, Ştiinţe) pentru a uşura perspectiva interdisciplinară a procesului de învăţământ cât şi soluţionarea anumitor probleme administrative (se pot realiza norme compacte în aceeaşi unitate de învăţământ);
- descentralizarea structurii disciplinelor şi a programelor corespunzătoare din procesul de formare continuă şi organizarea lor modulară pentru a oferi fiecărui profesor posibilitatea alegerii segmentelor modulare care îi folosesc efectiv în situaţia profesională.

CAPITOLUL III

Teoria şi metodologia curriculumului

3.1. Conceptul de curriculum

Conceptul de ***curriculum*** reprezintă un concept de bază atât pentru didactică cât şi pentru teoria educaţiei. El provine din cuvântul latinesc „*curriculum*” care înseamnă „*drum*”, „*alergare*”, „*cursă*”.

Primele menţionări ale acestui termen sunt consemnate în documentele universităţilor din Leiden (1582) şi Glasgow (1633).

În prezent, la noi, termenul desemnează conţinutul activităţilor instructiv-educative, în strânsă interdependenţă cu obiectivele educaţionale, activităţile de învăţare, metodele didactice, mijloacele de învăţământ, formele de realizare a activităţilor, etc. De fapt, din multitudinea de definiţii date acestui concept, am putea păstra două accepţiuni: în sens restrâns – curriculumul ar reprezenta conţinutul învăţământului; în sens larg – el se referă la întregul program educativ, cu interrelaţiile dintre obiectivele şi modalităţile de realizare şi evaluare ale acestuia.

În acest capitol, vom folosi şi alte noţiuni specifice a căror definire este prezentată în continuare.

Conţinutul curricular semnifică orice subiect de studiu, material educaţional, situaţie sau experienţă care poate ajuta la dezvoltarea aptitudinilor cognitive şi afective.

Faptul curricular reuneşte totalitatea actelor educatorului sau educatului cu impact în situaţii specifice de învăţare, orientate către reorganizarea experienţei acestuia din urmă.

Ciclurile curriculare reprezintă perioade de şcolaritate pe mai mulţi ani de studiu (se pot grupa ani de studiu care aparţin uneori de niveluri de şcolaritate diferite), care au în comun anumite finalităţi specifice. Ele se suprapun peste structura formală a sistemului de învăţământ pentru a focaliza obiectivul major al fiecărei etape şcolare şi de a regla procesul de învăţământ prin intervenţii de natură curriculară.

Aria curriculară reprezintă o grupare de discipline şcolare cu anumite obiective şi metodologii comune, oferind o viziune interdisciplinară asupra obiectelor de studiu.

Cele şapte arii curriculare, stabilite pe baza unor criterii psihopedagogice şi epistemiologice sunt: „*Limbă şi comunicare*”, „*Matematică şi ştiinţe ale naturii*”, „*Om şi societate*”, „*Arte*”, „*Educaţie fizică şi sport*”, „*Tehnologii*”, „*Consiliere şi orientare*”. Ele rămân aceleaşi pe întreaga durată a şcolarităţii obligatorii şi a liceului, doar ponderea lor fiind variabilă în cadrul ciclurilor curriculare şi de-a lungul anilor de studiu.

În educaţia formală şi nonformală, toate persoanele experimentează mai multe forme de curriculum. Dintre aceste tipuri, le vom menţiona pe cele mai des întâlnite.

Curriculumul general (***core-curriculum***, ***curriculum de bază, curriculum comun, trunchi comun de cultură generală***) se referă la obiectivele generale ale educaţiei şi la conţinuturile educaţiei generale (sistemul de cunoştinţe, abilităţi intelectuale şi practice, strategii, comportamente), obligatorii pentru toţi cei educaţi pe parcursul primelor stadii ale şcolarităţii.

Curriculumul de profil şi specializat – se referă la formarea şi dezvoltarea comportamentelor, competenţelor, abilităţilor şi strategiilor specifice anumitor domenii de cunoaştere, care îşi găsesc corespondent în diferite profiluri de studii (ştiinţe exacte, ştiinţe umaniste, muzică, arte plastice, sport).

Curriculumul formal (***oficial***) cuprinde toate documentele şcolare oficiale (documente de politică a educaţiei, documente de politică şcolară, planuri de învăţământ, programe şcolare, manuale, ghiduri, îndrumătoare, materiale metodice, instrumente de evaluare), care stau la baza proiectării activităţii instructiv-educative la toate nivelurile sistemului şi procesului de învăţământ.

Curriculumul neformal se referă la obiectivele şi conţinuturile activităţilor instructiv-educative neformale, care au caracter opţional, sunt complementare şcolii, structurate şi organizate într-un cadru instituţionalizat extraşcolar (cluburi, tabere, case ale elevilor, asociaţii artistice).

Curriculumul informal este asociat cu educaţia de tip informal şi reuneşte ansamblul de experienţe de învăţare şi dezvoltare rezultate din interacţiunea elevului cu mass-media, instituţii culturale, religioase, organizaţii ale comunităţiilor locale, familie, grup de prieteni.

Curriculumul recomandat reprezintă ghidul general al cadrelor didactice, recomandat de experţi în educaţie sau de autorităţi guvernamentale.

Curriculumul predat cuprinde ansamblul experienţelor de învăţare şi dezvoltare oferite elevilor de către profesori pe parcursul activităţilor didactice.

Curriculumul suport reuneşte toate materialele curriculare auxiliare.

Curriculumul învăţat constă în tot ceea ce elevii au acumulat în urma participării lor la procesul instructiv-educativ.

Curriculumul local include oferte de obiective şi conţinuturi ale activităţilor instructiv-educative propuse de către inspectoratele şcolare (se aplică la nivel teritorial) sau chiar de către unităţile de învăţământ, în funcţie de necesităţile proprii.

3.2. Ideal educaţional şi finalităţile sistemului românesc de învăţământ

Idealul educativ este o instanţă valorică din care rezultă norme, principii, strategii, scopuri şi obiective determinate, care direcţionează procesul de formare a tinerei generaţii. El trebuie să se caracterizeze prin trei dimensiuni:

- *dimensiunea socială* – să corespundă unor cerinţe sociale;
- *dimensiunea psihologică* – să răspundă nevoilor şi posibilităţilor indivizilor;

- *dimensiunea pedagogică* – să permită o transpunere practică în plan instructiv-educativ.

Pentru a fixa un ideal educațional trebuie să se țină cont de esența societății, de modelul dezvoltării ideale a personalității, de valorile fundamentale ale lumii contemporane (democrație, umanism, civism, toleranță, respectarea drepturilor omului), de tradițiile culturale.

În acest sens, idealul educațional şi finalitățile sistemului românesc de învățământ reprezintă un sistem de referință în elaborarea ***Curriculumului Național***.

Astfel, în articolul 3 al Legii Învățământului se specifică faptul că „Învățământul urmăreşte realizarea idealului educațional întemeiat pe tradiții umaniste, pe valorile democrației şi pe aspirațiile societății româneşti şi contribuie la păstrarea identității naționale. Idealul educațional al şcolii româneşti constă în dezvoltarea liberă, integrală şi armonioasă a individualității umane, în formarea personalității autonome şi creative.” Articolul 4 al aceleiaşi legi stabileşte ca finalitate a învățământului, formarea personalității umane prin:

1) Însuşirea cunoştințelor ştiințifice, a valorilor culturii naționale şi universale;

2) Formarea capacităților intelectuale, a disponibilităților afective, a abilităților practice prin asimilarea de cunoştințe umaniste, ştiințifice, tehnice şi estetice;

3) Asimilarea tehnicilor de muncă intelectuală necesare instruirii şi autoinstruirii pe durata întregii vieți;

4) Educarea în spiritul respectării drepturilor şi libertăților fundamentale ale omului, al demnității şi al toleranței, al schimbului liber de opinii;

5) Cultivarea sensibilității față de problematica umană, față de valorile moral-civice, a respectului pentru natură, mediul înconjurător;

6) Dezvoltarea armonioasă a individului prin educație fizică, educație igienico-sanitară şi practicarea sportului;

7) Profesionalizarea tinerei generații pentru desfăşurarea unor activități utile, producătoare de bunuri materiale şi spirituale;

8) Învățământul asigură cultivarea dragostei față de țară, față de trecutul istoric şi de tradițiile poporului român;

9) Finalitățile școlii românești se realizează prin strategii și tehnici moderne de instruire și educare, susținute de științele educației și practica școlară, conform obiectivelor fiecărui nivel de învățare.

În concluzie, scopul educației vizează finalitatea unei acțiuni educaționale bine determinate. Putem identifica astfel scopul unei lecții, al unei teme, al unei laturi a educației. El trebuie să fie mereu într-o relație de continuitate și de adecvare cu idealul educațional.

3.3. Planul-cadru de învățământ

Planul-cadru de învățământ reprezintă *documentul reglator esențial* care jalonează resursele de timp ale procesului de predare-învățare. El oferă o soluție de optimizare a bugetului de timp: pe lângă activitățile comune tuturor elevilor din țară, care *asigură egalitatea de șanse ale acestora*, este prevăzută activitarea pe grupuri/clase de elevi în scopul *diferențierii parcursului școlar* în funcție de interesele, nevoile și aptitudinile elevilor.

Planul-cadru stă la baza unui nou ***Curriculum Național***, care propune o anumită articulare a obiectivelor educaționale, a conținuturilor învățării, a metodelor de predare, învățare și evaluare într-o manieră semidescentralizată. Astfel, Curriculumul Național este defalcat în: curriculum nucleu și curriculum la decizia școlii.

Trunchiul comun reprezintă numărul de ore care trebuie parcurse în mod obligatoriu de către toți elevii unei clase, pentru o anumită disciplină și este alocat prin planurile-cadru de învățământ. Expresia curriculară a trunchiului comun, ***curriculumul-nucleu,*** cuprinde elementele esențiale pentru orientarea învățării la o anumită disciplină. Acest curriculum este singurul sistem de referință pentru diferitele tipuri de evaluări și examinări naționale din sistem și pentru elaborarea standardelor curriculare de performanță.

Curriculumul la decizia școlii reprezintă ansamblul proceselor educative și al experiențelor de învățare pe care fiecare școală le propune în mod direct elevilor săi în cadrul ofertei curriculare proprii.

O structură diferențiată pe filiere, profiluri și specializări, precum și existența mai multor planuri-cadru de învățământ conduc la *modelarea unor licee cu personalitate proprie*, având o ofertă specifică pe piața educațională, spre deosebire de învățământul general, uniform în structură şi relativ omogen în ofertă. Astfel, la liceu, planurile-cadru sunt structurate pe trei componente: trunchi comun (TC), curriculum diferențiat (CD) şi curriculum la decizia şcolii (CDS), la filierele teoretică şi vocațională, respectiv curriculum de dezvoltare locală (CDL), la filiera tehnologică, în ciclul superior al liceului. Pentru a exemplifica, prezentăm în Anexa 1, în comparație, planul cadru pentru clasele a XI-a atât la profilul real, specializarea matematică-informatică cât şi la profilul umanist, specializarea filologie conform Anexei 2 la Ordinul Ministerului Educației şi Cercetării nr. 5718/22.12.2005. În general, curriculumul-nucleu reprezintă aproximativ 70% din Curriculumul Național, restul de aproximativ 30% fiind rezervat curriculumului la decizia şcolii.

Noul plan-cadru de învățămînt este elaborat pe baza unui *sistem de principii generale* ce urmăreşte formarea unei noi culturi curriculare:

- ***principiul egalității şanselor***, fiecare persoană având astfel dreptul la educația comună, realizată în cadrul învățământului obligatoriu, prin parcurgerea trunchiului comun. Aplicarea acestui principiu presupune: obligativitatea învățământului general, accesul elevilor la „nucleul" fiecărei componente a parcursului şcolar, asigurarea unui nivel optim acceptabil de cunoştințe şi capacități.

- ***principiul descongestionării***, care propune selectarea şi esențializarea conținuturilor programelor şcolare şi diminuarea supraîncărcării informaționale.

- ***principiul descentralizării şi al flexibilității curriculumului***, care se referă la îmbinarea curriculumului-nucleu cu curriculumul la decizia şcolii. Variabilitatea numărului total de ore între un minim şi un maxim alocat prin planurile-cadru ca şi plaja orară de la nivelul fiecărui obiect de studiu oferă elevilor posibilitatea opțiunii pentru un anumit domeniu de interes, profesorilor flexibilitate în alegerea unui demers didactic mai bine adaptat posibilităților unei clase, iar managerilor de şcoli, organizarea unei activități didactice corelate cu resursele umane şi baza materială de care dispune şcoala.

- ***principiul selecției şi ierarhizării culturale***, care stabileşte împărțirea disciplinelor de învățământ în arii curiculare. Dintre avantajele oferite de organizarea planului de învățământ pe arii curriculare menționăm: posibilitatea integrării demersului mono-disciplinar actual într-un cadru interdisciplinar, concordanța cu teoriile actuale privind procesul, stilul, ritmurile învățării.

- ***principiul funcționalității*** presupune că disciplinele de studiu, respectiv ariile curriculare sunt adaptate particularităților de vârstă ale elevilor, procesul de învățare fiind structurat pe cicluri curriculare.

Ciclurile curriculare cuprinse în Curriculumul Național sunt:
- *ciclul achizițiilor* (grădiniță – clasa a II-a),
- *ciclul de dezvoltare* (clasa a III-a – clasa a VI-a),
- *ciclul de observare şi orientare* (clasa a VII-a – clasa a IX-a),
- *ciclul de aprofundare* (clasa a X-a – clasa a XI-a),
- *ciclul de specializare* (clasa a XII-a).

- ***principiul coerenței*** se referă la asigurarea echilibrului optim între ariile curriculare şi disciplinele de studiu, atât în plan orizontal cât şi vertical.

- ***principiul racordării la social*** subliniază necesitatea asigurării unei legături optime între instituția de învățământ şi cerințele societății. Astfel, gimnaziul oferă orientarea către liceul teoretic, tehnologic, vocațional sau şcoala profesională, iar liceul către pregătirea universitară, postliceală sau piața muncii.

3.4. Finalități pe cicluri curriculare

Fiecare ciclu curricular oferă un set de *obiective* de învățare care consemnează ceea ce ar trebui să dobândească elevii la sfârşitul unei etape şcolare. Prin aceste obiective, ciclurile curriculare conferă diferitelor etape ale şcolarității o serie de *dominante* care se reflectă în alcătuirea programelor şcolare.

Introducerea ciclurilor curriculare urmăreşte: crearea continuității la trecerea de la o treaptă de şcolaritate la alta prin transferul de metode şi prin stabilirea de conexiuni explicite la nivelul curriculumului; crearea premiselor necesare pentru extinderea şcolarităţii obligatorii către vârstele de 6 şi 16 ani; construirea unei structuri a sistemului de învăţământ mai bine corelate cu vârstele psihologice.

Ciclul curricular al achiziţiilor fundamentale (grădiniţă-grupa pregătitoare, unde există – clasele I şi a II-a) are ca obiective majore *acomodarea la cerinţele sistemului şcolar şi alfabetizarea iniţială*. Se vizează:

- asimilarea elementelor de bază ale principalelor limbaje convenţionale: scris, citit, calcul aritmetic;
- stimularea copilului în vederea perceperii, cunoaşterii şi stăpânirii mediului apropiat;
- stimularea potenţialului creativ al copilului, a intuiţiei şi a imaginaţiei acestuia;
- formarea motivării pentru învăţare, înţeleasă ca activitate socială.

Ciclul curricular de dezvoltare (clasele a III-a - a VI-a) are ca scop principal *formarea capacităţilor de bază necesare pentru continuarea studiilor*. Se urmăreşte, printre altele:

- dezvoltarea achiziţiilor lingvistice şi încurajarea folosirii limbii române, a limbii materne, a limbilor străine pentru exprimarea în situaţii variate de comunicare;
- dezvoltarea unei gândiri structurate şi a competenţei de a aplica în practică rezolvarea de probleme;
- familiarizarea cu o abordare pluridisciplinară a domeniilor cunoaşterii, etc.

Ciclul curricular de observare şi orientare (a VII-a - a IX-a) urmăreşte în special *orientarea în vederea optimizării opţiunii şcolare şi profesionale ulterioare*. El vizează:

- descoperirea de către elev a propriilor afinităţi, aspiraţii şi valori în scopul construirii unei imagini de sine pozitive;
- formarea capacităţii de analiză a setului de competenţe dobândite prin învăţare în scopul orientării spre o anumită carieră profesională;
- dezvoltarea capacităţii de a comunica, inclusiv prin folosirea diferitelor limbaje specializate;

- dezvoltarea gândirii autonome şi a responsabilității față de integrarea în mediul social.

Ciclul curricular de aprofundare (clasele a X-a şi a XI-a) are ca obiectiv principal *adâncirea studiului în profilul şi specializarea aleasă*, asigurând, în acelaşi timp, o pregătire generală pe baza opțiunilor din celelalte arii curriculare.

Ciclul curricular de specializare (clasa a XII-a) are ca scop major *pregătirea în vederea integrării eficiente în învățământul universitar de profil sau pe piața muncii.*

Un alt concept ce aminteşte de finalitatea sistemului de învățământ este cel de *profil de formare a absolventului de învățământ obligatoriu*.

Profilul de formare se fundamentează pe cerințele sociale exprimate în legi şi în alte documente de politică educațională (aplicarea noului curriculum), precum şi pe cerințele psihopedagogice ale elevilor din învățământul obligatoriu.

Capacitățile şi atitudinile vizate de profilul de formare au caracter transdisciplinar. Prezentăm în continuare unele dintre acestea şi exemplificăm activități pe care profesorul de matematică le poate desfăşura, contribuind la conturarea lor:

- ***să demonstreze gândire creativă***, prin: găsirea unor strategii alternative de rezolvare a problemelor, crearea de exerciții şi probleme folosind tehnici diverse, generalizări matematice;
- ***să folosească diverse modalități de comunicare în situații reale şi contexte diferite***, prin folosirea unei terminologii corecte, exprimarea soluțiilor sau a datelor unor probleme în limbaj cotidian, transpunerea unei situații cotidiene în limbaj matematic, expunerea argumentativă a demersului rezolutiv, integrarea limbajului matematic în sistemul universal de comunicare;
- ***să înțeleagă şi să utilizeze tehnologiile în mod adecvat*****,** prin: utilizarea instrumentelor de măsură standard pentru a măsura lungimea, aria, volumul, masa, etc., exersarea capacității de a estima diferite mărimi, folosirea unor teorii, principii, modele matematice pentru

a descrie anumite fenomene naturale şi a înțelege modul de utilizare al calculatorului;

- ***să-şi dezvolte capacitățile de investigare şi să-şi valorifice propria existență***, prin: dezvoltarea de strategii de investigare şi rezolvare a problemelor (tatonare, încercare-eroare, reprezentare grafică, modelare, etc.);
- ***să demonstreze capacitate de adaptare la situații diferite***, prin: activități de învățare individuală, în echipă sau în grup care conduc la dobândirea de capacități de cooperare, colaborare, coordonare, subordonare, lucru în echipă, manifestare a inițiativei, respectând opiniile fiecăruia;
- ***să contribuie la construirea unei vieți de calitate***, prin: dezvoltarea unor atitudini pozitive față de sine şi față de semeni (toleranță, responsabilitate); formarea şi exprimarea opțiunii pentru o viață mai sănătoasă şi echilibrată; cunoaşterea şi respectarea drepturilor fundamentale ale omului; promovarea unui mediu natural propice vieții;
- ***să-şi construiască un set de valori individuale şi sociale***, ***să îşi orienteze comportamentul şi cariera în funcție de acestea***, prin: dezvoltarea competenței de a susține propriile opțiuni; sprijin acordat în dezvoltarea aptitudinilor individuale şi în analiza oportunităților oferite de diferite filiere vocaționale.

3.5. Curriculumul la decizia şcolii

Un aspect aparte al flexibilității şi alternativității curriculare îl reprezintă ***curriculumul la decizia şcolii*** (CDS).

CDS în învățământul gimnazial are mai multe ipostaze:

1. ***Aprofundarea,*** care reprezintă acea formă de CDS care urmăreşte aprofundarea obiectivelor de referință ale curriculumului-nucleu prin diversificarea activităților de învățare în numărul maxim de ore prevăzut în plaja orară a unei discipline. Aprofundarea se aplică numai în cazuri de recuperare pentru acei elevi care nu reuşesc să atingă

nivelul minimal al obiectivelor prevăzute în programă în anii anteriori. Are aceeaşi rubrică în catalog cu disciplina sursă.

2. ***Extinderea,*** acea parte din CDS care presupune extinderea obiectivelor şi a conţinuturilor din curriculumul-nucleu prin noi obiective de referinţă şi unităţi de conţinut în numărul maxim de ore prevăzut în plaja orară a unei discipline. Aceasta presupune parcurgerea programei în întregime (inclusiv elementele marcate cu asterisc). Are aceeaşi rubrică în catalog cu disciplina sursă.

3. ***Opţionalul***, tipul de CDS care conţine (în mod opţional) o nouă disciplină de studiu propusă de instituţia de învăţământ sau aleasă din lista elaborată de minister, în funcţie de resursele umane şi materiale ale şcolii, de interesele şi performanţele elevilor. Pentru aceasta, la nivelul şcolii, se elaborează o programă cu obiective şi conţinuturi noi; de asemenea, trebuie să se proiecteze şi competenţele aşteptate de la elevi, probele de evaluare, itemii de măsurare a acestora. Opţionalele au ore proprii (în plaja orară după ce au fost stabilite orele din trunchiul comun) şi rubrică nouă în catalog. Ele pot fi:

- *La nivelul disciplinei*, care constau fie din activităţi, module, proiecte care nu sunt incluse în programa şcolară, fie dintr-o disciplină care nu este prevăzută în planul-cadru sau care nu apare la o anumită clasă sau ciclu curricular.
- *La nivelul ariei curriculare*, care presupun alegerea unei teme ce implică cel puţin două discipline dintr-o arie. În acest caz, pornind de la obiectivele-cadru ale disciplinelor considerate, se formulează obiective de referinţă pentru temele alese.
- *La nivelul mai multor arii curriculare*, care implică cel puţin două discipline aparţinând unor arii curriculare diferite. Ca şi în cazul anterior, informaţiile cu care elevii vor opera sunt complexe şi permit dobândirea de achiziţii cognitive de ordin înalt (de tipul generalizării, transferului).

Conform OMEC nr. 3638/2001, în schema orară a fiecărui elev din învăţământul obligatoriu trebuie să existe *minimum* o oră de opţional.

În cazul disciplinelor şcolare care nu dispun de plajă orară, cum este matematica (clasele a V-a – a VIII-a), CDS-ul poate cuprinde numai ore de opţional.

Ca exemplu de opţionale la nivelul disciplinei, putem considera: *Matematică distractivă, Istoria matematicii* (clasa a V-a), *Construcţii cu rigla şi compasul*, *Locuri geometrice* (clasa a VII-a).

La liceu, curriculumul la decizia şcolii urmăreşte să coreleze mai bine resursele şcolii cu dorinţele elevilor, contribuind în final la valorizarea fiecărul liceu, la crearea unei personalităţi proprii a şcolii prin diferenţierea ofertei educaţionale. Competiţia dintre şcoli poate deveni astfel o competiţie a valorilor, având ca efect sporirea calităţii procesului de învăţământ.

În cazul ***opţionalelor de liceu***, Curriculumul Naţional menţionează următoarele tipuri:

1. *opţionalul de aprofundare*, care este un tip de CDS derivat dintr-o disciplină studiată în trunchiul comun şi urmăreşte aprofundarea competenţelor specifice din curriculumul-nucleu prin noi unităţi de conţinut propuse la nivelul şcolii (sau cele marcate cu asterisc, pentru specializările care nu le parcurg în mod obligatoriu la trunchiul comun). Are aceeaşi rubrică în catalog cu disciplina-sursă.

2. *opţionalul de extindere*, un tip de CDS derivat dintr-o disciplină studiată în trunchiul comun, care extinde competenţele generale din curriculumul-nucleu prin noi competenţe specifice şi noi conţinuturi definite la nivelul şcolii. Are rubrică nouă în catalog.

3. *opţionalul ca disciplină nouă*, care introduce noi obiecte de studiu, în afara celor prevăzute în trunchiul comun la un anumit profil şi specializare, sau teme noi care nu se găsesc în programele naţionale. Ele introduc astfel noi competenţe specifice şi noi conţinuturi diferite de cele ale programei de trunchi comun. Are rubrică nouă în catalog.

4. *opţionalul integrat*, care introduce ca obiecte de studiu noi discipline structurate în jurul unei teme integratoare pentru o anumită arie curriculară sau pentru mai multe arii curriculare. Sunt adăugate

noi competențe specifice complexe şi noi conținuturi interdisciplinare. Are rubrică nouă în catalog.

Raportul dintre trunchiul comun şi curriculumul la decizia şcolii variază pe parcursul liceului. Procentul afectat CDS se majorează progresiv, de la aproximativ 20-30% în clasa a IX-a, la 40-45% în clasa a XII-a.

Ca exemple de opționale menționăm: *Elemente de teoria grafurilor şi aplicații* (clasa a X-a M2/M3, opțional de extindere), *Introducere în documentarea şi cercetarea ştiințifică* (clasa a XII-a, M1/M2, opțional intercurricular).

3.6. Produse curriculare

Conținutul învățământului se obiectivează în documentele şcolare, care au rolul de a norma şi imprima procesului de învățământ un caracter planificat şi unitar.

A. Planul de învățământ este un document şcolar emis de o instituție de învățământ (eventual validat de ministerul de resort), care are funcția de a orienta procesele instructiv-educative. Pentru instituțiile şcolare de stat, planul de învățământ are un caracter unitar şi obligatoriu pentru toate unitățile de acelaşi grad sau tip. El stabileşte:

- disciplinele şcolare care urmează a fi studiate şi succesiunea acestora pe anii şcolari;
- numărul săptămânal şi anual de ore pentru fiecare obiect, la fiecare an de studiu;
- structura anului şcolar, adică succesiunea intervalelor de timp afectate studiilor, vacanțelor, examenelor.

B. Programa şcolară, parte a Curriculumului Național, este un document care configurează conținutul procesului instructiv-educativ la o disciplină de învățământ. Programa indică obiectivele, temele şi subtemele la fiecare disciplină. Actualele programe şcolare sunt centrate pe obiective/competențe, ceea ce subliniază importanța rolului reglator al achizițiilor elevilor în plan formativ.

Pentru profesor, programa şcolară este principalul ghid în proiectarea şi desfăşurarea activităților, având valoare operațională şi instrumentală.

Programele de matematică descriu oferta educațională a disciplinei pe un parcurs şcolar determinat. Deoarece finalitățile diferitelor licee presupun o varietate mare de a utiliza matematica, precum şi datorită unor mari diferențe în ceea ce priveşte numărul de ore alocat prin planul-cadru diferitelor specializări, curriculumul pentru liceu este structurat pe trei tipuri de programe: M1, M2, M3.

O programă şcolară de matematică din gimnaziu cuprinde:

1. ***O notă de prezentare***, care descrie parcursul obiectului de studiu respectiv, argumentează structura didactică adoptată şi sintetizează recomandări considerate semnificative de către autorii programei.

2. ***Obiectivele-cadru***, cu grad ridicat de generalitate şi complexitate, care se referă la formarea unor capacități şi atitudini generate de specificul disciplinei şi sunt urmărite de-a lungul mai multor ani de studiu.

3. ***Obiectivele de referință***, care specifică rezultatele aşteptate ale învățării şi urmăresc progresia în formarea de capacități şi achiziția de cunoştințe ale elevului de la un an de studiu la altul.

4. ***Exemple de activități de învățare***, care propun modalități de organizare a activității în clasă. Programa oferă cel puțin un exemplu de astfel de activități pentru fiecare obiectiv de referință în parte. Exemplele sunt construite astfel încât să se pornească de la experiența concretă a elevului şi să se integreze unor strategii didactice adecvate contextelor variate de învățare.

5. ***Conținuturile*** sunt mijloace prin care se urmăreşte atingerea obiectivelor-cadru şi de referință propuse. Unitățile de conținut sunt organizate tematic.

6. ***Standardele curriculare de performanță*** sunt standarde naționale, ce reprezintă pentru toți elevii un sistem de referință comun şi echivalent, vizând sfârşitul unei trepte de şcolaritate (clasa a VIII-a). Ele constituie specificări de performanță vizând cunoştințele, competențele şi comportamentele dobândite de elevi prin studiul unei disci-

pline. Astfel, aceste standarde permit evidențierea progresului realizat de elevi de la o treaptă de şcolaritate la alta.

Pentru liceu, programele cuprind: notă de prezentare, competențe generale, competențe specifice şi conținuturi, valori şi atitudini, sugestii metodologice.

Valorile şi atitudinile apar în mod explicit sub forma unei liste separate în programa fiecărui obiect de studiu. Ele acoperă întreg parcursul învățământului liceal şi orientează dimensiunile axiologică şi afectiv-atitudinală aferente formării personalității din perspectiva unei discipline. Ele au o importanță egală în reglarea procesului educativ, ca şi competențele, care acoperă dimensiunea cognitivă a personalității.

Sugestiile metodologice cuprind recomandări generale privind metodologia de aplicare a programei. Acestea se pot referi la desfăşurarea efectivă a procesului de predare-învățare centrat pe formarea de competențe, sau oferă sugestii privind metodele şi activitățile de învățare, dotarea materială, evaluarea continuă.

C. Manualul şcolar este un important instrument de lucru pentru elevi, care detaliază sistematic temele recomandate de programele şcolare la fiecare obiect de studiu şi pentru fiecare clasă. Din punctul de vedere al activităților învățământului, manualul are trei funcții principale:

1. *funcția de informare* ce presupune că selecția cunoştințelor se va face prin reduceri, simplificări, reorganizări încât să se asigure progresivitate şi să se evite supraîncărcarea;
2. *funcția de structurare a învățării*: organizarea învățării se poate realiza în mai multe feluri:
   - de la experiență practică la teorie;
   - de la teorie la aplicații practice, prin controlul achizițiilor;
   - de la exerciții practice la elaborarea teoriei;
   - de la expozeu la exemple;
   - de la exemple şi ilustrări la observație şi analiză.
3. *funcția de ghidare a învățării*: există alternativele:
   - repetiția, memorizarea, imitarea modelelor;

- activitatea deschisă şi creativă a elevului, care poate utiliza propriile sale experienţe şi observaţii.

Pentru realizarea unui manual trebuie respectate mai multe cerinţe:

- *cerinţe didactice* – modalităţi convenabile de înfăţişare a informaţiei, respectarea unui stil cognitiv adecvat vârstei;
- *cerinţe igienice* – lizibilitatea textului sau a materialului iconografic, calitatea hârtiei şi a cernelii tipografice, formatul manualului;
- *cerinţe estetice* – calitatea tehnoredactării, a ilustraţiilor, a legării, a coloritului.

Orice manual autentic propune un mod de structurare a informaţiei pe criteriul progresiei şi sistematicităţii cognitive sau executive. Conţinutul trebuie organizat în părţi, capitole, subcapitole, lecţii. Fiecare unitate curriculară de bază (lecţia) va include secvenţe distincte de informaţii, explicaţii, comentarii, corelaţii intra- şi interdisciplinare, exerciţii aplicative, rezumate, fişe de evaluare, bibliografie suplimentară. Poate că ar fi indicat ca în cadrul fiecărei lecţii prezentate în manual să fie menţionate şi obiectivele operaţionale esenţiale ce trebuie realizate. În acest fel, elevii ar avea o „listă" ce specifică exact ceea ce se cere de la ei, pas cu pas.

La sfârşitul manualului, este preferabil să mai fie inserat un minidicţionar ce explică noţiunile fundamentale prezentate în manual (mai ales la clasele mici); de asemenea, existenţa unui index ar uşura mult parcurgerea manualului, identificarea unor noţiuni.

Alte suporturi curriculare, cum ar fi *ghiduri metodologice de aplicare a noului curriculum, de proiectare şi evaluare pentru diferitele discipline de învăţământ*, au o valoare informativă, normativă şi euristică pentru cadrele didactice. Ele explicitează direcţiile de acţiune, principiile şi structurile de acţiune prin exemplificări concrete.

Cum informatizarea învăţământului constituie o prioritate, *softul educaţional* (programele informatice special dimensionate în perspectiva predării unor teme specifice) constituie o necesitate evidentă.

CAPITOLUL IV

Proiectarea activităților instructive

4.1. Importanța şi etapele proiectării didactice

Proiectarea didactică reprezintă un proces deliberat de fixare a paşilor ce trebuie parcurşi în realizarea instrucției şi educației. Fiind un act de anticipare şi de prefigurare a demersului educațional, acesta devine admisibil şi traductibil în practică. În funcție de perioada luată ca referință, întâlnim *proiectarea globală* şi *proiectarea eşalonată.*

Proiectarea globală se referă la o perioadă mai mare de instruire (ciclu sau an de studiu). Ea este concretizată de obicei prin dimensionarea planurilor de învățământ şi a programelor analitice şi stabileşte cadrul, limitele şi posibilitățile proiectării eşalonate.

Proiectarea eşalonată este materializată prin elaborarea programelor de instruire specifice unei discipline şi apoi a unei lecții, ce se aplică la o anumită clasă de elevi pe trei planuri temporale: anul, semestrul şi ora şcolară.

Proiectarea disciplinei pentru un an sau semestru şcolar se realizează pe baza programei şcolare care indică riguros capitolele, temele şi subtemele cu numărul corespunzător de ore pentru tratarea acestora.

Modelul modern, curricular*, al proiectării didactice* este caracterizat de următoarele aspecte:

- este centrat pe obiective şi propune acțiuni didactice specifice procesului de predare-învățare-evaluare;
- punctul de plecare îl constituie obiectivele stabilite pentru elev;

- între toate elementele activității didactice (obiective, conținut, metodologie, evaluare) se stabilesc raporturi de interdependență;
- asigură echilibrul dintre pregătirea de specialitate şi cea psihopedagogică a profesorului.

În acest sens, *proiectarea didactică presupune*:
- definirea obiectivelor învățării la unul sau mai multe niveluri;
- sugerarea unor teme de activitate care să provoace învățarea în sensul dorit;
- oferirea posibilității de alegere a metodelor şi mijloacelor de predare şi învățare;
- instrumente de control a predării şi învățării;
- determinarea condițiilor prealabile necesare unei activități de învățare eficientă.

4.2. Proiectarea demersului didactic

Proiectarea demersului didactic presupune *lecturarea personalizată a programelor şcolare, planificarea calendaristică, proiectarea unităților de învățare* şi deci, *a lecțiilor*.

Deoarece programele şcolare centrate pe obiective nu mai asociază conținuturilor în mod univoc o alocație temporală şi o anumită succesiune, profesorul trebuie să aibă o imagine de ansamblu bine conturată asupra întregului curriculum alocat unui an de studiu. În acest sens, s-a optat pentru organizarea procesului de învățământ în unități de învățare, considerându-se că, prin identificarea unor teme majore şi organizarea conținuturilor în jurul acestora, se oferă o imagine mult mai clară decât o succesiune de lecții.

O ***unitate de învățare*** este o structură didactică deschisă şi flexibilă, care se caracterizează prin:
- determină formarea la elevi a unui comportament specific, generat prin integrarea unor obiective de referință;
- este unitară din punct de vedere tematic;

- se desfăşoară în mod sistematic şi continuu pe o perioadă de timp;
- se finalizează prin evaluare.

A. Lectura personalizată a programelor şcolare

Conceptul central al proiectării didactice este *demersul didactic personalizat*, iar instrumentul acestuia este *unitatea de învățare*.

Demersul didactic personalizat exprimă dreptul profesorului de a lua *decizii* asupra modalităților pe care le consideră optime în creşterea calității procesului de învățământ, cât şi *răspunderea personală* a acestuia în a asigura elevilor un parcurs şcolar individualizat, raportat la condițiile şi cerințele concrete.

În acest sens, programa şcolară, element central în proiectarea didactică, nu este privită ca un element de îngrădire pentru profesor; ea reprezintă un document reglator stabilind obiective, finalități ce trebuie atinse prin intermediul activității didactice. Profesorul poate opta pentru folosirea activităților de învățare recomandate prin programă sau poate propune alte activități adecvate condițiilor concrete din clasă.

Programele claselor gimnaziale se citesc „pe orizontală”, în succesiunea următoare:

Obiective cadru	→ ←	Obiective referință	→ ←	Conținuturi	→ ←	Activități învățare

Fiecărui obiectiv cadru îi sunt asociate obiective de referință. Atingerea acestora se realizează cu ajutorul conținuturilor.

Programele claselor a IX-a – a XII-a permit o lectură liniară mai simplă, datorită asocierii directe dintre competențele specifice şi conținuturi.

Programele de matematică prezintă câteva *aspecte specifice*, dintre care menționăm:

Anumite conținuturi se studiază în programele actuale la un alt nivel de clasă decât acela în care se studiau în mod tradițional.

Astfel, conținutul *reguli de calcul cu puteri* nu se mai studiază în curriculumul nucleu la clasa a V-a, ci la clasa a VI-a. Această schimbare este justificată de necesitatea familiarizării elevilor cu noțiunea de putere în relație cu înmulțirea cu factori egali. Exersarea calcului unor puteri se poate consolida la clasa a V-a prin compararea şi ordonarea puterilor; absența din lista de conținuturi a regulilor de calcul cu puteri permite deplasarea accentului de la aplicarea mecanică a unor formule spre tehnica de calcul prin înmulțire, bazată pe utilizarea proprietăților.

La fel, o parte a conținutului capitolului *divizibilitate* a fost deplasat de la clasa a V-a la a VI-a deoarece studiul proprietăților divizibilității presupune un tip de raționament ale cărui baze intuitive sunt puse de fapt abia în clasa a VI-a, în cadrul capitolelor de geometrie. Menționăm că nu noțiunea de divizibilitate este dificilă, în sine, ci operarea cu numere prime, prime între ele, divizor comun. În acest sens, trebuie identificate clase de numere naturale folosind conectori logici şi raționamente ipotetico-deductive.

Inducția matematică a devenit tip de raționament studiat la clasa a IX-a în loc de clasa a X-a.

Numerele complexe sunt studiate în clasa a X-a la specializările care urmează programa M1 (conținutul este folosit drept cadru noțional pentru a forma competențe în direcția descrierii unor configurații geometrice, pentru a realiza o mai uşoară legătură între algebră şi geometrie), la clasa a XII-a la specializările ce urmează programa M2 (se folosesc conținuturile pentru ca elevul să poată observa asemănări în definirea unor operații pe mulțimi de numere diferite) şi nu se studiază la specializările ce urmează programa M3.

Au apărut în programă elemente de conținut sau metode matematice noi față de programele anterioare.

În acest sens, menționăm că *Metodele vectoriale* utilizate în geometrie, prevăzute prin programele M1 şi M2 pentru clasele a IX-a şi a X-a au fost introduse pentru a asigura coerență la nivelul ariei curriculare, pentru a oferi şi o altă posibilitate de a face demonstrații geometrice, pentru a putea conceptualiza noțiunea de spațiu vectorial. În programa M1, studiul este continuat în mod explicit în celelalte clase, iar celelalte programe folosesc numai în mod implicit cunoştințe de calcul vectorial (în programa M2, pentru clasa a XI-a se studiază

Elemente de programare liniară, în programa M3, pentru clasa a X-a se studiază *Figuri geometrice plane generate prin translație*).

Lecturile grafice sunt elemente de conținut în programele M1, M2 şi M3 pentru clasele a IX-a şi a X-a, favorizând familiarizarea elevilor cu noțiunea de *funcție* şi abordarea intuitivă a *studiului funcțiilor*, a *reprezentărilor grafice*, *a interpretării datelor statistice*.

În clasa a VI-a, apare pentru prima dată în lista de conținuturi *Elemente de probabilități*. Prin aceasta, deprinderile formate prin colectarea şi înregistrarea datelor se folosesc pentru calculul unor probabilități, dezvoltând capacități explorativ-investigative ce permit apoi formarea conceptelor.

Unele conținuturi necesită o detaliere față de cea prevăzută în programă.

Pentru elemente de conținut cum ar fi *Acoperiri, parchetări* (clasa a X-a, M3), *Probleme de numărare* (clasa a X-a, M1, M2), *Jocuri finite* (clasa a XII-a, M3), detalierea se poate face în concordanță cu competențele programei, cu situația concretă a clasei.

În programă pot apărea unele precizări care limitează nivelul de dificultate al aplicațiilor în cazul în care acest tip de învățare nu este necesar formării competențelor ce se au în vedere.

De exemplu, în programele M1 şi M2 pentru clasa a X-a apare conținutul *Ecuații iraționale simple* făcându-se precizarea *cu radicali de ordinul doi sau trei* (*radicalii de ordin n* apar ca extindere).

În programa M1 pentru clasa a XI-a, *studiul determinanților* se limitează la cel al *determinanților de ordin cel mult* 4 iar *studiul sistemelor* la cazul cu *cel mult* 4 *necunoscute*.

În programa M1 pentru clasa a XII-a, studiul *structurilor algebrice* se restrânge la analizarea unor exemple cunoscute de elevi din clasele anterioare.

Anumite conținuturi apar în programe diferite pentru aceeaşi clasă sau în ani de studiu diferiți şi sunt formulate identic sau asemănător.

În acest sens, putem exemplifica conținuturile *Funcția exponențială* şi *Funcția logaritmică*, în programele M1, M2, M3, clasa a X-a.

Conținutul matematic este acelaşi, diferențierea activităților de învățare bazându-se pe studierea competențelor specifice din fiecare programă. Astfel, pentru profilul M1, elevul trebuie să poată exprima în moduri diferite relații funcționale, să prelucreze informații prin lectură grafică, să folosească proprietățile acestor funcții pentru reprezentarea lor grafică. La M2, accentul cade pe calcul şi algoritmi specifici cu optimizarea rezultatului calculului şi deducerea unor proprietăți simple din lectura graficului. Spre deosebire de aceste profile, la M3 se vizează pe lângă utilizarea algoritmilor de calcul şi modelarea unor probleme practice.

B. Planificarea calendaristică

În contextul noului curriculum, ***planificarea calendaristică*** este documentul administrativ care asociază într-un mod personalizat elemente ale programei (obiective de referință şi conținuturi) cu alocarea de timp considerată optimă de către profesor pe parcursul unui an şcolar.

O astfel de planificare corect întocmită trebuie să acopere integral programa şcolară la nivel de obiective şi conținuturi.

Planificările pot fi întocmite pornind de la următoarea rubricație:

Şcoala.......

Disciplina........

Profesor............
Clasa/Nr. ore pe săpt./....
Tip de curriculum/Anul.....

Planificare calendaristică

Unitatea de învățare	Obiective referință/ Competențe specifice	Conținuturi	Nr. ore alocate	Săpt.	Obs.

În acest tabel:

- Unitățile de învățare se vor indica prin titluri, teme stabilite de către profesor;
- Obiectivele de referință/Competențele specifice sunt trecute cu numerele lor din programa şcolară;
- Conținuturile sunt cele selectate de către profesor din programa şcolară;
- Numărul de ore este stabilit tot de către profesor în funcție de experiența sa şi de nivelul clasei;
- La Observații se trec eventualele corecții (realocări de ore, restructurări în organizarea unităților de învățare) determinate de aplicarea efectivă la clasă.

Pentru întocmirea unei programe calendaristice, este recomandată parcurgerea următoarelor etape:

- realizarea asocierilor dintre obiectivele de referință/competențele specifice şi conținuturi;
- împărțirea pe unități de învățare (se indică temele alese);
- stabilirea succesiunii de parcurgere a unităților de învățare;
- alocarea timpului considerat necesar pentru fiecare unitate de învățare, în concordanță cu obiectivele de referință şi conținuturile vizate.

Pentru aceasta, vom proceda la identificarea unităților de învățare, adică vom stabili tema fiecăreia. Temele sunt enunțuri complexe, legate de analiza scopurilor învățării, care pot fi preluate din lista de conținuturi ale programei, din manual sau pot fi originale. Pentru a realiza acest proces, se pot urma paşii unuia dintre algoritmii descrişi în cele ce urmează:

Algoritmul 1.

1. În prima etapă se aleg conținuturi din programe, unitare din punct de vedere tematic.

De exemplu, la clasa a VII-a, alegem următoarele conținuturi: *Mulțimea numerelor raționale; reprezentarea pe axă a numerelor raționale, opusul unui număr rațional, modulul.*

2. Acestor conținuturi li se asociază obiective de referință ce pot fi atinse cu ajutorul lor; în cazul nostru 1.1.: *să scrie, să citească, să compare şi să reprezinte pe axă numere reale.*

3. Se adaugă conținuturi sau/şi se renunțăm la unele conținuturi alese, după criteriul relevanței în raport cu obiectivul indicat.

În exemplul ales de noi, se mai adaugă conținuturile: *Mulțimea numerelor întregi; reprezentarea pe axă, Scrierea numerelor raționale sub formă de fracție zecimală sau fracționară, Compararea numerelor raționale, Incluziunile* $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$ (ținând cont că numerele întregi şi cele raționale pozitive au fost studiate în clasa a VI-a, această grupare nu necesită timp suplimentar pentru activități ce urmăresc acelaşi obiectiv).

4. Se corelează conținuturile selectate cu alte obiective de referință, asociate altor obiective cadru. În cazul nostru mai putem adăuga: 2.5.: *să selecteze, în mulțimea datelor de care dispune, informații relevante pentru rezolvarea de probleme*; 3.3.: *să argumenteze logic în cadrul unui grup, idei şi metode matematice, să utilizeze diferite surse de informație în verificarea şi susținerea opiniilor,* (dacă se urmăreşte mai mult învățarea individuală, se alege din programă 3.2.), 4.2.: *să manifeste perseverență şi interes pentru găsirea de soluții noi în rezolvarea unei probleme.*

Putem astfel preciza în rubrica „Conținuturi" din planificare, acele conținuturi care au ajuns să fie grupate în final şi dăm un titlu unității de învățare. Obținem astfel o secvență de planificare de forma:

Unitatea de învățare	Obiective de referință	Conținuturi	Nr ore	Săpt	Obs
Cum comparăm numerele raționale	1.1., 2.5., 3.3., 4.2.	*Mulțimea numerelor întregi, reprezentarea pe axă; Mulțimea numerelor raționale, reprezentarea pe axă a numerelor raționale, opusul unui număr rațional, modulul. Scrierea numerelor raționale sub formă de fracție zecimală sau fracționară; Compararea numerelor raționale; Incluziunile* $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.	5		

Algoritmul 2.

Acest algoritm foloseşte o matrice de asociere a obiectivelor de referinţă/competenţelor specifice cu conţinuturile.

Pe coloane sunt precizate obiectivele de referinţă/competenţele specifice, prin numărul lor, iar pe orizontală, conţinuturile. Cu x vom nota legăturile directe, evidente dintre obiective şi conţinuturi şi cu 0 pe cele mai puţin evidente, cele deduse. Asocierea diferită a obiectivelor de referinţă cu conţinuturile, prin lecturarea personalizată a programei, conduce la moduri diferite de gândire şi proiectare a învăţării.

De exemplu, la clasa a V-a, considerăm o parte din conţinuturile programei şi anume *Numere naturale* pentru care obţinem matricea prezentată în Anexa 2. Cu ajutorul acestei matrice, observăm că putem grupa conţinutul în unităţi de învăţare care formează secvenţa de planificare din Anexa 3.

După ce s-au parcurs paşii unuia dintre algoritmii prezentaţi, trebuie să verificăm dacă structura stabilită de noi răspunde afirmativ la următoarele întrebări:

- Conţinuturile alese au o unitate tematică?
- Este respectată logica internă a obiectului?
- Se poate realiza la clasă parcurgerea conţinuturilor într-un număr optim de ore?
- În cadrul unităţii de învăţare, sunt avute în vedere obiective de referinţă corespunzătoare tuturor obiectivelor cadru?
- Prin parcurgerea conţinuturilor, este posibilă realizarea obiectivelor?
- Sunt şi alte conţinuturi care ar putea fi incluse în această unitate de învăţământ, respectând condiţiile anterioare?
- Există un optim de 1-3 obiective de referinţă din obiectivul cadru 1, avute în vedere prin această unitate de învăţare?
- Este edificatoare evaluarea făcută în urma parcurgerii acestor conţinuturi?

Pentru ca planificarea calendaristică să fie funcţională, este indicat ca ea să fie întocmită pe întregul an şcolar, pentru o mai bună conturare a viziunii de ansamblu asupra repartizării materiei şi a modului cum vor fi realizate obiectivele prevăzute în curriculum.

C. Proiectarea unei unități de învățare

Proiectarea unei unități de învățare înseamnă schițarea unui scenariu de desfăşurare a acesteia, precizând în detaliu modul de organizare al clasei, necesarul de material didactic, sarcinile de lucru, modul de evaluare a îndeplinirii sarcinilor, rezultatele aşteptate ale învățării şi reacțiile posibile.

Dacă dorim să analizăm procesul de învățare – predare avem de răspuns la întrebări cum ar fi:

- ce voi face?
- cu ce voi face?
- cum voi face?
- cum voi şti dacă ceea ce trebuia realizat a fost obținut ?

Aceste întrebări punctează de fapt cele patru etape ce trebuie parcurse în realizarea unei proiectări didactice (în cazul nostru, al unei unități de învățare):

Prima etapă presupune precizarea clară a obiectivelor educaționale, condiție fundamentală a proiectării corecte a fiecărei lecții. Acestea trebuie stabilite ținând cont de concordanța ce se impune a exista între cerințe şi programa şcolară, între obiectivele propuse şi timpul de care se dispune.

A doua etapă vizează stabilirea resurselor educaționale de care dispune profesorul:

- resurse umane – elevul cu personalitatea sa, motivația, capacitățile de învățare şi exprimare, profesorul cu experiența sa, timpul necesar pentru activitatea didactică: an, semestru, săptămână, oră;
- resurse materiale – manuale, culegeri, tabele, planşe, materiale didactice;
- resurse procedurale – forma de organizare a clasei, metode de organizare a activității, metode de învățare, metode de predare, alocarea de timp.

A treia etapă se referă la strategiile educaţionale folosite pentru atingerea scopurilor: alegerea celor mai adecvate metode didactice, materiale şi mijloace de instruire, combinarea acestora în vederea eficientizării strategiei didactice. La baza stabilirii scenariului didactic se află eliminarea şi prevenirea erorilor, a riscurilor şi evenimentelor nedorite în practica didactică. Trebuie să ţinem cont că nu se poate programa totul, trebuie lăsat loc suficient spontaneităţii, actului liber. Profesorul trebuie să speculeze şi să integreze orice curs nou al desfăşurărilor, să-i dea o nouă semnificaţie pedagogică şi să-l valorifice în beneficiul procesului educativ.

Etapa finală urmăreşte stabilirea unei metodologii de evaluare a eficienţei activităţii desfăşurate. Evaluarea cea mai corectă este cea care porneşte de la obiectivele operaţionale ale activităţii. Ea urmăreşte raportul dintre rezultatele obţinute şi rezultatele scontate (obiectivele). Se poate stabili astfel eficienţa activităţii didactice. O activitate didactică este cu atât mai eficientă cu cât obiectivele ei au fost atinse într-un timp mai scurt, cu mai puţină cheltuială de resurse materiale, cu mai puţină oboseală şi cu mai multă plăcere pentru efortul depus. Scopul evaluării nu este acela de a eticheta şi ierarhiza elevii în mod definitiv, ci de a perfecţiona procesul instructiv-educativ prin evidenţierea unor neajunsuri, prin asigurarea unei autoreglări.

Structura documentului de proiectare a unei unităţi de învăţare cuprinde: *elemente de identificare a unităţii de învăţare, detalieri de conţinut şi activităţi de învăţare. Pentru fiecare activitate de învăţare sunt precizate obiectivele de referinţă/compeţenţele specifice, resursele şi modul de evaluare.*

Este indicat ca obiectivele de referinţă/compeţenţele specifice urmărite într-o unitate de învăţare să fie reluate şi în alte unităţi de învăţare pentru ca formarea şi dezvoltarea competenţelor să se realizeze pe conţinuturi variate.

O unitate de învăţare este util să aibă o durată de desfăşurare cuprinsă între 3 şi 8 ore, având grijă să planificăm separat orele de evaluare sumativă.

Activităţile de învăţare se construiesc prin corelarea obiectivelor de referinţă/competenţelor specifice la conţinuturi şi presupun orientarea către un anumit scop, redat prin tema activității. Când nu sunt precizate exemple de activități de învățare (în programele claselor de liceu), acestea pot fi precizate urmărind sugestiile metodologice din lista propusă în programă.

Astfel, pentru fiecare secvență a demersului didactic, putem asocia activități de învățare adecvate după cum urmează:

Actualizare

Activitățile de învățare sunt centrate pe evocarea şi anticiparea noțiunilor de bază şi a comportamentelor operatorii necesare pentru înțelegerea şi prelucrarea noului conținut:

a. Folosirea unor criterii de comparare şi clasificare pentru descoperirea unor proprietăți, reguli;

b. Construirea şi interpretarea unor diagrame, tabele, grafice care ilustrează situații cotidiene;

c. Folosirea unor idei, reguli, metode matematice în abordarea unor probleme practice sau pentru structurarea unor situații diverse;

d. Intuirea algoritmului după care este construită o succesiune dată, exprimată verbal sau simbolic şi verificarea pe cazuri particulare a regulilor descoperite.

Această secvență presupune o probă de evaluare inițială.

Problematizare

Conținuturile învățării se dezvoltă prin exemple relevante din domenii diverse în scopul valorificării achizițiilor cognitive şi operatorii din alte unități de învățare şi pentru a compatibiliza noile cunoştințe ale elevului cu experiența sa anterioară. Activitățile de învățare sunt centrate pe problematizare şi învățare prin descoperire, cu sarcini de prelucrare a informației şi cu sugerarea unui algoritm al învățării:

a. Folosirea unor reprezentări variate pentru anticiparea unor evenimente sau rezultate;

b. Folosirea unor sisteme de referință diferite pentru abordarea noțiunilor matematice din perspective variate;

c. Interpretarea parametrilor problemei ca o parte a ipotezei acesteia.

Sistematizare

Conținuturile decurg din situațiile problemă prelucrate în etapa anterioară şi necesită sistematizarea rezultatelor teoretice (definiții, proprietăți), exersarea conținutului pe exemple semnificative ce permit dezvoltarea unor algoritmi şi metode de rezolvare. Activitățile de învățare sunt orientate spre dezvoltarea capacității elevilor de a opera cu informații, de a interpreta simbolic conținuturile:

a. Folosirea unor reprezentări variate ca punct de plecare pentru intuirea, ilustrarea, clarificarea sau justificarea unor idei, algoritmi, metode de rezolvare;

b. Recunoaşterea şi identificarea datelor unei probleme prin raportare la sisteme de comparare standard;

c. Identificarea şi descrierea cu ajutorul modelelor matematice a unor relații sau situații multiple;

d. Compararea, observarea unor asemănări şi deosebiri, clasificarea noțiunilor matematice studiate după unul sau mai multe criterii explicite sau implicite, luate simultan sau separat;

e. Utilizarea formulelor standardizate în înțelegerea ipotezei.

Conceptualizare

Conținuturile subliniază caracteristicile modelului matematic, dominând aplicațiile semnificative ce conduc la identificarea şi construcția de algoritmi sau metode de lucru, care permit dezvoltarea unor rezultate teoretice prin analiza soluțiilor şi prin relaționări între diferite tipuri de reprezentări utilizate. Activitățile de învățare favorizează găsirea unor căi de esențializare prin demers semidirijat:

a. Formarea obişnuinței de a vedea dacă o problemă este sau nu determinată;

b. Exprimarea relațiilor matematice dintr-o problemă prin simboluri specifice;

c. Analiza secvențelor logice în etapele de rezolvare ale unei probleme;

d. Analiza rezolvării unei probleme din punct de vedere al corectitudinii, simplității, clarității şi al semnificației rezultatelor;

e. Reformularea unei probleme echivalente sau înrudite.

Aprofundare

Conținuturile şi aplicațiile propuse sunt ordonate progresiv şi au rol de exersare a strategiilor de rezolvare, conducând la dezvoltarea competențelor cognitive şi operatorii. Activitățile de învățare au caracter dominant formativ şi urmăresc dezvoltarea capacităților elevului de a opera cu informația asimilată, de a aplica, de a investiga şi căuta soluții de rezolvare a problemelor propuse:

a. Rezolvarea de probleme şi situații problemă;

b. Analiza secvențelor logice în fiecare etapă de rezolvare a unei probleme;

c. Exprimarea rezultatelor obținute în urma rezolvării unei probleme în limbaj matematic;

d. Exprimarea prin metode specifice a unor clase de probleme;

e. Cunoaşterea şi utilizarea unor reprezentări variate ale noțiunilor studiate.

Transfer

Conținuturile solicită frecvente corelații intra- şi interdisciplinare, investigarea de ipoteze, utilizarea diverselor tipuri de raționament (inductiv, deductiv, analogic), realizarea de generalizări. Activitățile de învățare sunt diferențiate, valorifică potențialul individual şi stilurile de învățare ale elevilor în scopul realizării unui antrenament personalizat:

a. Transferul şi extrapolarea soluțiilor unei probleme pentru rezolvarea altora;

b. Utilizarea rezultatelor şi a metodelor pentru crearea de strategii de lucru;

c. Folosirea particularizării, generalizării, a inducției sau analogiei pentru alcătuirea sau rezolvarea unei probleme noi, pornind de la o proprietate sau o problemă dată.

Prezentăm în continuare un exemplu de proiect al unității de învățare *Progresii*, la clasa a IX-a, M1, a cărui formă standardizată o găsim în Anexa 4.

Pentru a urmări mai uşor modul de realizare al acestuia, vom preciza obiectivele de referință şi competențele avute în vedere în proiect.

Obiectivele de referinţă şi competenţe urmărite:

1.2. Să înţeleagă semnificaţia şi proprietăţile operaţiilor cu numere reale şi să le aplice în calcule variate.

1.4. Să aplice în rezolvarea problemelor elemente de logică şi elemente de teoria mulţimilor.

1.6. Să utilizeze elemente de calcul algebric pentru a rezolva ecuaţii şi inecuaţii, precum şi pentru a aplica formule de calcul.

(Aceste trei obiective de referinţă se regăsesc în programa clasei a VIII-a).

1. Recunoaşterea unor corespondenţe care sunt şiruri, progresii, funcţii.
2. Utilizarea unor moduri variate de descriere a funcţiilor în scopul caracterizării acestora.
3. Descrierea unor şiruri/funcţii utilizând reprezentarea geometrică a unor cazuri particulare şi raţionament inductiv.
4. Caracterizarea unor şiruri folosind reprezentarea grafică sau proprietăţi algebrice.
5. Analiza unor valori particulare în vederea determinării formei analitice a unei funcţii definite pe $\mathbb{N}$ prin raţionamente de tip inductiv.
6. Transpunerea unor situaţii-problemă în limbaj matematic utilizând funcţii definite pe $\mathbb{N}$.

Descrierea activităţii de învăţare: *Identificarea proprietăţilor unor progresii ce apar sub formă de şiruri în situaţii-problemă.*

Competenţe specifice vizate:

1. Recunoaşterea unor corespondenţe care sunt şiruri, progresii, funcţii.

2.1. Calculul valorilor unor funcţii care modelează situaţii practice în scopul caracterizării acestora.

3.2. Identificarea unor formule de recurenţă pe baza raţionamentului de tip inductiv.

Competenţe specifice în pregătire:

6. Transpunerea unor situaţii-problemă în limbaj matematic utilizând funcţii definite pe $\mathbb{N}$.

Conținutul avut în vedere:
Calcule economice/calcule aritmetice

Sugestii metodologice:
Proiectarea activităților de învățare din această etapă poate fi făcută pornind de la următoarele sugestii metodologice prevăzute în programă:

1. citirea corectă şi conştientă a enunțului unei probleme;
2. recunoaşterea şi identificarea datelor unei probleme;
3. precizarea modului de alcătuire a unei succesiuni date şi verificarea pe cazuri particulare a regulilor descoperite;
4. folosirea unor reprezentări variate pentru anticiparea unor rezultate;
5. imaginarea şi folosirea unor reprezentări variate pentru depăşirea unor dificultăți;
6. reformularea unei probleme echivalente sau înrudite;
7. folosirea unor idei şi reguli matematice în abordarea unor probleme practice sau pentru structurarea unor situații diverse.

În funcție de resursele disponibile, se pot formula sarcini de lucru care utilizează manualul sau culegerile de probleme.

Sugestii de formulare a sarcinilor de lucru corespunzătoare activității proiectate:
1. Maria depune la bancă suma de 1.000 lei. Ea urmează să primească o dobândă simplă de 5% pe an din suma depusă inițial dacă menține contul 12 luni, fără extrageri.

a. Contul Mariei creşte sau scade?
b. Care este capitalul inițial? Dar procentul lunar al dobânzii?
c. Ce sumă va fi în cont după o lună, după două luni, după trei luni? Cum variază contul de la o lună la alta?
d. Reprezentați pe o diagramă sumele S_3 şi S_4 aflate în cont după trei, respectiv patru luni.
e. Cum mai putem reprezenta evoluția sumei din cont în primul an?

2. Un biciclist se deplasează cu viteza constantă de 15 km/oră de la Craiova la Slatina. Dacă la ora 10.00, biciclistul se află la 50 km de Slatina, la ce distanță față de Slatina se va afla la ora 11.00, la ora 12.00, la ora 13.00? Cum variază această distanță?

f. Ce legătură există între problemele prezentate? Identificați şi alte enunțuri înrudite.

g. Exprimați matematic:

- variația sumei din contul Mariei;
- variația distanței față de Slatina a biciclistului.

Sugestii de evaluare pentru activitatea de învățare descrisă:

Evaluare pe sarcinile de lucru f. şi g., prin scrierea pe tablă a răspunsurilor şi compararea acestora. Observarea colaborării în grupele de lucru.

Exemplu de probă de evaluare inițială:

1. Completează cu încă doi termeni fiecare din următoarele şiruri:
   a) 2, 9, 16, 23, ...
   b) -7, -3, 1, 5, ...
2. Să se determine primul termen şi rația unei progresii aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$ dacă se verifică relațiile:

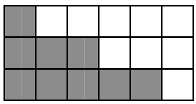
$$\begin{cases} a_2 + a_4 - a_6 = -7 \\ a_{10} - 4a_3 = 13 \end{cases}$$

3. Şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este descris de relațiile:

$$a_1 = 4,\ \ a_{n+1} = a_n - 6,\ \text{pentru } n \geq 1.$$

   a) Calculați a_2 şi a_3.
   b) Deduceți formula pentru exprimarea termenului general al şirului.
   c) Demonstrați prin inducție matematică corectitudinea formulei găsite.
   d) Stabiliți dacă şirul conține ca termeni numerele: -284; 102.

Exemplu de probă de evaluare finală:

Itemi	Competenţe specifice
1. Dacă $\left(a_n\right)_{n\geq 1}$ este o progresie aritmetică, arătaţi că $\left(a_{3n}\right)_{n\geq 1}$ este tot o progresie aritmetică. Se păstrează această proprietate pentru progresiile geometrice?	3.2. Identificarea unor formule de recurenţă pe baza raţionamentului de tip inductiv.
2. Într-o progresie geometrică $\left(a_n\right)_{n\geq 1}$ cu toţi termenii pozitivi, avem: $a_3 = 6$, $a_5 = 24$. Calculaţi a_1 . Sunt necesare toate ipotezele problemei?	2. Utilizarea unor moduri variate de descriere a funcţiilor în scopul caracterizării acestora.
3. Explicaţi prin intermediul desenului alăturat un mod de calcul al sumei: 1+3+5+...+(2n-1). 	3.1. Alegerea şi utilizarea unei modalităţi adecvate de calcul.
4. Ana a depus la o bancă suma de 2.000 lei, cu o dobândă de 30% pe an. Cât timp trebuie să păstreze banii în cont pentru a primi la sfârşit cel puţin 3.000 lei?	4.1. Interpretarea grafică a unor relaţii provenite din probleme practice.
5. Se consideră şirul $\left(x_n\right)_{n\geq 1}$: $\frac{1}{10}, \frac{2}{10^2}, \frac{3}{10^3}, \ldots$. Scrieţi termenul x_{10} şi calculaţi: $S = x_1 + x_2 + \ldots + x_{10}$.	5. Analiza unor valori particulare în vederea determinării formei analitice a unei funcţii definite pe $\mathbb{N}$ prin raţionamente de tip inductiv.
6. Creşterea populaţiei Pământului este de aproximativ 2% pe an. Dacă în anul 2000 populaţia globului a fost de 7 miliarde de locuitori, estimaţi populaţia din anul 2008.	6. Transpunerea în limbaj matematic a unor situaţii-problemă utilizând funcţii definite pe $\mathbb{N}$.

Matricea de evaluare a unei unități de învățare evidențiază instrumentele de evaluare avute în vedere pentru măsurarea nivelului de realizare a activităților de învățare propuse.

Pentru unitate de învățare prezentată, dăm ca exemplu următoarea ***matrice de evaluare***:

Instrumente evaluare C.S.	Studiu de caz	Fișe de lucru	Activitate în grup	Investigație	Tema acasă	Probă orală	Probă scrisă
1					X	X	X
2	X		X				X
3		X	X	X	X		
4	X		X				X
5		X	X		X		
6				X	X	X	

4.3. Programe de opțional

Pentru elaborarea programei de opțional propunem următoarea schemă de proiectare care este în acord cu modelul programelor de trunchi comun pentru clasele I-a – a VIII-a:

<table>
<tr><td colspan="2">• Argument</td></tr>
<tr><td>• Obiective de referință</td><td>• Activități de învățare</td></tr>
<tr><td>1.</td><td></td></tr>
<tr><td>2.</td><td></td></tr>
<tr><td>3.</td><td></td></tr>
<tr><td>.....</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">• Lista de conținuturi
• Modalități de evaluare</td></tr>
</table>

Pentru ***Argument*** se va redacta maxim o pagină care motivează cursul propus: nevoi ale elevilor, ale comunității locale, formarea unor competențe de transfer, etc.

Obiectivele de referință vor fi:

- preluări ale unor obiective din programa națională, în cazul opționalului de aprofundare;
- formulate după modelul celor din programa națională (al materiilor de trunchi comun), dar *nu vor fi reluări ale acestora*.

Pentru un opțional de o oră pe săptămână se vor defini şi urmări 5-6 obiective de referință pe care elevii trebuie să le realizeze până la sfârşitul anului.

Lista de conținuturi menționează toate informațiile care vor fi cuprinse în cadrul opționalului, ele fiind considerate ca un mijloc de formare intelectuală.

Activitățile de învățare descriu modul în care elevul va dobândi abilitățile vizate prin obiective de referință.

Modalitățile de evaluare precizate vor fi tipuri de probe care se potrivesc opționalului propus (probe scrise, probe orale, probe practice, referat, proiect).

Schema corespunzătoare pentru un opțional la liceu, în acord cu modelul programelor de trunchi comun, este de forma:

• Argument	
• Competențe specifice	• Conținuturi
1.	
2.	
3.	
.....	
• Valori şi atitudini • Sugestii metodologice	

Competențele şi conținuturile presupun o proiectare diferită în funcție de tipul opționalului:

- Pentru un *opțional de aprofundare*, la anumite competențe specifice din programă, se proiectează noi conținuturi care conduc la aprofundarea acestora;

- În cazul unui *opțional de extindere*, pornind de la competențe generale ale disciplinei, se pot deriva noi competențe specifice care vor fi realizate prin operarea cu noi conținuturi, teme, capitole care nu fac parte din programa de trunchi comun;
- La realizarea unui *opțional ca disciplină nouă* se pot izola teme, capitole, unități de informație cu care operează o disciplină şi, pe baza lor, se conturează anumite competențe pe care dorim să le formăm la elevi;
- Dacă *opționalul* este ca *temă integratoare*, unitățile de conținut vor cuprinde informații din mai multe discipline (domenii), iar competențele vor fi în general competențe de integrare şi transfer.

Pentru un opțional de o oră pe săptămână se recomandă să fie definite şi urmărite 6-8 competențe specifice.

Sugestiile metodologice includ tipuri de activități de învățare şi modalități de evaluare.

Dacă opționalul este prevăzut pentru un nivel de şcolaritate sau un ciclu curricular, este necesar să fie definite şi *obiective cadru/competențe generale* din care se deduc *obiectivele de referință/competențele specifice* pentru fiecare an de studiu. În acest caz, se redactează câte o programă pentru fiecare an, având grijă să apară explicit progresia obiectivelor/competențelor de la un an de studiu la altul.

Este recomandabil ca programa de opțional să conțină şi ***bibliografie***.

În cursul elaborării proiectului de programă pentru opțional se sugerează consultarea următoarei liste de întrebări ajutătoare:

Obiectivele cadru/Competențe generale:

- se reflectă în obiectivele de referință/competențele specifice?
- în cazul aprofundărilor, extinderilor, sunt aceleaşi ca în programa de trunchi comun?

Obiectivele de referință/Competențele specifice sunt:

- măsurabile, specifice (nu sunt formulate la modul general, ci sunt adaptate pentru anumite conținuturi)?
- în număr corespunzător?
- corelate cu tema opționalului?

- adecvate nivelului de cunoştinţe şi vârstei elevului?
- derivă din obiectivele cadru (dacă acestea sunt formulate)?
- unice (nu se repetă sub forme diferite)?
- altele decât în programa trunchiului comun?
- căror etape ale unui proces de învăţare corespund?

Conţinuturile sunt:

- corelate cu obiectivele de referinţă/competenţele specifice?
- altele decât în programa trunchiului comun?
- o resursă cuprinzătoare pentru obiectivele de referinţă?
- organizate articulat, sistemic?
- organizate astfel încât să se cumuleze şi să permită progresul?
- entităţi esenţiale, fără contradicţii?
- posibil de învăţat, adaptate la experienţa elevului?
- adecvate intereselor, nevoilor prezente şi viitoare ale elevului?

Activităţile de învăţare:

- duc la dezvoltarea capacităţilor propuse?
- pot fi derulate efectiv în clasă?
- presupun activitatea nemijlocită a elevului?
- permit învăţarea în cooperare?

Spre exemplu, prezentăm un program de opţional pentru gimnaziu şi un nucleu de programă pentru un opţional de liceu:

Titlul opţionalului: *Matematică distractivă*
Clasa: a VI-a
Durata: 1 an
Tipul de opţional: Opţional la nivelul disciplinei

Argument

Învăţarea matematicii în şcoala generală urmăreşte conştientizarea de către elevi a naturii acestui obiect de studiu ca o activitate de rezolvare de probleme, bazată pe un set de cunoştinţe şi proceduri, dar şi ca o disciplină strâns legată de societate prin relevanţa sa în cotidian.

Prin cursul opţional de *Matematică distractivă*, se urmăreşte adaptarea unor cunoştinţe dobândite prin studiul curriculumului nucleu pentru rezolvarea de situaţii problemă non-standard, ca şi dezvoltarea unor activități şi dobândirea pe cale intuitivă a unor noțiuni complementare curriculumului nucleu.

Obiective de referință	*Exemple de activități de învățare*
La sfârşitul clasei a VI-a, elevul va fi capabil:	Pe parcursul clasei a VI-a se recomandă următoarele activități:
1. Să determine numere naturale care îndeplinesc anumite proprietăți date.	- determinarea celui mai mare şi a celui mai mic număr ce îndeplinesc condiții date (despre numărul de cifre, suma cifrelor, etc.); - aflarea unor numere ce se obțin prin modificarea cifrelor unor numere date; - exerciții de determinare a unor numere când se cunosc numărul de divizori, suma acestora, c.m.m.d.c.-ul şi c.m.m.m.c.-ul lor, etc.
2. Să aplice proprietățile operațiilor cu numere naturale în situații non-standard.	- exerciții de criptografie (determinarea unor numere ale căror cifre au fost înlocuite cu simboluri); - exerciții de calcul rapid; - efectuarea unor calcule ce necesită număr minim de operații.
3. Să rezolve probleme practice folosind reguli de divizibilitate.	- exerciții de numărare; - exerciții de numărare a unor numere naturale când se cunosc resturile împărțirilor lor cu numere date.
4. Să compună şi să descompună figuri geometrice din/în figuri geometrice.	- construirea unor figuri Tangram; - crearea de modele geometrice cu ajutorul compasului şi/sau riglei.
5. Să utilizeze baze de numerație în rezolvarea unor situații problemă.	- rezolvarea unor ecuații prin scrierea numerelor în baza 2; - prezentarea unor metode de găsire a unui număr.

6. Să analizeze paşii utilizați în diferite metode de rezolvare.	- exerciții rezolvate cu principiul cutiei; - probleme elementare de logică.
7. Să utilizeze estimări ale distanțelor, ariilor, capacităților, masei în probleme practice.	- exerciții de măsurare cu unități de măsură standard sau non-standard a unor distanțe şi arii; - exerciții de estimare a costului unor materiale de finisare sau de construcție (vopsea, parchet, tapet).

Conținuturi:

- Proprietăți ale numerelor naturale
- Operații şi relații cu numere naturale
- Numere prime şi proprietățile lor
- Reguli de divizibilitate cu 7, 11, 13 şi cu numere compuse
- Cel mai mare divizor comun şi cel mai mic multiplu comun a două numere; proprietăți
- Metode de numărare
- Principiul cutiei
- Baze de numerație
- Tangram
- Origami

Instrumente de evaluare:

1. Portofoliu
2. Proiect
3. Investigație

Bibliografie:

1. Bobancu, V., *Caleidoscop matematic*, Editura Albatros, 1979.
2. Câmpan, F., *Cum au apărut numerele*, Editura Ion Creangă, Bucureşti, 1973.
3. Gardner, M., *Amuzamente matematice*, Editura Ştiințifică, 1968.
4. Dăncilă, I., *Matematică distractivă*, Editura Sigma, 2000.

***Titlul opționalului**: Introducere în documentarea şi cercetarea ştiinţifică*

Clasa: a XII-a M1/M2/M3

Tipul de opțional: intercurricular

Durata: 1 an

Nr. ore: 1 oră/săpt.

Competențe specifice	***Conținuturi***
1. Identificarea şi aplicarea unor metode de căutare de date folosind surse diferite (bibliotecă, tehnologie informațională şi comunicațională) pentru stocarea de informații referitoare la o temă dată. 2. Identificarea unor domenii de cercetare în cadrul unei teme prin analiza cantitativă şi structurală a unei documentații. 3. Descrierea unor situații diverse sub forma unui model matematic prin analiza cantitativă a unei baze de date. 4. Abordarea unor fenomene exprimabile matematic, folosind diverse metode de stocare. 5. Argumentarea şi redactarea rezultatelor propriilor cercetări.	*Numărul de aur*: - istoric; - proprietăți geometrice şi algebrice; - aplicații în diverse domenii (tehnică, arte, ştiințe naturale). *Probleme de minim şi maxim*: - în algebră, geometrie, analiză matematică; - în aplicații practice (industrie, construcții, transporturi) pentru economisirea de material sau obținerea unui timp minim de execuție; *Programare liniară*: - modelul matematic al unei probleme liniare, rezolvarea şi interpretarea programului liniar; - algoritmul simplex. *Problema transporturilor*: - model matematic; - diferite metode de rezolvare. *Nomografie*: - istoric; - diverse aplicații în tehnică (nomograme reticulate, cu puncte aliniate, etc.): prezentare şi exemplificări.

Sugestii metodologice:

Sarcinile de lucru vor viza:

- Documentarea în cadrul unor acțiuni de tip proiect;
- Corelarea metodelor de studiu cu tipul de argumentare adoptat în lucrare (eseu, referat, proiect, notă științifică);
- Exerciții de modelare a unor situații matematice;
- Construirea unor modele matematice adecvate rezolvării unor probleme practice;
- Utilizarea metodelor standard pentru aplicații diverse;
- Imaginarea şi folosirea creativă a unor reprezentări variate pentru depăşirea unor dificultăți;
- Transferul şi extrapolarea soluțiilor unor probleme pentru rezolvarea altora;
- Folosirea unor idei, reguli sau metode matematice în abordarea unor probleme practice sau pentru structurarea unor situații diverse;
- Analiza capacității metodelor de a se adapta unor situații concrete;
- Conceperea, realizarea şi susținerea unor proiecte rezolvabile prin activități de grup.

Valori şi atitudini:

- Formarea obişnuinței de a recurge la concepte şi metode matematice în abordarea unor situații diverse;
- Dezvoltarea simțului estetic şi critic, a capacității de a aprecia rigoarea, ordinea şi eleganța în arhitectura construcției unei teorii;
- Dezvoltarea independenței în acțiune şi în gândire;
- Formarea motivației pentru studiul matematicii.

CAPITOLUL V

Forme de organizare a instruirii

5.1. Organizarea pe clase şi lecţii

Formele de organizare a instruirii sunt structuri organizatorice de realizare efectivă a predării şi învăţării.

Astfel, organizarea activităţii didactice se poate încadra în trei tipuri care interferează:

- *activitatea frontală* (lecţia);
- *activitatea pe grupe de elevi* (consultaţii, meditaţii cu scop de recuperare, exerciţii independente, cercul de elevi, concursuri, sesiuni de comunicări şi referate);
- *activitatea individuală* (efectuarea temelor, rezolvarea de probleme şi exerciţii, studiul în biblioteci, întocmirea de referate, proiecte, modele, pregătirea unor comunicări ştiinţifice, examene).

5.2. Lecţia, unitate didactică fundamentală

Termenul de ***lecţie*** provine din latinescul *lectio*, derivat din *legere*, care semnifică a audia, a lectura. Lecţia este o unitate didactică funcţională, care reflectă totalitatea caracteristicilor ce definesc didactica. Ea presupune un scop şi obiective bine determinate; angajează resurse umane, materiale şi de conţinut; presupune selectarea unor metode şi mijloace de învăţământ; se realizează într-un timp determinat şi în mediu pedagogic; implică strategii de desfăşurare şi evaluare. Lecţia este o formă mai comodă de organizare şi desfăşurare a activităţii pentru profesor, conferă sistematicitate şi continuitate procesului de instruire.

Tipul de lecție exprimă modul de concepere şi realizare a activității de predare-învățare-evaluare, suportând variante ale tipului de bază, determinate mai ales de particularitățile clasei de elevi, de strategia metodologică şi mijloacele de învățământ folosite.

Principalele categorii de lecții sunt:

Lecția mixtă, care urmăreşte realizarea, în măsură aproximativ egală, a mai multor sarcini didactice (comunicare, sistematizare, fixare, verificare), fiind cel mai des tip de lecție întâlnit în practica didactică, mai ales la clasele mici.

Structura relativă a unei lecții mixte este:

- *moment organizatoric;*
- *verificarea conținuturilor însuşite*, prin verificarea temei, verificarea cunoştințelor, deprinderilor, priceperilor dobândite de elev;
- *pregătirea elevilor pentru receptarea noilor cunoştințe*, prin conversație introductivă, în care sunt actualizate cunoştințele dobândite anterior, relevante pentru noua temă, prin prezentarea unor situații problemă, pentru depăşirea cărora sunt necesare cunoştințe noi;
- *precizarea titlului şi a obiectivelor*, profesorul comunicând elevilor ce aşteaptă de la ei la sfârşitul activității;
- *comunicarea/însuşirea noilor cunoştințe* printr-o strategie metodică, corelată obiectivelor, conținutului temei şi elevilor;
- *fixarea şi sistematizarea conținuturilor predate* prin repetare şi exerciții aplicative;
- *explicații pentru continuarea învățării acasă şi pentru realizarea temei.*

Lecția de comunicare/însuşire de noi cunoştințe are ca obiectiv fundamental însuşirea de noi cunoştințe şi dezvoltarea unor capacități şi atitudini intelectuale. Astfel, predomină dobândirea noului, celelalte etape corespunzătoare tipului mixt (diferite de comunicarea/însuşirea noilor cunoştințe) fiind prezente, dar cu o pondere mult mai mică, în funcție de vârsta elevilor (la clasele mari, lecția de comunicare tinde să aibă o structură monostadială).

Lecția de comunicare/însuşire de noi cunoştințe are ca variante:

- *lecția introductivă*, care oferă o imagine de ansamblu asupra unei discipline sau a unui capitol;
- *lecția prelegere*, cu un conținut de predare vast, este întâlnită doar la clasele liceale terminale deoarece aici puterea de receptare a elevilor este foarte mare;
- *lecția seminar*, care presupunere dezbaterea unui subiect în timpul orei pe baza studierii prealabile de către elevi a unor materiale informative. Ea se realizează tot la clasele mari;
- *lecția programată*, care se desfăşoară pe baza manualului, a textului programat sau folosind programe de învățare computerizate.

Lecția de formare de priceperi şi deprinderi (*specifice matematicii*) urmăreşte familiarizarea elevilor cu diferite procedee de muncă intelectuală, obişnuirea lor cu organizarea şi desfăşurarea muncii independente, aplicarea în practică a cunoştințelor. Structura orientativă a acestui tip de lecție este de forma:

- *moment organizatoric;*
- *precizarea temei şi a obiectivelor activității;*
- *actualizarea sau însuşirea unor cunoştințe* necesare desfăşurării activității;
- *demonstrația sau exercițiul-model*, efectuate de către profesor;
- *antrenarea elevilor în realizarea activității* cu ajutorul profesorului;
- *rezolvarea independentă* a lucrării, exercițiului, de către fiecare elev;
- *aprecierea performanțelor elevilor şi precizări privind modul de continuare a activității desfăşurate* în timpul orei.

Lecția de fixare şi sistematizare urmăreşte, în special, consolidarea cunoştințelor însuşite, aprofundarea lor şi completarea unor lacune. Ea se realizează prin recapitulare. Acest tip de lecție devine eficient dacă se redimensionează conținuturile în jurul unor idei cu valoare cognitivă relevantă. Ca urmare, elevii devin capabili să realizeze conexiuni care să le permită aplicații mai complexe şi mai operative.

Structura orientativă a acestui tip de lecţie presupune următoarele etape:

- *precizarea conţinutului, a obiectivelor şi a unui plan de recapitulare*, etapă recomandată a fi făcută înaintea desfăşurării propriu-zise a orei şi apoi la începutul orei sau a orelor de recapitulare;
- *recapitularea conţinutului pe baza planului stabilit*, clarifică şi elimină confuziile constatate de profesor şi realizează scheme sau sinteze esenţiale la nivelul conţinutului analizat;
- *rezolvarea de către elevi a unor lucrări pe baza cunoştinţelor recapitulate* este etapa cu cea mai mare pondere în structura lecţiei, concretizată prin rezolvarea de exerciţii şi probleme;
- *aprecierea activităţii elevilor*;
- *precizarea şi explicarea temei*.

În funcţie de întinderea conţinutului supus recapitulării (o temă, un capitol, materia unui semestru sau a unui an şcolar) putem evidenţia mai multe variante ale acestui tip de lecţie:

- *lecţia de repetare curentă* se realizează după câteva lecţii de comunicare în care au fost abordate cunoştinţe de bază, fără de care înţelegerea altor conţinuturi nu este posibilă;

- *lecţia de recapitulare pe baza unui plan* dat de profesor sau alcătuit cu ajutorul elevilor se compune la sfârşitul unor capitole sau teme mari din programă;

- *lecţia de sinteză* se programează la sfârşitul unor unităţi mari de conţinut: capitole mari, semestru sau an şcolar.

Pornind de la metodele sau mijloacele utilizate în desfăşurarea lecţiei, variantele de lecţii menţionate pot conduce la noi tipuri, ca de exemplu: *lecţia de recapitulare sau de sinteză pe bază de exerciţii aplicative*, *lecţia recapitulativă pe bază de fişe*.

Lecţia de verificare şi apreciere a rezultatelor şcolare urmăreşte în principal constatarea nivelului de pregătire a elevilor, dar şi încadrarea cunoştinţelor în noi cadre de referinţă cu rol în viitoarele trasee de învăţare.

Structura relativă a acestui tip de lecţie este formată din etapele următoare:

- *precizarea conținutului* ce urmează a fi verificat;
- *verificarea conținutului* (dacă verificarea este verbală, este indicat de a realiza o sistematizare a cunoştințelor, corectarea unor confuzii);
- *aprecierea rezultatelor* se face la sfârşitul orei, în cazul verificării orale, sau la următoarea întâlnire a profesorului cu elevii, dacă verificarea este scrisă;
- *precizări* privind modalitățile de completare a lacunelor şi de corectare a greşelilor şi *sugestii* în legătură cu valorificarea conținuturilor actualizate în activitatea viitoare.

Variantele lecției de verificare şi apreciere sunt: *lecția de evaluare orală, prin lucrări scrise,* etc.

5.3. Elaborarea proiectelor de lecție

Lecția este considerată o componentă operațională pe termen scurt a unității de învățare. De aceea, proiectul unității de învățare trebuie să ofere o derivare simplă a lecțiilor componente. Acesta, dacă este corect întocmit, conține suficiente date pentru a oferi o imagine asupra fiecărei ore. În tabelul ce sintetizează proiectarea unității de învățare, se pot delimita prin linie orizontală punctată spațiile corespunzătoare orelor de curs (lecțiilor). Astfel, pentru fiecare lecție, proiectul unității de învățare oferă date referitoare la obiectivele de referință vizate, la elementele de conținut asociate, activitățile de învățare propuse, resursele materiale, formele de organizare a clasei pentru fiecare activitate, instrumentele de evaluare necesare la nivelul lecției.

Pentru evidențierea activității didactice a zilei în condică se poate preciza numele unității de învățare şi numărul de ordine în aceea unitate de învățare a orei respective sau se poate aloca un titlu generic pentru activitatea de învățare din ora respectivă.

Cu toate că realizarea proiectului unei unități de învățare nu ar mai necesita întocmirea separată a unui plan de lecție, acesta este încă solicitat în diverse situații.

Pe parcursul unei lecții, profesorul desfăşoară mai multe activități didactice: proiectarea, realizarea, evaluarea, reglarea.

Schematic, un proiect de lecție se prezintă astfel:

Proiect de lecție

1. ***Data***
2. ***Disciplina***
3. ***Clasa***
4. ***Subiectul lecției***
5. ***Tipul de lecție***
6. ***Obiectivul fundamental***

Desfăşurarea lecției se referă la momentele de parcurs, cu precizarea reperelor temporale, a metodelor şi mijloacelor de învățământ, a formelor de realizare a învățării. Proiectul este centrat pe conținut şi pe acțiunea profesorului şi a elevilor.

Momente ale lecției	Obiective operaționale	Conținutul şi metodica desfăşurării lecției		Strategii didactice. Metode. Mijloace. Forme de activitate.
		Activitatea profesorului	Activități de învățare	

5.4. Evaluarea eficienței lecției

Evaluarea şi autoevaluarea lecției este un moment important al activității didactice. Principalele repere cu care se apreciază reuşita unei lecții, atât de către profesorul realizator, cât şi de un evaluator extern (metodician, inspector) sunt:

1. **Proiectarea lecției**: *calitatea proiectului de lecție* este stabilită în funcție de documentarea ştiințifică şi metodică a profesorului, de identificarea şi explicarea corectă a obiectivelor lecției, de corelarea acestora cu celelalte componente ale lecției, de creativitatea dovedită în structurarea lecției.

2. **Realizarea lecției** este măsurată prin mai mulți indicatori:

- *pregătirea condițiilor necesare desfăşurării lecției* (asigurarea mijloacelor de învățământ, organizarea colectivului de elevi);
- *valențe educative, formative* (contribuția lecției la dezvoltarea gândirii, limbajului, imaginației, autonomiei elevilor);
- *conținutul ştiințific* (rigurozitatea noțiunilor ştiințifice care fundamentează conținutul, corectitudinea informațiilor prezentate în cadrul lecției, dozarea optimă a informațiilor şi valorilor transmise);
- *corelații inter- şi intradisciplinare* (stabilirea corectă a locului lecției în sistem, valorificarea cunoştințelor, priceperilor şi deprinderilor prealabile în învățarea noului conținut, sublinierea elementelor esențiale ce vor interveni în lecțiile următoare, corelații cu date cunoscute de la alte discipline de învățământ);
- *caracter practic-aplicativ* (aplicarea în lecție a cunoştințelor dobândite, posibilitatea aplicării în alte lecții, la aceeaşi disciplină sau la alte discipline a cunoştințelor dobândite);
- *alegerea şi folosirea metodelor de predare-învățare* (utilizarea unor metode active, centrate pe elev, măsura în care strategia didactică este corelată cu particularitățile elevilor, preocuparea pentru formarea deprinderilor de activitate independentă, folosirea de metode şi procedee în scopul accentuării caracterului formativ al învățării);
- *îmbinarea diferitelor forme de activitate* (existența în lecție a unor forme variate de activitate, gradul de implicare directă în lecție a fiecărui elev, conturarea unui spirit cooperant, dialogul elev-elev);
- *integrarea mijloacelor de învățământ* (utilizarea mijloacelor de învățământ existente în şcoală, confecționarea de material didactic necesar lecției pentru activitatea demonstrativă sau individuală, valorificarea completă a intuirii, esteticii şi funcționalității acestuia);
- *crearea motivației, activizarea elevilor* (modul de realizare a captării atenției elevilor la introducerea noului conținut, prezentarea obiectivelor urmărite în lecție, gradul de antrenare a elevilor, repartizarea echilibrată a sarcinilor pe fiecare elev);
- *densitatea lecției, dozarea judicioasă a timpului* (proporționarea corespunzătoare a timpului afectat fiecărei etape a lecției, în funcție de obiectivele propuse, încadrarea în timp a lecției);

- *evaluarea formativă* (măsura în care se realizează în lecție feed-back-ul, evaluarea tuturor obiectivelor operaționale ale lecției, preocupări legate de notarea elevilor).

3. **Comportamentul profesorului** este indicat de:

- *organizarea, îndrumarea, conducerea şi controlul activității de predare* (crearea unei situații de învățare adecvate, măsura în care profesorul reuşeşte să urmărească activitatea clasei, formularea cât mai clară a sarcinilor de lucru şi consecvență în urmărirea acestora, asigurarea unei atmosfere de lucru favorabilă activității fiecărui elev, adaptarea comportamentului profesorului la reacțiile clasei, realizarea dialogului profesor-elev, elev-profesor, elev-elev);

- *conduita în relațiile cu elevii, limbajul, ținuta* (comportament relațional, adaptarea conduitei, limbajului, ținutei la nivelul clasei, capacitatea stăpânirii de sine, elemente de tact).

4. **Autoevaluarea**, măsurată prin *receptivitate, autoanaliză şi spirit critic* (sesizarea, în autoanaliza lecției, a gradului de urmărire a performanțelor dorite, determinarea aspectelor mai puțin realizate în lecție, a cauzelor acestora şi furnizarea unor alternative didactice care să elimine nerealizările, receptivitate la observațiile evaluatorului, autoevaluarea corectă a nivelului de realizare a lecției).

5. **Observații**, cuprinzând aspecte deosebite privind contextul psihopedagogic al lecției, sugestii şi recomandări.

Pe parcursul practicii pedagogice, studenții au de completat fişe de observare la lecțiile la care asistă. La început, acestea au o formă simplă, cerându-se examinarea unui singur aspect, cum ar fi: modul de interacțiune, folosirea tablei, a resurselor (umane, materiale, de timp şi informaționale). Pe parcurs, structura fişelor se complică, studenții trebuind să urmărească mai multe categorii de itemi deodată: calitățile personale şi profesionale ale profesorului, planificarea lecției, desfăşurarea lecției, managementul clasei.

În Anexa 5 este prezentat un model de fişă de observare a lecției care poate fi folosit în cadrul evaluării activității profesorului.

CAPITOLUL VI

Evaluarea în procesul de învățământ

6.1. Funcțiile evaluării

Ştiința care studiază metodologia verificării şi evaluării rezultatelor şcolare, sistemul de notare, comportamentul examinatorilor şi al examinaților poartă numele de ***docimologie***.

În învățământ, sistemul de evaluare urmăreşte:

- evaluarea obiectivelor curriculare şi a strategiilor educaționale utilizate în scopul rezolvării acestora;
- evaluarea activității de predare-învățare, a strategiilor didactice şi a metodelor de învățământ;
- evaluarea nivelului structurilor psihice ale elevilor (cognitive, operaționale, psihomotrice, atitudinal-valorice);
- evaluarea performanțelor profesionale;
- evaluarea întregului sistem de învățământ;
- informarea elevilor, părinților şi a societății cu privire la rezultatele obținute şi asupra cauzelor nerealizării obiectivelor curriculare propuse;
- diversificarea metodelor şi a tehnicilor de evaluare.

A evalua rezultatele şcolare înseamnă a determina măsura în care obiectivele programului de instruire au fost atinse, precum şi eficiența metodelor de predare-învățare folosite.

Evaluarea îndeplineşte mai multe funcții:

- ***de constatare şi diagnosticare*** a performanțelor obținute de elevi;

- ***de reglare şi perfecţionare*** continuă a metodologiei instruirii, ceea ce se realizează prin feed-back;
- ***de informare*** a părinţilor elevilor şi a societăţii cu privire la rezultatele şi evoluţia pregătirii elevilor în şcoală pentru integrarea lor socio-profesională;
- ***motivaţională***, de stimulare la elevi a interesului pentru învăţare, autocunoaştere şi autoapreciere corectă;
- ***de predicţie şi de decizie***, în scopul ameliorării activităţii instructiv-educative, pe baza cunoaşterii cauzelor unei eventuale ineficienţe;
- ***de selecţionare şi clasificare*** a elevilor în raport cu rezultatele şcolare obţinute;
- ***formativ-educativă***, cu rol în optimizarea învăţării şi în consolidarea competenţelor şcolare;
- ***de perfecţionare şi inovare*** a întregului sistem şcolar.

6.2. Forme de evaluare

După modul de integrare a verificării şi evaluării în procesul de învăţământ distingem mai multe forme de evaluare, dintre care:

Evaluarea iniţială ţine cont de faptul că performanţele viitoare ale elevilor depind şi de cunoştinţele anterioare.

Evaluarea sumativă (cumulativă) este o evaluare tradiţională, efectuată periodic prin verificări de sondaj şi global, la încheierea unui semestru sau an şcolar. Ea nu este o evaluare ritmică; nu are caracter stimulativ şi nu oferă suficiente date asupra eficienţei programului de instruire. De aceea se recomandă folosirea ei în mod limitat şi în combinaţie cu evaluarea continuă.

Evaluarea continuă (formativă) se desfăşoară în cadrul lecţiilor, la sfârşitul unui capitol, elevii fiind verificaţi din toată materia. Acest tip de evaluare are un caracter ritmic, se bazează pe un feed-back continuu, conduce la stabilirea unor relaţii de cooperare între profesor şi elevi.

Evaluarea şi notarea şcolară alcătuiesc o modalitate de codare numerică sau în calificative a rezultatelor obţinute de elevi. Ea presupune comparații, clasificări, cadrul de comparație ales putând fi diferit. Elevul se raportează astfel la:

- propriul său nivel obținut, observând un progres sau un regres şi promovând o motivație de autodepăşire;
- nivelul clasei sau al unui grup reprezentativ de elevi, comparație ce promovează competiția, cultivă motivația pentru reuşita profesională. În acest caz, ***evaluarea*** se numeşte ***normativă*** şi conduce la ierarhizarea copiilor în clasă;
- obiectivele propuse. Se inițiază activități de recuperare, când este cazul, astfel încât majoritatea elevilor (80%) să se înscrie într-un barem luat drept criteriu. Această ***evaluare formativă*** nu clasifică propriu-zis elevii.

Pentru a stabili un consens în gradarea performanței şcolare se pot lua în considerație mai multe criterii, ca de exemplu:

- gradul de dificultate al sarcinii – teme dificile, medii, uşoare, elementare;
- completitudinea răspunsului – răspuns complet, lacune minore, semnificative, majore;
- ajutorul acordat în răspuns – rezolvare independentă, sprijin minor la mici ezitări în răspuns, sprijin semnificativ;
- nivelul de exactitate – răspunsuri exacte, mici erori (răspunsuri exacte medii), erori mari, erori semnificative;
- gradul de îndemânare – execuție rapidă şi exactă, execuție cu ezitări, execuție cu ajutor, execuție eşuată;
- nevoia de sprijin figural, ilustrativ (exemple) sau prestație de nivel teoretico-aplicativ completă.

Pornind de la acestea, se pot stabili prin consens ***descriptori de performanță*** care să gradeze unitar prestația elevului în cadrul fiecărei teme sau sarcini.

Astfel, verificarea şi evaluarea rezultatelor şi a progreselor şcolare ale elevilor se referă la:

- ***nivelul de cunoştințe (structuri cognitive)*** însuşit de elevi, raportat la obiective şi conținut, temeinicia cunoştințelor;
- ***nivelul structurilor operaționale***: capacitatea de a efectua operații logice de analiză, comparație, sinteză, abstractizare, generalizare, posibilitatea de a comunica, de a explica şi demonstra logic pe

bază de argumente, de a efectua raționamente inductive şi deductive, de a elabora definiții şi de a redefini, de a efectua judecăți de valoare asupra cunoştințelor şi de autoevaluare;

- ***capacitatea de aplicare a cunoştinţelor***: de a descoperi, de a inventa, de a rezolva exerciții şi probleme, de a se autoinstrui;
- ***nivelul structurilor psihomotrice***: deprinderile specifice matematicii: de muncă intelectuală, de cercetare ştiințifică. Pentru acestea, vom lua în calcul: volumul, gradul de automatizare, complexitatea, rapiditatea, precizia;
- ***trăsăturile de personalitate***: motivațiile, atitudinile, convingerile, perseverența, tenacitatea, hotărârea, dorința de a învăța, nivelul de aspirație care influențează şi ele randamentul şcolar.

Standardele de performanță (minimă, medie, superioară) sunt criterii de evaluare a realizării de către elevi a obiectivelor cadru şi a celor de referință din programele şcolare.

De exemplu, programa clasei a VIII-a stabileşte standardele curriculare de performanță.

Pentru primul obiectiv cadru: *Cunoaşterea şi înțelegerea conceptelor, a terminologiei şi a procedurilor de calcul specifice matematicii*, sunt stabilite 9 standarde, dintre care menționăm:

S1. Scrierea, citirea, compararea şi reprezentarea pe axă a numerelor reale;

S2. Efectuarea corectă a operațiilor cu numere reale (eventual reprezentate prin litere);

S3. Utilizarea estimărilor şi a aproximărilor de numere şi măsuri (lungimi, unghiuri, arii şi volume) pentru a aprecia validitatea unor calcule.

Pentru fiecare astfel de standard, se stabileşte apoi un nivel minim şi maxim. În cazul nostru, pentru standardul ***S1***. se precizează:

Minim: Scrierea şi citirea numerelor reale. Recunoaşterea numerelor raționale. Scrierea unui număr rațional sub formă zecimală sau fracționară. Compararea numerelor raționale. Reprezentarea pe axă a numerelor întregi.

Maxim: Recunoaşterea numerelor iraționale. Compararea numerelor iraționale. Reprezentarea pe axă a numerelor reale.

Pentru o notare cât mai obiectivă a elevilor, pe baza acestor standarde, se elaborează ***descriptori de nivel***: nivelul 1 (notele 4-5), nivelul 2 (notele 5-6), nivelul 3 (notele 7-8), nivelul 4 (notele 9-10).

6.3. Metode de verificare şi evaluare

Experienţa pedagogică a dus la conturarea unor metode şi tehnici de verificare. Ele se pot clasifica în:

- ***metode tradiţionale***: probe orale, scrise, practice;
- ***metode complementare***: observarea sistematică a elevilor, investigaţia, proiectul, portofoliul, tema pentru acasă, tema de lucru în clasă, autoevaluarea.

Verificarea orală este des folosită de profesori deoarece favorizează dialogul: elevul are posibilitatea să-şi justifice răspunsul, iar profesorul, prin feed-back, poate corecta sau completa răspunsul elevului, poate testa conţinutul din lecţia anterioară cât şi nivelul de pregătire al clasei.

De obicei, în practică, se folosesc forme combinate de verificare, îmbinând examinarea frontală cu procedee de ascultare individuală. De exemplu, se verifică partea teoretică cu ajutorul întregii clase şi se rezolvă la tablă individual anumite exerciţii sau probleme aplicative.

Chestionarea orală are şi unele limite, cum ar fi: întrebările nu pot avea acelaşi grad de dificultate, unii elevi sunt mai emotivi, timpul nu permite o verificare completă a conţinutului predat, comportamentul profesorului (nerăbdare, indulgenţă, exigenţă exagerată) poate conduce la o notare subiectivă.

Pentru a înlătura unele dintre aceste limite se impun anumite cerinţe. Astfel, întrebările trebuie:

- să fie centrate pe obiective operaţionale, vizând conţinutul esenţial, formarea priceperilor, a deprinderilor, abilităţilor, capacităţilor intelectuale;
- să fie adresate mai întâi întregii clase; apoi să fie numit un elev care să răspundă; acesta nu este întrerupt decât dacă nu se referă la subiect sau face greşeli grave;
- să fie corect formulate, la obiect şi să aibă o înlănţuire logică;

- să solicite gândirea independentă, inteligența şi creativitatea elevului;
- să fie puse într-o atmosferă destinsă, de acceptare reciprocă, fără critici, ironii;
- să fie notate cât se poate de obiectiv.

Verificarea scrisă este realizată prin verificări curente (lucrări de control) sau prin lucrări scrise semestriale (teze). Lucrările de control durează maxim o oră şi pot fi date fără ca elevii să fie avertizați. Prin acestea se urmăresc: verificarea cunoştințelor din lecția de zi, conştiinciozitatea cu care se pregătesc elevii, greşelile comune ce apar, noțiunile înțelese mai greu sau mai uşor. Tezele acoperă o anumită parte a materiei predate; ele sunt anunțate şi sunt pregătite prin lecții recapitulative. Prin aceste lucrări scrise, profesorul urmăreşte întinderea materiei pe care o stăpânesc elevii, capacitatea lor de a selecta şi sistematiza ceea ce este esențial într-un volum mare de cunoştințe învățate.

Probele scrise sunt preferate de mulți profesori şi elevi: asigură un grad mai mare de obiectivitate în notare, oferă elevilor mai emotivi sau a celor mai lenți în gândire posibilitatea de a prezenta toate cunoştințele, asigură evaluarea unui număr mai mare de elevi într-un timp scurt, se verifică acelaşi conținut, favorizează realizarea comparării rezultatelor.

Această metodă are şi ea limitele ei: profesorul nu poate corecta pe loc erorile sau greşelile de exprimare ale elevului, unele confuzii sau tratarea incompletă a conținutului esențial.

Referatul permite o apreciere nuanțată a învățării şi identificarea unor elemente de performanță individuală ale elevului. Se poate utiliza atât pentru evaluarea continuă, pe parcursul unui semestru, cât şi pentru evaluarea sumativă în cadrul unui modul, încadrat într-un portofoliu sau independent.

Putem diferenția două tipuri de referate: *referatul de investigație ştiințifică independentă*, bazat pe activități desfăşurate în clasă, cu analiza rezultatelor obținute şi *referatul bibliografic*, bazat pe informarea documentară, biografică.

Acest instrument este indicat la clasele mai mari pentru motivarea elevilor cu potențialuri înalte.

Există riscul ca elementele de conţinut să fie „copiate", translatate fără nicio intervenţie sau resemnificare personală.

Investigaţia explorează situaţiile noi sau foarte puţin asemănătoare cu experienţa anterioară, derulându-se pe durata unei lecţii (sau mai multe). Elevul sau grupul de elevi primesc o temă cu sarcini precise care se poate formula şi sub forma unei teme pentru acasă, dar care *se definitivează în clasă, prin comentarea concluziilor*.

Proiectul este o metodă complexă de evaluare, individuală sau de grup, folosită de profesor în evaluarea sumativă. Subiectul este stabilit de profesor la început, elevii putând propune ei înşişi teme de studiu după ce s-au obişnuit cu acest tip de activitate. El poate avea o conotaţie teoretică, practică, creativă. Proiectul se poate derula pe o perioadă mai mare de timp, pe secvenţe structurate dinainte sau circumstanţial.

Portofoliul este o metodă de evaluare longitudinală, proiectată pe o perioadă mai lungă de timp, care se poate încadra într-o evaluare sumativă. Portofoliul este complex, format din elemente diferite, ca formă de transmitere a mesajului şi a informaţiei: *fişe de informare şi documentare independentă, referate, eseuri, pliante, prospecte, desene, colaje.* Alegerea elementelor de portofoliu obligatorii sunt subordonate obiectivelor de referinţă prevăzute în programa modulului şi obiectivelor de referinţă suplimentare, stabilite de profesor. Profesorul va prezenta elevilor un model de portofoliu compatibil cu vârsta acestora, conţinând elemente asemănătoare cu cele propuse ca temă, criterii de apreciere clare şi caracteristica valorică a diferitelor elemente.

Tematica şi sursele de informare recomandate trebuie să stimuleze interesul pentru domeniul abordat şi să-i creeze elevului posibilitatea ca în final să poată emite o judecată de valoare. *Portofoliul nu-şi atinge scopul dacă tematica are un grad ridicat de generalitate, iar elevul este înlocuit de familie pentru realizarea activităţilor.*

Observaţia sistematică a comportamentului elevilor se realizează în cadrul activităţii de predare la clasă şi prin relaţiile cu elevii: contribuţiile spontane ale acestora, modul de realizare a temei, calitatea prestațiilor în munca independentă şi la fixarea cunoştințelor, manifestări de neatenție, dificultăți şi greşeli semnificative. Toate acestea nu fac explicit obiectul notării, dar sunt folosite în a realiza aprecieri corespunzătoare fiecărui elev.

Observația se bazează pe următoarele instrumente de evaluare:

1. *Fişa de evaluare* care cuprinde:

- date generale despre elev (nume, prenume, vârsta, climatul educativ din mediul care provine);
- particularități ale proceselor intelectuale (gândire, limbaj, imaginație, memorie, atenție, spirit de observație);
- aptitudini şi interese;
- trăsături de afectivitate;
- trăsături de temperament;
- atitudini față de sine, colegi, disciplina şi obligațiile şcolare;
- evoluția aptitudinilor, atitudinilor, intereselor, nivelului de integrare.

Fişele se elaborează în general pentru elevii care au nevoie de îndrumare şi observarea se limitează la câteva comportamente relevante.

2. Scara de clasificare care indică profesorului frecvența cu care apare un anumit comportament. Se răspunde la întrebări de tipul „în ce măsură elevul participă la discuții?” prin „niciodată, rar, ocazional, frecvent sau întotdeauna”.

3. Lista de control/verificare utilizată numai în cazul elevilor cu dificultăți de învățare şi care poate avea următoarea formă:

Atitudinea elevului față de sarcina de lucru	Da	Nu
A urmat instrucțiunile		
A cerut ajutor atunci când a avut nevoie		
A cooperat cu ceilalți		
A încercat activități noi		
A dus activitatea până la capăt		

Autoevaluarea este o metodă de evaluare cu mari valențe formative. Ea permite aprecierea propriilor performanțe în raport cu obiectivele lecțiilor şi cu criteriile de apreciere.

Ca metode şi tehnici de autoevaluare se pot folosi:

- *autocorectarea sau corectarea reciprocă*, elevul fiind solicitat să-şi depisteze unele erori, lipsuri, în momentul realizării unei sarcini de învățare proprii sau când corectează lucrările colegilor. Depistarea lacunelor proprii sau pe cele ale colegilor, chiar dacă nu sunt sancționate prin note, constituie un prim pas pe calea conştientizării competențelor în mod independent;
- *autonotarea controlată* presupune că elevul este solicitat să-şi acorde o notă care apoi este negociată cu profesorul sau cu colegii pe bază de argumente;
- *notarea reciprocă* constă în faptul că elevilor li se cere să dea note colegilor la lucrări scrise sau la ascultări orale, fără a se concretiza cu notare efectivă.

6.4. Notarea şcolară

Aprecierea rezultatelor şcolare este materializată prin notarea şcolară. Aceasta este un indice care are mai multe funcții: de informare pentru elevi, profesori, părinți; de reglare a procesului de învățare şi are valoare educativă.

Aprecierea verbală, prin exprimări valorice (acord, dezacord, laudă, mustrare, bine, corect, inexact, bravo) nu este foarte exactă, dar ea induce anumite stări de satisfacție sau insatisfacție elevilor.

Notarea numerică, cu note de la 1 la 10, simbolizează un anumit grad de reuşită sau nereuşită. În procent de 80%, ea este un inventar al cunoştințelor, reproduse uneori mecanic de elev, după matricea profesorului. Nu se pune astfel accentul pe capacitatea elevului de a opera cu cunoştințele, pe aptitudinile şi creativitatea lui.

Tendințele de subiectivism ale profesorilor se pot manifesta sub mai multe forme dintre care menționăm:

- *efectul „halo”* constă în supraaprecierea unor elevi datorită impresiei generale foarte bune; persoanele cunoscute pot fi tratate mai indulgent comparativ cu cele necunoscute (efectul „blând”); o realitate poate fi prezentată la modul superlativ (eroare de generozitate);
- *efectul „Pygmalion”* constă în anticiparea notei înainte ca elevul să răspundă;

- *efectul de contrast* apare când un răspuns poate să primească o notă mai bună decât merită dacă urmează după evaluarea unui rezultat mai slab, sau să primească o notă mediocră dacă urmează imediat după un răspuns excelent;
- *efectul de ordine* prin care profesorul menține acelaşi nivel de apreciere pentru mai multe răspunsuri care presupun totuşi anumite diferențe calitative;
- *ecuația personală a examinatorului* este legată de criteriile proprii de apreciere ale profesorilor, de faptul că unii profesori sunt mai exigenți, alții mai generoşi, unii folosesc nota ca un stimulent, alții ca o constrângere pentru efort suplimentar, unii apreciază mai mult originalitatea soluțiilor, alții conformitatea cu informațiile predate.

Pentru a elimina pe cât posibil subiectivismul în notare se propun ca tehnici:

Baremul de notare, o grilă de evaluare şi notare unitară, care descompune tema în subteme şi prevede un anumit punctaj pentru fiecare dintre acestea.

Testul docimologic, o probă standardizată folosită pentru verificări cu caracter periodic, suficient de spațiate în timp, la încheierea unui capitol, la examene. Distingem:

- *teste inițiale,* prevăzute la început de capitol, semestru, an şcolar pentru a defini momentul de start în procesul de instruire;
- *teste de progres,* pe parcursul instruirii, în raport cu obiectivele înscrise în programă;
- *teste finale,* de sinteză, la încheierea semestrului sau a anului şcolar.

În elaborarea testelor, profesorul parcurge următoarele etape: stabileşte obiectivele şi conținutul, pe care îl structurează logic, formulează întrebări (itemi) pe baza obiectivelor şi a conținutului lecțiilor, precizează exercițiile şi problemele de rezolvat şi fixează punctajul pentru acestea.

În funcție de tipul răspunsurilor, testele pot fi cu:

- *răspunsuri deschise*, care stimulează creativitatea, judecata, spiritul critic, răspunsurile fiind formulate în întregime de elevi. Se pot folosi *itemi sub formă de redactare* (elevii desfăşoară o temă) sau *itemi cu răspunsuri scurte* (se recurge la propoziții sau fraze scurte);
- *răspunsuri închise*, unde putem întâlni *itemi tip alegere multiplă* (se oferă mai multe soluții din care doar una este corectă), *itemi tip adevărat-fals*, *itemi pereche* (elevii trebuie să găsească noțiuni sau idei corelate cu cele prezente în întrebări).

Indicele de eficiență al unui test se stabileşte pornind de la măsura în care itemii permit stabilirea unei ordonări valorice a elevilor.

O clasificare a itemilor realizată de *Serviciul Național de Evaluare şi Examinare*, conduce la următoarea tipizare:

1. *Itemi obiectivi*, care măsoară rezultatele învățării situate la nivelurile cognitive inferioare (cunoştințe, priceperi şi capacități de bază). Astfel de itemi pot fi: *de tip alegere duală*, *de tip pereche* sau *împerechere*, *de tip alegere multiplă*. Caracteristica principală a itemilor obiectivi este gradul ridicat de obiectivitate în măsurarea şi aprecierea rezultatelor învățării. Folosind acest tip de itemi, se testează un număr mare de elemente de conținut, într-un timp scurt, se asigură obținerea de informații sigure privind nivelul de însuşire a noțiunilor de bază.
2. *Itemi semiobiectivi*, care cuprind întrebări şi cerințe care presupun elaborarea răspunsurilor de către elevi. Ei pot fi folosiți pentru toate etapele de evaluare. Din această categorie fac parte *itemii de tip răspuns scurt*, cei *de completare, de întrebări structurate*. În acest caz, elevul nu trebuie să aleagă un răspuns, ci trebuie să-l construiască. Se măsoară astfel o gamă mai largă de capacități intelectuale, cu nivel de dificultate variabil. Pentru astfel de itemi este necesară o schemă de notare detaliată (barem), punctajul acordându-se parțial sau integral.
3. *Itemi subiectivi* sau *cu răspuns deschis*, care testează capacitatea de tratare coerentă, în mod personal, a unui subiect, cât şi originalitatea, creativitatea. Aceşti itemi dezvoltă capacitatea elevului de a formula, a descrie, a prezenta sau explica diferite concepte, argumente, metode le lucru. Din această categorie fac parte *itemii de tip rezolvare de probleme, investigația, proiectul, portofoliul.* Trăsătura dominantă a acestor itemi este aceea de a putea testa niveluri cognitive ridicate

(aplicare, analiză, sinteză, evaluare). Şi în acest caz este necesar să se realizeze un barem amănunțit după care să se facă notarea.

De exemplu, pentru tema *Inducție matematică*, putem considera:

- *Item cu alegere duală*:

Stabiliți dacă următoarea afirmație este adevărată sau falsă:

$$1^2+2^2+...+n^2=\frac{n(n+1)(n+2)}{6}, \forall n \geq 1.$$

- *Item cu alegere multiplă*:

Alegeți răspunsul corect:

Suma $1\cdot 2\cdot 3+2\cdot 3\cdot 4+...+n(n+1)(n+2)$ este egală cu:

a) $\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$, b) $\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$, c) $\frac{n^2(n+1)^2}{4}$,

d) $\frac{n(n-1)(n+1)(n+2)}{4}$.

- *Item cu întrebări structurate*:

a) Determinați a şi b, numere reale, astfel încât

$$\frac{1}{k(k+1)}=\frac{a}{k}+\frac{b}{k+1}, \forall k \in N^*;$$

b) Calculați suma $S=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+...+\frac{1}{n(n+1)}, n \in N^*$;

c) Demonstrați prin inducție matematică $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}=\frac{n}{n+1}$.

- *Item cu răspuns scurt/de completare*:

Completați spațiul punctat astfel încât să se obțină o informație adevărată: $\sum_{k=1}^{n} k = ...$

- *Item cu răspuns deschis*:

Calculați $S=1\cdot 5+2\cdot 6+...+n(n+4)$.

CAPITOLUL VII

Comunicarea didactică

7.1. Relația profesor-elev

Relația profesorului cu clasa şi cu fiecare elev în parte este deosebit de importantă. Ea se realizează şi se definitivează în timp prin implicarea ambelor părți. Acest tip de relație nu trebuie să rămână la stadiul formal, ci se personalizează mereu. Raportul profesor-elev nu este unul echilibrat, din anumite rațiuni obiective cum ar fi: diferența de vârstă, de statut social, de acumulare a experienței, etc. Aceste diferențe nu trebuie însă să conducă la deprecierea elevilor, la constrângerea acestora în acceptarea voinței profesorului, la autoritarism. Trebuie să se țină cont de faptul că, pentru a realiza un act educativ de calitate, profesorul trebuie să-şi dobândească autoritatea în fața elevului, să-i fie acordată de către acesta, nu să şi-o impună.

Studiile au arătat că elevii preferă profesorii care păstrează ordinea, sunt stricți, pedepsesc indisciplina, îi țin ocupați, oferă exemple, îi ajută şi se fac înțeleşi, sunt interesanți, aparte, sunt cinstiți, consecvenți, nu favorizează pe nimeni, sunt prietenoşi, amabili, glumesc.

O clasă de elevi este un ansamblu viu care are structură şi dinamică proprie. Deseori, în timp, ea se scindează în mai multe grupuri care uneori pot face ca atmosfera din cadrul colectivului să fie tensionată. Profesorul trebuie să fie în permanență atent la comportamentul clasei pentru a împiedica apariția acestei situații; el trebuie să cunoască liderii grupurilor a căror influență este mai mult sau mai puțin pozitivă/negativă. Cadrul didactic nu va face parte niciodată dintr-un astfel de grup; de aceea pentru a-l conduce (fără ca acest lucru să fie evident) trebuie să-i cunoască structura, punctele sensibile la care reacționează (se calmează sau se răzvrăteşte). Aceste grupuri evoluează pe parcurs, modificându-şi de cele mai multe ori structura şi obiectivele. O clasă de elevi poate ajunge la sfârşitul anului o adevărată echipă în care fiecare copil are locul şi rolul său bine determinat sau, se poate dezintegra în multe grupuri închise. Pentru a preîntâmpina acest ultim aspect, profesorul trebuie să urmărească mereu climatul clasei, să mențină continuu contactul cu elevii, să-i învețe să comunice unii cu alții, să lucreze mult în echipă, să le dezvolte sentimente de camaraderie.

Thomas Gordon, psiholog american din şcoala umanistă, este cunoscut prin modelul pe care l-a dezvoltat în scopul eficientizării relațiilor interumane. Pornind de la convingerea fermă că folosirea puterii coercitive conduce la prejudicierea relațiilor, el a introdus concepte de comunicare cum ar fi „*conferința familiei*”, „*conferința profesorilor*”, „*conferința managerilor*”, care cuprind reguli general valabile pentru comunicare şi aplanarea conflictelor după reguli universale, în spirit de fair-play: respectul reciproc şi înțelegerea celuilalt fac posibilă o soluționare a conflictelor în care să nu existe învingători sau învinşi. Astfel, se urmăreşte ca oamenii:

- să învețe să se impună, fără a neglija necesitățile celorlalți, preîntâmpinând dezvoltarea unor sentimente de frustrare sau resemnare;
- să se deschidă unii față de alții, în loc să-i analizeze şi să-i subestimeze pe ceilalți;
- să se asculte cu atenție unii pe alții şi să îi ajute pe ceilalți să se exprime clar;
- să soluționeze conflictele într-un mod creator, care să fie pe placul tuturor;
- să-şi dezvolte capacitățile consultative, pentru a-i sfătui pe ceilalți cum să-şi rezolve conflictele.

Ascultarea activă, *mesajele-eu* şi *rezolvarea conflictelor fără pierderi* sunt trei tehnici aplicate prima dată în anii '50 de dr. Gordon pe când era consultant al unor organizații de firme. Apoi, ele s-au extins în alte două domenii: familie (*Parental Effectiveness Training*) şi şcoală (*Teacher Effectiveness Training*), având ca scop comun construirea şi menţinerea de bune relaţii acasă, la şcoală şi la serviciu. În prezent, compania *Gordon Training International*, fondată în 1974, îi continuă ideile şi munca depusă.

Pentru stabilirea unor relaţii pozitive între profesor şi elev, dr. Gordon recomandă modalităţi de comunicare precise şi relativ neutre care să reducă apariţia comportamentelor negative la elevi. Pornind de la întrebarea „Cine are o problemă?”, se disting diverse situaţii:

- Dacă problema este a elevului, profesorul trebuie să se implice şi să ajute la soluţionarea ei, oferindu-i simpatia şi sprijinindu-l să găsească singur calea de rezolvare prin *ascultare activă*: profesorul nu vorbeşte despre el, nu schimbă subiectul, nu dă sfaturi, nu critică sau încurajează, nu ignoră sentimentele celuilalt, urmăreşte comunicarea non-verbală, etc.
- Dacă profesorul are o problemă, într-un fel sau altul vor fi afectaţi şi elevii; de aceea, ei trebuie implicaţi în soluţionarea acesteia. Thomas Gordon distinge două tipuri de mesaje: „*mesajele-tu*” şi „*mesajele-eu*”. Primele favorizează, mai mult involuntar, comportamente devalorizante, moralizatoare şi ineficiente în raport cu elevul. „Mesajele-eu” nu provoacă atât de mare reţinere sau revoltă pentru că, atunci când vorbim la persoana I singular, înseamnă că ne atribuim răspunderea celor spuse; vrem să fim direcţi şi la obiect, fără a învinui persoana cu care suntem în conflict; dorim să discutăm despre felul în care privim noi lucrurile, despre propriile noastre dorinţe, nevoi, şi interese; exprimă sentimente autentice (în loc să califici direct un comportament ca fiind negativ, subliniezi efectul acestuia asupra ta). Pentru a sesiza diferenţa, să punctăm câteva situaţii, exemplificând fiecare tip de mesaj:

- Un grup de elevi face gălăgie, deranjând ora:

„mesaje-tu”: - Sunteţi prea zgomotoşi!
- Aţi putea să vă domoliţi puţin...
„mesaje-eu”: - Nu mă încântă zarva voastră.
- Aş vrea să nu fiu deranjat de zgomotul vostru.

- Elevii prezintă un proiect realizat superficial:

„mesaje-tu”: - Proiectul este evident insuficient elaborat.
- Nu puteţi realiza decât lucruri de mântuială.
„mesaje-eu”: - Regret să citesc o lucrare nefinalizată.

- Sunt dezamăgit, nu mai spun nimic.

- Un elev ajunge cu întârziere şi deranjează ora:

„mesaje-tu”: - Nu ți-e ruşine să ne deranjezi pe toți?
- Ar fi mai bine să ajungi o dată la timp.

„mesaje-eu”: - Mă dezamăgeşte lipsa de punctualitate.
- Mi-ar plăcea să nu fiu întrerupt.

- Generalizări:

„mesaje-tu”: - Ştim cu toții că ...
- Dacă stăm să ne gândim ...

„mesaje-eu”: - Mi-aş dori să ...
- Aceasta îmi pare că ...

Dacă situația nu se schimbă, se recomandă o procedură în mai multe etape care implică ambele părți (elevi şi profesor), cunoscută sub numele de „*tactică fără învinşi*”. Aplicarea acestei strategii implică şase paşi: definirea problemei (Care credeți că este problema?), generarea de soluții posibile (Cine poate să ne spună cum s-ar putea rezolva această problemă?), evaluarea soluțiilor (Ați fi de acord cu această variantă?), deciderea asupra soluției optime (Sunteți toți de acord cu această soluție? Credeți că ea rezolvă problema?), stabilirea modului de implementare a acesteia (Cum aplicăm soluția?), evaluarea eficacității soluției alese (Să discutăm în curând ca să fim siguri că problema s-a rezolvat cu adevărat). Fiind implicați în acest proces, elevii sunt „obligați” să-şi asume responsabilități mult mai mari decât în situațiile educative aşa-zise „normale”.

Matematica (şi alte ştiințe asemănătoare ei) introduce un tip particular de relații profesor-elev, relații structurate în jurul a doi poli principali:

- Dacă elevul nu înțelege ceea ce se predă, profesorul de matematică nu trebuie să concluzioneze imediat că acesta nu vrea să învețe sau nu este suficient de bine pregătit ori inteligent („Dacă eu am înțeles demonstrația, este imposibil ca alții să nu o înțeleagă”). Reacția adolescentului la astfel de judecăți nu este deloc plăcută. Mai mult, în general, se dovedeşte că profesorul nu a abordat problema în mod adecvat.

- Profesorul de matematică este situat într-o poziție particulară: el are dreptate (demonstrează adevărul) şi poate explica de ce are dreptate (spre deosebire de un profesor de literatură, de exemplu, care analizează un text literar).

Astfel, elevul se găseşte într-o situație de supunere şi de dependență față de profesor, mult mai accentuată decât la alte discipline, pe care nu o acceptă în perioada adolescenței fără să creeze probleme dificile în cadrul relației profesor-elev.

Ținând cont de rolul profesorului în conducerea şi dirijarea proceselor educative, de gradul său de implicare în aceste procese, se pot deduce trei tipuri de relații profesor-elev:

- *relația de tip democratic*, care ajută cooperarea dintre profesor şi elev. În această situație, elevul nu este considerat un element pasiv, el intervenind activ în actul de instruire. Profesorul implică elevii, îi antrenează în procesul educativ, se lasă interogat de elevi.
- *relația de tip laisser-faire* este relația în care domină interesele şi dorințele elevilor, profesorul subordonându-se total în favoarea acestora.
- *relația de tip autocratic*, în care profesorul este singurul participant la procesul didactic: numai el comunică, doar el are dreptate iar elevul este redus la o activitate de supunere şi de receptare pasivă.

7.2. Comunicarea didactică

Mesajele sunt informații dirijate în mod intenționat. Ele presupun existența unui emițător (destinator) şi a unui receptor (captator). Comunicarea, spre deosebire de informare, presupune reversibilitatea mesajelor între cele două entități, chiar dacă mesajele nu sunt de acelaşi ordin. Ea presupune corelarea perceperii semnalelor, decodificarea (printr-un vocabular adecvat), interpretarea lor (cu ajutorul imaginației) şi menținerea acestor semnale strâns legate, coerente (folosind memoria) pentru momentul când receptorul devine la rândul său emițător.

În prezent, comunicarea didactică nu mai atribuie profesorului rolul de emițător şi elevului pe cel de receptor, ci presupune că fiecare participant are, în acelaşi timp, rol dublu: emițător-receptor.

Pentru un profesor, pe lângă cunoştinţele de specialitate dobândite*, esenţială este competenţa comunicativă* (ea este de tip aptitudinal dar se poate şi dobândi) ce presupune posibilitatea de a transpune şi a traduce didactic noţiunile ştiinţifice (să ştie ce, cum, când, în cel fel, cu ce, cui oferă).

În cadrul comunicării didactice, demonstrarea şi argumentarea se împletesc şi se completează reciproc. Demonstraţia este demersul logic prin care, pornind de la anumite premise şi respectând anumite reguli de inferenţă (în cadrul matematicii, se foloseşte cel mai des inferenţa deductivă), se obţin concluzii adevărate (vezi 9.5.). Raţionamentul folosit în demonstraţie trebuie raportat la particularităţile de vârstă ale elevilor, la nivelul lor de înţelegere. Argumentarea discursului solicită mai ales afectivitatea elevilor, stimulează comportamente, aşteptări.

Înaintea oricărei comunicări didactice, profesorul va efectua mai multe operaţii: stabileşte obiectivele şi conţinutul esenţial al comunicării, explicaţii, exemple, date cu valoare motivaţională, întrebări-problemă, întrebări care determină reflecţii (Ce se întâmplă dacă?, Din ce cauză?, Ar putea fi şi altfel?, La ce credeţi că vă foloseşte această informaţie?). De asemenea, profesorul precizează strategia comunicării care poate fi: inductivă, explicativ-demonstrativă, euristică, deductivă, prin analogie sau combinată.

Comunicarea pedagogică presupune o interacţiune de tip feed-back, referitoare atât la informaţiile explicite cât şi la cele formate pe parcursul comunicării.

Feed-back-ul (conexiunea inversă) are caracter legic pentru procesul de învăţământ îndeplinind funcţia de control, de reglare şi autoreglare a informaţiilor transmise prin eliminarea la timp a unor eventuale perturbări sau distorsiuni. Se pot obţine astfel date corecte privind rezultatele comunicării didactice (predare) şi a procesului de învăţare în scopul creşterii eficienţei acestora.

Primul tip de feed-back, de la receptor la emiţător, are rolul de a informa profesorul (emiţătorul) despre obstacolele comunicării, personalitatea şi capacitatea receptorilor (elevii), gradul de adaptare al mesajului său. Folosind aceste informaţii, profesorul va putea obţine o creştere a eficienţei mesajului său, o mai mare siguranţă că informațiile lui sunt înțelese şi o ameliorare a relațiilor sale cu auditoriul. Ca mijloace de a obține referințe asupra comunicării sale, profesorul poate interoga elevii dacă au înțeles sau nu, ține cont de comentariile acestora cât şi de semnele de oboseală, plictiseală, neatenție, dezinteres manifestate de ei.

Al doilea tip de feed-back, de la emițător la receptor, presupune ca profesorul, pe cale verbală sau nonverbală, să aprobe sau nu activitatea de lucru individual sau de grup a elevilor. În acest caz, inițiativa acțiunii este luată de elevi.

Retroacțiunea anticipată, feed-forward, poate fi obținută prin inversarea ordinii clasice: informare, exerciții practice. Dacă începem cu aplicații practice, elevul este pus în situația de a căuta, cerceta, experimenta şi va simți necesitatea informării. El va formula anumite întrebări emițătorului, care îşi va organiza din mers comunicarea, anticipând informațiile de care au nevoie elevii în continuare sau de dificultățile ce pot să apară.

7.3. Psihopedagogia comunicării didactice

Procesul de predare – învățare poate fi considerat ca o formă specifică de comunicare. Reuşita actului pedagogic este strâns legată de calitatea actului de comunicare, ceea ce presupune anumite cerințe precise pentru lecția orală, pentru dezbatere, pentru elaborarea manualelor.

Cadrul general în care se organizează şi se stabileşte comunicarea didactică influențează calitatea acesteia. Astfel, putem enumera :

- *condiții de natură materială*, care se referă la arhitectura şcolară, la condițiile favorabile sau nefavorabile oferite educatorilor şi educaților (săli de clasă cu acustică slabă, cu ecou, situate lângă străzi aglomerate, cu mult zgomot);
- *factori de timp*, ca de exemplu momentul zilei (când elevul este obosit sau îi este foame, este mai dificil să-i captezi atenția);
- *sistemul de valori*: de exemplu, elevii cu puternice valențe „literare” nu sunt la fel de atraşi de disciplinele exacte şi invers.

În prezent, sursele mesajelor educative s-au diversificat foarte mult; mesajelor transmise în şcoală, li se alătură cele dobândite din mass-media şi cu ajutorul tuturor mijloacelor noi de comunicare. Principala sursă directă a mesajelor didactice rămâne profesorul şi materialul didactic. La aceasta se pot adăuga ca surse indirecte, la fel de importante: organizarea ambianței materiale a clasei (climatul), personalitatea profesorului.

Codarea mesajelor este frecvent întâlnită în viața de zi cu zi (limbajul folosit de surdo-muți, exprimarea artiştilor prin pictură, muzică, dans, de exemplu). Ea se poate realiza printr-o multitudine de mijloace ce corespund, de obicei, diferitelor organe de simț:

- prin cuvinte, forma de limbaj fiind cea mai uzuală şi mai precisă, cu condiția ca receptorul să o cunoască;
- prin sunet: exprimări muzicale, anumite zgomote cu semnificație precisă (cum ar fi un ciocănit în tablă, pentru a atenționa asupra celor scrise în acel loc, pentru a se face linişte);
- prin imagini vizuale: gesturi, expresia corporală, mimă, prin imagini fixe sau animate (domeniul audio-vizualului), text scris;
- prin atingere: presiunea amicală a mâinii profesorului pe umărul elevului care este pe cale să comită o eroare de calcul este plină de semnificație pentru elev;
- prin miros (mesajele chimice sunt mai des folosite în chimie, biologie).

Pentru ca informația să poată fi transmisă cu succes de la profesor la elev, ea trebuie transpusă într-o formă accesibilă atât emițătorului cât şi receptorului; faptul că elevii nu înțeleg limbajul folosit de profesor este considerat a fi un principal motiv al eşecului şcolar. De asemenea, dacă codarea mesajelor trimise este realizată prin mijloace diferite, este important să realizăm coerența acestora pentru a nu dezorienta receptorul (de exemplu, explicăm o formulă scrisă în partea dreaptă a tablei dar, în acelaşi timp, arătăm cu mâna în direcția opusă).

În procesul comunicării, cuvântul şi gestul formează un corp comun. Un profesor bun se spune că trebuie să fie şi un bun „actor”.

Comunicarea orală, prin intonație, accent, ritm, stil, personalizează actul de comunicare şi implică afectiv atât profesorul cât şi elevii. Astfel, mesajele trebuie transmise cu viteză potrivită (profesorul nu vorbeşte prea repede sau prea rar); variația de viteză face ca transmiterea informației să nu fie monotonă.

Legat de intensitatea vorbirii, profesorii care vorbesc foarte tare (țipă) sau încet obosesc auditoriul care devine astfel neatent. Dacă aplicăm această observație la textul scris (de exemplu, pe tablă), trebuie avut în vedere că el trebuie să aibă mărimea necesară pentru a putea fi receptat de toți elevii din clasă. Varierea intensității în comunicare are un efect de „supra-codare”, făcând mesajul mai uşor de receptat.

Modularea şi intonația, numite de lingvişti efecte supralingvistice, sunt şi ele esențiale în emiterea unui mesaj corect. Dacă comparăm mesajele: „elevul, spune profesorul, nu ştie să rezolve corect exercițiul” şi „elevul spune, profesorul nu ştie să rezolve corect exercițiul”, vedem că ele transmit informații cu totul diferite. Astfel, emițătorul trebuie să fie foarte grijuliu la tot ceea ce introduce (voluntar sau involuntar) în emiterea mesajul didactic.

De asemenea, o exprimare nu trebuie să fie doar concisă şi obişnuită. Dialogul profesor – elev este lărgit prin intermediul canalelor non-verbale. Astfel, mesajul vizual vine să ajute, să definitiveze, să suplimenteze limbajul verbal. Trebuie să ținem cont şi de faptul că ținuta fizică, mimica feței, gesturile ce acompaniază limbajul vorbit influențează intelectual şi afectiv elevul; de multe ori gesturile pot comunica mai multe informații auditoriului decât vorbirea.

Alături de comunicarea pe cale orală (cea mai des întâlnită la clasă) au fost introduse noi *metode de transmitere* prin tehnici audio-vizuale, cu ajutorul computerelor. De aceea, o obligație a profesorului constă în a învăța să utilizeze aceste noi canale de comunicare.

După ce mesajul didactic este transmis, receptorul îl primeşte, îl decodează, îl înțelege şi apoi îl interpretează. Toate aceste etape sunt reacții personale, deci diferă de la o persoană la alta. Din această cauză, mesajul profesorului poate fi interpretat greşit de către unii elevi. În acest caz, cadrului didactic îi revine sarcina de a face corecturile necesare.

Receptarea informației presupune că au fost îndeplinite cel puțin două condiții: elevul, pe baza motivației sale, acceptă mesajul (condiții afective) şi condițiile senzoriale au corespuns cu cele fizice ale mesajului (elevul a auzit ce a spus profesorul, a văzut ce a fost scris pe tablă, etc.).

După cum am mai amintit, presupunem că elevul cunoaşte limbajul de codare al informației. Pentru a decoda mesajului şi a identifica ceea ce este semnificativ, receptorul (care nu este un foarte bun cunoscător al limbajului ştiințific folosit) are nevoie de timp. Dacă în acest moment ritmul de comunicare este accelerat, comunicarea se blochează.

Am precizat că relațiile dintre sens (înțeles) şi semnificativ nu sunt simple. De exemplu, pentru un matematician, când este enunțată teorema lui Pitagora, el îşi poate deja imagina un triunghi dreptunghic, identificând catetele şi ipotenuza acestuia în relația prezentă în enunț; pentru un altul, mesajul transmis nu prezintă nicio reprezentare. Pentru ca elevul să înțeleagă şi să interpreteze informația, profesorul trebuie să explice textul prin exemple, transformând scrierea din limbajul matematic în cel uzual, să sublinieze anumite condiții esențiale în care mesajul este corect.

Cum atenția este prima condiție a receptării şi învățării, o organizare corectă a activității poate elimina în mare parte diferite forme de neatenție. Astfel, fiecare elev trebuie să fie ocupat, primind sarcini concrete. Metodele folosite în cadrul lecției trebuie să fie variate, ritmul de desfăşurare a activității trebuie să fie optim. Momentele activității trebuie punctate prin indicații de lucru, sublinieri, aprecieri sau concluzii.

CAPITOLUL VIII

Definirea noțiunilor matematice

8.1. Noțiuni matematice

Noțiunile, conceptele, sunt forme de reflectare a realității obiective. Ele se formează pe baza unor operații de gândire, cum ar fi: observația, comparația, analiza, sinteza, generalizarea, sistematizarea, abstractizarea, concretizarea, analogia. Pe baza *observației* şi a *comparației* (pe baza unui criteriu stabilit) se stabilesc proprietăți ale obiectelor, asemănări şi deosebiri ale acestora. *Analiza* presupune descompunerea întregului în părți componente, ceea ce conduce la evidențierea proprietăților obiectelor. *Sinteza* este operația opusă acesteia, prin care, pe baza proprietăților sau a părților, se reface întregul. Prin *abstractizare*, se desprind proprietățile generale ale obiectului. *Generalizarea* presupune extinderea acestor proprietăți la o clasă de obiecte.

Proprietățile care caracterizează toatele obiectele clasei se numesc *proprietăți esențiale* ale noțiunii. Cele pe care le au doar o parte din obiectele clasei se numesc *proprietăți parțiale*, iar *proprietățile contradictorii* sunt cele care nu sunt caracteristice niciunui obiect al clasei. În matematica şcolară, o importanță deosebită o au proprietățile esențiale ale noțiunilor (ele explică conținutul, esența obiectelor).

Elementele structurale ale noțiunii sunt:

- ***conținutul***, care cuprinde totalitatea proprietăților esențiale ale noțiunii şi proprietățile ce decurg din acestea. De exemplu, conținutul noțiunii de paralelogram este: „figură plană, cu patru laturi, cu laturile opuse paralele, etc.” Conținutul noțiunii de relație de echivalență este „relație binară, reflexivă, simetrică, tranzitivă.”

- ***sfera***, care înglobează toate obiectele care au proprietățile cuprinse în conținutul noțiunii. Spre deosebire de conținut, care reflectă necesarul, sfera noțiunii reflectă generalitatea. Sfera noțiunii de paralelogram cuprinde mulțimea pătratelor, dreptunghiurilor, romburilor. Sfera noțiunii de relație de echivalență este alcătuită din toate perechile de elemente ale mulțimii, legate printr-o astfel de relație: perechi de figuri asemenea sau congruente (pe mulțimea figurilor geometrice plane), perechi de ecuații echivalente (pe mulțimea ecuațiilor), perechi de drepte paralele (pe mulțimea dreptelor din plan).

Conținutul şi sfera unei noțiuni constituie structura logică a acesteia. Ele se folosesc pentru a clasifica noțiuni, la rezolvarea de exerciții şi probleme, în demonstrațiile teoremelor. Spunem că o noțiune este mai generală decât o alta dacă sfera ei conține sfera celeilalte noțiuni.

Între conținutul noțiunii şi sferă există o dependență: dacă mărim conținutul se micşorează sfera şi invers (*legea variației inverse a conținutului şi sferei noțiunilor*, lege de bază în logică). De exemplu, dacă la conținutul noțiunii de paralelogram mai adăugăm proprietatea ca diagonalele să fie egale, obținem noțiunea de dreptunghi, a cărei sferă este strict inclusă în cea a paralelogramului.

Considerând relațiile dintre sferele diferitelor noțiuni, vom putea stabili raporturi de tip *gen-specie*. Astfel, noțiunea care conține în sfera ei altă noțiune se numeşte, în raport cu aceasta, ***noțiune gen*** iar noțiunea conținută în sfera acesteia se numeşte ***noțiune specie***. De exemplu, noțiunea de paralelogram este noțiune gen față de noțiunea de dreptunghi, care este noțiune specie în raport cu prima. Dar aceeaşi noțiune de dreptunghi este noțiune gen în raport cu noțiunea de pătrat. Deci, noțiunile de gen şi specie nu au un caracter absolut.

Raporturile de tip gen–specie dintre noțiuni stau la baza ***generalizării şi concretizării noțiunilor***. Generalizarea noțiunii presupune trecerea de la o noțiune cu o sferă mai restrânsă, la o alta, a cărei sferă este mai cuprinzătoare (se trece de la o noțiune specie la o alta tip gen). Pentru a se realiza acest lucru, ținând cont de relația dintre conținutul şi sfera unei noțiuni, trebuie să trecem de la noțiunea de bază la o alta cu un conținut mai redus. În cazul determinării (concretizării) noțiunii, se aplică procedeul invers, deci se caută noțiuni cu conținut lărgit. De exemplu, trecerea de la noțiunea de pătrat la cea de dreptunghi, patrulater, poligon este o generalizare, iar trecerea inversă este o concretizare a noțiunii de pătrat.

De obicei, pentru a generaliza o noțiune, se renunță la o proprietate esențială şi independentă de celelalte proprietăți ale noțiunii. Astfel, teorema lui Pitagora, caracteristică triunghiurilor dreptunghice, se generalizează la cazul triunghiurilor oarecare, renunțând la condiția ca un unghi al triunghiului să fie drept. În alte cazuri, se pot neglija sau înlocui unele restricții, condiții impuse noțiunii, cu condiții mai generale. Dacă considerăm $f(n)=a+bn,\ a,b\in\mathbb{R},\ a\neq 0$ iar $n\in\mathbb{N}$, obținem un şir care este o progresie aritmetică; dar, pentru $n\in\mathbb{R}$, obținem o funcție de gradul I.

Uneori, pentru a familiariza elevii cu anumite noțiuni noi, se propun probleme cu date concrete, a căror rezolvare conduce la noțiunea vizată. De exemplu, acest procedeu este folosit la introducerea dependenței direct şi invers proporționale, a funcțiilor liniare, de gradul al II-lea, exponențiale, etc. Prin înlocuirea mărimilor constante cu unele variabile obținem generalizarea dorită.

Pentru a concretiza o noțiune se folosesc procedee inverse generalizării noțiunilor. Astfel, se adaugă la conținutul noțiunii inițiale una sau mai multe proprietăți independente de cele deja existente. Sfera noțiunii se restrânge. Dacă la proprietățile noțiunii de paralelogram adăugăm proprietatea „să aibă un unghi drept”, obținem noțiunea de dreptunghi, iar dacă mai adăugăm şi „are laturile congruente” obținem noțiunea de pătrat. Prin restrângerea succesivă a sferei inițiale la altele mai puțin cuprinzătoare, ajungem în situația în care determinarea nu se mai poate realiza. În acest caz, *noțiunea* rezultată se numeşte *individuală, unitară*, sfera fiind formată dintr-un singur element (triunghiul echilateral, de exemplu).

O altă metodă de a concretiza o noțiune este cea de a introduce restricții, condiții asupra noțiunii, formulei, teoremei considerate. Spre exemplu, pornind de la noțiunea de triunghi, obținem noțiunile de triunghi dreptunghic, isoscel. Tot în acest fel se poate trece de la formulele trigonometrice pentru suma a două unghiuri la formulele trigonometrice ale unghiului dublu.

Unele noțiuni nu se pot defini fără altele (numărătorul unei fracții fără numitorul ei, mediana fără noțiunea de triunghi, ecuația fără noțiunea de variabilă).

Ținând cont de diferitele raporturi existente între noțiuni, acestea pot fi diferențiate în noțiuni comparabile şi incomparabile.

Noțiunile comparabile sunt cele care au proprietăți comune. Ele se pot afla în raporturi de :

o ***compatibilitate,*** când sferele coincid total sau parțial. În acest caz, aceste noțiuni pot fi în relații de:

- ***identitate,*** ce semnifică noțiuni identice, care au aceeşi sferă, dar conținutul acestora diferă. De exemplu, noțiunea de triunghi echilateral (proprietatea presupune că toate laturi sunt congruente), este identică cu cea de „triunghi cu toate unghiurile congruente" (proprietatea presupune congruența unghiurilor triunghiului şi este echivalentă cu cealaltă proprietate).
- ***de subordonare***, când sfera unei noțiuni este strict inclusă în sfera celeilalte noțiuni (număr prim, număr natural). Raportul de subordonare se foloseşte în definirea noțiunilor matematice, precizând genul şi deosebirile de specie. De exemplu, triunghiul (noțiunea subordonată) este un poligon (noțiunea subordonatoare) cu trei laturi.
- ***de intersecție***, adică sferele celor două noțiuni se intersectează. Putem considera, pentru acest caz, rombul şi dreptunghiul, (au în comun pătratul), triunghiul isoscel şi cel dreptunghic, (comun este triunghiul dreptunghic isoscel), numere divizibile cu 3 şi cu 2, (multiplii de 6 fac parte din ambele sfere). Un exemplu al coincidenței parțiale a noțiunilor apare în rezolvarea sistemelor de ecuații şi inecuații, care presupune luarea în considerare a părții comune a soluțiilor obținute.

o ***incompatibilitate***, când sferele noțiunilor nu se intersectează. Unele noțiuni pot fi incompatibile, de exemplu pătratul şi triunghiul, dar ele sunt comparabile, dacă le privim ca poligoane. Acest tip de noțiuni se pot afla în raporturi de:

- ***de coordonare***, atunci când mai multe noțiuni sunt noțiuni specie ale aceleiaşi noțiuni gen, dar sferele lor nu se intersectează. De exemplu, dreptele paralele şi cele concurente (ambele noțiuni specie ale noțiunii gen „drepte în plan"). Raportul de coordonare se foloseşte la clasificarea noțiunilor.

• ***de contradicție***, dacă noțiunile se exclud una pe cealaltă. În această situație, sferele celor două noțiuni reunite formează sfera noțiunii gen din care fac parte. De exemplu, menționăm perechile număr par şi impar, număr pozitiv şi negativ, funcție continuă şi discontinuă.

• ***de contrarietate***, dacă reuniunea sferelor este strict inclusă în sfera noțiunii gen căreia acestea se subordonează. Aceste noțiuni se mai numesc noțiuni opuse sau contrare. De exemplu, unghi ascuțit şi unghi obtuz, funcție pară şi funcție impară.

Noțiunile incomparabile sunt acele noțiuni care nu au proprietăți comune. Spre exemplu, noțiunile de bisectoare şi număr prim, ecuații şi dreptunghi sunt noțiuni incomparabile.

8.2. Definirea noțiunilor matematice

În matematică există ***noțiuni primare***, fundamentale, care nu se definesc (cum ar fi cele de mulțime, plan, punct, dreaptă) şi ***noțiuni derivate***, care se definesc pe baza noțiunilor primare, sau a altor noțiuni deja definite.

Definiția este enunțul prin care se precizează elementele esențiale din conținutul unei noi noțiuni. Se menționează astfel, proprietățile esențiale ale noțiunii, putând face distincția dintre noțiunea definită şi altele. În orice definiție apar două elemente: noțiunea de definit (*definitul*) şi expresia prin care definim (*definitorul*), cea care ajută la definire. De exemplu, în definiția „Un poligon este o linie frântă închisă”, definitul este noțiunea de poligon iar definitorul este linie frântă.

Prin formularea definițiilor se dezvoltă gândirea şi limbajul matematic. Definițiile trebuie introduse corect şi complet, cu multă grijă, trebuie insistat asupra analizei acestora, sunt mereu urmate de exemple care să uşureze asimilarea lor. De asemenea, trebuie dezvoltată capacitatea elevilor de a le folosi în demonstrarea teoremelor, în rezolvarea problemelor, în definirea altor noțiuni, ceea ce asigură profesorul de faptul că noțiunea predată a fost înțeleasă.

Importanța motivării introducerii unei noțiuni este subliniată de următorul exemplu. Dorim să introducem noțiunea de integrală definită, noțiune destul de dificil de asimilat. În acest sens, după ce se cunoaşte noțiunea de diviziune a unui interval, de normă a diviziunii şi se pot compara diviziuni, înainte de construirea sumelor Riemann, putem propune următoarea problemă:

Presupunem că un mobil, la momentul t din intervalul de timp $[a,b]$, se deplasează cu viteza $v(t)$ care variază continuu cu timpul (adică funcția $v:[a,b]\to\mathbb{R}$ este continuă). Să se determine spațiul S parcurs de mobil în intervalul de timp $[a,b]$.

Dacă viteza este constantă, $v=v_0$, atunci $S=v_0(b-a)$.

Pentru cazul general, considerăm o diviziune

$$a=t_0<t_1<...<t_n=b$$

şi, în fiecare interval $[t_{i-1},t_i]$, $1\le i\le n$, alegem câte un punct ξ_i.

Drumul parcurs de mobil în intervalul $[t_{i-1},t_i]$ este aproximat prin valoarea $v(\xi_i)(t_i-t_{i-1})$. Astfel, $S\simeq\sum\limits_{i=1}^{n}v(\xi_i)(t_i-t_{i-1})$.

Aproximarea este cu atât mai bună cu cât diviziunea este „mai deasă" (norma diviziunii este mai mică).

Teoretic, spațiul parcurs în intervalul de timp $[a,b]$ este numărul real S pentru care $\left|S-\sum\limits_{i=1}^{n}v(\xi_i)(t_i-t_{i-1})\right|$ este oricât de mică, de îndată ce diviziunea este suficient de fină, cu ξ_i alese arbitrar.

Rezultă că pentru orice $\varepsilon>0$, există $\eta>0$ astfel încât pentru orice diviziune $\Delta=\left(t_0,t_1,...,t_n\right)$ a intervalului $[a,b]$ cu norma $\|\Delta\|<\eta$ şi pentru orice puncte arbitrare $\xi_i\in[t_{i-1},t_i]$, $1\le i\le n$, are loc inegalitatea:

$$\left|S-\sum_{i=1}^{n}v(\xi_i)(t_i-t_{i-1})\right|<\varepsilon .$$

După introducerea definiției (nu o mai precizăm aici) şi după demonstrarea faptului că orice funcție continuă este integrabilă, trebuie să ne reîntoarcem la acest exemplu şi să precizăm că spațiul parcurs este $S=\int\limits_a^b v(t)dt$.

Ținând cont de procedura de definire evidențiată prin definitor, distingem mai multe tipuri de definiții. Dintre acestea, vom prezenta doar pe cele mai des întâlnite în matematică:

Definiții prin indicarea genului proxim şi a diferenței specifice, des folosite în geometrie şi nu numai. Definirea presupune în acest caz două etape:

1. În prima etapă se include sfera noțiunii care se defineşte în sfera unei noțiuni gen, cunoscută de elevi. De obicei se indică genul cel mai apropiat (*genul proxim*) pentru că acesta este cel care are cele mai multe proprietăți comune cu noua noțiune. De exemplu, genul proxim pentru paralelogram este patrulaterul, pentru monom avem expresia algebrică.
2. În a doua etapă, se indică proprietățile esențiale ale noțiunii noi care o deosebesc pe aceasta de celelalte specii ale genului indicat. Aceste proprietăți reprezintă *diferența de specie* (*diferența specifică*). În general, o noțiune are mai multe proprietăți esențiale echivalente. De exemplu, pentru noțiunea de paralelogram putem enumera „are laturile opuse paralele”, „are o pereche de laturi opuse paralele şi congruente ”, „are unghiurile opuse congruente”, etc. Definirea noțiunii se face folosind una din proprietăți, în cazul nostru „paralelogramul este patrulaterul cu laturile opuse paralele”, iar celelalte conținuturi echivalente sunt enunțate ca proprietăți caracteristice în teoreme sau definiții echivalente (se are în vedere că trebuie demonstrată echivalența acestor definiții înainte să le folosim).

În acest mod de definire, se precizează genul, specia şi diferența specifică. În cazul definiției luate ca exemplu înainte, paralelogramul este specia, patrulaterul este genul proxim iar diferența specifică este dată „de laturile opuse paralele”.

Definiții genetice (***constructive***), cele în care definitorul indică sursa din care provine obiectul definit şi modul de formare al acestuia (se precizează anumite obiecte inițiale şi operațiile efectuate cu ele pentru a defini noțiunea nouă). Obiectele inițiale pot fi numere, expresii algebrice, figuri geometrice. Operațiile pot fi aritmetice, algebrice, logice, de substituție sau de comparație. De exemplu, suprafața cilindrului se defineşte ca suprafața generată prin rotația unui dreptunghi în jurul uneia din laturile sale. Ca procedee principale folosite în definițiile generice ale unor noțiuni geometrice, putem menționa: transformările geometrice (la definirea suprafețelor de rotație, a figurilor congruente sau asemenea) şi construcțiile (la definirea proiecției ortogonale a unui punct pe o dreaptă, proiecția unei drepte pe un plan, etc.). Aceste procedee sunt uşor de abordat de către elevi, ele fiind folosite mai ales în etapa de formare a noțiunilor respective. Un caz particular al definițiilor constructive este cel al definițiilor recursive, prin care se indică regulile de formare a obiectelor noi din cele inițiale. De asemenea, nu trebuie uitat modul de construcție a numerelor întregi, raționale şi reale, metoda de factorizare fiind des întâlnită în matematică.

Definiții convenționale, întâlnite des în algebră, în care noțiunile sunt introduse prin expresii matematice (funcția de gradul I, al II-lea, exponențială).

Definiții prin sistem axiomatic**,** cum este, de exemplu, modul de definire a structurilor algebrice.

Definirea mulțimii numerelor naturale se face în mod axiomatic ca un triplet $(\mathbb{N},0,s)$ unde $\mathbb{N}$ este o mulțime, 0 este un element din $\mathbb{N}$ şi s este o aplicație $s:\mathbb{N}\rightarrow\mathbb{N}$ astfel încât să fie satisfăcute următoarele axiome, numite axiomele lui Peano:

P_1) $0\neq s(n)$, pentru orice $n\in\mathbb{N}$,

P_2) s este aplicație injectivă,

P_3) Dacă o mulțime P a lui $\mathbb{N}$ are proprietățile: $0\in P$ şi $n\in P\Rightarrow s(n)\in P$, atunci $P=\mathbb{N}$.

$\mathbb{N}$ se numeşte mulțimea numerelor naturale, 0 este numit numărul natural 0 iar s poartă numele de funcția succesor.

O definiție este corectă dacă îndeplineşte anumite reguli dintre care menționăm:

- *Trebuie precizat că noțiunea definită există, altfel definiția nu are sens* .
- *Nu trebuie să cuprindă trimiteri la noțiuni noi, care nu s-au definit*. De exemplu, numărul e = 2,7198... nu este definit ca fiind baza logaritmului natural, ci prin: $e=\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n$.

- *Trebuie să fie adecvată noțiunii care este definită*: nu trebuie să fie nici prea largă, nici prea restrictivă. Astfel, dacă am defini numerele iraționale ca fiind fracțiile zecimale infinite am greşi, pentru că fracțiile zecimale periodice (sunt infinite) reprezintă numere raționale. Dacă am defini acum numerele iraționale ca fiind rădăcina unui număr rațional care nu se exprimă exact, am restrânge prea mult cadrul, deoarece există numere iraționale (e şi π, de exemplu) care nu verifică această proprietate.
- *Nu trebuie să cuprindă proprietăți ale noțiunii nou definite, care rezultă din alte proprietăți cuprinse în definiție.*
- *Nu trebuie să fie negativă, dacă poate fi afirmativă.* Există totuşi situații în care noțiunile se definesc doar prin negație: când genul proxim conține puține specii care, prin eliminare, precizează indirect conținutul noțiunii de definit, când negația arată o proprietate a obiectului (dreptele paralele sunt drepte coplanare care nu se intersectează).
- *Trebuie să fie clară, precisă, riguroasă din punct de vedere matematic.*
- *Trebuie să aibă un caracter constructiv, ajutând la definirea altor noțiuni noi, în demonstrarea teoremelor sau rezolvarea de probleme.*

8.3. Clasificarea şi diviziunea noțiunilor

După definiție, a doua operație logică aplicată noțiunilor este ***clasificarea***. Clasificarea este operația prin care repartizăm un ansamblu de obiecte în specii pe baza proprietăților lor comune şi a speciilor astfel obținute în genuri din ce în ce mai generale.

Dacă realizăm o *clasificare artificială* (aceasta se întâmplă când clasificăm obiectele după însuşiri care nu sunt esențiale), atunci nu obținem informații despre natura obiectelor. În matematică (de fapt în orice ştiință) se foloseşte *clasificarea naturală*, care are drept criteriu însuşirile esențiale ale obiectelor. În acest caz, se ține cont nu de numărul asemănărilor, ci de importanța acestora.

Clasificarea trebuie să fie completă (nu lasă rest) iar obiectele din aceeaşi clasă să fie mai importante decât deosebirile dintre ele.

De exemplu, dacă dorim să clasificăm numerele reale, pornim cu un prim criteriu: „numărul este rațional” şi obținem clasele de numere raționale şi iraționale. Apoi, clasificând numerele raționale după criteriul „numărul este întreg”, obținem numerele întregi şi cele fracționare. Dacă vom lua în considerare acum criteriul „numărul este natural”, obținem numerele naturale şi întregii negativi.

Unele obiecte din sfera unei noțiuni nu au toate aceleaşi proprietăți. De exemplu, în noțiunea de triunghi, putem evidenția triunghiurile dreptunghice, isoscele, etc. Pentru a studia mai în profunzime obiectele reflectate într-o noțiune, trebuie să împărțim sfera noțiunii după un anumit criteriu, precizând toate speciile din care aceasta este compusă. O astfel de operație logică poartă numele de ***diviziune***. Prin diviziune, studiem mai bine noțiunile, stabilim raporturi între ele. Elementele caracteristice operației de diviziune sunt: *noțiunea de divizat* (noțiunea gen), *membrii diviziunii* (speciile rezultate) şi *fundamentul diviziunii* (criteriul folosit pentru stabilirea speciilor noțiunii de divizat). Pe fiecare treaptă a diviziunii, fundamentul diviziunii este altul.

Caracteristic structurii logice a unei diviziuni este faptul că în orice diviziune corectă reuniunea sferelor membrilor diviziunii este egală cu sfera noțiunii de divizat. De aici, rezultă şi *regulile diviziunii*:

- *Diviziunea trebuie să fie completă*, adică reuniunea sferelor membrilor diviziunii este egală cu sfera noțiunii de divizat;
- *Membrii diviziunii trebuie să se excludă între ei*: un obiect dintr-o specie nu trebuie să facă parte şi din altă specie. Pentru a nu încălca această regulă, se cere ca pe aceeaşi treaptă a diviziunii fundamentul să fie unic. Astfel, sferele membrilor diviziunii formează o partiție a sferei noțiunii.
- *Diviziunea trebuie să fie continuă*, adică toți membrii diviziunii trebuie să fie speciile cele mai apropiate în raport cu noțiunea de divizat, considerată gen proxim.

CAPITOLUL IX

Elemente de logică matematică

9.1. Propoziții. Calcul propozițional.

În logică, prin ***propoziție*** înțelegem un enunț care poate fi adevărat sau fals (*principiul celor două valori*). Acest prim principiu fundamental al logicii clasice a propozițiilor presupune:

- orice propoziție este adevărată sau falsă (*principiul terțului exclus*);
- o propoziție nu poate fi în același timp adevărată şi falsă (*principiul non-contradicției*).

Oricărei propoziții i se atribuie o valoare de adevăr: dacă este adevărată spunem că are valoarea de adevăr 1 şi dacă este falsă, valoarea sa de adevăr este 0.

Propozițiile interogative sau exclamative nu sunt propoziții în logică. De asemenea, *definițiile nu sunt propoziții*. De exemplu, „Un patrulater ale cărui laturi opuse sunt paralele se numeşte paralelogram” nu este o propoziție. În schimb, enunțul „Laturile opuse ale unui paralelogram sunt paralele” este o propoziție adevărată.

Cu ajutorul operatorilor logici, din una sau mai multe propoziții se pot forma noi propoziții a căror valoare de adevăr depinde numai de valoarea de adevăr a propozițiilor inițiale (conform *principiul extensionalității*, al doilea principiu fundamental în logica propozițiilor).

Operatorii logici sunt: *negația* ($\neg$ sau $\overline{}$), *conjuncția* ($\wedge$), *disjuncția* ($\vee$), *implicația* ($\rightarrow$), *echivalența* ($\leftrightarrow$).

Negația unei propoziții p este propoziția $\overline{p}$, adică „nu este adevărat că p”. Propoziția $\overline{p}$ este adevărată când p este falsă şi este falsă dacă p este adevărată. Tabela de adevăr a negației este:

p	$\overline{p}$
1	0
0	1

Negația negației lui p, $\overline{\overline{p}}$ coincide cu propoziția p.

Conjuncția propozițiilor *p şi q* este propoziția „p şi q” pe care o notăm $p \wedge q$. Ea este adevărată dacă şi numai dacă ambele propoziții, p şi q, sunt adevărate. Tabela de adevăr a conjuncției este:

p	q	$p \wedge q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Disjuncția propozițiilor p şi q este propoziția „p sau q”, notată $p \vee q$. Ea este falsă doar atunci când propozițiile p şi q sunt false. Conjuncția *sau* are două sensuri diferite. De exemplu, în propoziția „Fereastra este deschisă sau închisă”, *sau* este *exclusiv* (alternativ), adică cele două posibilități se exclud reciproc. În propoziția „Elevii nu şi-au făcut tema sau sunt gălăgioşi”, există şi posibilitatea ca acestea să se realizeze în acelaşi timp. În acest caz, *sau* este *inclusiv* (disjunctiv). El apare în negația unei propoziții care conține un *şi*. De cele mai multe ori, în matematică, întâlnim *sau inclusiv.* Pentru cazul lui *sau exclusiv* propunem notația $\oplus$. Tabela de adevăr a disjuncției este:

p	q	$p \vee q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Implicația propozițiilor p şi q este propoziția „p implică q” sau „dacă p, atunci q” sau „din p rezultă q”. Ea se notează $p \to q$ şi este o propoziție falsă dacă şi numai dacă p este o propoziție adevărată şi q este o propoziție falsă. Tabela de adevăr a implicației este:

p	q	$p \to q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Dacă propoziția $p \to q$ este adevărată, scriem $p \Rightarrow q$ şi spunem că propoziția q este o *consecință logică* a lui p.

În relația de implicație logică, p se numeşte *ipoteză* şi q este *concluzia sau teza.* Cuvântul *teză* înseamnă „propoziție ce se susține” iar prefixul *ipo* are sensul de *dedesubt*. În acest sens, ipoteza apare ca un fundament care trebuie să susțină teza. În exemplul „6 este număr par implică 6 este pozitiv”, p este propoziția „6 este număr par” şi q este propoziția „6 este pozitiv”. Se observă că propoziția $p \to q$ este adevărată, deci vom scrie $p \Rightarrow q$. Spunem că p este *condiție suficientă* pentru q sau, q este *condiție necesară* pentru p. Pentru exemplul „$2+1=3$ implică 9 este număr prim”, propoziția nu mai este adevărată, deci nu putem scrie „$2+1=3 \Rightarrow$ 9 este număr prim”.

Echivalența propozițiilor p şi q este propoziția „p echivalent cu q” sau „p dacă şi numai dacă q”. Ea se notează $p \leftrightarrow q$ şi este adevărată dacă şi numai dacă propozițiile p şi q au aceeaşi valoare de adevăr. Tabela de adevăr a echivalenței este:

p	q	$p \leftrightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Dacă propoziția $p \leftrightarrow q$ este adevărată, vom scrie $p \Leftrightarrow q$ şi spunem că propozițiile p şi q sunt *echivalente logic*.

9.2. Legile calculului propozițional

Calculul propozițional studiază din punct de vedere logic expresiile obținute din literele *p, q, r,...* , (propoziții matematice) cu ajutorul operatorilor logici $\overline{}$, $\wedge$, $\vee$, $\to$, $\leftrightarrow$ după anumite reguli. Literele *p, q, r,...*, se numesc *variabile propoziționale* sau *formule elementare*, iar expresiile obținute din ele cu ajutorul operatorilor logici se numesc *formule*. Regulile de formare a formulelor sunt:

- variabilele propoziționale sunt formule;
- dacă A şi B sunt formule, atunci, $\overline{A}$, $A \wedge B$, $A \vee B$, $A \to B$, $A \leftrightarrow B$ sunt formule.

De exemplu, $((p \vee (\overline{q})) \to (p \leftrightarrow q))$ este o formulă de calcul propozițional. Pentru a nu îngreuna scrierea prin folosirea multor paranteze, se exclude perechea de paranteze exterioare, dacă există, şi se ține cont că ordinea de aplicare a operatorilor logici este: $\overline{}$, $\wedge$, $\vee$, $\to$, $\leftrightarrow$ (fiecare separă mai puternic decât operatorul precedent). Formula din exemplul nostru se poate scrie $p \vee \overline{q} \to (p \leftrightarrow q)$.

Dacă într-o astfel de formulă înlocuim variabilele propoziționale cu diferite propoziții, se obține o nouă propoziție. Valoare de adevăr a acesteia depinde doar de valoarea de adevăr care se atribuie variabilelor propoziționale componente.

O formulă a calculului propozițional se numeşte *lege, tautologie* sau *formulă identic adevărată* dacă valoarea de adevăr a propoziției obținute este mereu 1, indiferent de valorile de adevăr ale variabilelor propoziționale ce o alcătuiesc. Pentru a verifica dacă o anumită formulă este o tautologie, atribuim variabilelor propoziționale care o alcătuiesc valori de adevăr în toate modurile posibile şi calculăm de fiecare dată valoarea de adevăr a formulei folosind tabelele de adevăr ale operatorilor logici.

Următoarele formule sunt tautologii:

- $p \vee \overline{p}$ (legea terțului exclus);
- $\overline{p \to q} \leftrightarrow p \wedge \overline{q}$ (legea negării implicației);
- $(p \to q) \wedge (q \to r) \to (p \to r)$ (legea silogismului);

- $p \leftrightarrow p$ (legea de reflexivitate);
- $p \wedge p \leftrightarrow p, \quad p \vee p \leftrightarrow p$ (legile de idempotență);
- $p \wedge q \leftrightarrow q \wedge p, \quad p \vee q \leftrightarrow q \vee p$ (legile de comutativitate);
- $p \wedge (q \wedge r) \leftrightarrow (p \wedge q) \wedge r, \quad p \vee (q \vee r) \leftrightarrow (p \vee q) \vee r$ (legile de asociativitate);
- $p \wedge (q \vee r) \leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$,
  $p \vee (q \wedge r) \leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ (legile de distributivitate);
- $\overline{p \wedge q} \leftrightarrow \overline{p} \vee \overline{q}, \quad \overline{p \vee q} \leftrightarrow \overline{p} \wedge \overline{q}$ (legile lui De Morgan);
- $p \to q \leftrightarrow \overline{q} \to \overline{p}$ (legea contrapoziției).

În virtutea acestor tautologii putem scrie:

$$\overline{p \to q} \Leftrightarrow p \wedge \overline{q} \,,$$

$$(p \to q) \wedge (q \to r) \Rightarrow (p \to r).$$

9.3. Predicate

Un ***predicat*** este un enunț care depinde de una sau mai multe variabile şi care are proprietatea că, pentru anumite valori ale variabilelor (numere sau elemente ale unei mulțimi), devine o propoziție. Un predicat care depinde de n variabile se numeşte predicat n-ar. În particular, există *predicate unare* ($n=1$), *binare* ($n=2$), *ternare* ($n=3$).

De fapt, predicatul este o funcție A definită pe o mulțime nevidă D cu valori în mulțimea S a propozițiilor logice.

De exemplu, considerând $A:\mathbb{N} \to S$ definit prin $A(n)$: „n este număr par”, obținem un predicat unar. Pentru $n=1$, propoziția $A(1)$ este falsă iar dacă $n=2$, $A(2)$ este propoziție adevărată. Fie acum predicatul binar $A:\mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \to S$ unde $A(x,y)$: „$x^2+y^2=25$”. Obținem că $A(3,-4)$ este propoziție adevărată şi propoziția $A(-1,0)$ falsă.

În continuare vom folosi pentru scrierea predicatelor forma întâlnită în manuale (de exemplu, $A(x,y)$: „$x^2+y^2=25, \;\; x,y \in \mathbb{Z}$”).

Fie $A(x)$ şi $B(x)$, două predicate unare. Folosind conectorii logici, obținem alte predicate unare:

$$\overline{A(x)},\;\; A(x) \wedge B(x),\;\; A(x) \vee B(x),\;\; A(x) \to B(x),\;\; A(x) \leftrightarrow B(x).$$

De exemplu, $A(x) \wedge B(x)$ este predicatul $C(x)$ care, pentru fiecare valoare atribuită variabilei x coincide cu propoziția $A(x) \wedge B(x)$. De asemenea, se pot construi predicate binare de forma:

$$A(x) \wedge B(y),\ A(x) \vee B(y),\ A(x) \rightarrow B(y),\ A(x) \leftrightarrow B(y).$$

Predicatul $B(x)$ se numește *consecința logică* a predicatului $A(x)$ (vom nota $A(x) \Rightarrow B(x)$) dacă propoziția $A(x) \rightarrow B(x)$ este adevărată pentru orice valoare a variabilei x. De exemplu, fie $A(x)$: „$x > 0$” şi $B(x)$: „$x^2 > 0$”, unde x este număr real. Observăm că $A(x) \Rightarrow B(x)$.

Predicatele $A(x)$ şi $B(x)$ sunt *echivalente logic* dacă pentru orice valoare a variabilei x, propozițiile $A(x)$ şi $B(x)$ au aceeaşi valoare de adevăr. În acest caz, vom scrie $A(x) \Leftrightarrow B(x)$. Se observă că predicatele $A(x)$: „$|x| = 0$” şi $B(x)$: „$x = 0$”, cu $x \in \mathbb{R}$, sunt echivalente logic.

Relațiile de consecință logică şi echivalență logică pot fi definite şi între predicate n-are. De exemplu, considerăm predicatele binare:

$A(x,y)$: „$x > y > 0$”, $B(x,y)$: „$x^2 > y^2$”, cu x şi y numere reale. Atunci, $A(x,y) \Rightarrow B(x,y)$.

Fie $A(x)$ un predicat unar. Propoziția „*Pentru orice valoare a variabilei x, A(x) este o propoziție adevărată*” se numeşte ***propoziție universală*** asociată predicatului $A(x)$ şi se notează prin $(\forall x)(A(x))$.

Astfel, pentru predicatele $A(x)$ şi $B(x)$, avem $A(x) \Rightarrow B(x)$ dacă şi numai dacă propoziția $(\forall x)(A(x) \rightarrow B(x))$ este adevărată.

La fel, $A(x) \Leftrightarrow B(x)$ este echivalent cu faptul că propoziția universală $(\forall x)(A(x) \leftrightarrow B(x))$ este adevărată.

Fie $A(x)$: „$x^2 \geq 0$”, $x \in \mathbb{R}$. Atunci propoziția $(\forall x)(A(x))$ este adevărată. Dacă considerăm acum $A(x)$: „$x^2 > 0$”, $(\forall x)(A(x))$ nu mai este o propoziție adevărată (pentru că $A(0)$ nu este adevărată).

Propoziția „*Există cel puțin o valoare x_0 a variabilei x astfel încât $A(x_0)$ să fie propoziție adevărată*” se numeşte ***propoziție existențială*** asociată predicatului $A(x)$ şi se notează $(\exists x)(A(x))$. De exemplu, dacă considerăm predicatul $A(x)$: „$x^2 - 2 = 0$”, pentru x real, atunci propoziția $(\exists x)(A(x))$ este adevărată pentru că $A(\sqrt{2})$ este adevărată.

Presupunem că predicatul $A(x)$ este definit pentru un număr finit de valori ale variabilei $x \in \{x_1, x_2, ..., x_n\}$. Atunci:

$$(\forall x)(A(x)) \Leftrightarrow A(x_1) \wedge A(x_2) \wedge ... \wedge A(x_n),$$
$$(\exists x)(A(x)) \Leftrightarrow A(x_1) \vee A(x_2) \vee ... \vee A(x_n).$$

Folosind legile lui De Morgan, obținem:

$$\overline{(\forall x)(A(x))} \Leftrightarrow \overline{A(x_1)} \vee \overline{A(x_2)} \vee ... \vee \overline{A(x_n)} \Leftrightarrow (\exists x)(\overline{A(x)});$$
$$\overline{(\exists x)(A(x))} \Leftrightarrow \overline{A(x_1)} \wedge \overline{A(x_2)} \wedge ... \wedge \overline{A(x_n)} \Leftrightarrow (\forall x)(\overline{A(x)}).$$

Aceste reguli de negație sunt valabile şi în cazul general, deci:

$$\overline{(\forall x)(A(x))} \Leftrightarrow (\exists x)(\overline{A(x)}),$$
$$\overline{(\exists x)(A(x))} \Leftrightarrow (\forall x)(\overline{A(x)}).$$

Să considerăm acum un predicat binar $A(x,y)$. Cu ajutorul cuantificatorilor $(\forall)$ şi $(\exists)$ putem forma predicatele unare în variabila y: $(\forall x)(A(x,y))$ şi $(\exists x)(A(x,y))$ (spunem că x este variabilă legată şi y este variabilă liberă). Pentru aceste predicate putem forma propozițiile:

$$(\forall y)(\forall x)(A(x,y)), \;\; (\exists y)(\forall x)(A(x,y)),$$
$$(\forall y)(\exists x)(A(x,y)), \;\; (\exists y)(\exists x)(A(x,y)).$$

Cuantificatorul de acelaşi tip verifică următoarea proprietate de comutativitate:

$$(\forall y)(\forall x)(A(x,y)) \Leftrightarrow (\forall x)(\forall y)(A(x,y)),$$
$$(\exists y)(\exists x)(A(x,y)) \Leftrightarrow (\exists x)(\exists y)(A(x,y)).$$

De exemplu, pentru $A(x,y)$: „$x < y$”, propoziția $(\forall y)(\forall x)(A(x,y))$ este falsă, pentru că $A(3,1)$ este falsă, iar $(\exists y)(\forall x)(A(x,y))$ este şi ea falsă deoarece pentru o valoare $y = y_0$, propoziția $A(y_0+1, y_0)$ nu este adevărată. Dar, $(\forall x)(\exists y)(A(x,y))$ şi $(\exists y)(\exists x)(A(x,y))$ sunt propoziții adevărate. Propozițiile $(\exists y)(\forall x)(A(x,y))$ şi $(\forall x)(\exists y)(A(x,y))$ nefiind propoziții echivalente logic, rezultă că nu avem voie să comutăm între ei cuantificatorii $(\forall)$ şi $(\exists)$.

Regulile de negație pentru propozițiile de tip universal-existențial asociate predicatelor binare se obțin din regulile de negație ale predicatelor unare.

De exemplu:

$$\overline{(\forall y)(\exists x)(A(x,y))} \Leftrightarrow (\exists y)(\overline{(\exists x)(A(x,y))})$$
$$\Leftrightarrow (\exists y)(\forall x)(\overline{A(x,y)}).$$

În matematică, majoritatea definițiilor sunt predicate obținute cu ajutorul altor predicate deja construite. De exemplu, pentru *n,m* numere întregi, spunem că *m* divide *n* dacă (înseamnă că) există *d*, un număr întreg, astfel încât $n = md$. Atunci, *A*(*m*,*n*): „$m|n$” şi *B*(*m*,*n*): „$(\exists d)(n = md)$” sunt predicate echivalente prin definiție şi scriem:

$$m \mid n \overset{def}{\Leftrightarrow} (\exists d)(n = md).$$

La fel, obținem următoarea definiție: Fie $p, d \in \mathbb{N}$. Spunem că:

$$p \text{ este prim } \overset{def}{\Longleftrightarrow} (p > 1) \wedge (\forall d \in \mathbb{N})(d \mid p \rightarrow (d = 1) \vee (d = p)).$$

Dacă facem notațiile: *A*(*p*): „*p* este număr prim”, *B*(*p*): „$p > 1$”, *C*(*d*,*p*): „$d \mid p$”, *D*(*d*): „$d = 1$”, *E*(*d*,*p*): „$d = p$”, rezultă că predicatele *A*(*p*) şi $B(p) \wedge (\forall d)(C(d,p) \rightarrow D(d) \vee E(d,p))$ sunt echivalente prin definiție.

9.4. Teoreme în matematică

O ***teoremă*** este o propoziție adevărată care stabileşte că un obiect (sau mai multe) are o anumită proprietate. De obicei, o teoremă se exprimă sub forma unei propoziții construită cu ajutorul cuvintelor „dacă... atunci...”. De exemplu, teorema „*Înălțimile unui triunghi sunt concurente*” va putea fi scrisă sub forma $A(x,y,z) \Rightarrow B(x,y,z)$ unde *A*(*x*,*y*,*z*): „*x,z,y* sunt înălțimile unui triunghi” şi *B*(*x*,*y*,*z*): „*x,y,z* sunt concurente”.

Astfel, *orice teoremă în matematică se formulează de obicei spunând că un predicat este consecință logică a unui alt predicat, deci este de forma* $A(x_1, x_2, ..., x_n) \Rightarrow B(x_1, x_2, ..., x_n)$, afirmație care precizează că propoziția $(\forall x)(A(x_1, x_2, ..., x_n) \rightarrow B(x_1, x_2, ..., x_n))$ este adevărată.

Predicatul $A(x_1,x_2,...,x_n)$ se numeşte *ipoteza teoremei* iar predicatul $B(x_1,x_2,...,x_n)$ *concluzia teoremei*. În ipoteza teoremei sunt precizate condiţiile în care afirmaţia conţinută de concluzie este adevărată.

Prin *demonstraţia teoremei* se înţelege un şir de consecinţe logice de forma:

$$A_i(x_1,x_2,...,x_n) \Rightarrow A_{i+1}(x_1,x_2,...,x_n),\ i \in \{1,2,...,k\},$$

numite *etapele demonstraţiei*, unde $A_1 = A$ şi $A_{k+1} = B$. Aceste consecinţe logice pot fi teoreme demonstrate anterior, axiome (teoreme acceptate fără demonstraţie), raţionamente logice (propoziţii adevărate conform legilor calculului propoziţional). Pe baza legii silogismului, va rezulta în final că $A(x_1,x_2,...,x_n) \Rightarrow B(x_1,x_2,...,x_n)$.

Cu toate că în mod obişnuit nu se redactează sub această formă o demonstraţie, vom detalia un exemplu de demonstraţie precizând tautologiile la care se face apel pe parcursul raţionamentului, pentru a evidenţia în amănunt aplicarea legii silogismului în demonstrarea unei teoreme.

Să considerăm teorema:

„*Dacă x este un număr întreg ireductibil şi* $x \mid ab$*, atunci* $x \mid a$ *sau* $x \mid b$.”

Considerăm *p*(*x*): „*x* număr întreg ireductibil”, *q*(*x,a,b*): „$x \mid ab$”, *r*(*x,a*): „$x \mid a$” şi *s*(*x,b*): „$x \mid b$”.

Pornind de la tautologia:

$$(p \wedge q \wedge \overline{r} \to s) \Rightarrow (p \wedge q \to r \vee s),$$

observăm că dacă demonstrăm teorema „*Dacă x este număr întreg ireductibil*, $x \mid ab$ *şi* $x \nmid a$, *atunci* $x \mid b$”, verificăm de fapt teorema iniţială.

Ipoteza teoremei ce o vom demonstra este predicatul:

$$A(x,a,b) = p(x) \wedge q(x,a,b,) \wedge \overline{r(x,a)}$$

iar concluzia teoremei este predicatul $B(x,b) = s(x,b)$.

Folosind proprietăţile numerelor ireductibile şi a c.m.m.d.c.-ului, obţinem: x este număr întreg ireductibil şi $x \nmid a$ implică $(a,x)=1$ şi astfel, $(\exists u)(\exists v)(ua+vx=1)$. Deci, $(\exists u)(\exists v)(uab+vxb=b)$.

Notând $t(x,a,b):(\exists u)(\exists v)(uab+vxb=b)$, am arătat că:

$$p(x)\wedge\overline{r(x,a)}\Rightarrow t(x,a,b).$$

Folosind tautologia: $(p\to q)\Rightarrow(p\wedge r\to q\wedge r)$, în care considerăm $p:=p\wedge\overline{r}$, $r:=q$ şi $q:=t$, obținem că:

$$A(x,a,b)\Rightarrow t(x,a,b)\wedge q(x,a,b).$$

Deoarece, în mod evident, $t(x,a,b)\wedge q(x,a,b)\Rightarrow s(x,b)$, folosind regula silogismului, rezultă $A(x,a,b)\Rightarrow B(x,b)$.

Considerăm că predicatul $B(x_1,x_2,...,x_n)$ este consecință logică a predicatului $A(x_1,x_2,...,x_n)$. Dacă şi $A(x_1,x_2,...,x_n)$ este consecință logică a predicatului $B(x_1,x_2,...,x_n)$, atunci are loc teorema:

$$B(x_1,x_2,...,x_n)\Rightarrow A(x_1,x_2,...,x_n)$$

care se numeşte ***teorema reciprocă*** a teoremei date (teorema inițială se numeşte ***teoremă directă***). Deci, teorema reciprocă a unei teoreme se construieşte, de cele mai multe ori, considerând concluzia teoremei date ca ipoteză şi ipoteza teoremei inițiale drept concluzie. Dacă teorema directă este adevărată, nu se ştie a priori dacă propoziția reciprocă este adevărată sau falsă.

Dacă teorema directă este:

$$A(x_1,x_2,...,x_n)\Rightarrow B(x_1,x_2,...,x_n),$$

spunem că $B(x_1,x_2,...,x_n)$ este ***condiție necesară*** pentru predicatul $A(x_1,x_2,...,x_n)$.

Dacă considerăm acum teorema reciprocă:

$$B(x_1,x_2,...,x_n)\Rightarrow A(x_1,x_2,...,x_n),$$

$B(x_1,x_2,...,x_n)$ este ***condiție suficientă*** pentru $A(x_1,x_2,...,x_n)$.

De exemplu, ținând cont de teorema „*Unghiurile opuse la vârf sunt congruente*” şi de faptul că propoziția reciprocă nu este adevărată, concluzionăm că proprietatea de congruență a unghiurilor este o condiție necesară, dar nu şi suficientă pentru ca acestea să fie opuse la vârf.

Astfel, pentru a verifica necesitatea unei condiții, se demonstrează teorema directă, iar pentru stabilirea suficienței acesteia se formulează teorema reciprocă.

Sunt anumite cazuri în care construcția reciprocei nu se face doar schimbând între ele ipoteza şi concluzia. Aceste situații pot apărea atunci când enunțul predicatului din ipoteză este complex, conținând cel puțin un „şi”.

De exemplu, pentru teorema „*În triunghiul ABC, notăm cu M şi N mijloacele laturilor* $[AB]$*, respectiv* $[AC]$*. Atunci,* $MN \parallel BC$ *. Mai mult*, $MN = \frac{1}{2}BC.$ ”, teorema reciprocă este dată de „*Dacă în triunghiul ABC, M este mijlocul laturii* $[AB]$ *şi* $MN \parallel BC$ *cu* $N \in (AC)$*, atunci N este mijlocul laturii* $[AC]$”.

Considerăm acum *teorema* „*celor trei perpendiculare*”:

„*Fie PA o dreaptă perpendiculară pe un plan* α *,* $A \in \alpha$ *, d o dreaptă conținută în planul* α *şi* $AB \perp d$ *,* $B \in d$ *. Atunci* $PB \perp d$ *.*”

Această teoremă se poate scrie schematic sub forma „în contextul *C* se poate demonstra $p_1 \wedge p_2 \Rightarrow q$ ” unde *C* presupune: planul α ; o dreaptă $d \subset \alpha$; punctele *A, B, P* care verifică condițiile: $P \notin \alpha$, $A \in \alpha$, $A \notin d$, $B \in d$, iar p_1 : „ $PA \perp \alpha$ ”; p_2 : „ $AB \perp d$ ”; *q*: „ $PB \perp d$ ”.

Se construiesc teoreme reciproce de forma:

- „în contextul *C* se poate demonstra $p_1 \wedge q \Rightarrow p_2$ ” şi anume:

Teorema reciprocă 1: „*Dacă PA este o dreaptă perpendiculară pe un plan* α *,* $A \in \alpha$ *, d o dreaptă conținută în planul* α *şi* $PB \perp d$ *,* $B \in d$ *, atunci* $AB \perp d$ *.*”

- „în contextul *C* se poate demonstra $p_2 \wedge q \Rightarrow p_1$ ” care se dovedeşte falsă.

În acest caz, putem atribui denumirea de teoremă reciprocă pentru o teoremă de forma:

„În contextul *C*, se poate demonstra că $p_2 \wedge q \wedge p_3 \Rightarrow p_1$ ” unde p_3 este o consecință a lui $p_1 \wedge p_2$.

În cazul nostru, p_3 : „$PA \perp AB$” şi obținem:

Teorema reciprocă 2: „*Fie* $A \in \alpha$, $d \subset \alpha$, $AB \perp d$, $B \in d$ *şi* $P \notin \alpha$ astfel încât $PB \perp d$ *şi* $PA \perp AB$. *Atunci*, $PA \perp \alpha$.”

În cazul în care propoziția reciprocă se dovedeşte falsă, trebuie construit un contraexemplu. De exemplu, considerăm următoarea teoremă: „*Într-un triunghi dreptunghic, înălțimea este medie proporțională între segmentele determinate de ea pe ipotenuză*”.

Propoziția reciprocă:

„*Fie triunghiul ABC dreptunghic în A şi* $D \in (BC)$ *astfel încât* $AD^2 = BD \cdot DC$. *Atunci,* $AD \perp BC$.”
este falsă deoarece alegând D mijlocul ipotenuzei obținem AD mediană şi ținând cont că $AD = BD = DC$, relația din ipoteză se verifică fără ca AD să fie înălțime.

Dacă se verifică teorema directă şi teorema reciprocă, atunci predicatele $A(x_1, x_2, ..., x_n)$ şi $B(x_1, x_2, ..., x_n)$ sunt echivalente logic, adică $A(x_1, x_2, ..., x_n) \Leftrightarrow B(x_1, x_2, ..., x_n)$. De exemplu, „Un patrulater este paralelogram dacă şi numai dacă diagonalele sale se înjumătățesc.”

Mai putem întâlni enunțuri care afirmă echivalența logică a mai multor predicate. De exemplu: Fie $I \subseteq \mathbb{R}$ un interval şi $f : I \to \mathbb{R}$ o funcție. Următoarele afirmații sunt echivalente:

i. f are proprietatea lui Darboux.
ii. $\forall J \subseteq I$ un interval, $f(J)$ este interval.
iii. $\forall a, b \in I, a < b$, $f([a, b])$ este interval.

Demonstrația completă a unui astfel de enunț presupune, de exemplu, demonstrarea echivalențelor $i. \Leftrightarrow ii.$ şi $i. \Leftrightarrow iii.$ sau demonstrarea implicațiilor $i. \Rightarrow ii. \Rightarrow iii. \Rightarrow i.$

Considerăm teorema $A(x_1, x_2, ..., x_n) \Rightarrow B(x_1, x_2, ..., x_n)$.

Dacă predicatul $\overline{B(x_1, x_2, ..., x_n)}$ este consecință logică a predicatului $\overline{A(x_1, x_2, ..., x_n)}$, atunci are loc teorema:

$$\overline{A(x_1, x_2, ..., x_n)} \Rightarrow \overline{B(x_1, x_2, ..., x_n)}$$

care se numeşte ***contrara teoremei date.*** Deci, teorema contrară teoremei date se obține înlocuind ipoteza şi concluzia teoremei date prin negațiile lor.

În concluzie, fiind considerată o teoremă

$$A(x_1, x_2, ..., x_n) \Rightarrow B(x_1, x_2, ..., x_n)$$

putem forma:

- *propoziția reciprocă*: $B(x_1, x_2, ..., x_n) \Rightarrow A(x_1, x_2, ..., x_n)$,
- *propoziția contrară*: $\overline{A(x_1, x_2, ..., x_n)} \Rightarrow \overline{B(x_1, x_2, ..., x_n)}$,
- *propoziția contrară reciprocei* (se mai numeşte propoziția reciprocă contrarei): $\overline{B(x_1, x_2, ..., x_n)} \Rightarrow \overline{A(x_1, x_2, ..., x_n)}$.

Ținând cont de tautologia $p \to q \Leftrightarrow \overline{q} \to \overline{p}$ menționată la calculul propozițional, teorema directă este echivalentă logic cu contrara reciprocei şi teorema reciprocă cu teorema contrară.

Am definit teorema ca fiind o propoziție adevărată care stabileşte că mai multe obiecte au o anumită proprietate. De cele mai multe ori, acestea se numesc ***propoziții*** şi doar cele mai importante rezultate se numesc ***teoreme***. Propozițiile care rezultă imediat din alte teoreme sau propoziții se numesc ***corolarii***, iar cele care pregătesc demonstrația unei propoziții mai complicate sau teoreme poartă numele de ***leme***.

În practica de zi cu zi, demonstrarea teoremelor se dovedeşte destul de anevoioasă, fiind întâmpinată de către elevi cu reticență, ținând cont de faptul că ei pornesc de la premisa total eronată: „*la matematică nu ne trebuie teorie*”. Pentru ca această activitate să devină plăcută elevilor, esențial este ca ei să fie convinşi că aceste demonstrații oferă (pe lângă dovedirea adevărului afirmației şi aflarea unor noi rezultate fundamentale din domeniul matematic) metode ce pot fi folosite în rezolvarea altor probleme sau teoreme, asigură un exercițiu de demonstrare logică ce ajută la dezvoltarea raționamentului logic al fiecăruia. Este recomandabil să precizăm anumite date istorice despre teoremele enunțate şi despre matematicienii al căror nume este legat de aceste rezultate. Prezentarea unor întâmplări distractive sau a unor momente dramatice din viața acestora nu trebuie considerată „pierdere de timp” ci un sprijin în dobândirea unor cunoştințe de cultură generală şi, de multe ori, oferirea unor exemple de oameni „dăruiți" pentru care cercetarea, căutarea şi aflarea adevărului reprezentau scopul vieții.

De asemenea, trebuie insistat asupra *teoremelor de existență*. În primul rând, ele stau la baza consistenței unei definiții (nu are rost să definim o noțiune dacă nu ştim că ea există). Pe lângă aceasta, teoremele de existență constructive pot fi uşor înțelese de elevi, ele fiind mai accesibile (mai ales la o anumită vârstă) decât cele neconstructive, în care se dovedeşte existența unei noțiuni fără a oferi o metodă de a o pune în evidență. Semnificative în cadrul *demonstrațiilor constructive* sunt „problemele de construcție cu rigla şi compasul" care fac mai uşoară apropierea elevilor de geometrie; din păcate, cu toate că aceste tipuri de demonstrații subliniau o latură practică importantă a geometriei, atenția acordată lor în programă nu este cea cuvenită.

În strânsă relație cu teoremele de existență sunt *teoremele de unicitate*. De multe ori, enunțul unei teoreme poate include existența şi unicitatea. Oricum, în cadrul demonstrației, cele două probleme se tratează separat. O greşeală clasică în raționamentul demonstrării unei proprietăți de unicitate este aceea de a prezenta un procedeu prin care se ajunge la noțiunea dorită (pentru care arătăm existența şi unicitatea) şi de a nu arăta apoi că el este unic (nu se verifică posibilitatea că există şi alte obiecte matematice care satisfac condițiile cerute, dar nu se obțin prin acelaşi procedeu).

Unele teoreme conțin în enunțul lor anumite relații greu de reținut de către elevi. În această situație, pentru a facilita asimilarea acestora, profesorul poate recurge la nişte procedee de asociere dirijată care să ofere elevilor o posibilitate de reținere rapidă. De exemplu, teoremele lui Menelaus (de coliniaritate a punctelor $D \in BC$, $E \in CA$, $F \in AB$) şi Ceva (de concurență a dreptelor *AD*, *BE*, *CF* pentru punctele *D*, *E*, *F* care verifică aceleaşi proprietăți de apartenență în raport cu triunghiul ΔABC) conțin o egalitate ce are în membrul stâng un produs greu de memorat $\frac{\overline{DB}}{\overline{DC}} \cdot \frac{\overline{EC}}{\overline{EA}} \cdot \frac{\overline{FA}}{\overline{FB}}$. Pentru aceasta, putem începe să scriem produsul de rapoarte punând în evidență doar punctele care nu sunt vârfuri ale triunghiului $\frac{\overline{D...}}{\overline{D...}} \cdot \frac{\overline{E...}}{\overline{E...}} \cdot \frac{\overline{F...}}{\overline{F...}}$. Restul se completează ținând cont de două reguli: trebuie să apară doar segmentele orientate incluse în dreptele suport ale laturilor triunghiului şi, dacă un vârf a apărut o dată la numărător, a doua oară trebuie să apară la numitor (şi invers).

Un alt exemplu, îl constituie relația ce apare în teorema lui Stewart:

$$AB^2 \cdot \overline{DC} + AC^2 \cdot \overline{BD} - AD^2 \cdot \overline{BC} = \overline{BD} \cdot \overline{DC} \cdot \overline{BC}.$$

Ea se poate reține dacă ținem cont că doar segmentele din A apar la pătrat şi sunt înmulțite astfel încât în fiecare monom să apară toate cele patru litere.

Axiomele grupului ni le putem aminti mai uşor ca *DANS*, unde *D* semnifică corecta definire a operației, *A* asociativitatea ei, *N*, existența elementului neutru şi *S* faptul că orice element este simetrizabil în raport cu operația definită.

9.5. Raționamentul

Raționamentul reprezintă întemeierea adevărului unei judecăți pe baza adevărului altei judecăți. Adevărurile obținute prin raționament se numesc *adevăruri discursive* sau *mijlocite*. Raționamentul este alcătuit din două feluri de judecăți: *premisele*, judecățile care întemeiază şi care constituie punctul de plecare al raționamentului şi *concluzia*, judecata nouă, rezultată în urma raționamentului. Pentru ca premisele să întemeieze adevărul concluziei trebuie ca ele să fie corecte şi concluzia să decurgă din acestea.

Când concluzia decurge *cu necesitate* din premise, ***raționamentul*** se numeşte ***deductiv***; în caz contrar, ***raționamentul*** este ***inductiv***.

Astfel, raționamentul este forma gândirii prin care din două judecăți derivăm o nouă judecată, în baza raporturilor logice dintre ele.

Raționamentul deductiv

Inferența matematică are rolul de a obține noi propoziții adevărate deduse din propoziții care s-au stabilit deja că sunt adevărate. Astfel, ***regulile de inferență*** trebuie să pornească de la propoziții adevărate şi să decidă ce fel de propoziții sunt cele rezultate din acestea. Un rol deosebit de important îl joacă tautologiile, deoarece orice tautologie de forma $p \to q$ conduce la o regulă de inferență. Condițiile de aplicare ale unei reguli, *premisele*, se scriu deasupra unei linii orizontale, iar rezultatul aplicării regulii, *concluzia*, sub această linie. Un sistem S de reguli de inferență determină o relație „A poate fi dedus din S" care se simbolizează prin $S \vdash A$.

Astfel, dacă $P_1, P_2, ..., P_n$ sunt propoziții compuse care sunt formate din propozițiile simple $p_1, p_2, ..., p_m$, spunem că propoziția compusă Q (care depinde de $p_1, p_2, ..., p_m$) este ***consecință logică a propozițiilor*** $P_1, P_2, ..., P_n$ (scriem $P_1, P_2, ..., P_n \vdash Q$) dacă pentru orice sistem de valori logice atribuite propozițiilor $p_1, p_2, ..., p_m$ pentru care propozițiile P_1, P_2, ..., P_n sunt adevărate, propoziția Q este adevărată. Propozițiile P_1, P_2, ..., P_n, care împreună formează ipoteza, se numesc *premise* iar Q *concluzie*. Raționamentul prin care se realizează acest proces se numeşte *raționament deductiv*.

O ***teorie*** (***sistem deductiv***) este definită ca fiind un ansamblu ce cuprinde:

- un sistem de noțiuni $\{N_\alpha\}$;
- un sistem de relații $\{R_\beta\}$;
- un sistem de propoziții corect construite $\{P_\gamma\}$, exprimate cu noțiunile N_α şi relațiile R_β;
- un sistem $\{L_\delta\}$ de reguli de deducție;
- $\{A_\varepsilon\}$, un subsistem al lui $\{P_\gamma\}$, format din propoziții adevărate, care trebuie să verifice condițiile:
    - Sistemul $\{P_\gamma\}$ este închis în raport cu sistemul $\{L_\delta\}$ (orice consecință a propozițiilor din sistemul $\{P_\gamma\}$, obținută prin regulile de deducție din $\{L_\delta\}$, se găseşte în sistemul $\{P_\gamma\}$);
    - Sistemul $\{A_\varepsilon\}$ este închis în raport cu sistemul $\{L_\delta\}$.

Vom menționa în continuare câteva dintre cele mai des întâlnite reguli de deducție.

1. Pornind de la tautologia $p \wedge (p \to q) \Rightarrow q$, se deduce afirmația următoare:

Dacă într-o teorie, propozițiile p şi q sunt astfel încât p este adevărată şi $p \Rightarrow q$*, atunci, q este adevărată.*

Deci, din premisele p şi $p \Rightarrow q$ deducem q.

Putem scrie atunci:

$$\begin{array}{l|l} S & p \\ S & p \Rightarrow q \\ \hline S & q\,. \end{array}$$

Această regulă poartă numele de ***modus ponens*** (***regula detaşării***). Metoda (modus) afirmă (ponens) concluzia unei implicații, afirmând ipoteza ei, sau, altfel spus, într-o implicație în care afirmăm ipoteza, putem detaşa concluzia (regula detaşării).

De exemplu, fie $p \Rightarrow q$: „$n = 1232$, atunci n este multiplu de 11”. Cunoaştem criteriul de divizibilitate: „Dacă suma alternată a cifrelor unui număr natural n este divizibilă cu 11, atunci numărul n este multiplu de 11”. Cum $11 \mid 2-3+2-1=0$, rezultă „$n = 1232$ multiplu de 11” adevărat.

La fel, pentru a arăta că înălțimile unui triunghi sunt concurente, ne folosim de altă teoremă demonstrată anterior: „mediatoarele laturilor unui triunghi sunt concurente”.

În acest caz, $p \Rightarrow q$: „Dacă AA', BB', CC' sunt înălțimile triunghiului ABC, atunci AA', BB', CC' sunt concurente”. Pentru a demonstra teorema, ducem paralelele prin vârfurile triunghiului ABC la laturile opuse, şi notăm punctele lor de intersecție cu D, E şi F. Se demonstrează apoi că AA', BB', CC' sunt mediatoarele laturilor triunghiului DEF. Ținând cont de teorema amintită inițial, rezultă că ele sunt concurente.

2. Pornim acum de la tautologia $p \to q \Leftrightarrow \overline{q} \to \overline{p}$, cunoscută şi sub numele de ***legea contrapoziție***. Obținem astfel un nou tip de raționament, ***raționamentul prin contrapoziție***:

Dacă într-o teorie propoziția $\overline{q} \to \overline{p}$ este adevărată, atunci propoziția $p \to q$ este adevărată.

Deci, pentru a arăta că propoziția $p \to q$ este adevărată, arătăm că $\overline{q} \to \overline{p}$ este adevărată. Astfel,

$$\frac{S \vdash \quad p \to q}{S \vdash \quad \overline{q} \to \overline{p}\,.}$$

De exemplu, considerăm propoziția: „Fie $n \geq 2$ un număr natural. Dacă *n* nu are divizori primi $\leq \sqrt{n}$ atunci *n* este un număr prim." Conform raționamentului prezentat, pentru a arăta că această afirmație este adevărată, putem demonstra propoziția: „Dacă *n* este un număr natural compus, atunci *n* are cel puțin un divizor prim $\leq \sqrt{n}$. " Pentru aceasta, cum *n* este număr compus, considerăm $n = ab,$ cu $1 < a \leq b < n.$ Dacă presupunem $a > \sqrt{n},$ atunci $n = ab > n,$ fals. Deci, $a \leq \sqrt{n}.$ Din $a > 1$ rezultă că există un număr prim *p* astfel încât $p \mid a.$ În concluzie, *n* are un divizor prim $p \leq \sqrt{n}.$

3. Legea contrapoziției conduce la un nou mod de raționament indirect, ținând cont de tautologia:

$$\overline{q} \wedge (\overline{p} \to q) \Rightarrow p \text{ (sau } \overline{q} \wedge (p \to q) \Rightarrow \overline{p} \text{)}.$$

Dacă într-o teorie, propozițiile $\overline{q}$ și $\overline{p} \to q$ *sunt adevărate, atunci propoziția p este adevărată.* Putem scrie:

$$\frac{\begin{array}{l} S \vdash \quad \overline{q} \\ S \vdash \quad \overline{p} \to q \end{array}}{S \vdash \quad p\,.}$$

Regula logică asociată se numeşte regula ***modus tollens*** (***regula inferenței negative***).

De exemplu, dacă considerăm cunoscută teorema $p \Rightarrow q$: „Dacă *ABCD* este paralelogram, atunci $[AB] \equiv [CD]$ " şi, în cazul nostru, patrulaterul are $AB \neq CD,$ atunci, conform acestei reguli, deducem că *ABCD* nu este paralelogram.

4. Legea silogismului $(p \to q) \wedge (q \to r) \Rightarrow (p \to r)$ conduce ***la regula silogismului ipotetic cu implicație***:

$$\begin{array}{l|l} S & p \to q \\ S & q \to r \\ \hline S & p \to r. \end{array}$$

Astfel:

Dacă într-o teorie, propozițiile $p \to q$ şi $q \to r$ sunt adevărate, atunci propoziția $p \to r$ este adevărată.

La fel se poate enunța regula silogismului ipotetic cu echivalență.

De exemplu, să arătăm că $\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{2} \le \sqrt{\dfrac{x+y}{2}}$, dacă $x, y \ge 0$. Pentru aceasta, din inegalitatea mediilor, deducem:

$$x+y \ge 2\sqrt{xy} \;\Leftrightarrow\; 2(x+y) \ge x+2\sqrt{xy}+y = (\sqrt{x}+\sqrt{y})^2 \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x+y}{2} \ge \left(\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{2}\right)^2 \;\Leftrightarrow\; \sqrt{\frac{x+y}{2}} \ge \frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{2}.$$

5. ***Regula disjuncției cazurilor*** este asociată tautologiei:

$$(p \to q) \wedge (\overline{p} \to q) \Rightarrow q.$$

Deci:

Dacă într-o teorie, propozițiile $p \to q$ şi $\overline{p} \to q$ sunt adevărate, atunci q este propoziție adevărată.

$$\begin{array}{l|l} S & p \to q \\ S & \overline{p} \to q \\ \hline S & q. \end{array}$$

Un exemplu simplu de un astfel de raționament este cel folosit pentru a arăta că: „Pentru orice număr natural n, produsul $n(n+1)$ este număr par.” Deoarece orice număr natural este par sau impar, arătăm că $p \to q$: „Pentru orice număr natural par n, produsul $n(n+1)$ este număr par.” şi $\overline{p} \to q$: „Pentru orice număr natural impar n, produsul $n(n+1)$ este număr par.” sunt adevărate.

6. Folosim acum tautologia

$$(p \to q) \Leftrightarrow ((p \wedge \overline{q}) \to (a \wedge \overline{a})).$$

Astfel, dacă presupunerea că propozițiile p şi $\overline{q}$ sunt adevărate conduce la o propoziție recunoscută falsă (sau o contradicție logică, de forma $a \wedge \overline{a}$), atunci am arătat că propoziția $p \to q$ este adevărată.

Acest mod de raționament deductiv indirect realizează o ***reducere la absurd*** a propoziției formate negând-o pe cea pe care vrem să o dovedim: plecând de la o bază inițială, p şi $\overline{q}$, am obținut o consecință falsă, deci este imposibil să avem simultan p şi $\overline{q}$. Dacă păstrăm pe p, nu-l putem avea decât pe q, adică $p \to q$. Un astfel de raționament este un ***raționament prin excludere logică***. Schematic, raționamentul de reducere la absurd se reduce la a constata echivalența $\overline{p \wedge \overline{q}} \Leftrightarrow \overline{p} \vee q$. p este propoziție adevărată, deci $\overline{p}$ este falsă. Singura posibilitate ca propoziția $\overline{p} \vee q$ să fie adevărată este ca propoziția q să fie adevărată.

Trebuie subliniat faptul că *metoda reducerii la absurd nu se reduce la regula contrapoziției deoarece apar situații în care nu se contrazice ipoteza, ci un rezultat cunoscut cum ar fi o axiomă, teoremă* (vezi 10.1).

Raționamentul inductiv

După cum am observat, raționamentul deductiv trece de la judecăți generale (premisele) la judecăți (concluzia) mai particulare. Spre deosebire de acesta, ***raționamentul inductiv*** (***inducție*** provine din latinescul *inductionis*, care înseamnă „aducere", „orientare spre", „introducere prin exemple") conduce la o concluzie generală pe baza unor premise care enumeră cazuri individuale. Gândirea noastră face astfel trecerea de la obiecte singulare la noțiuni generale, de la fapte individuale la legi generale.

În geometrie, de exemplu, primele adevăruri matematice s-au obținut prin experiențe, cu ajutorul observației, măsurătorilor (egiptenii au stabilit aproximativ raportul dintre lungimea cercului şi diametrul său), deci pe cale inductivă. Trecerea de la stadiul empiric la cel deductiv a fost făcut doar în momentul în care matematicieni precum Thales, Pitagora, Euclid s-au folosit de raționamente pentru a obține anumite rezultate.

În situația în care numărul de cazuri care trebuie studiate este finit, prin parcurgerea acestora se epuizează toate posibilitățile şi obținem concluzii certe. Spunem că am aplicat ***inducția completă***.

De exemplu:

1. Pentru a arăta că „*orice număr par n cu* $4 \leq n \leq 20$*, se poate scrie ca suma a două numere prime, nu neapărat distincte*", considerăm toate numerele pare precizate:

$$4 = 1 + 3,\ 6 = 1 + 5,\ 8 = 3 + 5,\ 10 = 3 + 7,\ 12 = 5 + 7,$$
$$14 = 7 + 7,\ 16 = 5 + 11,\ 18 = 7 + 11,\ 20 = 7 + 13.$$

2. Pentru a arăta că „*măsura unui unghi înscris într-un cerc este egală cu jumătate din măsura arcului cuprins între laturile sale*", se consideră pe rând următoarele situații:

- unghiul înscris are o latură diametru iar cealaltă o coardă;
- unghiul înscris are laturile situate de o parte şi de alta a centrului cercului;
- unghiul înscris are laturile coarde situate de aceeaşi parte a centrului cercului,

şi se demonstrează apoi că afirmația este adevărată pentru fiecare caz în parte. Cum orice unghi înscris într-un cerc corespunde unei singure variante din cele trei menționate, înseamnă că am tratat toate cazurile posibile.

În inducția completă, concluzia este o propoziție mai generală decât premisele, dar ea nu face decât să exprime într-o formă concisă ceea ce au prezentat în mod amănunțit premisele. Din aceast motiv, *inducția completă nu este considerată o inferență inductivă veritabilă.*

În matematică, inducția completă are un domeniu de aplicabilitate restrâns deoarece predicatele sunt de cele mai multe ori funcții cu domeniul de definiție mulțimi infinite de elemente (mulțimea numerelor naturale, a numerelor prime, a poliedrelor, etc.).

Din punct de vedere strict logic, concluzia obținută prin inducție nu este absolut certă; chiar dacă se studiază suficient de multe cazuri particulare şi nu se întâlneşte nicio situație care să contrazică observațiile făcute, nu ştim sigur că un astfel de caz nu poate apare. Fiind cu neputință să studiem toate cazurile particulare posibile (luăm în considerare situația cea mai des întâlnită, când mulțimea cazurilor, obiectelor supuse cercetării este infinită), acest raționament este numit ***inducție incompletă***.

De exemplu, calculăm sumele:

$$1+3=4=2^2,\ 1+3+5=9=3^2,\ 1+3+5+7=16=4^2,...$$

Observăm că, de fiecare dată, suma este egală cu pătratul numărului de termeni ai sumei. Putem presupune, în mod natural, că orice sumă de această formă, cu oricât de mulți termeni, va avea aceeaşi proprietate. Deci, pentru orice număr natural $n \geq 1$, concluzionăm că are loc egalitatea $1+3+...+(2n-1)=n^2$.

După cum am văzut, inducția incompletă este folositoare deoarece oferă, prin observație, anumite ipoteze privind proprietăți ale noțiunilor matematice care apoi pot fi confirmate sau infirmate. Astfel, pentru a deveni un rezultat cert, rezultatul intuit prin inducție trebuie demonstrat *deductiv*.

Pentru a arăta că rezultatul la care am ajuns în exemplul considerat anterior este corect, vom aplica un raționament numit ***inducție matematică***. *Inducția matematică este o metodă de raționament care elimină imposibilitatea analizării unei mulțimi infinite de cazuri* prin demonstrarea faptului că, dacă o propoziție este adevărată într-un caz, ea se dovedeşte adevărată şi în cazul care succede acestuia.

Axioma P_3), din cadrul definiției axiomatice a mulțimii numerelor naturale (vezi 8.2.): „*Dacă o submulțime P a lui* $\mathbb{N}$ *are proprietățile* $0 \in P$ *şi* $n \in P \Rightarrow s(n) \in P$, *atunci* $P = \mathbb{N}$" se mai numeşte ***principiul inducției matematice***, stând la baza demonstrațiilor prin inducție matematică.

Considerăm un predicat unar $P(n)$ care are sens pentru $n \in \mathbb{N}$. Acestui predicat îi asociem mulțimea $P = \{n \in \mathbb{N} \mid P(n)\}$ astfel: $P(n)$ este propoziție adevărată dacă şi numai dacă $n \in P$. Prin inducție după n se demonstrează că, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ este propoziție adevărată (de fapt, rezultă $P = \mathbb{N}$).

Pentru aceasta, în demonstrație, se parcurg două etape:

1. Se verifică mai întâi că $P(0)$ este o propoziție adevărată.
2. Se presupune că $P(n)$ este o propoziție adevărată (*ipoteza de inducție*) şi se demonstrează că şi $P(s(n))$ este o propoziție adevărată (*pasul de inducție al demonstrației*).

Dacă s-au parcurs cei doi paşi, înseamnă că: $0 \in P$ şi $n \in P \Rightarrow s(n) \in P$. Conform axiomei P_3), $P = \mathbb{N}$ şi astfel $P(n)$ este adevărată, pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

Observații:

- Dacă se cere să arătăm că $P(n)$ este adevărată pentru orice număr natural $n \geq n_0$, unde n_0 este număr natural fixat, prima etapă a demonstrației prin inducție matematică constă în a arăta că $P(n_0)$ este propoziție adevărată.
- Cele două etape ale demonstrației sunt la fel de importante. În general, apare tendința de a minimaliza importanța primei etape, cea de verificare. Dacă afirmăm că orice număr natural n este egal cu succesorul său, fără a verifica faptul că $0 \neq s(0) = 1$, etapa a doua a demonstrației ar conduce la concluzia că propoziția este adevărată, ceea ce este absurd.

De exemplu, folosind metoda inducției matematice, să demonstrăm formula intuită anterior: $1 + 3 + ... + (2n - 1) = n^2$. Etapa de verificare a fost deja parcursă.

Presupunem acum că $1 + 3 + ... + (2n - 1) = n^2$ şi demonstrăm că:

$$1 + 3 + ... + (2n - 1) + (2n + 1) = (n + 1)^2 .$$

Pentru aceasta, folosind ipoteza de inducție, obținem:

$$1 + 3 + ... + (2n - 1) + (2n + 1) = n^2 + 2n + 1 = (n + 1)^2 .$$

Proprietatea mulțimii numerelor naturale de a fi bine ordonată stă la baza celui de-***al doilea principiu al inducției matematice*** care este de fapt echivalent cu primul principiu de inducție. Preferat în unele demonstrații, acest principiu este formulat astfel:

Dacă P este o submulțime a lui $\mathbb{N}$ *care are proprietatea că*:

$$(x < n \Rightarrow x \in P) \Rightarrow (n \in P),$$

atunci $P = \mathbb{N}$.

Pentru a demonstra acest principiu, considerăm complementara $A = \mathbb{N} \setminus P$ a mulțimii *P*. Reducem la absurd şi presupunem că mulțimea *A* este nevidă. Deci, există un cel mai mic element *a* al lui *A*. Pentru $x < a$, $x \notin A \Rightarrow x \in P$. Atunci, $a \in P$ ceea ce contrazice $a \in A$. Rezultă că mulțimea *A* este vidă şi, prin urmare, $P = \mathbb{N}$.

Acest principiu stă la baza unei *variante a metodei de demonstrare prin inducție matematică.*

Considerăm predicatul unar $P(n)$ care are sens pentru orice număr natural $n \geq n_0$. Pentru a demonstra că $P(n)$ este adevărată pentru orice $n \geq n_0$, natural, arătăm că:

1. Se verifică $P(n_0)$ propoziție adevărată.
2. Se presupune că pentru orice k cu $n_0 \leq k < n$, $P(k)$ este adevărată şi se demonstrează că $P(n)$ este adevărată.

Spre exemplu, să arătăm că:

Orice număr natural $n \geq 2$ *este număr prim sau se descompune în produsul unui număr finit de numere prime*.

Notăm cu $P(n)$ predicatul:

„Numărul natural $n \geq 2$ este număr prim sau se descompune în produsul unui număr finit de numere prime.”

Se observă că $P(2)$ este adevărată pentru că $n = 2$ este număr prim. Presupunem $P(k)$ adevărată, pentru $2 \leq k \leq n-1$ şi demonstrăm că $P(n)$ este adevărată. Dacă *n* este număr prim, $P(n)$ este adevărată. Dacă *n* nu este număr prim, atunci $n = ab$ unde $2 \leq a,b < n$. Din ipoteza de inducție, $P(a)$ şi $P(b)$ sunt adevărate, adică *a* şi *b* sunt prime sau se descompun în produs de numere prime. Atunci şi *n* se descompune în produs finit de numere prime şi $P(n)$ este adevărată.

<u>CAPITOLUL X</u>

Aplicații ale raționamentului prin reducere la absurd şi prin inducție matematică

10.1. Metoda reducerii la absurd

1. *Arătați că dacă un şir de numere reale are limită, atunci aceasta este unică.*

Soluție: Presupunem că şirul $(a_n)_{n\geq 0}$ are limită dar aceasta nu este unică; există astfel $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$, $a \neq b$, aşa încât: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = b$.

Presupunem întâi $a, b \in \mathbb{R}$. Atunci, pentru $\varepsilon = |a-b|$, $(\exists) n_\varepsilon' \geq 1$ şi $(\exists) n_\varepsilon'' \geq 1$ astfel încât: $|a-a_n| < \dfrac{\varepsilon}{2}$, $(\forall) n \geq n_\varepsilon'$ şi $|b-a_n| < \dfrac{\varepsilon}{2}$, pentru orice $n \geq n_\varepsilon''$. Astfel, $\varepsilon = |a-b| \leq |a-a_n| + |b-a_n| < \dfrac{\varepsilon}{2} + \dfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$, pentru $(\forall) n \geq \max\{n_\varepsilon', n_\varepsilon''\}$, ceea ce este absurd.

Presupunem acum $a \in \mathbb{R}$, $b = \infty$. Pentru $\varepsilon > 0$, arbitrar ales, şi $c > a + \varepsilon$, $(\exists) n_\varepsilon \geq 1$ şi $(\exists) n_c \geq 1$ astfel încât $|a - a_n| < \varepsilon$, $(\forall) n \geq n_\varepsilon$ şi $a_n > c > a + \varepsilon$, $(\forall) n \geq n_c$. Rezultă că, $(\forall) n \geq \max\{n_\varepsilon, n_c\}$, $a_n < a + \varepsilon$ şi, în acelaşi timp, $a_n > a + \varepsilon$ ceea ce este imposibil.

Pentru celelalte cazuri ($a \in \mathbb{R}$, $b = -\infty$; $a = \infty$, $b = -\infty$), raționamentul este asemănător. Astfel, limita este unic determinată.

2. *Se consideră funcția* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, *definită prin*:

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0 \\ \sin\frac{1}{x}-\frac{1}{x}\cos x, & x>0. \end{cases}$$

Arătați că f nu admite primitive.

Soluție: Dacă, prin reducere la absurd, funcția ar avea o primitivă $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, atunci $F'(0)=f(0)=0$. Din:

$$F'(0)=F_d'(0)=\lim_{x\searrow 0}\frac{F(x)-F(0)}{x}=$$

$$=\lim_{x\searrow 0}\frac{(x-0)F'(c_x)}{x}=\lim_{x\searrow 0}f(c_x)=-\infty,$$

obținem însă contradicția $0=-\infty$, deci presupunerea făcută este falsă.

3. *Considerăm numerele*:

$$a=1974^n+2^n \text{ și } b=1974^n, \text{ cu } n\in\mathbb{N}.$$

Arătați că, în scrierea în baza 10 a acestor numere, se folosește același număr de cifre.

Soluție: Pentru $n=0$ și $n=1$, afirmația este adevărată.

Fie acum $n>1$. Notăm cu k numărul de cifre din scrierea lui b. Deoarece $1974^n>10^{3n}$, rezultă $k\ge 3n$ și $10^{k-1}<b<10^k$.

Presupunem că în scrierea numărului a în baza 10 se folosesc mai mult de k cifre. Atunci, $10^k\le a$. Obținem astfel inegalitatea:

$$987^n\cdot 2^n<2^k\cdot 5^k\le 2^n(987^n+1),$$

de unde, $987^n<2^{k-n}\cdot 5^k\le 987^n+1$. Așadar $2^{k-n}\cdot 5^k=987^n+1$. Deoarece $k-n\ge 2n\ge 4$, rezultă că $8\,|\,2^{k-n}\cdot 5^k$.

Deoarece $987^2\equiv 1\,(\,mod\ 8)$, rezultă:

$$987^{2l}+1\equiv 2\,(\,mod\ 8) \text{ și } 987^{2l+1}+1\equiv 4\,(\,mod\ 8),$$

pentru l număr natural. Deci, 987^n+1 nu este divizibil cu 8, ceea ce contrazice rezultatul obținut anterior. Presupunerea făcută este astfel falsă; în concluzie, numerele a și b, scrise în baza 10, au același număr de cifre.

4. *Fie funcțiile* $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *care satisfac următoarea relație*:

$$f(x+y)+f(x-y)=2f(x)g(y),$$

pentru orice numere reale x, y. Presupunem că f nu este identic nulă şi, pentru orice număr real x, $|f(x)| \le 1$. *Demonstrați că, în aceste condiții, pentru orice număr real y ,* $|g(y)| \le 1$.

Soluție: Prin reducere la absurd, presupunem că există y_0 pentru care $|g(y_0)| = a > 1$. Alegem x_0 astfel încât $f(x_0) \ne 0$ şi definim prin recurență şirul $(x_k)_{k\ge 0}$ după cum urmează:

$$x_{k+1} = \begin{cases} x_k + y_0, & \text{pentru} \quad |f(x_k+y_0)| \ge |f(x_k-y_0)|, \\ x_k - y_0, & \text{pentru} \quad |f(x_k+y_0)| < |f(x_k-y_0)|. \end{cases}$$

Folosind relația din enunțul problemei,

$$2|f(x_{k+1})| \ge |f(x_k+y_0)| + |f(x_k-y_0)| \ge$$
$$\ge |f(x_k+y_0)+f(x_k-y_0)| =$$
$$= 2|f(x_k)| \cdot |g(y_0)| = 2a|f(x_k)|.$$

Astfel, pentru orice *k* natural, $|f(x_{k+1})| \ge a|f(x_k)|$, cu $a > 1$. Aplicând inducția matematică, rezultă $|f(x_k)| \ge a^k |f(x_0)|$, pentru orice $k \in \mathbb{N}$. Deoarece $f(x_0) \ne 0$ şi $a > 1$, putem găsi un număr natural k_0, pentru care $a^{k_0} |f(x_0)| > 1$. Atunci, $|f(x_{k_0})| > 1$ ceea ce contrazice ipoteza şi dovedeşte că $|g(y)| \le 1$, $(\forall) y \in \mathbb{R}$.

5. *Mulțimea* $\mathbb{N}$ *este bine ordonată*.

Soluție: Fie $A \subseteq \mathbb{N}$ nevidă. Presupunem că *A* nu are prim element. Considerăm mulțimea $B = \{n \in \mathbb{N} \mid \{0,1,2,...,n\} \cap A = \varnothing\}$.

Dacă $0 \notin B$, atunci $0 \in A$ şi astfel *A* are prim element, fals. Deci, $0 \in B$.

Arătăm acum că pentru $n \in B$ rezultă $n+1 \in B$. Din $n \in B$, obținem că $\{0,1,2,...,n\} \cap A = \varnothing$, adică $a > n$, $(\forall) a \in A$. Presupunând că

$\{0,1,2,...,n,n+1\} \cap A \neq \varnothing$, obținem $n+1 \in A$. De aici, $n+1 \leq a$, pentru orice $a \in A$, adică $n+1$ este prim element al lui A, fals.

Conform axiomei Peano P_3), rezultă că $B = \mathbb{N}$ şi astfel, $A = \varnothing$. Deoarece se contrazice alegerea inițială a lui *A,* presupunerea făcută este eronată.

6. *Arătați că mulțimea numerelor prime este infinită.*

Soluție: Presupunem că există un număr finit de numere prime, $p_1, p_2, ..., p_n$. Considerăm $a = p_1 p_2 ... p_n + 1$. Cum $a > 1$, el are un divizor prim *p*. Deci, există $1 \leq i \leq n$ astfel încât $p = p_i$. Din $p_i \mid a$, rezultă $p_i \mid 1$, ceea ce contrazice faptul că p este număr prim.

7. *Să se arate că numărul* $\sqrt{2}$ *este irațional.*

Soluție: Reducem la absurd şi presupunem că $\sqrt{2}$ este număr rațional. Deci, există numerele naturale *m*, *n* ($n \neq 0$), prime între ele, astfel încât $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$. Atunci, $m^2 = 2n^2$. m^2 este astfel număr par, deci şi m este par. Fie $m = 2k,\ \ k \in \mathbb{N}$. Înlocuind, obținem $n^2 = 2k^2$, de unde şi *n* este număr par. Această concluzie contrazice faptul că *m* şi *n* sunt relativ prime. Presupunerea inițială dovedindu-se falsă, numărul $\sqrt{2}$ nu este rațional.

8. *Fie P un polinom cu coeficienți întregi, care nu este constant. Notăm cu n*(*P*) *numărul tuturor numerelor întregi k*, *diferite între ele, pentru care* $P(k)^2 = 1$. *Să se demonstreze că*:

$$n(P) - grad(P) \leq 2,$$

unde am notat gradul polinomului *P* cu $grad(P)$.

Soluție: Din ipoteză, $P \in \mathbb{Z}[X]$ nu este un polinom constant, deci $grad(P) \geq 1$. Construim polinoamele $P_1 = P + 1,\ P_2 = P - 1$ din $\mathbb{Z}[X]$. Se observă imediat că P_1 şi P_2 nu au rădăcini comune iar fiecare dintre aceste două polinoame are maxim $grad(P)$ rădăcini întregi.

Presupunem că fiecare dintre polinoamele P_1 şi P_2 are cel puțin trei rădăcini întregi distincte. În mulțimea formată cu toate rădăcinile celor două polinoame (evident finită), notăm cu a cel mai mic număr întreg şi, fără a restrânge generalitatea, putem presupune că el este rădăcină a polinomului P_1. Atunci, $P_1 = (X-a)Q$ unde $Q(X) \in \mathbb{Z}[X]$. Fie $b, c, d \in \mathbb{Z}$ trei dintre rădăcinile lui P_2 (ipoteza de lucru precizează că P_2 are minim trei rădăcini distincte). Ținând cont de alegerea lui a, avem $b, c, d > a$. Deoarece $P_2 = P_1 - 2 = (X-a)Q - 2$, obținem:

$$2 = (b-a)Q(b) = (c-a)Q(c) = (d-a)Q(d).$$

Din această relație, rezultă că $b-a$, $c-a$, $d-a$ sunt divizori ai lui 2. Dar, pe de altă parte, acestea sunt numere naturale şi distincte; astfel, unul dintre aceste numere este mai mare decât 2, ceea ce contrazice faptul că el este un divizor al lui 2.

Deci, presupunerea pe care am făcut-o este falsă. Atunci, cel puțin una dintre ecuațiile $P(x) = 1$ sau $P(x) = -1$ are cel mult două rădăcini întregi. $n(P)$ este egal cu numărul rădăcinilor distincte ale celor două ecuații. Cum numărul rădăcinilor fiecărei ecuații nu poate să depăşească $grad(P)$, obținem $n(P) \le grad(P) + 2$.

9. *Fie a,b,c trei numere întregi diferite între ele, iar P un polinom cu coeficienți întregi. Să se arate că nu pot fi îndeplinite simultan egalitățile* $P(a) = b$, $P(b) = c$ *şi* $P(c) = a$.

Soluție: Presupunem că cele trei egalități pot avea loc simultan. Atunci:

$$P(X) - b = (X-a)P_1(X), \qquad (1)$$

$$P(X) - c = (X-b)P_2(X), \qquad (2)$$

$$P(X) - a = (X-c)P_3(X), \qquad (3)$$

cu P_1, P_2, P_3 polinoame cu coeficienți întregi.

Considerăm numerele naturale $|a-b|$, $|a-c|$, $|b-c|$.

Dacă două dintre acestea sunt egale, de exemplu, $|a-b| = |a-c|$, cum $b \ne c$, rămâne posibilitatea $b + c = 2a$. Din (3) rezultă că:

$$(c-a) = (b-c)P_3(b) = 2(a-c)P_3(b).$$

Deoarece a şi c sunt distincte, $P_3(b) = -\frac{1}{2}$, ceea ce contrazice faptul că $P_3(b)$ este număr întreg.

Astfel, cele trei module au valori diferite. Fără a restrânge generalitatea, fie $|a-c|$ cel mai mare dintre acestea. Deci:

$$|a-b| < |a-c|.$$

În (1), din $P(c) = a$, obţinem $a - b = (c-a)P_1(c)$. $P_1(c)$ fiind un număr întreg nenul ($P_1(c) = 0$ implică $a = b$, ceea ce este fals), conduce la $|a-b| \geq |a-c|$, ceea ce contrazice relaţia anterioară.

Dacă o altă diferenţă este maximă, pentru a ajunge la contradicţie, se folosesc celelalte egalităţi ((2), (3)). Rezultă că presupunerea făcută iniţial este greşită; astfel cele trei egalităţi nu pot avea loc concomitent.

10. *Să se demonstreze că rădăcinile cubice a trei numere prime diferite nu pot constitui trei termeni, nu neapărat consecutivi, ai unei progresii aritmetice.*

Soluţie: Fie p_1, p_2, p_3 trei numere prime.

Presupunem, reducând la absurd, că $\sqrt[3]{p_1}, \sqrt[3]{p_2}, \sqrt[3]{p_3}$ sunt termenii unei progresii aritmetice. Atunci,

$$\sqrt[3]{p_1} = a, \ \sqrt[3]{p_2} = a + mr, \ \sqrt[3]{p_3} = a + nr,$$

cu m, n numere întregi, nenule, distincte şi r număr real nenul.

Eliminând a şi r, obţinem:

$$m\sqrt[3]{p_3} - n\sqrt[3]{p_2} = (m-n)\sqrt[3]{p_1}.$$

De aici, $(m\sqrt[3]{p_3} - n\sqrt[3]{p_2})^3 = (m-n)^3 p_1$ şi, în final rezultă:

$$m^3 p_3 - n^3 p_2 - (m-n)^3 p_1 = 3mn(m-n)\sqrt[3]{p_1 p_2 p_3},$$

ceea ce ne conduce la o contradicţie (membrul stâng al egalităţii este număr întreg, iar cel drept, număr iraţional).

11. *În componenţa unui număr de nouă cifre intră toate cifrele, în afară de zero. Ştiind că numărul se termină în cifra 5, să se arate că acesta nu poate fi un pătrat perfect.*

Soluție: Presupunem că n, numărul format din cele nouă cifre nenule, este pătrat perfect. Atunci, $n = k^2$. Numărul k se termină şi el în cifra 5, deci $k = 10a + 5$. Din $n = 100a(a+1) + 25$, rezultă că penultima cifră a lui n este 2. Un număr de forma $a(a+1)$ are ultima cifră 0, 2 sau 6. Cifra 0 nu intră în componența numărului n iar cifra 2 este deja întâlnită pe penultimul loc. Rămâne pentru cifra sutelor lui n cifra 6. Astfel, $n = 1000b + 625$. Deoarece acest număr se divide cu 125 şi este pătrat perfect, rezultă că numărul k se divide cu 25 (n trebuie să fie divizibil cu 625). Am stabilit că ultima cifră a numărului k este 5, deci acesta trebuie să fie de forma $k = 100k_1 \pm 25$.

Atunci, $n = 10000k_1^2 \pm 5000k_1 + 625$, de unde cifra miilor din scrierea lui n trebuie să fie atunci 0 sau 5, ceea ce este imposibil.

12. *Suma a zece numere naturale nenule este egală cu 54. Arătați că printre ele se află cel puțin două numere egale.*

Soluție: Presupunem că toate cele zece numere naturale nenule a căror sumă este 54 sunt distincte.

Cum suma primelor zece numere naturale nenule:

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 = 55$$

este mai mare decât suma considerată, presupunerea făcută este greşită; astfel, cel puțin două numere din cele inițiale trebuie să fie egale.

13. *Să se arate că polinomul cu coeficienți reali*

$$f = X^4 + (a-2)X^3 + (a^2 - a + 3)X^2 + aX + 2$$

nu poate avea toate rădăcinile reale.

Soluție: Presupunem că x_1, x_2, x_3, x_4 sunt cele patru rădăcini ale polinomului, toate reale. Ținând cont de relațiile lui Viète, suma pătratelor rădăcinilor este:

$$\sum_{i=1}^{4} x_i^2 = \left(\sum_{i=1}^{4} x_i\right)^2 - 2\sum_{1 \le i < j \le 4} x_i x_j = (a-2)^2 - 2(a^2 - a + 3) =$$

$$= -(a+1)^2 - 1 < 0,$$

ceea ce, în cazul nostru, este absurd.

14. *Să se arate că nu există niciun număr natural* $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$ *astfel încât* $n \mid 2^n - 1$.

Soluție: Presupunem că există cel puțin un $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$ astfel încât $n \mid 2^n - 1$; fie m cel mai mic număr cu această proprietate (evident m este impar).

Aplicând teorema lui Euler, $m \mid 2^{\varphi(m)} - 1$. Ținând cont şi de $m \mid 2^m - 1$, obținem $m \mid 2^d - 1$ cu $d = (m, \varphi(m))$.

Deoarece $m \geq 3$, $2^d - 1 > 1$ şi astfel, $1 < d \leq \varphi(m) < m$. Atunci, din $d \mid m$ şi $m \mid 2^d - 1$ rezultă $d \mid 2^d - 1$ ceea ce contrazice alegerea lui m.

Astfel, presupunerea făcută inițial este greşită, deci nu vom putea găsi numere naturale $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$ pentru care $n \mid 2^n - 1$.

15. *În patrulaterul convex ABCD suma* $AB + BD$ *nu depăşeşte suma* $AC + CD$. *Să se demonstreze că în acest caz lungimea laturii AB este mai mică decât lungimea diagonalei AC.*

Soluție: Presupunem că $AB \geq AC$. Deoarece în triunghiul *ABC*, la latura mai mare se opune unghiul mai mare, $m(\measuredangle BCA) \geq m(\measuredangle ABC)$ (Fig. 10.1.1.). Patrulaterul *ABCD* este convex iar unghiul $\measuredangle DBC$ este parte a unghiului $\measuredangle ABC$. Astfel, $m(\measuredangle BCD) > m(\measuredangle BCA) \geq m(\measuredangle ABC) >$ $> m(\measuredangle DBC)$. De aici rezultă că în triunghiul *BCD* vom avea: $BD > CD$.

Adunând cele două inegalități, obținem că $AB + BD > AC + CD$ şi contrazicem ipoteza. Deci, presupunerea făcută inițial este greşită, de unde rezultă că $AB < AC$.

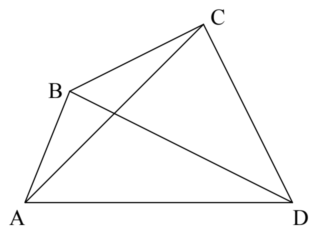


Fig. 10.1.1.

16. *Un parc în formă de pentagon convex are aria* $S = 5\sqrt{3} \cdot 100^2$. *Un vizitator al parcului, aflat în punctul interior O al acestuia, a observat că nu se găseşte la o distanță mai mare de 200 m față de orice vârf al pentagonului. Să se demonstreze că el nu se găseşte la o dis-*

tanță mai mică de 100 m față de orice punct situat pe laturile pentagonului.

Soluție: Notăm cu $ABCDE$ pentagonul convex şi presupunem că punctul O se află la o depărtare mai mică decât 100 m de latura AB sau de prelungirea sa. Fie C cercul de rază 2 (unitatea de lungime se alege egală cu 100 m), cu centrul în O.

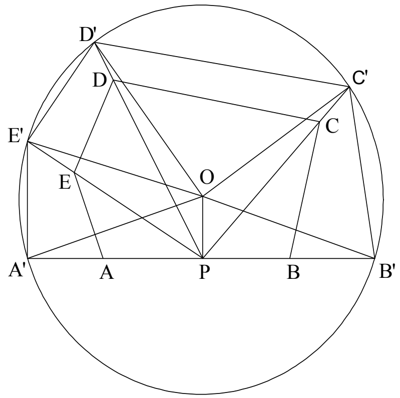


Fig.10.1.2

Notăm cu P proiecția punctului O pe dreapta AB, $OP<1$ şi cu A',B',C',D',E' (Fig. 10.1.2.) punctele în care semidreptele PA, PB, PC, PD şi PE intersectează cercul. Notăm:

$$\measuredangle A'OB'=\alpha,\ \measuredangle B'OC'=\alpha_1,\ \measuredangle C'OD'=\alpha_2,\ \measuredangle D'OE'=\alpha_3,$$
$$\measuredangle E'OA'=\alpha_4,\ (\alpha_i<180°).$$

Obținem:

$$S_{A'B'C'D'E'}-S_{\Delta A'OB'}=2(\sin\alpha_1+\sin\alpha_2)+2(\sin\alpha_3+\sin\alpha_4)\le$$
$$\le 4\sin\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}+4\sin\frac{\alpha_3+\alpha_4}{2}\le 8\sin\frac{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4}{4}.$$

Astfel, $S_{A'B'C'D'E'}-S_{\Delta A'OB'}\le 8\cos\dfrac{\alpha}{4}$.

Deoarece $OA'=2$, $OP<1$, în triunghiul $A'OP$: $\cos\dfrac{\alpha}{2}<\dfrac{1}{2}=\cos\dfrac{\pi}{3}$.

Din $\alpha<\pi$, $\dfrac{2\pi}{3}<\alpha<\pi$ de unde:

$S_{A'B'C'D'E'}-S_{\Delta A'OB'}<4\sqrt{3}$, $S_{\Delta A'OB'}<\sqrt{3}$.

Rezultă $S_{A'B'C'D'E'}<5\sqrt{3}$, relație ce contrazice ipoteza problemei.

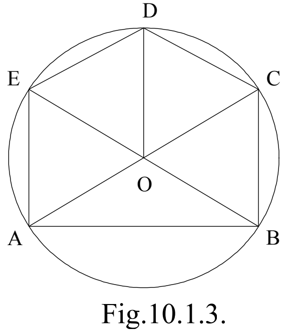


Fig.10.1.3.

Astfel, distanța până la orice latură nu este mai mică decât 1.

Egalitatea are loc pentru:

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 60°,\ \alpha = 120°,$$

atunci când *ABCDE* este un pentagon ce se obține dintr-un hexagon regulat prin eliminarea unuia dintre vârfuri (Fig. 10.1.3.).

17. *Într-un plan sunt date n puncte astfel dispuse încât pe fiecare dreaptă ce uneşte două dintre aceste puncte mai este situat încă unul. Să se demonstreze că cele n puncte sunt coliniare.*

Soluție: Presupunem, prin absurd, că există cel puțin trei puncte necoliniare. Formăm toate triunghiurile posibile; alegem dintre acestea triunghiul în care apare cea mai mică înălțime pe care îl notăm cu $P_iP_jP_k$.

Considerăm P_kP_k' înălțimea de lungime minimă.

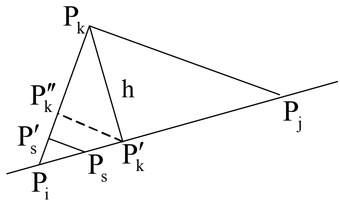


Fig.10.1.4.

Conform ipotezei, pe dreapta P_iP_j se mai găseşte un punct; fie acesta P_s. Dintre punctele P_i, P_j, P_s, cel puțin două (P_i şi P_s de exemplu) se găsesc pe una din semidreptele determinate de P_k' pe dreapta P_iP_j. Fie P_s cel mai apropiat punct de P_k' (altfel, repetăm raționamentul pentru P_i). Atunci, $S_{\Delta P_iP_sP_k} < S_{\Delta P_iP_k'P_k}$. Notăm cu P_sP_s' înălțimea corespunzătoare vârfului P_s în triunghiul $P_iP_sP_k$. Rezultă $P_sP_s' < P_k'P_k'' < h$. Astfel, am obținut triunghiul $P_iP_sP_k$ în care o înălțime este de lungime strict mai mică decât *h*, ceea ce contrazice alegerea triunghiului $P_iP_jP_k$.

10.2. Metoda inducției matematice

1. *Să se demonstreze inegalitatea*

$$(a_1 + a_2 + ... + a_k)^2 \le k(a_1{}^2 + ... + a_k{}^2), \qquad (1)$$

unde k este număr natural nenul iar $a_1,...,a_n$ *sunt numere reale alese arbitrar.*

Folosind inegalitatea (1), *demonstrați că în cazul în care numerele reale* $a_1,...,a_n$ *verifică inegalitatea*

$$a_1 + a_2 + ... + a_n \ge \sqrt{(n-1)(a_1{}^2 + ... + a_n{}^2)}, \qquad (2)$$

toate numerele $a_1,...,a_n$ *sunt nenegative.*

Soluție: Pentru $k=1$, inegalitatea (1) este adevărată. Presupunem adevărată inegalitatea pentru $n=k$, adică:

$$(a_1 + a_2 + ... + a_k)^2 \le k(a_1{}^2 + ... + a_k{}^2)$$

şi arătăm că ea se menține adevărată şi pentru $n=k+1$. Fie:

$$N = (a_1 + a_2 + ... + a_{k+1})^2 =$$
$$= (a_1 + a_2 + ... + a_k)^2 + a_{k+1}{}^2 + 2a_{k+1}(a_1 + ... + a_k).$$

Ținând cont de ipoteza de inducție obținem:

$$N \le k(a_1{}^2 + a_2{}^2 + ... + a_k{}^2) + a_{k+1}{}^2 + 2a_{k+1}(a_1 + ... + a_k).$$

Atunci,

$$N \le (k+1)(a_1{}^2 + a_2{}^2 + ... + a_k{}^2 + a_{k+1}{}^2) - a_1{}^2 - a_2{}^2 - ... - a_k{}^2 -$$
$$-ka_{k+1}{}^2 + 2a_1a_{k+1} + 2a_2a_{k+1} + ... + 2a_ka_{k+1} = (k+1)(a_1{}^2 + a_2{}^2 + ...$$
$$+a_k{}^2 + a_{k+1}{}^2) - (a_1 - a_{k+1})^2 - (a_2 - a_{k+1})^2 - ... - (a_k - a_{k+1})^2,$$

de unde rezultă imediat $N \le (k+1)(a_1{}^2 + a_2{}^2 + ... + a_{k+1}{}^2)$.

Pentru a demonstra cea de-a doua cerință a problemei, procedăm tot prin inducție matematică. Pentru $n=1$, propoziția este adevărată. Pentru $n=m-1$, din inegalitatea (1), obținem

$$|a_1 + a_2 + ... + a_{m-1}| \le \sqrt{(m-1)(a_1{}^2 + a_2{}^2 + ... + a_{m-1}{}^2)} \le$$
$$\le \sqrt{(m-1)(a_1{}^2 + a_2{}^2 + ... + a_m{}^2)}.$$

Dacă ținem cont şi de (2), rezultă:

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_{m-1} \le \left| a_1 + a_2 + \ldots + a_{m-1} \right| \le a_1 + a_2 + \ldots + a_m ,$$

de unde $a_m \ge 0$. Schimbând indicierea numerelor, oricare dintre acestea se pot nota cu a_m şi se arată că este nenegativ.

2. *Un alfabet este format din n litere. Să se determine lungimea maximă a unui cuvânt dacă se ştie că:*

a. *oricare două litere succesive sunt diferite între ele;*

b. *prin ştergerea de litere dintr-un cuvânt nu este posibilă obținerea unor cuvinte de forma* $abab$, $a \ne b$.

Soluție: Spunem că o literă este de prima speță dacă aceasta intervine o singură dată într-un cuvânt. În caz contrar, se numeşte literă de speța a doua.

Facem următoarele observații:

1. Literele care sunt alăturate unei litere de speța a doua sunt diferite (rezultă din condiția b.).

2. Dacă un cuvânt conține cel puțin două litere diferite, el conține cel puțin o literă de prima speță; altfel, s-ar obține din acesta cuvântul *abab*, ceea ce contravine ipotezei.

Folosind literele unui alfabet alcătuit din a_1, ..., a_n , putem forma cuvântul $a_1 a_2 a_3 \ldots a_{n-1} a_n a_{n-1} a_{n-2} \ldots a_1$. Acesta verifică condițiile din ipoteză şi are lungimea $2n-1$.

Prin inducție matematică, arătăm că un cuvânt format cu cele *n* litere ale unui alfabet, după regulile precizate în ipoteză, nu poate avea lungimea mai mare de $2n-1$ litere.

Pentru $n=1$, afirmația se verifică. Presupunem afirmația adevărată pentru un alfabet format din $n = k > 1$ litere şi vom demonstra că ea se menține adevărată şi în cazul unui alfabet alcătuit din $n = k+1$ litere. Fie un cuvânt în alcătuirea căruia intră $k+1$ litere diferite. Notăm cu *a* litera de prima speță (din a doua observație, ştim că există cel puțin o literă de prima speță) şi cu *b*, litera alăturată acesteia.

Dacă *b* este de prima speță, prin ştergerea sa rămâne un cuvânt format din *k* litere diferite a cărui lungime maximă nu depăşeşte (conform ipotezei de inducție) $2k-1$ litere. Deci, cuvântul inițial are astfel o lungime de maxim $2k$ litere.

Considerăm acum că b este literă de speța a doua. Perechea formată de a şi b poate avea o singură literă alăturată, situată la extremitatea cuvântului, sau are două litere alăturate care, conform primei observații, sunt distincte. Din această cauză, prin ştergerea perechii (a, b) rămâne un cuvânt care verifică condiția a. din ipoteză. Lungimea maximă a cuvântului rămas este de $2k-1$ litere (litera b, fiind de speța a doua, mai apare în cuvânt). Astfel, lungimea cuvântului inițial va fi cel mult de $2k-1+2=2(k+1)-1$ litere.

În concluzie, ținând cont de rezultatele obținute în cele două situații studiate, dacă considerăm un alfabet alcătuit din $k+1$ litere, lungimea maximă a cuvintelor ce se pot forma aşa încât să fie respectate condițiile precizate în enunțul problemei este de $2(k+1)-1$ litere.

3. *Într-un grup de traducători fiecare cunoaşte cel puțin o limbă străină. Dintre aceştia, numărul exact al celor care vorbesc japoneza, malaieza, respectiv persana este 24. Să se demonstreze că se poate găsi o parte a acestui grup în care se află exact câte 12 traducători care vorbesc fiecare limbă din cele trei.*

Soluție: Vom numi grup de volum v un grup de traducători în care fiecare limbă este ştiută de v şi numai de v persoane. Demonstrăm, prin inducție matematică, că un grup de volum $2n$ conține pentru orice $k \le n$ o parte de volum $2k$, ceea ce demonstrează în particular, pentru $n=12$ şi $k=6$, afirmația din enunțul problemei.

Considerăm în continuare $k<n$, $n>1$, altfel afirmația este banală. Presupunem că orice grup de volum $2(n-1)$ conține un grup de volum $2t$, $t<n-1$ şi demonstrăm că fiecare grup de volum $2n$ include un grup de volum $2k$, $k<n$.

Împărțim grupul de volum $2n$ în următoarele mulțimi disjuncte:

- A_j, A_m, A_p, formate din cei care vorbesc doar o limbă străină, respectiv japoneza, malaieza, persana, de cardinale a_j, a_m, a_p;
- A_{jm}, A_{jp}, A_{mp}, care sunt formate din traducătorii care cunosc doar două dintre cele trei limbi, (cele corespunzătoare indicilor precizați), de cardinale a_{jm}, a_{jp}, a_{mp};

- A_{jmp}, mulțimea poliglotilor, a celor care cunosc toate cele trei limbi, de cardinal a_{jmp}.

Ținând cont de notațiile făcute, rezultă relațiile:

$$\begin{aligned} a_j + a_{jm} + a_{jp} + a_{jmp} &= 2n \\ a_m + a_{jm} + a_{mp} + a_{jmp} &= 2n \qquad \text{(R)} \\ a_p + a_{jp} + a_{mp} + a_{jmp} &= 2n \end{aligned}$$

Arătăm că din acest grup de volum $2n$ se poate întotdeauna separa un grup de volum 2. Grupul rămas va fi de volum $2n-2=2(n-1)$. Folosind ipoteza de inducție, ştim că pentru acest grup există un subgrup de volum $2(k-1)$, cu $k-1<n-1$. Ataşând la acest subgrup traducătorii îndepărtați inițial, vom obține de fiecare dată un grup de volum $2(k-1)+2=2k$.

Considerăm următoarele cazuri:

1. $a_{jm}>0$, $a_{jp}>0$, $a_{mp}>0$.

În această situație, din grupul de volum $2n$ îndepărtăm câte o persoană din mulțimile A_{jm}, A_{jp}, A_{mp}. Astfel, din grupul inițial se elimină câte 2 traducători cunoscători ai fiecărei limbi (un grup de volum 2).

2. $a_{jm}=a_{jp}=a_{mp}=0$.

2.1. Dacă $a_{jmp}=0$, deci nu există poligloți, toți traducătorii cunosc o singură limbă; îndepărtăm atunci câte 2 traducători din mulțimile A_j, A_m, A_p (în acest caz, $a_j=a_m=a_p=2n\geq 4$).

2.2. Dacă $a_{jmp}=1$, se elimină câte 2 traducători ai fiecărei limbi îndepărtând câte un traducător din mulțimile A_{jmp}, A_j, A_m, A_p.

2.3. Pentru $a_{jmp}\geq 2$, înlăturăm 2 traducători din A_{jmp}.

Presupunem în continuare că $a_{jm}\leq a_{jp}\leq a_{mp}$.

3. $a_{jm}=a_{jp}=0$, $a_{mp}>0$.

Din relațiile (R), $a_j=a_m+a_{mp}=a_p+a_{mp}$, deci $a_m=a_p<a_j$.

3.1. Dacă $a_{jmp} = 0$, obținem $2n = a_j = a_m + a_{mp} = a_p + a_{mp} \geq 4$. În cazul în care $a_{mp} \geq 2$, îndepărtăm câte 2 traducători din A_{mp} şi din A_j, iar dacă $a_{mp} = 1$, separăm câte 2 persoane din A_j, A_m, A_p.

3.2. Pentru $a_{jmp} \geq 1$, înlăturăm câte un traducător din mulțimile A_j, A_{mp}, A_{jmp}.

4. $a_{jm} = 0,\ 0 < a_{jp} \leq a_{mp}$.

Din $a_j + a_{jp} = a_m + a_{mp} = a_p + a_{jp} + a_{mp}$, rezultă $a_p < a_m \leq a_j$. Îndepărtam atunci câte un traducător din mulțimile A_j, A_m, A_{jp}, A_{mp}.

4. *Se spune că polinomul* $P = a_0X^k + a_1X^{k-1} + ... + a_k \in \mathbb{Z}[X]$ *este divizibil cu m dacă* $m \mid P(x)$, *pentru orice* $x \in \mathbb{Z}$. *Să se arate că dacă P este divizibil cu m, atunci* $m \mid k!a_0$.

De asemenea, să se demonstreze că pentru $a_0, k, m \in N^*$ *astfel ca* $m \mid k!a_0$, *se poate găsi polinomul* $P = a_0X^k + a_1X^{k-1} + ... + a_k$ *divizibil cu m*.

Soluție: Demonstrăm cerința prin inducție matematică după *k*. Pentru $k = 0$, afirmația este evidentă. Presupunem că ea este adevărată pentru $k = n$ şi arătăm că se menține adevărată pentru $k = n + 1$.

Considerăm acum că polinomul $P = a_0X^{n+1} + a_1X^n + ... + a_{n+1}$ este divizibil cu *m*.

Atunci, polinomul $P(X+1) - P(X) = (n+1)a_0X^n + ...$ este divizibil cu *m*. Fiind un polinom de grad *n* putem aplica ipoteza de inducție şi rezultă $m \mid n!(n+1)a_0$, adică $m \mid (n+1)!a_0$.

Deci, dacă *m* divide polinomul $P = a_0X^k + a_1X^{k-1} + ... + a_k$, atunci $m \mid k!a_0$, pentru orice *k* număr natural.

În cazul în care $m \mid k!a_0$, cu $a_0, m, k \in \mathbb{N}^*$, alegem polinomul:

$$P = a_0X(X+1)...(X+k-1).$$

Pentru $x \in \mathbb{N}^*$, $P(x) = a_0 x(x+1)...(x+k-1) = \dfrac{a_o(k+x-1)!}{(x-1)!}$.

Ştim că pentru orice p, q numere naturale, $\dfrac{(p+q)!}{p!q!} \in \mathbb{N}$. În cazul nostru, $\dfrac{(k+(x-1))!}{k!(x-1)!}$ este număr natural, de unde:

$$(k+(x-1))! = k!(x-1)!t, \text{ cu } t \in \mathbb{N}.$$

Astfel, $a_0(k+x-1)! = a_0 \cdot t \cdot k!(x-1)!$ şi deci, $k!a_0 \mid P(x)$.

Fie acum $x = -t$, $t \in \mathbb{N}$. Pentru $0 \le t \le k-1$ obţinem $P(x) = 0$, iar pentru $t \ge k$, $P(x) = (-1)^k a_0 t(t-1)...(t-(k-1)) = \dfrac{(-1)^k a_o((t-k)+k)!}{(t-k)!}$.

În mod analog, se arată că şi în acest caz $k!a_0 \mid P(x)$. Astfel, polinomul P este divizibil cu $k!a_0$, deci şi cu m.

5. *Se dă o mulţime formată din $n+1$ numere naturale nenule, astfel încât niciunul din aceste numere nu depăşeşte $2n$. Să se demonstreze că cel puţin un element al mulţimii se divide cu un altul.*

Soluţie: Pentru $n = 1$, afirmaţia se verifică. Presupunem afirmaţia din enunţ adevărată şi considerăm o mulţime formată din $n+2$ numere naturale nenule care nu depăşesc $2n+2$.

Dacă numărul $2n+2$ nu aparţine mulţimii, submulţimea formată din numerele care nu depăşesc $2n$ conţine cel puţin $n+1$ elemente ($2n+1$ poate să aparţină mulţimii). Conform ipotezei de inducţie, în această submulţime (deci şi în mulţimea iniţială) se găseşte un număr care se divide cu un altul.

Dacă $2n+2$ este element al mulţimii, considerăm două cazuri:

1. Dacă $n+1$ aparţine mulţimii, demonstraţia este încheiată.

2. Pentru situaţia în care $n+1$ nu aparţine mulţimii, formăm o submulţime M alcătuită din numerele care nu depăşesc $2n$ la care adăugăm numărul $n+1$. M are cel puţin $n+1$ elemente şi aplicăm ipoteza de inducţie. Dacă $n+1$ nu este elementul care se divide cu un altul, înseamnă că elementul găsit aparţine mulţimii iniţiale şi demon-

strația este încheiată. Dacă $n+1$ este elementul divizibil cu un altul, cum $2n+2$ aparține mulțimii, $2n+2$ are proprietatea cerută (se divide cu divizorul lui $n+1$).

6. *Să se arate că* $(\forall)n \in \mathbb{N}$, *numărul*

$$E_n = (n+1)(n+2)...(n+n)$$

se divide prin 2^n *dar nu se divide prin* 2^{n+1}.

Soluție: Pentru $n=1$, $E_1 = 2$. Evident $2 \mid E_1$ şi $4 \nmid E_1$.

Pentru $n=2$, $E_2 = 3 \cdot 4 = 12$, deci $2^2 \mid E_2$ şi $2^3 \nmid E_2$.

Arătăm acum că, dacă afirmația din enunț este adevărată pentru *n*, ea rămâne adevărată pentru $n+2$.

$$\begin{aligned} E_{n+2} &= (n+3)(n+4)...(2n)(2n+1)(2n+2)(2n+3)(2n+4) = \\ &= 4(n+1)(n+2)(n+3)...(2n)(2n+1)(2n+3) = \\ &= 2^2 E_n (2n+1)(2n+3). \end{aligned}$$

Din ipoteza de inducție, rezultă $E_n = 2^n q$, q număr impar. Atunci:

$$E_{n+2} = 2^{n+2} q(2n+1)(2n+3).$$

Observăm că $q(2n+1)(2n+3)$ este număr impar, deci $2^{n+3} \nmid E_{n+2}$. Astfel, prin inducție matematică, se obține că afirmația este adevărată pentru orice număr natural *n*.

7. *Pentru* $n \in \mathbb{N}^*$, *fie* $y_n = \dfrac{(x_n - 1)(x_n + 3)}{12}$ *unde* x_n *este partea întreagă a numărului* $\left(2+\sqrt{3}\right)^n$. *Arătați că pentru orice valoare a lui n,* y_n *este pătrat perfect.*

Soluție. Arătăm că, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, $(2+\sqrt{3})^n$ se poate scrie sub forma $(2+\sqrt{3})^n = a_n + b_n\sqrt{3}$ unde $3{b_n}^2 = {a_n}^2 - 1$ cu $a_n, b_n \in \mathbb{N}^*$.

Pentru $n=1$, $a_1 = 2$, $b_1 = 1$, afirmația este evident adevărată.

Presupunem că $(2+\sqrt{3})^n$ admite scrierea menționată. Relațiile:

$$3{b_n}^2 = {a_n}^2 - 1 \text{ şi } (2+\sqrt{3})^{n+1} = 2a_n + 3b_n + (a_n + 2b_n)\sqrt{3}$$

implică $3b_{n+1}^{\ 2} - a_{n+1}^{\ 2} + 1 = 0$, cu $a_{n+1} = 2a_n + 3b_n$ şi $b_{n+1} = a_n + 2b_n$ numere naturale nenule, deci $(2+\sqrt{3})^{n+1}$ admite o reprezentare de aceeaşi formă.

Astfel, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, există $a_n, b_n \in \mathbb{N}^*$ aşa încât;

$$(2+\sqrt{3})^n = a_n + b_n\sqrt{3} = a_n + \sqrt{a_n^{\ 2} - 1}.$$

Deoarece $a_n - 1 \le \sqrt{a_n^{\ 2} - 1} < a_n$, obținem $2a_n - 1 \le (2+\sqrt{3})^n < 2a_n$.

Deci, $x_n = \left[(2+\sqrt{3})^n\right] = 2a_n - 1$.

În final, $y_n = \dfrac{(2a_n - 2)(2a_n + 2)}{12} = \dfrac{a_n^{\ 2} - 1}{3} = b_n^{\ 2}$.

8. *Fie* $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ *astfel încât* $a + \dfrac{1}{a} \in \mathbb{Z}$. *Atunci, pentru orice număr întreg nenul n,* $a^n + \dfrac{1}{a^n} \in \mathbb{Z}$.

Soluție: Deoarece $a^n + \dfrac{1}{a^n} = a^{-n} + \dfrac{1}{a^{-n}}$ este suficient să demonstrăm afirmația pentru $n \in \mathbb{N}^*$.

Pentru $n = 1$, afirmația este adevărată. Presupunem acum $n > 1$ şi, pentru orice $k \le n$, $a^k + \dfrac{1}{a^k} \in \mathbb{Z}$. Rămâne să demonstrăm că numărul $a^{n+1} + \dfrac{1}{a^{n+1}}$ este întreg. Pentru aceasta, în relația:

$$a^{n+1} + \frac{1}{a^{n+1}} = \left(a^n + \frac{1}{a^n}\right)\left(a + \frac{1}{a}\right) - \left(a^{n-1} + \frac{1}{a^{n-1}}\right)$$

ținem cont de ipoteza de inducție şi obținem imediat $a^{n+1} + \dfrac{1}{a^{n+1}} \in \mathbb{Z}$.

9. (*Inegalitatea mediilor*) *Să se demonstreze că dacă* $a_1, a_2, ..., a_n$ *sunt numere reale pozitive, atunci:*

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 ... a_n}\ .$$

Soluție: Pentru $n = 1$, inegalitatea se verifică.

Presupunem că inegalitatea este adevărată pentru $k < n$ numere reale pozitive şi demonstrăm că ea rămâne adevărată şi pentru n numere pozitive $a_1, a_2, ... a_n$.

Conform ipotezei de inducție, putem scrie:

$$\sum_{i=1}^{n-1} a_i \geq (n-1)\cdot \sqrt[n-1]{a_1 a_2 ... a_{n-1}} \qquad (1)$$

şi

$$a_n + \underbrace{\sqrt[n]{a_1 a_2 ... a_n} + ... + \sqrt[n]{a_1 a_2 ... a_n}}_{\text{de } n-2 \text{ ori}} \geq (n-1)\cdot \sqrt[n-1]{a_n\left(\sqrt[n]{a_1 a_2 ... a_n}\right)^{n-2}} \quad (2)$$

Prin adunare, rezultă:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i + (n-2)\sqrt[n]{a_1 a_2 ... a_n} \geq$$

$$\geq (n-1)\left[\sqrt[n-1]{a_n\left(\sqrt[n]{a_1 a_2 ... a_n}\right)^{n-2}} + \sqrt[n-1]{a_1 a_2 ... a_{n-1}}\right].$$

Dar, $\sqrt[n-1]{a_n\left(\sqrt[n]{a_1 a_2 ... a_n}\right)^{n-2}} + \sqrt[n-1]{a_1 a_2 ... a_{n-1}} \geq$

$$\geq 2\sqrt{\sqrt[n-1]{a_n\left(\sqrt[n]{a_1 a_2 ... a_n}\right)^{n-2}}\cdot \sqrt[n-1]{a_1 a_2 ... a_{n-1}}} = 2\sqrt[n]{a_1 a_2 ... a_n}$$

de unde:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i + (n-2)\sqrt[n]{a_1 a_2 ... a_n} \geq 2(n-1)\sqrt[n]{a_1 a_2 ... a_n}\ ,$$

adică $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i \geq n\sqrt[n]{a_1 a_2 ... a_n}$.

10. Fie $A=\begin{pmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}$. Să se calculeze A^n, $n\geq 1$.

Soluție: Prin calcul obținem:

$$A^2=\begin{pmatrix}\cos 2\varphi & -\sin 2\varphi\\ \sin 2\varphi & \cos 2\varphi\end{pmatrix},\ A^3=\begin{pmatrix}\cos 3\varphi & -\sin 3\varphi\\ \sin 3\varphi & \cos 3\varphi\end{pmatrix}.$$

Demonstrăm prin inducție matematică că, pentru $n\geq 1$,

$$A^n=\begin{pmatrix}\cos n\varphi & -\sin n\varphi\\ \sin n\varphi & \cos n\varphi\end{pmatrix}.$$

Etapa de verificare a fost deja parcursă.

Presupunem că $A^k=\begin{pmatrix}\cos k\varphi & -\sin k\varphi\\ \sin k\varphi & \cos k\varphi\end{pmatrix}$ şi arătăm că relația se verifică şi pentru $n=k+1$. Folosind formulele trigonometrice, rezultă:

$$A^{k+1}=A^k\cdot A=\begin{pmatrix}\cos(k+1)\varphi & -\sin(k+1)\varphi\\ \sin(k+1)\varphi & \cos(k+1)\varphi\end{pmatrix}.$$

11. *Să se demonstreze prin inducție după n* egalitatea:

$$\Delta_n=\begin{vmatrix}1 & 1 & \dots & 1\\ a_1 & a_2 & \dots & a_n\\ a_1^{\,2} & a_2^{\,2} & \dots & a_n^{\,2}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_1^{\,n-1} & a_2^{\,n-1} & \dots & a_n^{\,n-1}\end{vmatrix}=\prod_{1\leq i<j\leq n}(a_j-a_i).$$

Soluție: Pentru $n=2$, $\Delta_2=\begin{vmatrix}1 & 1\\ a_1 & a_2\end{vmatrix}=a_2-a_1$.

Presupunem că:

$$\Delta_{k-1}=\begin{vmatrix}1 & 1 & \dots & 1\\ a_1 & a_2 & \dots & a_{k-1}\\ a_1^{\,2} & a_2^{\,2} & \dots & a_{k-1}^{\,2}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_1^{\,k-2} & a_2^{\,k-2} & \dots & a_{k-1}^{\,k-2}\end{vmatrix}=\prod_{1\leq i<j\leq k-1}(a_j-a_i)$$

şi arătăm că relaţia se verifică şi pentru $n = k$. În determinantul Δ_k înmulţim linia $k-1$ cu $-a_k$ şi o adunăm la ultima; apoi înmulţim linia $k-2$ cu $-a_k$ şi o adunăm la linia $k-1$. În final, înmulţim prima linie cu $-a_k$ şi o adunăm la a doua. Obţinem astfel:

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ a_1 - a_k & a_2 - a_k & \dots & a_{k-1} - a_k & 0 \\ a_1^2 - a_1 a_k & a_2^2 - a_2 a_k & \dots & a_{k-1}^2 - a_k a_{k-1} & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1^{k-1} - a_1^{k-2} a_k & a_2^{k-1} - a_2^{k-2} a_k & \dots. & a_{k-1}^{k-1} - a_{k-1}^{k-2} a_k & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^{k+1}(a_1 - a_k)\dots(a_{k-1} - a_k) \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_1 & a_2 & \dots & a_{k-1} \\ a_1^2 & a_2^2 & \dots & a_{k-1}^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1^{k-2} & a_2^{k-2} & \dots & a_{k-1}^{k-2} \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^{k+1}(-1)^{k-1}(a_k - a_1)\dots(a_k - a_{k-1}) \prod_{1 \le i < j \le k-1} (a_j - a_i) =$$

$$= \prod_{1 \le i < j \le k} (a_j - a_i)$$

12. *Fie* $a_1, a_2, \dots, a_n$ *numere reale astfel încât*:

$$a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + \dots + a_n \cos nx \ge 0,\ (\forall) x \in \mathbb{R} \qquad (1)$$

Atunci, $a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + \dots + a_n \cos nx = 0$, $(\forall) x \in \mathbb{R}$.

Soluţie: Notăm cu $P(n)$ predicatul din enunţul problemei.

Dacă $n = 1$ şi $a_1 \cos x \ge 0$, $(\forall) x \in \mathbb{R}$, atunci $a_1 = 0$ şi, $(\forall) x \in \mathbb{R}$, $a_1 \cos x = 0$.

Presupunem acum $P(k)$ adevărată, pentru $(\forall) k < n$; vom arăta că $P(n)$ este adevărată.

Considerăm $a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + \dots + a_n \cos nx \ge 0$, $(\forall) x \in \mathbb{R}$.

Atunci şi

$$a_1\cos(x+\pi)+a_2\cos 2(x+\pi)+...+a_n\cos n(x+\pi)\geq 0,(\forall)x\in\mathbb{R},$$

adică, pentru orice $x\in\mathbb{R}$:

$$-a_1\cos x+a_2\cos 2x-a_3\cos 3x+...+(-1)^n a_n\cos nx\geq 0 \quad (2)$$

Considerăm cazul în care n este număr par (pentru n număr impar se procedează la fel).

Din relaţiile (1) şi (2), prin însumare, rezultă:

$$a_2\cos 2x+a_4\cos 4x+...+a_n\cos nx\geq 0,\ (\forall)x\in\mathbb{R}. \quad (3)$$

Substituim în (3), $2x=y$ şi obţinem:

$$a_2\cos y+a_4\cos 2y+...+a_n\cos\left(\frac{n}{2}y\right)\geq 0,\ (\forall)y\in\mathbb{R}. \quad (4)$$

Aplicăm ipoteza de inducţie ($\frac{n}{2}<n$) şi rezultă:

$$a_2\cos y+a_4\cos 2y+...+a_n\cos\left(\frac{n}{2}y\right)=0,\ (\forall)y\in\mathbb{R},$$

de unde:

$$a_2\cos 2x+a_4\cos 4x+...+a_n\cos nx=0,\ (\forall)x\in\mathbb{R}. \quad (5)$$

Înlocuind în (1),

$$a_1\cos x+a_3\cos 3x+...+a_{n-1}\cos(n-1)x\geq 0,\ (\forall)x\in\mathbb{R}. \ (6)$$

În (6) înlocuim x cu $x+\pi$, şi obţinem:

$$a_1\cos x+a_3\cos 3x+...+a_{n-1}\cos(n-1)x\leq 0,\ (\forall)x\in\mathbb{R} \quad (7)$$

iar din (6) şi (7),

$$a_1\cos x+a_3\cos 3x+...+a_{n-1}\cos(n-1)x=0,\ (\forall)x\in\mathbb{R}. \ (8)$$

În final, relaţiile (5) şi (8) conduc la:

$$a_1\cos x+a_2\cos 2x+...+a_n\cos nx=0,\ (\forall)x\in\mathbb{R}, \ (9)$$

adică $P(n)$ este adevărată pentru orice număr natural nenul n.

Observaţie: Putem arăta mai mult, şi anume: *dacă numerele reale $a_1,a_2,...,a_n$ verifică (1), atunci ele sunt toate nule*.

Pentru aceasta, ţinem cont că fiecare $\cos kx$ se poate exprima sub forma $Q_k(\cos x)$ unde Q_k este un polinom de gradul k cu coeficienţi întregi, $1\leq k\leq n$ (exprimăm $(\cos x+i\sin x)^k$ folosind formula binomului lui Newton şi cea a lui Moivre şi egalăm părţile reale ale numerelor complexe rezultate). Relaţia (9) devine:

$$Q(\cos x) = a_1Q_1(\cos x) + a_2Q_2(\cos x) + ... + a_nQ_n(\cos x) = 0,\ (\forall)x \in \mathbb{R}$$

ceea ce implică imediat $a_1 = a_2 = ... = a_n = 0$.

13. *Arătaţi că, pentru orice număr natural* $n \geq 2$, $C_{2n}^n > \dfrac{4^n}{2\sqrt{n}}$.

Soluţie: Pentru $n = 2$, cum $C_4^2 = 6 > 4\sqrt{2}$, inegalitatea se verifică. Presupunem $C_{2n}^n > \dfrac{4^n}{2\sqrt{n}}$ şi arătăm că $C_{2(n+1)}^{n+1} > \dfrac{4^{n+1}}{2\sqrt{n+1}}$. Deoarece:

$$C_{2(n+1)}^{n+1} = \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2} \cdot C_{2n}^n = \frac{2(2n+1)}{n+1} C_{2n}^n > \frac{4^n(2n+1)}{(n+1)\sqrt{n}},$$

vom compara numerele $a = \dfrac{4^n(2n+1)}{(n+1)\sqrt{n}}$ şi $b = \dfrac{4^{n+1}}{2\sqrt{n+1}}$. Obţinem:

$$a - b = \frac{4^n}{2(n+1)\sqrt{n}}\left[2(2n+1) - 4\sqrt{n(n+1)}\right] =$$

$$= \frac{4^n}{(n+1)\sqrt{n}}\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)^2 > 0$$

şi astfel, $C_{2(n+1)}^{n+1} > b$. Rezultă că inegalitatea iniţială se verifică pentru orice număr natural $n \geq 2$.

14. *Considerăm şirurile* $(I_n)_{n\geq 0}$ şi $(w_n)_{n\geq 1}$ *definite prin*:

$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x)^n dx$, $n \in \mathbb{N}$, $w_n = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{3}{4} \cdot ... \cdot \dfrac{2n-1}{2n} \cdot \sqrt{2n+1}$, $n \geq 1$.

a) *Calculaţi* I_0 *şi* I_1.

b) *Arătaţi că* $I_n = \dfrac{n-1}{n} I_{n-2}$, $(\forall)n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

c) *Utilizând metoda inducţiei matematice, arătaţi că* $(\forall)n \in \mathbb{N}^*$:

$$I_{2n}=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{2n-1}{2n}\cdot\frac{\pi}{2} \text{ şi } I_{2n+1}=\frac{2}{1}\cdot\frac{4}{3}\cdot\ldots\cdot\frac{2n}{2n-1}\cdot\frac{1}{2n+1}.$$

d) *Arătaţi că* $1\le\frac{I_n}{I_{n+1}}\le\frac{n+1}{n}$, $(\forall)n\in\mathbb{N}^*$.

e) *Verificaţi că* $\frac{I_{2n}}{I_{2n+1}}=(w_n)^2\cdot\frac{\pi}{2}$, $(\forall)n\in\mathbb{N}^*$.

f) *Arătaţi că* $\lim\limits_{n\to\infty}w_n=\sqrt{\frac{2}{\pi}}$.

Soluţie: a) $I_0=\int_0^{\frac{\pi}{2}}dx=\frac{\pi}{2}$, $I_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x dx=1$.

b) $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos x)^{n-1}(\sin x)'=(\cos x)^{n-1}\sin x\,|_0^{\pi/2}+$

$+(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos x)^{n-2}\sin^2 xdx=(n-1)(I_{n-2}-I_n)$.

Deci,

$$nI_n=(n-1)I_{n-2}. \qquad (1)$$

c) Arătăm că $I_{2n}=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{2n-1}{2n}\cdot\frac{\pi}{2}$, pentru orice n nenul (cealaltă relaţie se demonstrează în mod analog).

Folosind (1), pentru $n=2$, rezultă: $I_2=\frac{1}{2}I_0=\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}$. Presupunem acum că $I_{2k}=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{2k-1}{2k}\cdot\frac{\pi}{2}$. Din formula de recurenţă (1) obţinem $I_{2k+2}=\frac{2k+1}{2k+2}I_{2k}=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{2k-1}{2k}\cdot\frac{2k+1}{2(k+1)}\cdot\frac{\pi}{2}$, deci relaţia se verifică şi pentru $n=2k+2$. d) Deoarece $0\le x\le\frac{\pi}{2}$, $\cos x\in[0,1]$ şi astfel, $\cos^n x\ge\cos^{n+1}x$, $(\forall)n\in\mathbb{N}^*$. Deci, pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$ rezultă: $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos x)^n dx\ge\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos x)^{n+1}dx\ge I_{n+1}$, adică şirul $(I_n)_{n\ge1}$ este descrescător. Cum fiecare I_n este pozitiv, $1 \leq \frac{I_n}{I_{n+1}}$. Din relația (1) obținem că $(n+1)I_{n+1} = nI_{n-1} \geq nI_n$ şi astfel, $\frac{I_n}{I_{n+1}} \leq \frac{n+1}{n}$, $(\forall) n \in \mathbb{N}^*$.

e) Rezultă direct din relațiile demonstrate la punctul c). f) Folosind relația anterioară în cea de la d) obținem că $1 \leq (w_n)^2 \cdot \frac{\pi}{2} \leq 1 + \frac{1}{2n}$ deci $\sqrt{\frac{2}{\pi}} \leq w_n \leq \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{2n}}$, $(\forall) n \in \mathbb{N}^*$. Trecând la limită se obține relația dorită.

15. S*ă se studieze mărginirea şi monotonia şirului* $(x_n)_{n\geq 1}$ *definit prin* $x_1 = \sqrt{a}$ ($a > 0$), $x_{n+1} = \sqrt{a + x_n}$, $n \geq 1$. *În caz de convergență, să se calculeze limita şirului.*

Soluție: Observăm că $x_2 = \sqrt{a + \sqrt{a}} > \sqrt{a} = x_1$. Dacă, pentru $n > 1$, presupunem că $x_n > x_{n-1}$, atunci $x_{n+1} = \sqrt{a + x_n} > \sqrt{a + x_{n-1}} = x_n$. Conform principiului inducției matematice, şirul este crescător. Pentru a arăta că este şi mărginit superior, alegem $n > 1$ arbitrar, dar fixat. Din $x_n > x_1 = \sqrt{a}$ rezultă $\frac{1}{x_n} < \frac{1}{\sqrt{a}}$. Deoarece $x_n^{\ 2} = a + x_{n-1} < a + x_n$, obținem $x_n(x_n - 1) < a$, de unde $x_n < 1 + \frac{a}{x_n} < 1 + \frac{a}{\sqrt{a}} = 1 + \sqrt{a}$. Cum n a fost ales arbitrar, a rezultat că şirul este majorat de $1 + \sqrt{a}$. În concluzie, $(x_n)_{n\geq 1}$ este şir convergent. Fie l limita sa. Trecând la limită în relația de recurență, obținem $l^2 - l - a = 0$; din $l > x_1 = \sqrt{a}$, deducem $l = \frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{1 + 4a}\right)$.

Observație: Pentru această problemă se pot formula două generalizări după cum urmează:

i. *Considerăm şirul* $(x_n)_{n\geq 0}$ *definit prin* $x_{n+1}=\sqrt{a+bx_n}$, $(\forall)n\geq 0$ *unde* $a,b,x_0>0$ *sunt fixați.*

Folosind relația de recurență, comparăm primii doi termeni ai şirului (este evident că $x_n>0$, $(\forall)n\geq 0$): $x_1>x_0 \Leftrightarrow a+bx_0>{x_0}^2$, deci $x_0<\alpha_0=\frac{1}{2}\left(b+\sqrt{b^2+4a}\right)$. Folosind inducția matematică, se arată că şirul este crescător dacă $x_0<\alpha_0$ sau descrescător, în cazul $x_0>\alpha_0$.

Şirul este şi mărginit: pentru cazul $x_0<\alpha_0$, pentru un $n>0$, presupunem $x_n<\alpha_0$. Atunci, $x_{n+1}=\sqrt{a+bx_n}<\sqrt{a+b\alpha_o}=\sqrt{{\alpha_0}^2}=\alpha_0$ şi astfel şirul este majorat de α_0. În ambele situații, limita sa este α_0.

ii. *Fie şirul* $x_1=\sqrt[p]{a}$ *şi* $x_n=\sqrt[p]{a+x_{n-1}}$, $(\forall)n\geq 2$, *unde* $a>0$ *şi* $p\geq 2$ *sunt fixați.*

Cum $x_2=\sqrt[p]{a+x_1}>\sqrt[p]{a}=x_1$, prin inducție matematică, se arată că şirul este crescător. Pentru a studia mărginirea, procedăm la fel ca în rezolvarea problemei inițiale. Limita şirului va fi soluția pozitivă a ecuației $x^p-bx-a=0$ (se arată că există o singură astfel de soluție).

16. *Arătați că şirul* $(x_n)_{n\geq 0}$ *definit prin* $x_0=a>1$, $x_{n+1}=e^{-1+x_n}$ *este monoton crescător şi calculați limita sa.*

Soluție: A arăta că şirul este monoton crescător revine la a demonstra că, pentru orice *n* număr natural, $x_{n+1}-x_n>0$.

Considerăm funcția $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ cu $g(x)=e^{-1+x}-x$, pentru *x* real. Derivând, obținem $g'(x)=e^{-1+x}-1>0$, pentru $x>1$, deci *g* este crescătoare pe $(1,\infty)$. Deoarece *g* este funcție continuă şi $g(1)=0$, rezultă că $g(x)>0$ pentru $x>1$.

Din ipoteză, $x_0>1$, de unde $g(x_0)=x_1-x_0>0$.

Folosind inducția matematică, arătăm că $x_n>1$, pentru orice *n*. Din enunț, $x_0=a>1$. Presupunem că $x_n>1$. Atunci, $-1+x_n>0$ şi astfel $x_{n+1}=e^{-1+x_n}>1$. Deci, $(\forall)n\geq 0$, $x_n>1$.

În concluzie, pentru orice n, $g(x_n) = x_{n+1} - x_n > 0$.

Deoarece şirul $(x_n)_{n\geq 0}$ este crescător, el are limită. Dacă presupunem că limita sa este finită, l, atunci rezolvând ecuaţia $l = e^{l-1}$ obţinem $l = 1$, ceea ce este imposibil ţinând cont de faptul că şirul este crescător şi toţi termenii săi sunt > 1. Deci, limita şirului nu poate fi decât ∞.

17. *Să se găsească o relaţie între funcţia* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^{-x^2}$ *şi derivata ei de ordinul n.*

Soluţie: Încercăm să găsim relaţia cerută calculând câteva derivate de ordin superior: $f'(x) = -2xe^{-x^2}$, $f''(x) = (4x^2 - 2)e^{-x^2}$, etc.

Din rezultatele obţinute observăm că am putea scrie derivatele de ordin superior sub forma $f^{(n)}(x) = P_n(x)f(x)$ unde P_n este o funcţie polinomială de gradul n în x. Pentru a arăta că relaţia găsită este adevărată pentru orice număr natural n, aplicăm inducţia matematică. Etapa de verificare fiind parcursă, trecem la etapa de inducţie propriu-zisă. Presupunem că $f^{(n)}(x) = P_n(x)f(x)$ şi trebuie să arătăm că $f^{(n+1)}(x) = P_{n+1}(x)f(x)$.

Derivând, rezultă $f^{(n+1)}(x) = [P_n'(x) - 2xP_n(x)]f(x)$. Se arată uşor că $P_n'(x) - 2xP_n(x)$ este o funcţie polinomială de gradul $n+1$ în x pe care o notăm $P_{n+1}(x)$ şi obţinem relaţia dorită.

18. *Se consideră pe o dreaptă n intervale închise cu proprietatea că oricare două au intersecţia nevidă. Arătaţi că toate aceste intervale au un punct comun.*

Soluţie: Pentru $n = 2$, afirmaţia este evidentă. Presupunem afirmaţia adevărată pentru $n-1$ astfel de intervale, $n > 2$.

Considerăm n intervale I_1, I_2, ..., I_n cu proprietatea din enunţ şi alegem un interval arbitrar, de exemplu I_n. Notăm cu I intersecţia celorlalte $n-1$ intervale.

Din ipoteza de inducție, $I=\bigcap_{j=1}^{n-1} I_j \neq \varnothing$.

Dacă presupunem că $I_n \cap I = \varnothing$, atunci putem considera $A \in I_n$ punctul cel mai apropiat de *I*. Deoarece $A \notin I$, va exista un interval $I_k \neq I_n$, (pentru o valoare $1 \leq k < n$) astfel încât $A \notin I_k$. Din ipoteza problemei, $I_n \cap I_k \neq \varnothing$; pe de altă parte, $I \cap I_k = I \neq \varnothing$. Fie punctele $B_1 \in I_n \cap I_k$ şi $B_2 \in I \cap I_k$. Rezultă astfel, $[B_1B_2] \subseteq I_k$.

Din presupunerea făcută (intervalele I_n şi *I* disjuncte) şi $B_1 \in I_n$, obținem $B_1 \notin I$. Deoarece *A* este punctul din I_n cel mai apropiat punct de *I* şi $B_2 \in I$, cum toate intervalele sunt considerate pe aceeaşi dreaptă, ajungem la concluzia că $A \in [B_1B_2]$, ceea ce contrazice alegerea lui *A* (*A* a fost ales astfel încât să nu se afle în intervalul I_k).

În concluzie, $I_n \cap I \neq \varnothing$ şi astfel, toate cele *n* intervale două câte două nedisjuncte au un punct comun.

19. *Să se demonstreze că n drepte situate într-un plan, astfel încât oricare două dintre ele nu sunt paralele şi oricare trei nu sunt concurente, împart planul în* $1+\dfrac{n(n+1)}{2}$ *părți.*

Soluție: Pentru $n=1$, afirmația este adevărată, pentru că o dreaptă împarte planul în $1+\dfrac{1\cdot 2}{2}=2$ părți.

Presupunem adevărată afirmația pentru *k* astfel de drepte.

Considerăm acum $k+1$ drepte d_1, $d_2, ..., d_{k+1}$ care verifică proprietățile din enunț. Alegem o dreaptă dintre acestea pe care o notăm d_{k+1}. Pentru celelalte *k* drepte aplicăm ipoteza de inducție şi obținem că ele împart planul în $1+\dfrac{k(k+1)}{2}$ părți. Dreapta d_{k+1} taie cele *k* drepte în *k* puncte, care determină pe dreapta d_{k+1} $k+1$ părți. Aceste *k* puncte sunt diferite de punctele de intersecție ale celorlalte drepte d_i

şi d_j cu $1 \le i < j \le k$, (nu există trei drepte concurente). Astfel, fiecare parte a dreptei d_{k+1} împarte în două una din părţile planului (părţile deja determinate de cele k drepte). Deci, la $1+\dfrac{k(k+1)}{2}$ părţi, mai trebuie să adăugăm $k+1$ părţi şi obţinem în final $1+\dfrac{(k+1)(k+2)}{2}$ părţi.

20. *Fie n pătrate arbitrare, unde n este un număr natural oarecare. Să se demonstreze că ele pot fi tăiate în părţi astfel încât din ele să se poată construi un nou pătrat.*

Soluţie: Afirmaţia nu necesită demonstraţie pentru $n=1$.
Pentru $n=2$, considerăm pătratele *ABCD* şi $A'B'C'D'$ de laturi *a* respectiv, *b*. Presupunem $a \ge b$. Fie *M*, *N*, *P*, *Q*, pe laturile pătratului *ABCD* astfel încât:

$$AM = BN = CP = DQ = \frac{a+b}{2}.$$

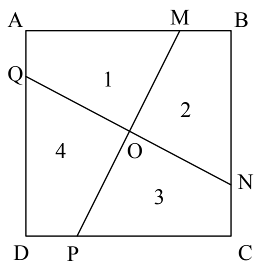


Fig. 10.2.1.

Din congruenţa triunghiurilor *AQM*, *BMN*, *CNP* şi *DPQ*, rezultă că *MQPN* este pătrat (în particular, $MP \perp QN$).

Tăiem pătratul *ABCD* după dreptele *MP* şi *NQ*, obţinând patru părţi egale (Fig. 10.2.1.).

Aceste părţi se pot aplica pe laturile celuilalt pătrat, rezultând tot un pătrat. (Fig. 10.2.2.)

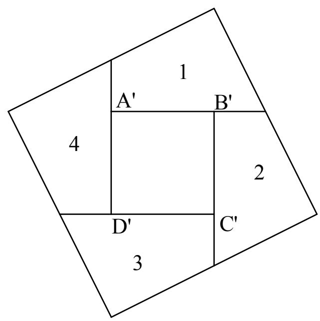


Fig. 10.2.2.

Presupunem afirmaţia adevărată dacă avem *n* pătrate şi vom considera acum $n+1$ pătrate. Alegem două pătrate oarecare şi, procedând ca la pasul $n=2$, obţinem din acestea un nou pătrat. Astfel, numărul pătratelor se reduce la *n* şi aplicăm ipoteza de inducţie.

21. *Să se demonstreze că pentru orice număr natural m există în plan o mulțime S de puncte, nevidă şi finită astfel încât, oricare ar fi punctul A din S, în S există exact m puncte situate la distanța 1 față de punctul A.*

Soluție: Mulțimea de puncte se va construi prin inducție matematică. Pentru $m = 1$, mulțimea S este formată din două puncte aflate la distanță egală cu 1.

Presupunem că pentru $m = k$ s-a construit mulțimea de puncte corespunzătoare S_k. Cu ajutorul ei vom construi mulțimea de puncte S_{k+1} care corespunde lui $m = k+1$. Problema va fi rezolvată dacă se găseşte o translație de vector unitate a lui S_k pentru care mulțimea S_k' obținută să nu aibă puncte comune cu S_k şi oricare punct al lui S_k' să se găsească la distanța 1 față de un singur punct al mulțimii S_k, acela din care a provenit prin translație. Mulțimea S_{k+1} va rezulta prin reuniunea mulțimilor S_k şi S_k'.

Pentru aceasta, să presupunem că mulțimea S_k are *p* elemente. Fie S_k' mulțimea rezultată printr-o translație a lui S_k într-o anumită direcție, de modul 1. Fiecare punct din S_k este situat la distanța 1 față de exact *k* puncte din S_k. Există astfel cel mult *kp* direcții de translație pentru care două puncte din S_k şi S_k' pot coincide. Deci, putem alege o direcție aşa încât punctele lui S_k şi S_k' să fie toate distincte.

Orice punct din S_k se află la distanța 1 față de omologul său din S_k'. Există atunci cel mult $2(p-1)$ direcții de translație prin care un punct din S_k ar putea ajunge la distanța 1 față de un punct neomolog (cercurile de rază 1 cu centrele în cele două puncte au cel mult 2 puncte de intersecție). În total, putem avea $2p(p-1)$ astfel de direcții. Alegem din infinitatea de direcții de translație una pentru care acest lucru să nu se întâmple. În acest caz, reuniunea lui S_k şi S_k' are proprietatea că orice punct are exact $k+1$ puncte din mulțime la distanța

1 (k puncte din ipoteza de inducție şi punctul omolog). Rezultă că mulțimea S_{k+1} construită verifică afirmația din enunțul problemei pentru $m = k + 1$.

22. *Să se găsească numărul maxim de regiuni în care este împărțit un disc de către segmentele care unesc n puncte situate pe cercul care mărgineşte acest disc.*

Soluție: Notăm cu u_n numărul maxim de regiuni ce trebuie aflat.

Notăm punctele de pe cerc cu A_1, A_2, ..., A_n, în sensul de rotație al acelor de ceasornic şi cu S_n mulțimea formată din toate segmentele care unesc aceste n puncte.

Fie A_{n+1} încă un punct pe cerc, între A_n şi A_1.

Pentru $k \in \{1, 2, ..., n\}$, segmentul $A_{n+1}A_k$ separă în două un număr de regiuni egal cu numărul părților în care este împărțit de către segmentele mulțimii S_n. $A_{n+1}A_k$ intersectează segmentele care unesc oricare dintre punctele A_1, A_2, ..., A_{k-1} cu oricare dintre punctele A_{k+1}, A_{k+2}, ..., A_n şi nu intersectează în puncte interioare segmentele care au pe A_{n+1} sau A_k drept extremități.

Numărul acestor segmente este $(k-1)(n-k)$; numărul de puncte interioare determinate de ele pe segmentul $A_{n+1}A_k$ este mai mic sau egal cu acesta (se poate întâmpla ca anumite puncte de intersecție să coincidă). Numărul părților în care este împărțit segmentul $A_{n+1}A_k$ este egal cu numărul de puncte de diviziune $+1$.

Numărul de regiuni, prin ducerea segmentului $A_{n+1}A_k$, se măreşte cu cel mult $1 + (k-1)(n-k)$. Acest calcul nu depinde de faptul că din punctul A_{n+1} mai sunt duse sau nu alte segmente.

După ducerea tuturor segmentelor $A_{n+1}A_1$, $A_{n+1}A_2$, ..., $A_{n+1}A_n$, numărul regiunilor nu va depăşi:

$$u_n + \sum_{k=1}^{n}\left[1 + (k-1)(n-k)\right] = u_n + n + n\sum_{k=1}^{n}(k-1) - \sum_{k=1}^{n}k(k-1).$$

Astfel, obținem relația:

$$u_{n+1} \leq u_n + n + \frac{n(n-1)(n-2)}{6}$$

unde u_{n+1} este numărul de regiuni în care segmentele care unesc cele $n+1$ puncte împart discul.

Ținem cont că $u_1 = 1$ şi, prin însumarea inegalităților, rezultă:

$$u_n \leq 1 + \frac{n(n-1)}{2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24}.$$

Dacă oricare trei segmente din mulțimea S_{n+1} nu sunt concurente în acelaşi punct, toate punctele de intersecție ale segmentului $A_{n+1}A_k$ cu segmentele din S_n sunt distincte. În acest caz,

$$\max u_n = 1 + \frac{n(n-1)}{2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24}.$$

Pentru a arăta că se poate găsi o astfel de mulțime S_n, procedăm prin inducție. Considerăm punctele A_1, A_2, ..., A_n ca înainte. Unim prin drepte toate punctele A_1, A_2, ..., A_n cu fiecare punct de intersecție al segmentelor din S_n. Punctele în care aceste drepte intersectează cercul a doua oară le notăm B_1, B_2, ..., B_m (numărul m nu depăşeşte $n \cdot C_n^2$). Dacă alegem drept A_{n+1} orice punct de pe cerc diferit de B_1, B_2, ..., B_m, atunci segmentele $A_{n+1}A_k$ nu vor trece prin punctele de intersecție ale segmentelor din S_n, deci nici în mulțimea S_{n+1} nu există trei segmente concurente în acelaşi punct.

23. *Fie O un punct pe dreapta d, iar* $\overrightarrow{OP_1}$, $\overrightarrow{OP_2}$, ..., $\overrightarrow{OP_n}$ *n vectori de lungime 1, astfel încât punctele* P_1, P_2, ..., P_n *se află într-un plan care conține dreapta d şi sunt toate de aceeaşi parte a acesteia. Să se demonstreze că pentru n număr impar are loc relația*:

$$\left|\overrightarrow{OP_1} + \overrightarrow{OP_2} + \ldots + \overrightarrow{OP_n}\right| \geq 1,$$

unde $\left|\overrightarrow{OM}\right|$ *reprezintă lungimea vectorului* $\overrightarrow{OM}$.

Soluție: Pentru $n = 1$, afirmația este evidentă.

Presupunem că inegalitatea se verifică pentru $n = k$ şi vom demonstra că ea este satisfăcută şi pentru $n = k + 2$ (n fiind impar, k şi $k + 2$ sunt numere impare consecutive în şirul de valori atribuite lui n).

Se orientează dreapta d iar vectorii daţi sunt renumerotaţi în ordinea creşterii unghiului (măsurat în sens trigonometric) pe care aceştia îl formează cu sensul pozitiv al dreptei orientate d, ca în figura 10.2.3..

Vom arăta că se verifică următoarea inegalitate:

$$\left|\overrightarrow{OP_1} + \overrightarrow{OP_2} + \ldots + \overrightarrow{OP_k} + \overrightarrow{OP_{k+1}} + \overrightarrow{OP_{k+2}}\right| \geq \left|\overrightarrow{OP_2} + \ldots + \overrightarrow{OP_k} + \overrightarrow{OP_{k+1}}\right| \quad (1)$$

În cazul în care punctele P_1 şi P_{k+2} sunt ambele situate pe dreapta d, suma $\overrightarrow{OP_1} + \overrightarrow{OP_{k+2}}$ degenerează într-un punct (fiind dată de vectorul nul $\vec{0}$); inegalitatea este atunci evidentă.

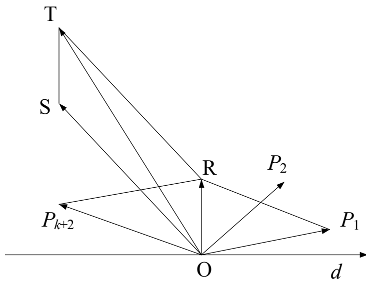


Fig. 10.2.3.

Presupunem acum că cel puţin unul din punctele P_1 şi P_{k+2} nu este pe dreapta d.

Suma $\overrightarrow{OP_1} + \overrightarrow{OP_{k+2}}$ este în acest caz vectorul nenul $\overrightarrow{OR}$ (diagonala orientată a rombului de laturi $\overrightarrow{OP_1}$ şi $\overrightarrow{OP_{k+2}}$).

Astfel, niciunul dintre unghiurile $\measuredangle P_1OR$ şi $\measuredangle ROP_{k+2}$ nu este mai mare decât $\frac{\pi}{2}$. Notăm: $\overrightarrow{OS} = \overrightarrow{OP_2} + \ldots + \overrightarrow{OP_k} + \overrightarrow{OP_{k+1}}$.

Din modul în care au fost renumerotaţi vectorii, vectorul $\overrightarrow{OS}$ se află situat fie în interiorul unghiului $\measuredangle P_1OR$, fie în interiorul unghiului $\measuredangle ROP_{k+2}$. Rezultă astfel că unghiul $\measuredangle ROS$ este ascuţit.

Suma $\overrightarrow{OR} + \overrightarrow{OS}$ este reprezentată de diagonala orientată $\overrightarrow{OT}$ a paralelogramului de laturi $\overrightarrow{OR}$ şi $\overrightarrow{OS}$. Deoarece în triunghiul OST, unghiul $\measuredangle OST$ este obtuz, cea mai mare latură în acest triunghi este OT. De aici, $\left|\overrightarrow{OT}\right| \geq \left|\overrightarrow{OS}\right|$, adică inegalitatea (1) este demonstrată.

Cum $\left|\overrightarrow{OP_2}+...+\overrightarrow{OP_k}+\overrightarrow{OP_{k+1}}\right|\geq 1$ (din ipoteza de inducție), inegalitatea (1) implică: $\left|\overrightarrow{OP_1}+\overrightarrow{OP_2}+...+\overrightarrow{OP_k}+\overrightarrow{OP_{k+1}}+\overrightarrow{OP_{k+2}}\right|\geq 1$.

Conform principiul inducției matematice, inegalitatea este valabilă pentru orice valoare impară a lui n.

24. (*Teorema lui Pick*) *Fie P un poligon în plan ale cărui vârfuri sunt puncte laticeale. Arătați că aria* S_P *a poligonului verifică relația :*

$$S_P = i + \frac{f}{2} - 1 \quad (1)$$

unde am notat cu i numărul de puncte laticeale din interiorul poligonului iar cu f numărul punctelor laticeale de pe laturi (*inclusiv vârfurile*).

Soluție: Deoarece un poligon care are n laturi poate fi descompus în $n-1$ triunghiuri cu câte o latură comună şi cu vârfurile în vârfurile poligonului, vom demonstra veridicitatea teoremei prin inducție matematică după n.

Etapa de verificare constă în a arăta că formula este adevărată pentru orice triunghi. Pentru aceasta vom proceda în trei etape:

1. Arătăm că relația este adevărată pentru un dreptunghi cu vârfurile puncte laticeale şi cu laturile paralele cu axele.

Presupunem că dreptunghiul $ABCD$ are laturile: $AB = m$ şi $BC = n$; aria sa este atunci egală cu mn. Deoarece pe laturi sunt $m+1$, respectiv $n+1$ puncte laticeale (inclusiv vârfurile):

$$i = (m-1)(n-1),$$
$$f = 2(m+1) + 2(n-1).$$

Atunci, $i + \frac{f}{2} - 1 = mn$.

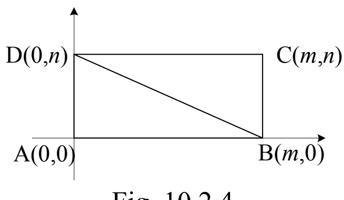


Fig. 10.2.4.

2. Arătăm că formula este adevărată pentru triunghiuri dreptunghice care au catetele paralele cu axele (triunghiuri ce se obțin prin tăierea unui dreptunghi de tipul celui de la 1. după o diagonală). Vom păstra aceleaşi notații.

Deoarece $\Delta ABD \equiv \Delta BCD$, $S_{\Delta ABD} = \frac{mn}{2} = \frac{1}{2}(i_D + \frac{f_D}{2} - 1).$

Fără a restrânge generalitatea demonstrației, alegem un sistem cartezian de coordonate în care: $A(0,0),\ B(m,0),\ C(m,n),\ D(0,n)$.

Atunci, $BD: nx + ym - mn = 0.$ Fie $0 < k < m$ şi $0 < y < n,$ numere naturale. Pentru ca $M(k,y) \in BD$ trebuie ca $y = \frac{n(m-k)}{m} \in \mathbb{N}.$

Din $m \mid n(m-k)$ şi $m \nmid m-k,$ rezultă că pe dreapta *BD* vor există puncte laticeale (diferite de vârfurile *B* şi *D*) dacă şi numai dacă $m \mid n.$

Dacă $n = lm,$ cu *l* natural, datorită valorilor pe care le poate lua *k*, există $m-1$ puncte laticeale pe *BD* în afara vârfurilor *B* şi *D*. Atunci, $i_T = \frac{i_D - (m-1)}{2}$ şi $f_T = 2m + n.$ Dacă nu există puncte laticeale pe latura *BD*, atunci $i_T = \frac{i_D}{2}$ şi $f_T = m + n + 1$. În ambele situații, efectuând calculul, obținem: $i_T + \frac{f_T}{2} - 1 = \frac{mn}{2} = S_{\Delta ABD}.$

3. Arătăm că afirmația din enunțul problemei este adevărată pentru orice triunghi ale cărui vârfuri sunt puncte laticeale.

Pentru aceasta, ținem cont că orice triunghi se transformă într-un dreptunghi de tipul celui de la punctul 1, ataşând cel mult 3 triunghiuri dreptunghice de tipul celor de la 2.

Fie *T* triunghiul *ABC* pentru care realizăm demonstrația, $T_1,\ T_2,\ T_3$ triunghiurile de completare şi *D* dreptunghiul rezultat. Din etapele anterioare, pentru $s \in \{1,2,3\}$, avem:

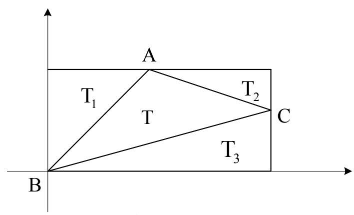


Fig. 10.2.5.

$$S_D = S_T + S_{T_1} + S_{T_2} + S_{T_3} = i_D + \frac{f_D}{2} - 1,\ S_{T_s} = i_{T_s} + \frac{f_{T_s}}{2} - 1,\ (2)$$

Notăm cu $c_1,\ c_2,\ c_3$ numărul punctelor laticeale (diferite de vârfuri) de pe laturile *AB*, *BC* şi respectiv *CA*. Atunci,

$$i_D = i_{T_1} + i_{T_2} + i_{T_3} + i_T + c_1 + c_2 + c_3;$$
$$f_D = f_{T_1} + f_{T_2} + f_{T_3} + f_T - 2c_1 - 2 - 2c_2 - 2 - 2c_3 - 2.$$

Înlocuind în (2), obținem $S_T = i_T + \frac{f_T}{2} - 1.$

Trecem acum la demonstrarea etapei de inducție propriu-zisă. Pentru aceasta, presupunem relația (1) adevărată pentru poligoane cu n laturi (de tipul precizat în enunț) şi demonstrăm că aceasta se verifică şi în cazul în care poligonul are $n+1$ laturi.

Notăm cu P_1 poligonul de n laturi ce se obține din poligonul P cu $n+1$ laturi prin înlăturarea triunghiului T (acesta are o latură comună cu P_1 şi interioarele disjuncte). Din ipoteza de inducție şi din etapa de verificare ştim că:

$$S_{P_1} = i_{P_1} + \frac{f_{P_1}}{2} - 1, \quad S_T = i_T + \frac{f_T}{2} - 1. \qquad (3)$$

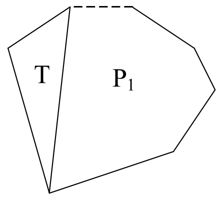


Fig. 10.2.6.

Rămâne să arătăm că:

$$S_P = S_{P_1} + S_T = i_P + \frac{f_P}{2} - 1. \qquad (4)$$

Demonstrația este asemănătoare cu cea din ultimul pas al etapei de verificare. Notăm cu c numărul punctelor laticeale (inclusiv vârfurile) aflate pe latura comună triunghiului T şi poligonului P_1. Atunci:

$$i_P = i_{P_1} + i_T + (c-2),$$
$$f_P = f_{P_1} + f_T - 2(c-2) - 2.$$

Folosind (3), obținem:

$$S_P = i_{P_1} + \frac{f_{P_1}}{2} + i_T + \frac{f_T}{2} - 2 = i_P + \frac{f_P}{2} - 1,$$

deci relația (4) se verifică.

Astfel, afirmația din enunțul problemei este adevărată pentru orice poligon cu vârfurile puncte laticeale.

CAPITOLUL XI

Rezolvarea de probleme

11.1. Folosirea conceptelor şi teoremelor în rezolvarea de probleme

Problemele, în matematica şcolară, reprezintă calea principală prin care se verifică modul şi gradul în care s-au asimilat noţiunile teoretice. Capacitatea de a rezolva probleme este, de cele mai multe ori, criteriul după care sunt selectaţi elevii la un examen (teste naţionale, bacalaureat, admitere la facultate) sau „ierarhizaţi" la nivelul disciplinei. Problemele propriu-zise, cât şi cele care reprezintă problematizarea teoriei au un puternic *rol informativ*: cu ajutorul lor se subliniază rolul matematicii în viaţa curentă (calcule, măsurări, aplicaţii în fizică, tehnică). Aceste aspecte realizează atât motivaţia cât şi scopul învăţării matematicii.

O problemă reprezintă un enunţ prin care se oferă anumite informaţii elevilor şi în care se cere să se demonstreze un fapt matematic sau să se calculeze valorile (măsurile) unor elemente, astfel încât rezolvarea să implice o iniţiativă din partea rezolvitorului. Din acest motiv, rezolvarea de probleme este o activitate cognitivă complexă datorită operaţiilor cognitive necesare obţinerii soluţiei cât şi diversităţii situaţiilor cu care ne confruntăm. De cele mai multe ori, anumite procese cognitive ce apar în rezolvare sunt necunoscute rezolvitorului; dar se pot întâlni şi situaţii în care datele problemei sau soluţia nu sunt familiare. Astfel, problemele au şi un *rol formativ* în educarea gândirii creatoare prin exerciţiul de gândire logică pe care îl implică.

Ținând cont de tipul de activitate intelectuală realizată de elev pe parcursul rezolvării unei probleme, putem clasifica sarcinile unui rezolvitor de probleme în :

- ***sarcini de bază***, în care procedeul de rezolvare a problemei este aproape evident, asemănător sau identic cu cel al unei probleme rezolvate în clasă. În acest caz, procedeul de rezolvare este cunoscut de către elev care nu trebuie decât să aplice un algoritm învățat, un rezultat imediat al unei teoreme, sau combinații simple ale acestora.
- ***sarcini asociate unei configurații sau care presupun o investigare, o studiere a acesteia.*** În această situație, procesul de rezolvare presupune alegerea, dintr-o mare varietate de procedee deja învățate, a unor metode potrivite şi (sau) combinarea acestora în vederea obținerii soluției problemei.
- ***sarcini pentru care nu este cunoscut procesul de rezolvare***, în care elevul trebuie să-l descopere singur.

Primului tip de sarcini îi corespund *deprinderi intelectuale specifice*, corespunzătoare unui anumit conținut matematic, pe când celelalte două implică şi *deprinderi intelectuale nespecifice* (cognitive), caracteristice mai multor tipuri de conținuturi. Dintre acestea, putem menționa pe cele mai des întâlnite în rezolvarea problemelor:

- recunoaşterea, înțelegerea ipotezei şi a ceea ce se cere demonstrat;
- reamintirea unor informații relevante pentru acea sarcină;
- recunoaşterea unei părți a problemei deja rezolvată;
- înlocuirea concluziei cu o condiție echivalentă, în care metoda de rezolvare este mai simplă sau reamintirea unor proprietăți a căror demonstrare este suficientă pentru a obține soluția finală;
- obținerea din ipoteză a unor consecințe imediate, precizarea dacă sunt îndeplinite (sau nu) condițiile pentru aplicarea unor teoreme învățate;
- revederea şi verificarea ipotezei, la un moment în care nu se „vede” o continuare a rezolvării, pentru a stabili dacă toate condițiile din ipoteză au fost folosite până la acel pas; în caz contrar, condiția neutilizată poate oferi o soluție de a ieşi din impas;

- comparararea, pe parcursul rezolvării, a rezultatelor intermediare cu ceea ce se cere demonstrat sau aflat, pentru a alege varianta optimă de continuare a rezolvării.

Principalele reguli care trebuie cunoscute şi respectate de un rezolvitor de probleme constau în:

1. ***Citirea corectă a enunţului problemei şi construirea exactă a figurii*** (la geometrie), esenţiale în evitarea erorilor de raţionament. Citirea enunţului de mai multe ori nu trebuie considerată „pierdere de timp” deoarece în cadrul acestuia sunt oferite anumite indicaţii pe care elevul trebuie să le poată identifica şi, cu ajutorul acestora, să caute tehnici de rezolvare.
2. ***Însuşirea enunţului problemei*** constă în cunoaşterea clară a datelor ipotezei, a concluziei şi a legăturii dintre acestea, a teoremelor şi noţiunilor legate cu problema dată. Ea se materializează în acele câteva minute premergătoare rezolvării propriu-zise în care elevul încearcă „să simtă” problema, să o încadreze într-un cadru cunoscut. O înţelegere atentă a enunţului reduce de cele mai multe ori calculele ce trebuie efectuate pe parcursul rezolvării problemei. De exemplu: în cazul unei funcţii pare, vom face studiul doar pentru valorile pozitive ale argumentului; proprietăţile funcţiei modul pot simplifica rezolvarea unei ecuaţii.
3. ***Cunoaşterea unor procedee şi metode*** pentru rezolvarea problemelor care să stabilească „paşi în gândirea rezolvării” (Am folosit toată ipoteza?, Ştiu o problemă asemănătoare?). De exemplu, pentru a arăta că două drepte sunt paralele, elevul cunoaşte anumite metode, cum ar fi: folosind unghiurile formate de drepte cu o secantă, găsind o perpendiculară comună sau o paralelă comună, utilizând teorema lui Thales, proprietăţile coardelor în cerc, determinând un paralelogram pentru care dreptele să constituie laturi paralele, etc. În funcţie de particularităţile problemei, el va trebui să aleagă apoi metoda de rezolvare cea mai potrivită.
4. ***Construirea de raţionamente noi*** pe baza axiomelor, definiţiilor, teoremelor şi a altor raţionamente învăţate anterior. Pentru fiecare problemă trebuie realizată o scurtă analiză a enunţului, trebuie motivată alegerea metodei de rezolvare, mersul gândirii în procesul de rezol-

vare şi eventual, oferite mai multe variante de rezolvare. Toate acestea oferă motivaţii logice de abordare şi sprijină obţinerea altor raţionamente.

5. ***Discuţia problemei***. De multe ori, rezolvarea unei probleme nu se încheie cu aflarea soluţiei; apar situaţii în care trebuie examinate şi condiţiile care arată existenţa altor soluţii precizând, după caz numărul lor; sunt studiate diferite cazuri particulare care pot apărea sau se generalizează problema.

6. ***Verificarea soluţiilor problemei***. Pe parcursul rezolvării unor ecuaţii (de exemplu care conţin radicali), se aplică transformări asupra ecuaţiei iniţiale care nu conduc întotdeauna la ecuaţii echivalente cu cea iniţială. Soluţiile care se obţin pot fi doar o parte a soluţiilor ecuaţiei iniţiale (prin împărţirea ambilor membri ai ecuaţiei cu o expresie care conţine necunoscuta, fără a impune condiţia ca ea să fie nenulă, prin extragerea rădăcinii pătrate din ambii membrii ai ecuaţiei), sau se introduc soluţii străine ecuaţiei iniţiale (prin înmulţirea ambilor membri ai ecuaţiei cu o expresie care conţine necunoscuta, prin ridicarea lor la pătrat, etc.). Pentru eliminarea soluţiilor străine, toate soluţiile găsite trebuie verificate în ecuaţia iniţială. În problemele de construcţii geometrice, pentru verificarea soluţiilor, se realizează de fapt o demonstraţie care arată că figura obţinută corespunde cu cea cerută în enunţul problemei.

Înţelegerea unei demonstraţii nu presupune doar înţelegerea fiecărei secvenţe a acesteia, ci trebuie cunoscută şi legătura care există între ea şi restul problemei. Analizarea tuturor aspectelor parţiale ale unei demonstraţii este necesară în evidenţierea ideii demonstraţiei; dacă elevul a înţeles şi a reţinut ideea demonstraţiei, el o poate oricând reconstitui în detaliu, fără a fi nevoie să reţină demonstraţia în desfăşurarea sa analitică.

Pentru fiecare unitate de învăţare (respectiv, lecţie), profesorul trebuie să-şi stabilească cu claritate seturile de probleme ce se vor rezolva în clasă, problemele propuse ca temă pentru acasă. La clasă, nu este recomandat să se rezolve „cât mai multe probleme”; numărul de exerciţii şi probleme trebuie să fie corelat cu conţinutul acestora, cu timpul avut la dispoziţie şi cu capacităţile de lucru ale elevilor. Problemele propuse trebuie să fie: cu grad de dificultate diferit, de la exerciţii simple, cu rezolvare directă, până la probleme complexe; ordonate corespunzător; să aibă o formulare neambiguă; să prezinte varietate tematică şi de raţionament. În general, manualul conţine aplicaţii standard care trebuie rezolvate în întregime la clasă sau date ca temă pentru acasă. Pe lângă acestea, profesorul va alege şi alte probleme reprezentative prin conţinut care să asigure fixarea unor etape intermediare ale lecţiei, să facă legătura cu alte noţiuni deja învăţate, să permită dobândirea de noi cunoştinţe prin descoperire. Din multitudinea de culegeri de probleme existente trebuie optat pentru acelea în care problemele sunt corect formulate, soluţiile sunt riguros şi complet realizate, apar multe probleme originale şi cu un nivel ştiinţific înalt.

Profesorul are rolul principal în formarea la elevi a deprinderilor de muncă independentă, de cercetare, lucrul individul stând la baza obţinerii performanţei în matematică. Sprijinul acordat trebuie dozat cu grijă; în cazul în care ajutorul este insuficient, elevul nu poate progresa singur, iar dacă nu mai are ce afla, motivaţia pentru rezolvarea problemei dispare.

Înainte de a trece la rezolvarea unei probleme, profesorul trebuie să se asigure că aceasta este înţeleasă de către elevi. Apoi, prin întocmirea (împreună cu elevii) a unui plan de rezolvare, el fixează etape mari de lucru. În acest sens, se pot folosi chiar probleme de sinteză cu subpuncte intermediare ajutătoare care schiţează de fapt calea de rezolvare. În final, se redactează clar şi concis soluţia. Elevii trebuie învăţaţi să-şi recitească formularea rezolvării pentru a se asigura de acurateţea şi corectitudinea raţionamentului. De asemenea, mai trebuie subliniat faptul că *folosirea limbii române nu trebuie făcută neglijent*. De foarte multe ori, argumentarea din cadrul unei demonstraţii se face „în proză”. Chiar dacă o lucrare este corect redactată din punct de vedere matematic, apariţia greşelilor de ortografie, a celor gramaticale reduc considerabil calitatea acesteia.

Problemele care constituie teme pentru acasă trebuie să fie gradate din punctul de vedere al dificultăţilor, să fie într-o continuitate firească cu cele lucrate în clasă şi să poată fi rezolvate fără a conduce la supraîncărcarea sau saturarea elevului. Este indicat ca ele să reunească în rezolvare cât mai multe noţiuni din lecţia predată sau (şi) din lecţiile anterioare, având în vedere recapitularea, reproducerea unor rezultate, dar şi activitatea creatoare a elevului.

Majoritatea lecţiilor recapitulative pot fi realizate prin rezolvări de exerciţii şi probleme. Conţinutul temei recapitulative, anunţat din timp, este scris la începutul lecţiei pe tablă, pentru ca elevii să aibă o privire de ansamblu asupra orei în curs. Setul de exerciţii şi probleme trebuie să acopere întreaga temă care se recapitulează, să structureze noţiunile în discuţie şi să le coreleze cu cele deja aprofundate. Profesorul va atrage atenţia asupra unor tipuri de exerciţii la care elevii au întâmpinat greutăţi, precizând că aşteaptă acum de la ei un progres în abordarea lor.

La începutul lecţiei, se recapitulează definiţiile şi rezultatele teoretice fundamentale necesare în rezolvarea problemelor propuse. Pentru fiecare exerciţiu în parte se stabileşte, împreună cu elevii, o metodă de rezolvare (sau mai multe) şi se întocmeşte planul de realizarea a rezolvării, pe etape. În acest fel se insistă pe participarea activă a elevilor în realizarea lecţiei, se pune accentul pe activitatea individuală şi se dezvoltă spiritul de competiţie.

În capitolul anterior am prezentat câteva tipuri de probleme ce se pot rezolva folosind metoda reducerii la absurd şi metoda inducţiei matematice. De cele mai multe ori nu există „reţete” de rezolvare a problemelor, rezolvarea acestora putând fi abordată pe mai multe căi ce diferă în funcţie de dificultate, de lungimea prezentării, de capacitatea de generalizare a problemei, etc.

În continuare vom prezenta alte metode de rezolvare a problemelor bazate pe principii matematice cunoscute cât şi anumite tipuri de probleme clasice. Temele tratate pot face subiectul unor opţionale de matematică sau pot fi folosite în pregătirea elevilor pentru concursuri, pentru completarea culturii lor matematice.

11.2. Principiul lui Dirichlet

Principiul lui Dirichlet:

Fie A o mulțime nevidă şi A_1, A_2, ..., A_n *o partiție a lui A* (*adică* $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A$ *şi* $A_i \cap A_j = \emptyset$, *pentru* $i \neq j$, $A_i \neq \emptyset$, $1 \leq i \leq n$).

Dacă considerăm a_1, a_2, ..., a_{n+1}, $n+1$ *elemente din A, atunci există cel puțin o submulțime* A_i *care să conțină cel puțin două elemente dintre cele* $n+1$.

1. *Arătați că oricum am alege 7 numere întregi, două dintre ele dau la împărțirea cu 6 acelaşi rest.*

Soluție: Folosind teorema înpărțirii cu rest, putem scrie orice număr întreg n sub forma $n = 6q + r$, unde q este număr întreg şi restul $r \in \{0,1,2,3,4,5\}$. Fiind 6 valori posibile pentru cele 7 resturi provenite din împărțirea numerelor din ipoteză la 6, cel puțin două resturi trebuie să fie egale.

2. *Se consideră 10 numere naturale distincte. Dintre pătratele lor se aleg 7. Arătați că cel puțin două dintre ele au diferența divizibilă cu 10.*

Soluție: Ştim că ultima cifră a pătratul unui număr natural n poate fi $u(n^2) \in \{0,1,4,5,6,9\}$. Cele 10 pătrate ale numerelor considerate inițial vor fi astfel de forma $M_{10} + r$, cu $r \in \{0,1,4,5,6,9\}$. Alegând 7 pătrate, cel puțin două vor da acelaşi rest la împărțirea cu 10, deci diferența lor este divizibilă cu 10.

3. *Demonstrați că oricare ar fi 12 numere naturale distincte de două cifre, dintre ele se pot alege două a căror diferență este un număr format din două cifre identice.*

Soluție: Un număr n format cu două cifre identice $\overline{aa}$, se scrie $n = 11a$, $1 \leq a \leq 9$. Dintre cele 12 numere, două vor avea acelaşi rest la împărțirea cu 11. Fie acestea $\overline{xy}$ şi $\overline{zt}$. Astfel, diferența lor va fi divizibilă cu 11, deci există c număr natural, $c<10$ (fiecare cât obținut la împărțirea numerelor la 11 este mai mic decât 10, altfel numerele au mai mult de 2 cifre) pentru care $\overline{xy}-\overline{zt}=11c=\overline{cc}$.

4. *Fie M un sistem format din n numere întregi (nu neapărat distincte). Arătați că M are cel puțin o parte nevidă a sa cu proprietatea că suma elementelor sale se divide cu n.*

Soluție: Fie $M=(x_1,x_2,...,x_n)$, unde $x_i\in\mathbb{Z}$, $1\le i\le n$.
Considerăm părțile lui *M*:

$$M_1=(x_1),\ M_2=(x_1,x_2),\ ...,\ M_n=M=(x_1,x_2,...,x_n)$$

şi, pentru fiecare dintre ele, scriem suma elementelor sale:

$$S_1=x_1,\ S_2=x_1+x_2,\ ...,\ S_n=x_1+x_2+...+x_n.$$

Dacă una dintre aceste sume este divizibilă cu *n*, problema este rezolvată.

Dacă S_i nu este divizibilă cu *n*, pentru $1\le i\le n$, atunci două dintre aceste sume vor avea la împărțirea cu *n* acelaşi rest (sunt *n* numere şi $n-1$ valori nenule posibile pentru resturile lor). Fie S_t şi S_l, (unde putem presupune $t>l$), astfel ca $n\mid S_t-S_l$.

Atunci, cum $n\mid x_{l+1}+x_{l+2}+...+x_t$, putem alege ca parte a lui *M* care verifică proprietatea cerută sistemul alcătuit din $x_{l+1},x_{l+2},...,x_t$.

5. *Dacă un determinant de ordin n are n^2-n+2 elemente egale, atunci determinantul este egal cu 0.*

Soluție: Determinantul are în total n^2 elemente; astfel, $n-2$ elemente ale sale sunt diferite de valoarea comună a celor n^2-n+2 elemente egale.

Cele $n-2$ numere pot fi distribuite pe cel mult $n-2$ linii sau coloane ale determinantului. Obținem astfel că, cel puțin două linii sau coloane ale determinantului sunt identice, deci valoarea sa este egală cu 0.

6. *Fie 9 puncte în interiorul unui pătrat de latură 1. Arătați că există trei puncte dintre acestea care să fie vârfurile unui triunghi de arie cel mult* $\frac{1}{8}$.

Soluție: Unind două câte două mijloacele laturilor opuse ale pătratului obținem patru pătrate de latură $\frac{1}{2}$. Dintre acestea, în cel puțin unul vor exista cel puțin trei puncte din cele 9 considerate inițial. Notăm acest pătrat cu *ABCD* iar punctele cu *M*, *N*, *P*. Dacă *M*, *N* şi *P* sunt coliniare, $S_{\Delta MNP} = 0 < \frac{1}{8}$.

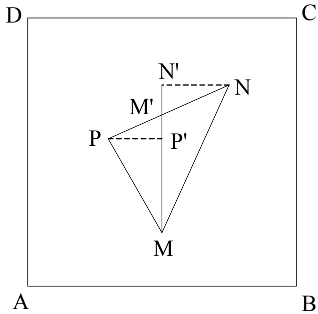


Fig. 11.2.1.

Dacă nu, ducem prin cele trei puncte paralele la *AD*; una dintre ele se va afla între celelalte două. Fie aceasta MM', unde $M' \in (NP)$.

Construim, ca în figura 11.2.1., $PP' \perp MM'$ şi $NN' \perp MM'$ unde $P' \in MM'$, $N' \in MM'$. Atunci,

$$S_{\Delta MNP} = S_{\Delta MM'N} + S_{\Delta MM'P} = \frac{1}{2} MM' \left(NN' + PP' \right) \leq \frac{1}{2} AD \cdot CD = \frac{1}{8}.$$

7. *Se consideră un cub cu latura 1. Arătați că oricum am alege 28 de puncte interioare, cel puțin două dintre ele au distanța* $\leq \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Soluție: Împărțim fiecare muchie a cubului în trei părți egale. Trasând prin aceste puncte paralele la muchii, obținem pe fiecare față a cubului câte 9 pătrate egale. Ducând plane paralele cu fețele cubului prin punctele de diviziune, am împărțit cubul inițial în 27 cuburi de latură $\frac{1}{3}$ fiecare. Aplicând principiul lui Dirichlet, cel puțin două puncte din cele inițiale se vor afla într-un cub de latură $\frac{1}{3}$. Distanța dintre cele două puncte nu poate fi mai mare decât lungimea diagonalei acestui cub, deci este $\leq \frac{\sqrt{3}}{3}$.

11.3. Principiul includerii şi excluderii

Principiul includerii şi excluderii:

Se consideră *n* mulţimi finite A_i, $1 \leq i \leq n$. Atunci:

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{i=1}^{n}|A_i| - \sum_{1\leq i<j\leq n}\left|A_i \cap A_j\right| + \sum_{1\leq i<j<k\leq n}\left|A_i \cap A_j \cap A_k\right| - \ldots +$$
$$+(-1)^{n-1}\left|\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right|. \qquad (1)$$

Demonstraţie: Pentru a arăta că relaţia (1) este adevărată pentru orice $n \geq 1$ număr natural, aplicăm metoda inducţiei matematice după n.

Pentru $n = 1$, afirmaţia este evident adevărată. Chiar dacă nu mai este necesar să verificăm pentru $n = 2$, cum vom folosi explicit formula pentru $n = 2$, să observăm că, în acest caz, numărul elementelor reuniunii $A_1 \cup A_2$ este egal cu suma cardinalelor celor două mulţimi din care trebuie să scădem numărul elementelor comune care au fost numărate de două ori. Am demonstrat astfel că:

$$|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|.$$

Presupunem relaţia (1) adevărată pentru *n* mulţimi finite şi arătăm că ea rămâne adevărată şi pentru $n+1$ astfel de mulţimi.

Cum $\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i = \left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \cup A_{n+1}$, obţinem:

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i\right| = \left|\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \cup A_{n+1}\right| = \left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| + |A_{n+1}| - \left|\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \cap A_{n+1}\right| =$$
$$= \sum_{i=1}^{n+1}|A_i| - \sum_{1\leq i<j\leq n}\left|A_i \cap A_j\right| + \ldots + (-1)^{n-1}\left|\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right| - \left|\bigcup_{i=1}^{n}\left(A_i \cap A_{n+1}\right)\right|.$$

Deoarece:

$$\left(A_i \cap A_{n+1}\right) \cap \left(A_j \cap A_{n+1}\right) = \left(A_i \cap A_j\right) \cap A_{n+1},$$

$$\left(A_i \cap A_{n+1}\right) \cap \left(A_j \cap A_{n+1}\right) \cap \left(A_k \cap A_{n+1}\right) = \left(A_i \cap A_j \cap A_k\right) \cap A_{n+1}, \text{ etc.,}$$

aplicăm pentru calcularea lui $\left|\bigcup_{i=1}^{n}(A_i \cap A_{n+1})\right|$ formula (1) şi rezultă:

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n}(A_i \cap A_{n+1})\right| = \sum_{i=1}^{n}\left|A_i \cap A_{n+1}\right| - \sum_{1 \le i < j \le n}\left|A_i \cap A_j \cap A_{n+1}\right| + \ldots +$$

$$+(-1)^{n-1}\left|\bigcap_{i=1}^{n+1} A_i\right|.$$

Înlocuind în relaţia anterioară, vom obţine:

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i\right| = \sum_{i=1}^{n+1}\left|A_i\right| - \sum_{1 \le i < j \le n+1}\left|A_i \cap A_j\right| + \ldots + (-1)^n\left|\bigcap_{i=1}^{n+1} A_i\right|.$$

1. *Câte numere naturale nenule, mai mici sau egale cu 1000 sunt divizibile cu 3, cu 4, sau cu 5?*

Soluţie: Formăm mulţimile:

$$A = \left\{3k \mid k \in \mathbb{N}^*, 3k \le 1000\right\},$$

$$B = \left\{4k \mid k \in \mathbb{N}^*, 4k \le 1000\right\},$$

$$C = \left\{5k \mid k \in \mathbb{N}^*, 5k \le 1000\right\}$$

şi trebuie să determinăm $\left|A \cup B \cup C\right|$.

Pentru aceasta, observăm mai întâi că:

$$|A| = \left[\frac{1000}{3}\right] = 333,\ |B| = \left[\frac{1000}{4}\right] = 250,\ |C| = \left[\frac{1000}{5}\right] = 200,$$

$$A \cap B = \left\{12k \mid k \in \mathbb{N}^*, 12k \le 1000\right\},\ |A \cap B| = \left[\frac{1000}{12}\right] = 83,$$

$$A \cap C = \left\{15k \mid k \in \mathbb{N}^*, 15k \le 1000\right\}, |A \cap C| = \left[\frac{1000}{15}\right] = 66,$$

$B\cap C=\left\{20k\mid k\in\mathbb{N}^*, 20k\le 1000\right\}$, $\left|B\cap C\right|=\left[\dfrac{1000}{20}\right]=50$,

$A\cap B\cap C=\left\{60k\mid k\in\mathbb{N}^*, 60k\le 1000\right\}$, $\left|A\cap B\cap C\right|=\left[\dfrac{1000}{60}\right]=16.$

Înlocuind aceste rezultate în formula:

$$\left|A\cup B\cup C\right|=\left|A\right|+\left|B\right|+\left|C\right|-\left|A\cap B\right|-\left|B\cap C\right|-\left|A\cap C\right|+\left|A\cap B\cap C\right|$$

rezultă: $\left|A\cup B\cup C\right|=600$.

2. *Fie A şi B două mulţimi finite cu m, respectiv n elemente unde* $m\ge n$. *Stabiliţi câte funcţii surjective* $f:A\to B$ *se pot construi.*

Soluţie: Fie $A=\left\{a_1,a_2,...,a_m\right\}$, $B=\left\{b_1,b_2,...,b_n\right\}$. Ştim că numărul funcţiilor *f* definite pe mulţimea *A* cu valori în mulţimea *B* este de n^m. Notăm cu *x* numărul funcţiilor care nu sunt surjective; astfel numărul funcţiilor surjective va fi egal cu n^m-x.

Pentru fiecare $1\le i\le n$, definim mulţimea:

$$M_i=\left\{f:A\to B\mid b_i\notin f(A)\right\}.$$

Deci, $M=\bigcup_{i=1}^{n}M_i$ coincide cu mulţimea funcţiilor $f:A\to B$ care nu sunt surjective. Pentru $1\le i\le n$, M_i este de fapt mulţimea funcţiilor ce se pot construi din mulţimea *A* în mulţimea $B\setminus\{b_i\}$ şi astfel, $\left|M_i\right|=(n-1)^m$. La fel, $M_i\cap M_j$ este mulţimea funcţiilor care se construiesc din *A* în mulţimea $B\setminus\{b_i,b_j\}$ deci, $\left|M_i\cap M_j\right|=(n-2)^m$, etc.

Se observă că $\bigcap_{i=1}^{n}M_i=\varnothing$.

Folosind principiul includerii şi excluderii, obţinem:

$$x=\left|\bigcup_{i=1}^{n}M_i\right|=\sum_{i=1}^{n}\left|M_i\right|-\sum_{1\le i<j\le n}\left|M_i\cap M_j\right|+\sum_{1\le i<j<k\le n}\left|M_i\cap M_j\cap M_k\right|-$$

$$-...+(-1)^{n-1}\left|\bigcap_{i=1}^{n}M_i\right|=C_n^1(n-1)^m-C_n^2(n-2)^m+...+(-1)^{n-2}C_n^{n-1}.$$

Rezultă că numărul funcțiilor surjective este egal cu:

$$n^m - C_n^1(n-1)^m + C_n^2(n-2)^m - ... + (-1)^{n-1} C_n^{n-1} .$$

3. *Fie A o mulțime finită cu m elemente. Notăm cu* $N_{m,k}$ *numărul relațiilor de echivalență ce pot fi definite pe mulțimea A astfel încât mulțimea cât (a claselor de echivalență) să aibă k elemente* ($k \leq m$).

Arătați că:

$$N_{m,k} = \frac{1}{k!} \cdot \left[k^m - C_k^1(k-1)^m + C_k^2(k-2)^m - ... + (-1)^{k-1} C_k^{k-1} \right]$$

şi deduceți numărul relațiilor de echivalență ce se pot defini pe mulțimea A.

Soluție: Considerăm o relație de echivalență definită pe mulțimea A pe care o notăm cu ρ iar pentru $x \in A$, $\hat{x}$ va reprezenta clasa de echivalență corespunzătoare relației ρ. Fie $A_\rho = \{\hat{x} \mid x \in A\}$ mulțimea cât. Atunci funcția $p : A \to A_\rho$, $p(x) = \hat{x}$ este surjectivă.

Reciproc, dacă funcția $f : A \to B$ este surjectivă, putem arăta uşor că relația definită prin $(x, y) \in \rho_f \Leftrightarrow f(x) = f(y)$ este relație de echivalență pe A. Mai mult, dacă $g : B \to C$ este o funcție bijectivă, relațiile ρ_f şi $\rho_{g \circ f}$ coincid pentru că:

$(x, y) \in \rho_{g \circ f} \Leftrightarrow g(f(x)) = g(f(y)) \Leftrightarrow$ (ținând cont că g este funcție bijectivă) $\Leftrightarrow f(x) = f(y) \Leftrightarrow (x, y) \in \rho_f$.

În cazul nostru vom considera $B = A_\rho$, deci va avea k elemente. Atunci, pe baza observației făcute, $k!$ funcții surjective din A în A_ρ vor determina aceeaşi relație de echivalență pe A. Aplicând rezultatul obținut în problema precedentă,

$$N_{m,k} = \frac{1}{k!} \cdot \left[k^m - C_k^1(k-1)^m + C_k^2(k-2)^m - ... + (-1)^{k-1} C_k^{k-1} \right].$$

Numărul relațiilor de echivalență care pot fi definite pe mulțimea A este atunci egal cu $N_{m,1} + N_{m,2} + ... + N_{m,m}$.

4. *Aflați în câte moduri se pot împărți 5 obiecte distincte la 3 persoane, cu condiția ca fiecare persoană să primească cel puțin un obiect.*

Soluție: Fiecare corespondență construită între mulțimea obiectelor şi cea a persoanelor care îndeplinesc condiția din enunț este de fapt o funcție surjectivă definită pe o mulțime cu 5 elemente şi cu valori într-o mulțime de 3 elemente. Astfel, numărul cerut este numărul de funcții surjective ce se pot construi între cele două mulțimi.

Conform exercițiului 2., obținem $3^5 - C_3^1 \cdot 2^5 + C_3^2 = 150$ moduri.

5. *Se consideră n puncte în plan care se unesc între ele prin segmente astfel încât să nu existe un triunghi cu vârfurile în cele n puncte. Să se arate că în acest caz există cel puțin un punct care este extremitatea a cel mult* $\left[\frac{n}{2}\right]$ *segmente.*

Soluție: Fie P mulțimea formată cu cele n puncte din plan. Pentru $M \in P$, notăm cu A_M mulțimea punctelor din P legate de M printr-un segment.

Prin reducere la absurd, facem presupunerea că, pentru orice punct $M \in P$, $|A_M| \geq \left[\frac{n}{2}\right]+1$. Fie $M_1 \in P$ şi $N \in A_{M_1}$. Atunci,

$$n \geq \left|A_{M_1} \cup A_N\right| = \left|A_{M_1}\right| + \left|A_N\right| - \left|A_{M_1} \cap A_N\right| \geq 2\left[\frac{n}{2}\right] + 2 - \left|A_{M_1} \cap A_N\right|.$$

Rezultă că:

$$\left|A_{M_1} \cap A_N\right| \geq 2\left[\frac{n}{2}\right] + 2 - n > 2\left[\frac{n}{2}\right] + 2 - 2\left[\frac{n}{2}\right] - 2 = 0,$$

deci există cel puțin un punct $R \in A_{M_1} \cap A_N$. Am obținut astfel trei puncte M_1, N şi R din mulțimea P care sunt legate între ele prin segmente, adică triunghiul M_1NR are vârfurile în mulțimea P, fapt ce contrazice ipoteza. Presupunerea făcută fiind eronată, există cel puțin un punct M din P pentru care $|A_M| \leq \left[\frac{n}{2}\right]$.

6. *Fie σ o permutare de n elemente. Spunem că σ admite o coincidență în i dacă $\sigma(i)=i$. Determinați numărul N de permutări fără coincidențe din S_n.*

Soluție: Notăm cu A_i mulțimea permutărilor de *n* elemente care au o coincidență doar în *i*. Astfel, $|A_i|=(n-1)!$.

Notăm cu *S* numărul permutărilor cu cel puțin o coincidență, adică:

$$S=\left|\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right|=\sum_{i=1}^{n}|A_i|-\sum_{1\le i<j\le n}\left|A_i\cap A_j\right|+\sum_{1\le i<j<k\le n}\left|A_i\cap A_j\cap A_k\right|-...+$$

$$+(-1)^{n-1}\left|\bigcap_{i=1}^{n}A_i\right|=C_n^1(n-1)!-C_n^2(n-2)!+...+(-1)^{n-1}C_n^n.$$

Pentru a afla numărul permutărilor fără coincidențe, din numărul total de permutări, $n!$, scădem numărul *S* şi obținem:

$$N=n!-C_n^1(n-1)!+C_n^2(n-2)!-...+(-1)^nC_n^n.$$

11.4. Probleme de loc geometric

Chiar dacă noțiunea de loc geometric nu-şi mai găseşte locul pe care îl merită în programele şcolare, considerăm că nu putem neglija acest subiect, unul dintre cele mai frumoase din geometrie. Locurile geometrice conduc la înțelegerea geometriei, la aprofundarea ei, la vizualizarea unor proprietăți geometrice referitoare la un punct într-un cadru stabilit, dezvoltă intuiția şi raționamentul.

Locurile geometrice în plan sunt mulțimi de puncte care îndeplinesc o anumită condiție geometrică. Vom nota cu *L* mulțimea punctelor din plan care verifică proprietatea *P*, iar cu *F* figura loc geometric. A demonstra că „Locul geometric al punctelor care au proprietatea *P* este figura geometrică *F*" presupune a arăta egalitatea celor două mulțimi, *L* şi *F*, prin dublă incluziune: $L\subseteq F$ şi $F\subseteq L$. Cu alte cuvinte, în plan, în afara mulțimii *L*, nu mai există alte puncte care să verifice condiția dată şi în mulțimea *F* care defineşte locul geometric nu se găsesc puncte care să nu satisfacă condiția *P*.

De multe ori, enunțul unei probleme de loc geometric specifică figura loc geometric, fapt ce simplifică rezolvarea problemei, cum ar fi:

➢ Să se arate că locul geometric al punctelor M din plan care au puteri egale în raport cu două cercuri date C_1 şi C_2 este o dreaptă perpendiculară pe linia centrelor.

➢ Bisectoarea interioară a unui unghi este locul geometric al punctelor din interiorul unghiului, egal depărtate de laturile unghiului.

În general, problemele de loc geometric nu precizează însă figura loc geometric. În această situație trebuie cunoscute locuri geometrice fundamentale, de referință, cum ar fi:

- mediatoarea, ca loc geometric;
- bisectoarea, ca loc geometric (cele două sunt primele locuri geometrice cu care se întâlnesc elevii, în clasa a VI-a);
- locul geometric al punctelor situate la o anumită distanță de o dreaptă;
- locul geometric al punctelor care împart segmentul (AM) într-un raport constant, unde A este fixat iar M este mobil pe o dreaptă fixată;
- locul geometric al punctelor M pentru care $MA^2 - MB^2 = ct$, cu A şi B puncte fixe;
- locul geometric al punctelor din care se vede un segment dat sub un unghi precizat;
- locul geometric al punctelor M pentru care aria triunghiului ABM este constantă când A şi B sunt fixe, etc.

În rezolvarea unei probleme de loc geometric se porneşte cu identificarea elementelor fixe şi a celor mobile ale configurației. Atunci când acestea sunt clare, se încearcă reducerea problemei (prin găsirea unor proprietăți caracteristice ale punctelor locului) la unul din locurile geometrice cunoscute; în final, se stabileşte figura loc geometric.

Pentru aceasta, arătăm că:

1) Orice punct al figurii F are proprietatea cerută P, deci $F \subseteq L$;

2) Orice punct din plan care are proprietatea P aparține figurii, adică $L \subseteq F$.

Dacă se demonstrează doar prima afirmație, înseamnă că am găsit o mulțime de puncte (cele ale figurii F) care aparțin locului geometric, fără a putea fi siguri că acestea sunt singurele care verifică proprietatea menționată în problemă.

Dacă se demonstrează doar a doua afirmație, vom obține că toate punctele cu proprietatea *P* aparțin figurii, fără a putea preciza dacă nu există puncte ale figurii care nu au proprietatea *P*.

Uneori se pot folosi forme echivalente ale celor două afirmații, şi anume:

1′) Price punct care nu are proprietatea *P*, nu aparține figurii *F*;

2′) Orice punct care nu aparține lui *F* nu are proprietatea *P*.

Pentru a determina figura *F*, mai întâi ne asigurăm că există cel puțin un punct cu proprietatea *P*; apoi considerăm un punct oarecare *M* din plan care are proprietatea *P* şi căutăm o proprietate echivalentă lui *P* care să stabilească apartenența lui *M* la o figură *F*. De cele mai multe ori vom construi, cu mare precizie, un număr suficient de astfel de puncte *M*, pentru a putea „intui" care este locul geometric. Dacă demonstrăm afirmația 2), deducem că *M* se află pe o anumită curbă; pentru a arăta că aceasta este locul geometric căutat, demonstrăm apoi 1) sau 1′).

Locul geometric poate fi conceput şi cinematic, bazat pe mişcare. Putem considera un punct mobil care păstrează, pe tot parcursul mişcării, proprietatea *P* generând locul geometric. Astfel, punctul *M* coincide pe rând cu punctele locului, definit mai întâi static, ca mulțime de puncte. În acest caz, putem defini locul geometric ca fiind figura plană descrisă de punctul mobil *M*, care satisface o anumită condiție (proprietate) dată.

1. *Care este locul geometric al centrului de greutate G al triunghiului ABC când A şi B sunt puncte fixe pe un cerc* $C(O,r)$*, iar C este un punct variabil pe acelaşi cerc?*

Soluție: Trasând mai multe puncte ale locului geometric, observăm că punctul *G* descrie un cerc. Pentru a găsi locul cerut, notăm cu A_1 mijlocul laturii *AB*; fie $O_1 \in (OA_1)$, cu $A_1O_1 = \frac{1}{3}A_1O$.

Atunci, $\Delta A_1GO_1 \sim \Delta A_1CO$ şi $GO_1 = \frac{1}{3} \cdot CO = \frac{r}{3} = ct.$

Punctul O_1 fiind fix, rezultă că centrul de greutate G se află pe cercul $C\left(O_1, \frac{1}{3}r\right)$. (Fig. 11.4.1.)

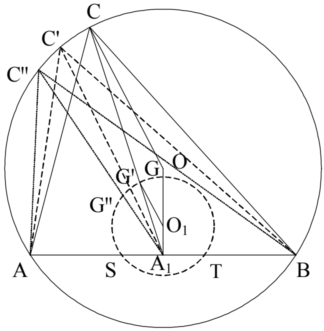


Fig. 11.4.1.

Trebuie remarcat că triunghiul ABC nu există pentru situațiile:

$$C = A \text{ şi } C = B.$$

Deci, din cercul găsit, vom elimina punctele corespunzătoare acestor cazuri. Ele sunt punctele în care cercul $C\left(O_1, \frac{1}{3}r\right)$ intersectează segmentul AB şi le notăm cu S şi T.

Folosind notațiile anterioare, am arătat până acum că:

$$L \subseteq C\left(O_1, \frac{1}{3}r\right) \setminus \{S, T\} = F .$$

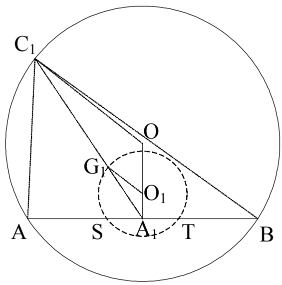


Fig. 11.4.2.

Pentru a încheia demonstrația, rămâne să arătăm că fiecare punct din F este centru de greutate al unui triunghi ABC cu vârful C pe cercul mare.

Fie $G_1 \in C\left(O_1, \frac{1}{3}r\right) \setminus \{S, T\}$ ales arbitrar. Pe semidreapta $(A_1G_1$ considerăm punctul C_1 (figura 11.4.2.) astfel încât $A_1C_1 = 3A_1G_1$. Din construcție, $\frac{A_1G_1}{A_1C_1} = \frac{A_1O_1}{A_1O} = \frac{1}{3}$, astfel triunghiurile $A_1G_1O_1$ şi A_1C_1O sunt asemenea. De aici, $C_1O = 3O_1G_1 = r$, adică $C_1 \in C(O, r)$.

Cum C_1A_1 este mediană a triunghiului AC_1B şi $\frac{A_1G_1}{A_1C_1} = \frac{1}{3}$, rezultă că G_1 este centrul de greutate al triunghiului ABC_1.

2. *Pe cercul de diametru AB se consideră un punct variabil C. Fie D punctul în care dreapta AC intersectează tangenta în B la cerc. Pe BC, în sensul de la B la C se ia punctul E astfel încât* $BE = BD$ *şi prin E se duce paralela la AB care intersectează pe AC în F. Să se determine locul geometric al punctului F atunci când C descrie cercul dat.*

Soluţie: Construcţia realizată în figura 11.4.3. sugerează faptul că punctul F descrie un semicerc cu centrul în A şi de rază AB. Să demonstrăm această afirmaţie.

Din ipoteză, triunghiul BED este isoscel. Deoarece $EF \perp BD$ şi $DC \perp BE$ ($m(\measuredangle ACB) = 90°$), rezultă că BF este şi ea înălţime în acest triunghi, deci $BF \perp ED$. Triunghiurile EBD şi FAB au laturile două câte două perpendiculare, de unde obţinem:

$$\Delta EBD \sim \Delta FAB.$$

De aici rezultă că triunghiul FAB este şi el isoscel cu $AF = AB = ct$.

Punctul F este astfel situat pe cercul cu centrul în A, de rază AB. Când punctul C descrie cercul de diametru AB, dreapta AC se roteşte cu 180° în jurul lui A, iar punctul F descrie semicercul de centru A şi rază AB, delimitat de perpendiculara în A la AB.

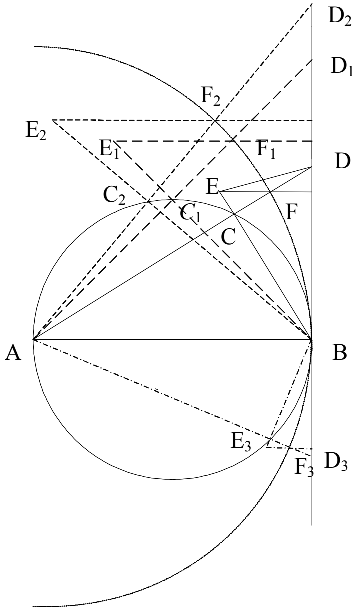


Fig. 11.4.3.

Reciproc, vom considera un punct F_1 pe acest semicerc.

Notăm cu C_1, respectiv D_1 punctele de intersecţie ale lui AF_1 cu cercul de diametru AB şi cu tangenta în B la acest cerc. Paralela prin F_1 la AB intersectează BC_1 în E_1. Vom arăta că $BE_1 = BD_1$.

Din $AC_1 \perp BC_1$ şi $AB \perp BD_1$ rezultă $m(\measuredangle F_1AB) = m(\measuredangle E_1BD_1)$; la fel, $BF_1 \perp E_1D_1$ şi $AF_1 \perp E_1B$ implică $m(\measuredangle AF_1B) = m(\measuredangle BE_1D_1)$, deci:

$$\Delta E_1BD_1 \sim \Delta F_1AB\ .$$

Cum triunghiul ΔF_1AB este isoscel, rezultă ΔE_1BD_1 isoscel şi astfel $BE_1 = BD_1$.

Ca o observaţie, se poate verifica că în cazul în care considerăm punctul *F* în celălalt semicerc al cercului cu centrul în *A* şi de rază *AB*, punctul *E* nu mai se poate construi pe *BC*, în sensul de la *B* la *C*.

3. *Cercurile $C(O,r)$ şi $C(O',r')$ cu $r \neq r'$ sunt tangente exterioare în M. Un unghi drept $\measuredangle BMA$ se roteşte în jurul lui M, laturile sale întâlnind cercurile $C(O,r)$ şi $C(O',r')$ în punctele B, respectiv A.*

a. Demonstraţi că dreapta BA trece printr-un punct fix.

b. Aflaţi locul geometric al mijlocului segmentului BA.

Soluţie: *a*. Presupunem $r > r'$. $m(\measuredangle BMA) = 90°$ implică:

$$m(\measuredangle MOB) + m(\measuredangle MO'A) = 2m(\measuredangle BMA) = 180°.$$

Unghiurile $\measuredangle MOB$ şi $\measuredangle MO'A$ fiind suplementare, $OB \parallel O'A$. Notăm $OO' \cap AB = \{P\}$ (Fig. 11.4.4.).

Din asemănarea triunghiurilor PAO' şi PBO, obţinem:

$$\frac{r'}{r} = \frac{O'P}{OP} \Leftrightarrow \frac{O'P}{OO'} = \frac{r'}{r-r'}$$

$$\Leftrightarrow O'P = \frac{r'(r+r')}{r-r'} = ct.$$

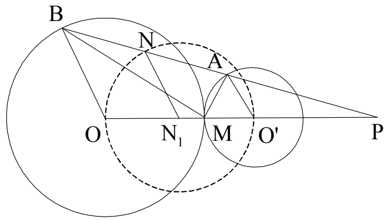


Fig. 11.4.4.

O' fiind fix, rezultă că *P* este şi el punct fix.

b. Notăm cu *N* mijlocul segmentului *AB*. Realizând construcţia din figura 11.4.5., presupunem că punctul *N* se află pe un cerc de diametru OO'.

Pentru a arăta aceasta, notăm cu N_1 mijlocul segmentului OO'. NN_1 este atunci linie mijlocie în trapezul $AO'OB$, de unde :

$$NN_1 = \frac{r+r'}{2} = r'' = ct\ .$$

Deci, $N \in C(N_1, r'')$.

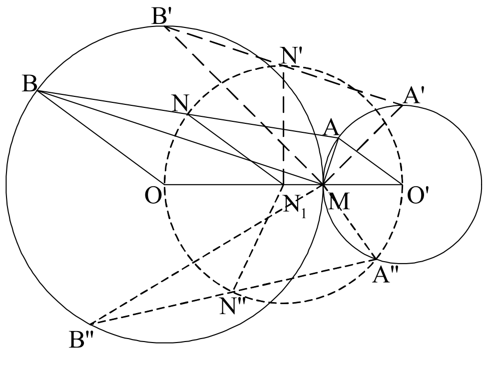


Fig. 11.4.5.

Trebuie să observăm însă că apar două cazuri care se dovedesc imposibile: când B este diametral opus lui M în $C(O,r)$ (atunci $A \equiv M$) şi când AM este diametru al cercului $C(O',r')$ (obţinem $B \equiv M$).

Astfel, $N \in C\left(N_1, r''\right) \setminus \{O, O'\}$.

Reciproc, considerăm $N \in C\left(N_1, r''\right) \setminus \{O, O'\}$. Paralela trasată prin O la NN_1 intersectează cercul $C(O,r)$ în B iar paralela din O' la NN_1 intersectează cercul $C(O',r')$ în A. Deoarece $OB \parallel O'A$,

$$180° = m(\measuredangle MOB) + m(\measuredangle MO'A) = 2m(\measuredangle BMA)$$

şi astfel $m(\measuredangle BMA) = 90°$. În trapezul $AO'OB$, NN_1 este linie mijlocie, deci $BN = NA$.

Astfel, locul geometric căutat este cercul $N \in C\left(N_1, r''\right) \setminus \{O, O'\}$.

4. *Fie segmentul* $[AB]$ *şi* $k \neq 1$ *un număr real pozitiv. Să se determine locul geometric al punctelor M care satisfac relaţia*:

$$MA = k \cdot MB .$$

Soluţie: Ştim că pe AB există două puncte: C, interior segmentului $[AB]$ iar celălalt D, exterior, pentru care se verifică relaţia din ipoteză. Fie $C \in (AB)$ astfel încât $\overline{AC} = k \cdot \overline{CB}$ ca în figura 11.4.6.. Atunci,

$$\overline{CB} = \frac{1}{k+1}\overline{AB} .$$

Pentru $D \in AB \setminus (AB)$, din $\overline{AD} = k \cdot \overline{BD}$ va rezulta $\overline{BD} = \dfrac{1}{k-1}\overline{AB}$

(în enunţ este menţionată condiţia $k \neq 1$, caz banal în care locul geometric este mediatoarea segmentului AB).

Punctele C şi D sunt fixe. Notăm cu O mijlocul segmentului CD.

Fie M un punct din plan pentru care $\frac{MA}{MB}=k$. Atunci,

$\frac{MA}{MB}=\frac{AC}{CB}$ şi $\frac{MA}{MB}=\frac{AD}{BD}$.

Aceste relații arată că MC şi MD sunt bisectoare (prima interioară, a doua exterioară) ale unghiului $\measuredangle AMB$. Rezultă $m(\measuredangle CMD)=90°$ şi astfel M se găseşte pe cercul de diametru CD (Fig. 11.4.6.).

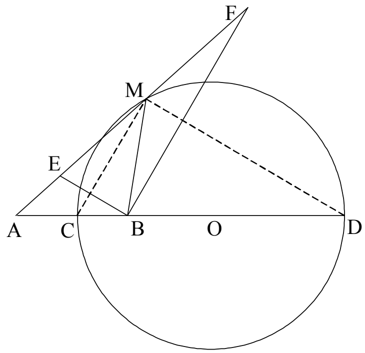


Fig. 11.4.6.

Reciproc, considerăm acum $M\in C\left(O,\frac{CD}{2}\right)$ şi vom demonstra că $\frac{MA}{MB}=\frac{CA}{CB}=k$, adică vom arăta că MC este bisectoarea interioară a unghiului $\measuredangle AMB$. Acest rezultat se obține din relațiile $\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}}=-\frac{\overline{DA}}{\overline{DB}}$ şi $m(\measuredangle CMD)=90°$ (de fapt obținem şi MD bisectoare exterioară a lui $\measuredangle AMB$). Pentru aceasta, trasăm $BF\parallel MC,\ \ BE\parallel MD,\ \ E,F\in AM$. Aplicând teorema lui Thales, obținem:

$$\frac{AM}{AF}=\frac{AC}{AB}\Rightarrow\frac{MA}{MF}=\frac{AC}{CB}\qquad(1)$$

$$\frac{AM}{AE}=\frac{AD}{AB}\Rightarrow\frac{MA}{ME}=\frac{AD}{BD}\qquad(2)$$

Din aceste relații, $ME=MF$, deci BM este mediană în triunghiul EBF. Cum unghiurile $\measuredangle EBF$ şi $\measuredangle CMD$ au laturile paralele, triunghiul EBF este dreptunghic în B, deci $BM=ME=MF$. Înlocuind în (1) şi (2), rezultă $\frac{MA}{MB}=\frac{AC}{CB}$ şi $\frac{MA}{MB}=\frac{AD}{BD}$, adică MC este bisectoarea interioară a unghiului $\measuredangle AMB$.

Observație: Cercul obținut ca loc geometric este des întâlnit în geometria elementară sub numele de *cercul lui Appollonius pentru segmentul* $[AB]$.

5. *Se consideră punctele coliniare A, B şi C. Să se determine locul geometric al punctelor M care verifică relația*:

$$MA^2 + MB^2 = \overline{AB} \cdot \overline{AC} \quad (1).$$

Soluție: Dacă $A \in (BC)$, observăm că locul geometric este mulțimea vidă, deoarece $\overline{AB} \cdot \overline{AC} < 0$.

Pentru cazul $C = A \neq B$ apare aceeaşi situație.

Presupunem $C \in (AB$ (Fig. 11.4.7.). Fie O mijlocul segmentului AB şi M un punct care verifică relația din enunțul problemei. Aplicând relația lui Stewart pentru punctele M, A, O, B, putem calcula lungimea medianei MO a triunghiului MAB.

Obținem: $MO^2 = \frac{1}{2}\left(MA^2 + MB^2\right) - \frac{1}{4}AB^2 = \frac{1}{2}\overline{AB} \cdot \overline{AC} - \frac{1}{4}AB^2 =$

$= \frac{\overline{AB}}{4}\left(2\overline{AC} - \overline{AB}\right) \qquad (2).$

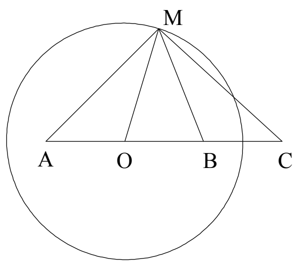


Fig. 11. 4.7.

Astfel, punctul M verifică relația (1) dacă şi numai dacă este verificată egalitatea (2). Locul geomeric este:

a) mulțimea vidă, dacă $2\overline{AC} < \overline{AB}$,

b) $\{O\}$, dacă $2\overline{AC} = \overline{AB}$,

c) cercul $C(O,r)$, dacă $2\overline{AC} > \overline{AB}$

cu $r = \frac{1}{2}\sqrt{AB\left(2AC - AB\right)}$.

6. *Se consideră două segmente* $[AB]$ *şi* $[CD]$. *Să se afle locul geometric al punctelor M din plan pentru care triunghiurile MAB şi MCD au aceeaşi arie.*

Soluție: Condiția impusă în enunț, $S_{\Delta MAB} = S_{\Delta MCD}$ este echivalentă cu $\dfrac{d(M,AB)}{d(M,CD)} = \dfrac{CD}{AB} = k$. Deci, locul geometric descris de *M* este cel al punctelor din plan cu proprietatea că raportul distanțelor la două drepte fixate este constant.

În cazul în care drepte *AB* şi *CD* sunt paralele, aflate la distanța *h* una de cealaltă, notăm cu h_1 şi h_2 distanțele de la *M* la dreptele *AB*, respectiv *CD* (Fig. 11.4.8.).

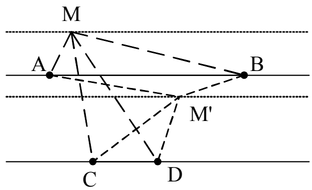


Fig. 11.4.8.

Pentru $k = 1$ ($h_1 = h_2$, locul geometric este o dreaptă paralelă cu *AB*, aflată la distanță egală față de cele două drepte).

Presupunem acum $k \neq 1$. Dacă $h_1 + h_2 = h$ (*M* este situat în plan, între dreptele *AB* şi *CD*), condiția $\dfrac{h_1}{h_2} = k$ devine $h_1 = \dfrac{k}{k+1} h = ct$ iar pentru $|h_1 - h_2| = h$ (*M* este situat în afara benzii determinate de *AB* şi *CD*), obținem $h_1 = \dfrac{k}{|1-k|} h = ct.$ Astfel, locul geometric este reuniunea a două drepte paralele cu *AB*, separate de *AB* sau *CD* după cum $k < 1$ (cazul corespunzător figurii) sau $k > 1$.

Presupunem acum $AB \cap CD = \{O\}$. Fie $E \in AB$, $F \in CD$ astfel încât $OE = AB$ şi $OF = CD$: $H \in AB \setminus [OE$ şi $R \in CD \setminus [OF$.

Dacă $M \in Int(\measuredangle EOF) \cup Int(\measuredangle HOR)$, condiția:

$$S_{\Delta MOE} = S_{\Delta MAB} = S_{\Delta MCD} = S_{\Delta MOF}$$

este echivalentă cu $EE' = FF'$ unde EE' şi FF' sunt înălțimi în cele două triunghiuri (Fig. 11.4.9.). Fie *G* mijlocul lui *EF* iar GG' şi GG'' perpendicularele din *G* pe *OE*, respectiv *OF*. Din $\Delta OEE' \sim \Delta OGG'$ şi $\Delta OGG'' \sim \Delta OFF'$ rezultă $\dfrac{OE}{OG} = \dfrac{EE'}{GG'}$; $\dfrac{OF}{OG} = \dfrac{FF'}{GG''}$.

Astfel,

$OE \cdot GG' = OF \cdot GG''$

ceea ce precizează că punctul G aparține locului geometric căutat.

În același mod se arată că orice punct aflat pe OG verifică condiția impusă (dacă $M \equiv O$, cele două arii sunt egale cu zero).

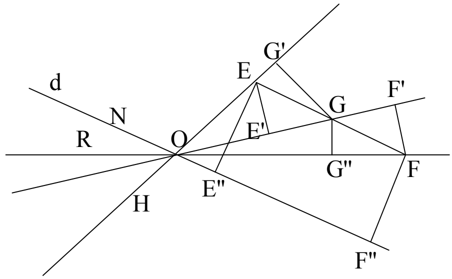


Fig. 11.4.9.

Presupunem acum că $M \in Int(\measuredangle EOR) \cup Int(\measuredangle HOF)$. Prin O trasăm dreapta d, paralelă cu EF. Cu E'' și F'' notăm picioarele perpendicularelor duse din E și F pe d. Pentru orice punct $N \in d$, obținem că N are proprietatea cerută: $S_{\Delta NOE} = \frac{1}{2} ON \cdot EE'' = \frac{1}{2} ON \cdot FF'' = S_{\Delta NOF}$.

Astfel, locul geometric căutat este dat de dreptele d și OG.

Observație: Dacă $AB \equiv CD$, în cazul în care dreptele sunt concurente, (OG este bisectoarea interioară iar d cea exterioară unghiului $\measuredangle EOF$.

7. *Se consideră patrulaterul convex ABCD. Să se afle locul geometric al punctelor $M \in Int(ABCD)$ pentru care:*

$$S_{MBCD} = S_{MBAD}.$$

Soluție: Fie E mijlocul diagonalei AC (Fig. 11.4.10.).

Din $AE = EC$ rezultă:

$S_{\Delta ABE} = S_{\Delta BCE}$ și $S_{\Delta AED} = S_{\Delta ECD}$,

deci $S_{EBAD} = S_{EBCD}$. Am obținut astfel că punctul E aparține locului geometric.

Considerăm acum un punct M cu proprietatea că $S_{MBCD} = S_{MBAD}$.

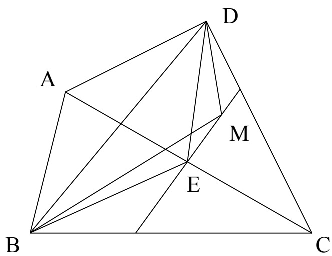


Fig. 11.4.10.

Din relațiile: $S_{MBCD} = S_{\Delta BDC} - S_{\Delta BDM}$ și $S_{MBAD} = S_{\Delta ABD} + S_{\Delta BDM}$, obținem:

$$S_{\Delta BDM} = \frac{1}{2}\left(S_{\Delta BDC} - S_{\Delta ABD}\right).$$

Deoarece $S_{EBAD} = S_{EBCD}$, printr-un calcul analog, avem $S_{\Delta EBD} = S_{\Delta MBD}$.

Astfel, un punct M din interiorul patrulaterului aparține locului geometric dacă şi numai dacă $S_{\Delta EBD} = S_{\Delta MBD}$.

Cele două triunghiuri au aceeaşi bază, $[BD]$ deci, înălțimile din M, respectiv E sunt congruente. Punctul E fiind fix, M aparține locului geometric al punctelor aflate la aceeaşi distanță de $[BD]$ ca şi punctul E.

În concluzie, locul geometric este segmentul obținut prin intersecția dintre dreapta ce trece prin E, paralelă cu BD şi interiorul patrulaterului $ABCD$.

8. *Fie $A_1A_2...A_n$ un poligon convex cu n laturi, $n \geq 3$. Pe laturile A_1A_2, A_2A_3, ..., A_nA_1 se consideră segmentele B_1C_1, B_2C_2, ..., B_nC_n. Să se determine locul geometric al punctelor interioare M ale acestui poligon pentru care $S_{\Delta MB_1C_1} + S_{\Delta MB_2C_2} + ... + S_{\Delta MB_nC_n} = ct.$*

Soluție: Presupunem că, pentru fiecare n, datele problemei sunt alese în aşa fel încât locul geometric pe care trebuie să-l determinăm este o mulțime nevidă.

Studiem mai întâi cazul $n = 3$ (Fig. 11.4.11.).

Pe laturile A_1A_3 şi A_2A_3 ale triunghiului $A_1A_2A_3$ considerăm segmentele A_3Q şi A_3P astfel încât: $A_3P = B_2C_2$, $A_3Q = B_3C_3$.

Fie M_0 un punct al locului geometric din interiorul lui A_1A_2PQ (în caz contrar, raționamentul este analog) pentru care:

$$S_{\Delta M_0B_1C_1} + S_{\Delta M_0B_2C_2} + S_{\Delta M_0B_3C_3} = S_{\Delta M_0B_1C_1} + S_{\Delta M_0A_3P} + S_{\Delta M_0A_3Q} =$$
$$= S_{\Delta M_0B_1C_1} + S_{\Delta M_0PQ} + S_{\Delta A_3PQ} = ct.$$

Observăm că locul geometric căutat este determinat de condiția:

$$S_{\Delta MB_1C_1} + S_{\Delta MPQ} = S_{\Delta M_0B_1C_1} + S_{\Delta M_0PQ}.$$

Dacă dreptele A_1A_2 şi PQ sunt paralele, locul geometric este un segment al dreptei ce trece prin M_0 şi este paralelă cu acestea.

Presupunem acum că dreptele A_1A_2 şi PQ se intersectează. Vom nota cu N punctul de concurenţă al celor două drepte. Pe laturile unghiului $\measuredangle A_2NP$ alegem punctele R şi S astfel încât:

$$NR = PQ, \quad NS = B_1C_1.$$

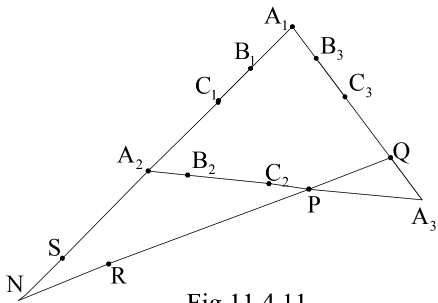


Fig.11.4.11.

Atunci,
$S_{\Delta M_0B_1C_1} + S_{\Delta M_0PQ} = S_{\Delta M_0NS} +$
$+S_{\Delta M_0NR} = S_{\Delta M_0RS} + S_{\Delta NRS}$ şi, în mod analog,

$$S_{\Delta MB_1C_1} + S_{\Delta MPQ} = S_{\Delta MRS} + S_{\Delta NRS}.$$

Astfel, locul geometric este mulţimea punctelor M aflate în interiorul triunghiului pentru care $S_{\Delta MRS} = S_{\Delta M_0RS}$. Rezultă că locul geometric este segmentul dreptei ce trece prin M_0 şi este paralelă cu RS, aflat în interiorul triunghiului $A_1A_2A_3$.

Vom demonstra folosind inducţia matematică că locul geometric cerut este un segment de dreaptă ce trece prin punctul M_0.

Presupunem că, pentru un poligon cu n laturi ($n > 3$), locul geometric căutat este un segment de dreaptă care trece prin M_0.

Fie poligonul $A_1A_2...A_nA_{n+1}$ cu $n+1$ laturi. Notăm B_1C_1, B_2C_2, ..., $B_{n+1}C_{n+1}$ segmentele considerate pe laturile poligonului şi cu M_0 un punct în interiorul poligonului care verifică relaţia.
Pe laturile unghiului $\measuredangle A_1A_{n+1}A_n$, pornind de la vârful A_{n+1}, construim segmentele:
$A_{n+1}P = B_nC_n$ şi $A_{n+1}Q = B_{n+1}C_{n+1}$.

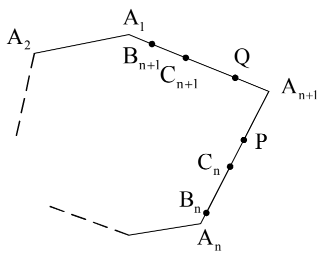


Fig.11.4.12.

Atunci:

$$S_{\Delta MB_nC_n} + S_{\Delta MB_{n+1}C_{n+1}} = S_{\Delta MA_{n+1}P} + S_{\Delta MA_{n+1}Q} = S_{\Delta A_{n+1}PQ} + S_{\Delta MPQ}.$$

Obținem că punctele M ale locului geometric verifică relația:

$$S_{\Delta MB_1C_1} + S_{\Delta MB_2C_2} + \ldots + S_{\Delta MB_{n-1}C_{n-1}} + S_{\Delta MPQ} = S_{\Delta M_0B_1C_1} + S_{\Delta M_0B_2C_2} +$$
$$+ \ldots + S_{\Delta M_0B_{n-1}C_{n-1}} + S_{\Delta M_0PQ}.$$

Ținând cont de ipoteza de inducție, locul geometric este un segment de dreaptă ce trece prin M_0.

9. *Fie cercul* $C(O,r)$, *coarda fixă BC şi punctul A, mobil pe cerc. Bisectoarele unghiurilor* $\measuredangle B$ *şi* $\measuredangle C$ *ale triunghiului ABC intersectează cercul în* B' *şi* C'. *Determinați locul geometric al mijlocului coardei* $B'C'$.

Soluție: Fie $BC = l$. Deoarece coarda BC este fixă, lungimea arcului $\overset{\frown}{BC}$ este constantă.

Considerăm că punctul A se mişcă pe arcul mare de cerc $\overset{\frown}{BC}$ (Fig. 11.4.13.).

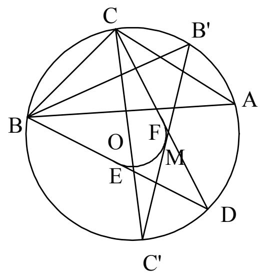


Fig. 11.4.13.

Din ipoteză, BB' şi CC' sunt bisectoare şi astfel:

$$m\left(\overset{\frown}{BC'}\right) = m\left(\overset{\frown}{C'A}\right),\ m\left(\overset{\frown}{B'C}\right) = m\left(\overset{\frown}{B'A}\right).$$

Deci, $m\left(\overset{\frown}{B'AC'}\right) = \frac{1}{2} m\left(\overset{\frown}{BAC}\right) = ct$ şi coarda $B'C'$ are astfel mărime constantă.

Determinarea locului geometric al lui M se reduce astfel la a determina locul geometric al mijlocului coardei $B'C'$ de lungime constantă care se mişcă pe cerc.

Fie M piciorul perpendicularei coborâte din O pe $B'C'$. Obținem $OM = \sqrt{r^2 - a^2} = b$ (am notat $B'C' = 2a$). Deci M se află pe un cerc $C(O,b)$, concentric cu cel dat. Astfel, M aparține locului geometric cerut dacă şi numai dacă $OM = b$ (afirmația reciprocă se demonstrează uşor).

Fie D mijlocul arcului $\overset{\frown}{BAC}$. Atunci,

$$m\left(\overset{\frown}{BC'D}\right) = m\left(\overset{\frown}{DAC}\right) = \frac{1}{2} m\left(\overset{\frown}{BAC}\right) = ct$$

şi astfel, $BD = DC = B'C' = 2a$. Notăm cu E şi F mijloacele coardelor BD, respectiv CD. Rezultă că $E, F \in \mathcal{C}(O, b)$.

Trebuie eliminate cazurile în care $A = B$ şi $A = C$. Dacă $A = B$, atunci $B' = D$ şi $C' = B$; astfel, $B'C' = BD$. Analog, pentru $A = C$, obţinem $B'C' = DC$. Rezultă că M parcurge arcul de cerc al cercului $\mathcal{C}(O, b)$ cuprins între E şi F.

Când A parcurge arcul mic de cerc $\overset{\frown}{BC}$ (Fig. 11.4.14.), demonstraţia este asemănătoare. Notăm cu D' mijlocul arcului mic $\overset{\frown}{BC}$ (D' este diametral opus lui D). Atunci,

$$OM = OE' = OF' = b_1$$

unde E', F' sunt mijloacele coardelor BD', respectiv CD', $b_1 = \sqrt{r^2 - a_1^2}$ ($B'C' = 2a_1$).

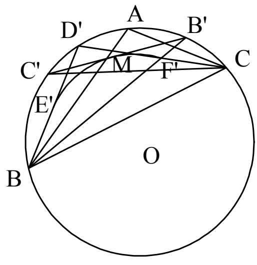


Fig. 11.4.14.

Rezultă că M aparţine arcului de cerc al cercului $\mathcal{C}(O, b_1)$ cuprins între E' şi F'.

Astfel, locul geometric cerut este reuniunea celor două arce de cerc $\overset{\frown}{EF}$ şi $\overset{\frown}{E'F'}$.

Acestea două se vor afla pe acelaşi cerc dacă $b = b_1$. În acest caz, BC este diametru în cercul iniţial.

Pentru determinarea locurilor geometrice, putem face apel şi la cunoştinţe de geometrie vectorială.

10. *Se consideră punctele fixe A şi B. Fie numerele reale α, β, cu $\alpha + \beta \neq 0$, $\alpha \neq 0$ şi k $(k > 0)$. Să se determine locul geometric al punctelor M astfel încât $\alpha MA^2 + \beta MB^2 = k$.*

Soluţie: Considerăm $C \in AB$ care împarte segmentul $[AB]$ în raportul $\dfrac{AC}{CB} = \dfrac{\beta}{\alpha} = n$. Atunci, din $\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC}$ şi $\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{CB}$ rezultă: $\overrightarrow{MC} = \dfrac{\overrightarrow{MA} + n\overrightarrow{MB}}{1 + n}$. Ridicând scalar la pătrat se obţine:

$$MC^2 = \frac{MA^2 + n^2MB^2 + 2n\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}}{(1+n)^2}. \qquad (1)$$

Din $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM} = 0$ obținem $2\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = MA^2 + MB^2 - AB^2$ şi relația (1) devine:

$$MC^2 = \frac{MA^2 + nMB^2}{1+n} - \frac{nAB^2}{(1+n)^2} = \frac{\alpha MA^2 + \beta MB^2}{\alpha+\beta} - \frac{\alpha\beta AB^2}{(\alpha+\beta)^2}.$$

Ținând cont şi de relația din ipoteză, $MC^2 = \frac{k}{\alpha+\beta} - \frac{\alpha\beta AB^2}{(\alpha+\beta)^2} = ct$.

Astfel, *M* aparține locului geometric cerut dacă şi numai dacă verifică ultima relație, adică:

Pentru $k < \frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}AB^2$, locul geometric este mulțimea vidă;

Pentru $k = \frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}AB^2$, locul geometric este $\{C\}$;

Pentru $k > \frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}AB^2$, locul geometric este un cerc de centru *C* şi rază $\sqrt{\frac{k}{\alpha+\beta} - \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2}AB^2}$.

Dacă dorim să determinăm locul geometric al punctului *M(x,y)* pe cale analitică, trebuie să găsim relația de legătură între coordonatele *x* şi *y*, adică ecuația locului.

Pentru a putea stabili anumite reguli de determinare a locului geometric, vom clasifica locurile geometrice în funcție de condiția impusă punctului variabil în:

Locuri geometrice rezultate din relații geometrice, caz în care relația geometrică dată este transformată într-o relație analitică ce stabileşte legătura dintre coordonatele *x* şi *y*.

Locuri geometrice rezultate din intersecții, situație în care punctul mobil este mereu punctul de intersecție al curbelor variabile, a căror poziție depinde de un parametru real; ecuațiile curbelor vor fi de forma $f(x,y,m)=0$, $g(x,y,m)=0$, cu *m* parametru real. Rezolvând sistemul format din cele două ecuații obținem *x* şi *y* funcții de *m*:

$$x=\varphi(m),\ \ y=\gamma(m).$$

Astfel, pentru fiecare valoare atribuită parametrului *m* obținem un punct în plan. Atunci când *m* variază continuu, punctul $M(x,y)$ descrie o curbă care este locul geometric căutat. Ecuația carteziană a acesteia se obține eliminând parametrul *m* dintre cele două ecuații parametrice. Dacă ecuația este de gradul I, locul este o dreaptă; dacă ecuația este de gradul al II-lea, locul este o conică; dacă gradul ecuației este mai mare, reprezentarea grafică se face folosind metodele analizei matematice. Uneori locul geometric este limitat, obținând porțiuni ale unei curbe.

Dacă în problemă apar mai mulți parametri (doi, de exemplu), atunci aceştia trebuie să fie legați printr-o relație prezentă în enunț. Eliminarea parametrilor se face folosind cele trei ecuații.

Mai rar se pot întâlni situații în care cei doi parametri să nu fie legați între ei printr-o relație şi totuşi să existe un loc geometric. În acest caz, odată cu eliminarea unui parametru, se elimină automat şi al doilea.

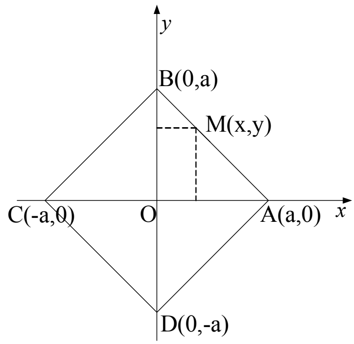


Fig. 11.4.15.

11. *Să se găsească locul geometric al punctelor din plan care au suma distanțelor față de două drepte perpendiculare constantă, egală cu a.*

Soluție: Alegem reperul cartezian ca în figura 11.4.15. Relația geometrică se scrie atunci sub forma $|x|+|y|=a$ şi reprezintă pătratul *ABCD*; se observă uşor că dacă *M* aparține locului, atunci simetricele față de *Ox*, *Oy*, şi origine aparțin de asemenea locului.

12. *Să se determine locul geometric al punctelor M din plan care verifică relația*:

$$MB^2 + MC^2 = 2MA^2,$$

unde A, B, C, sunt trei puncte din plan.

Soluție: Dacă alegem reperul cartezian ca în figura 11.4.16., relația geometrică se transformă analitic în:

$$(x-a)^2 + y^2 + (x+a)^2 + y^2 = 2\left[(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2\right].$$

Obținem astfel, $2x_1x + 2y_1y = x_1^2 + y_1^2 - a^2$; deci locul geometric este o dreaptă.

Dacă A, B, C sunt coliniare, atunci $A \in Ox$ şi $y_1 = 0$ (vom presupune $A \neq O,$ altfel $A = B = C$).

Locul geometric va fi o dreaptă perpendiculară pe *AB* de ecuație:

$$x = \frac{x_1^2 - a^2}{2x_1}.$$

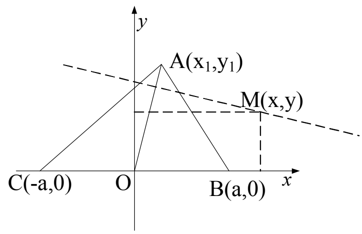


Fig. 11.4.16.

Dacă punctele nu sunt coliniare, ($A \notin Ox$), ținând cont de coeficientul unghiular al dreptei loc geometric, $-\dfrac{x_1}{y_1}$, obținem că locul geometric este o dreaptă perpendiculară pe mediana *OA* a triunghiului *ABC.*

În acest caz, putem evidenția câteva cazuri particulare.

Dacă triunghiul *ABC* este isoscel ($AB = AC$), atunci $A \in Oy$ şi $x_1 = 0.$ Ecuația locului devine $y = \dfrac{y_1^2 - a^2}{2y_1},$ o dreaptă paralelă la *Ox*.

Dacă $OA = a$ (triunghiul este dreptunghic), atunci $x_1^2 + y_1^2 = a^2$ şi ecuația locului devine $2x_1x + 2y_1y = 0,$ adică perpendiculara pe *OA* care trece prin origine.

13. *Pe laturile unui unghi drept xOy se consideră punctele A pe Ox şi B pe Oy, apoi punctele variabile* $M \in Ox$, $N \in Oy$ *care verifică relaţia* $\frac{\overline{OM}}{\overline{OA}} + \frac{\overline{ON}}{\overline{OB}} = 2$.

Determinaţi locul geometric al punctului $J \in AN \cap BM$.

Soluţie: Fie punctele $A(a,0)$, $B(0,b)$, $M(\alpha,0)$, $N(0,\beta)$. Relaţia dintre parametrii este $\frac{\alpha}{a} + \frac{\beta}{b} = 2$ iar dreptele din enunţ au ecuaţiile:

$$(AN): \frac{x}{a} + \frac{y}{\beta} - 1 = 0, \ (BM): \frac{x}{\alpha} + \frac{y}{b} - 1 = 0.$$

Eliminând cei doi parametri α şi β obţinem $\frac{bx}{a(b-y)} + \frac{ay}{b(a-x)} = 2$.

Efectuând calculele, rezultă ecuaţia:

$$b^2x^2 + 2abxy + a^2y^2 - 3ab(bx+ay) + 2a^2b^2 = 0. \qquad (1)$$

Dacă $N \equiv B$, deci $\beta = b$, din relaţia de legătură rezultă $\alpha = a$, de unde $M \equiv A$. Atunci, dreptele *AN* şi *BM* coincid; punctele dreptei *AB* sunt puncte comune, deci *AB* trebuie să apară ca loc geometric rezultat din nedeterminare (a punctului de intersecţie). Astfel, ecuaţia de gradul al doilea se descompune. Observăm că (1) se poate scrie:

$$(bx+ay)^2 - 3ab(bx+ay) + 2a^2b^2 = 0$$

care, rezolvată în raport cu $z = bx + ay$, conduce la:

$$(d): \frac{x}{2a} + \frac{y}{2b} - 1 = 0 \text{ şi } (d'): \frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1 = 0.$$

Dreapta d' este de fapt dreapta *AB* iar *d* este veritabilul loc geometric (este paralelă cu *AB*).

14. *Se consideră dreptele fixe* $(d): y = 1$, $(d'): y = 2$ *şi dreapta mobilă* $(d_m): y = \frac{x}{\sin m}$, $m \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi | k \in \mathbb{Z}\}$. *Notăm* $\{A_m\} = d \cap d_m$, $\{B_m\} = d' \cap d_m$. *Să se afle locul geometric al mijlocului segmentului* $[A_mB_m]$.

Soluție: Pentru $m \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi | k \in \mathbb{Z}\}$, $0 < |\sin m| \le 1$. Astfel, pozițiile limită ale dreptei d_m sunt cele două bisectoare, $y = x$ şi $y = -x$.

Cum $A_m(\sin m, 1)$ şi $B_m(2\sin m, 2)$, mijlocul segmentului $[A_m B_m]$ este punctul $M\left(\frac{3\sin m}{2}, \frac{3}{2}\right)$, unde $m \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi | k \in \mathbb{Z}\}$.

Obținem:

$x_M \in \left[-\frac{3}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{3}{2}\right], y_M = \frac{3}{2}.$

Locul geometric al punctului M este segmentul $[DC] \setminus \{F\}$ unde:

$$D\left(-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right) \text{ şi } C\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$$

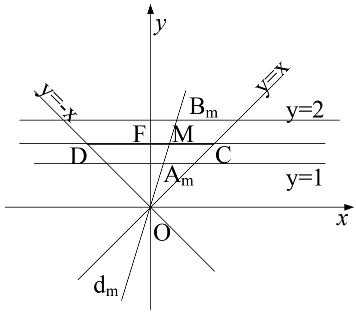


Fig. 11.4.17.

sunt punctele de intersecție ale dreptei de ecuație $y = \frac{3}{2}$ cu cele două bisectoare iar $F\left(0, \frac{3}{2}\right)$ punctul de intersecție al acesteia cu *Oy*.

15. *Fie C curba de ecuație* $y = \frac{x^2\cos a - 2x + \cos a}{x^2 - 2x\cos a + 1}$, *cu a parametru real,* $a \in (0, \pi)$.

a) Curba C intersectează axa Oy în punctul B. Prin acest punct se duce o secantă s de coeficient unghiular m, care taie curba C în punctele P şi Q. Când m variază, aflați locul geometric al mijlocului I al segmentului $[PQ]$ *şi al conjugatului armonic R al lui B în raport cu P şi Q.*

b) Se construieşte tangenta d la curba C în B. Determinați locul geometric al punctului M de intersecție al lui d cu curba C atunci când a variază.

c) Aflați locul geometric L al punctelor din plan prin care trece o singură dreaptă d (sau două drepte confundate).

Arătați că orice dreaptă d este tangentă la curba L.

Soluție: a) Obținem $B(0,\cos a)$ şi $(s): y = mx + \cos a$.

Determinarea coordonatelor punctelor de intersecție ale curbei C cu dreapta s se obțin rezolvând ecuația:

$$mx + \cos a = \frac{x^2\cos a - 2x + \cos a}{x^2 - 2x\cos a + 1},$$

sau, echivalent, $x\left(mx^2 - 2mx\cos a + m + 2\sin^2 a\right) = 0.$

Pentru $x = 0$ se obține punctul B. Rămâne să rezolvăm ecuația de gradul al II-lea:

$$mx^2 - 2mx\cos a + m + 2\sin^2 a = 0 \qquad (1)$$

al cărei discriminant este $\Delta' = -m(m+2)\sin^2 a$. Pentru ca s să intersecteze curba în P şi Q, este necesar şi suficient ca $m \in (-2,0)$.

Dacă $m = -2$, s atinge curba în $I_1(\cos a, -\cos a)$.

Pentru $m = 0$, cum $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x^2\cos a - 2x + \cos a}{x^2 - 2x\cos a + 1} = \cos a$, dreapta s devine asimptota orizontală (acum dreapta s are ecuația $y = \cos a$).

Fie x_P şi x_Q rădăcinile ecuației (1). Coordonatele punctului I sunt date de relațiile:

$$x_I = \frac{x_P + x_Q}{2} = \cos a,\ \ y_I = mx_I + \cos a = (m+1)\cos a.$$

Pentru că x_I nu depinde de *m,* atunci I se află pe dreapta de ecuație $(d_1): x = \cos a$. Deoarece $m \in (-2,0)$, obținem $y_I \in \left(-|\cos a|, |\cos a|\right)$.

Astfel, locul geometric al punctului I este segmentul I_1I_2 de pe dreapta d_1 determinat de $I_1(\cos a, -\cos a)$ şi $I_2(\cos a, \cos a)$.

Din condiția de alegere a lui R, $\dfrac{\overline{RP}}{\overline{RQ}} = -\dfrac{\overline{BP}}{\overline{BQ}}$, rezultă relațiile:

$$2\left(x_R x_B + x_P x_Q\right) = \left(x_R + x_B\right)\left(x_P + x_Q\right) \qquad (2)$$

$$2\left(y_R y_B + y_P y_Q\right) = \left(y_R + y_B\right)\left(y_P + y_Q\right). \qquad (3)$$

(2) devine: $x_R x_B + x_P x_Q = x_R \dfrac{x_P + x_Q}{2} + x_B \dfrac{x_P + x_Q}{2}$. Deoarece x_P şi x_Q sunt rădăcinile ecuaţiei (1), obţinem:

$$\frac{x_P + x_Q}{2} = x_I = \cos a,\ \ x_P x_Q = \frac{m + 2\sin^2 a}{m}. \qquad (4)$$

Din (2), $x_R = \dfrac{m + 2\sin^2 a}{m\cos a}$ (suntem în cazul $m \in \left(-2,0\right)$ iar pentru $\cos a = 0$ problema îşi pierde semnificaţia deoarece B este acum mijlocul segmentului *PQ* şi nu îl mai putem determina pe *R*).

Analog, înlocuind în (3):

$$y_P = mx_P + \cos a\ ,\ y_Q = mx_Q + \cos a\ ,\ y_B = \cos a$$

şi, ţinând cont de relaţiile (4), rezultă că:

$$y_R = \frac{m + 1 + \sin^2 a}{\cos a}.$$

Eliminând pe *m* între x_R şi y_R, găsim curba suport fixă a locului geometric descris de *R*:

$$(H): y = \frac{(1 + \sin^2 a)x - \cos a}{x\cos a - 1},$$

care reprezintă o hiperbolă echilateră ce trece prin punctele *B* şi I_1.

Deoarece $m \in (-2,0)$, obţinem intervalele de variaţie pentru x_R şi y_R (de exemplu, y_R variază între $-\cos a$ şi $\dfrac{1 + \sin^2 a}{\cos a}$).

În concluzie, locul geometric al punctului *R* este o parte a curbei (*H*) care depinde şi de semnul lui $\cos a$.

b) Coeficientul unghiular al tangentei *d* este $y'(0) = -2\sin^2 a$ iar ecuaţia dreptei este $(d): y = -2x\sin^2 a + \cos a$. Abscisele punctelor de intersecţie ale dreptei *d* cu *C* sunt rădăcinile ecuaţiei:

$$-2x\sin^2 a + \cos a = \frac{x^2\cos a - 2x + \cos a}{x^2 - 2x\cos a + 1},$$

care este echivalentă cu $-2x^2\sin^2 a(x-2\cos a)=0.$

Rădăcina dublă $x=0$ corespunde abscisei punctului B. Rezultă $x_M=2\cos a$ şi $y_M=(4\cos^2 a-3)\cos a$. Eliminând parametrul a, obținem ecuația curbei: $y_M=\frac{1}{2}x_M(x_M{}^2-3).$

Deoarece $-1<\cos a<1$, locul geometric al punctului M va fi porțiunea curbei precedente cuprinsă între paralelele $x=-2$ şi $x=2.$

c) Fie $M_0(x_0,y_0)$ un punct oarecare din plan. O dreaptă d trece prin punctul M_0 dacă şi numai dacă putem determina a (sau $\cos a$) din relația $y_0=-2x_0\sin^2 a+\cos a,$ sau din ecuația echivalentă:

$$2x_0\cos^2 a+\cos a-y_0-2x_0=0. \qquad (5)$$

Dacă această ecuație are două rădăcini reale distincte în intervalul $(-1,1),$ prin M_0 trec două drepte distincte d. În cazul în care ecuația are o rădăcină dublă sau o singură rădăcină ($x_0=0$) în acelaşi interval, prin M_0 trece o singură dreaptă d. Dacă ecuația nu are rădăcini în $(-1,1),$ prin M_0 nu poate trece nicio dreaptă d.

Dacă $x_0=0,$ $\cos a=y_0.$ Din $a\in\left(0,\pi\right),$ $\cos a\in(-1,1).$

Astfel, dreapta ce trece prin $M_0(0,y_0)$ cu $y_0\in(-1,1),$ are ecuația $y=\cos a$.

Pentru ca prin M_0 (cu $x_0\neq 0$) să treacă o singură dreaptă d, ecuația (5) trebuie să aibă o rădăcină dublă în intervalul $(-1,1)$, adică să se verifice condițiile:

$$\begin{cases}\Delta=1+8x_0(2x_0+y_0)=0\\ -1<\dfrac{1}{4x_0}<1.\end{cases}$$

Astfel, M_0 se află pe arcele hiperbolei $(L): y=-\left(2x+\dfrac{1}{8x}\right)$ situate în afara benzii formată din dreptele $x=-\frac{1}{4}$ şi $x=\frac{1}{4}.$

Pentru a arăta că orice dreptă d este tangentă la curba L, determinăm punctele de intersecție ale curbei L cu dreapta d , adică rezolvăm ecuația: $-2x\sin^2 a+\cos a=-\left(2x+\frac{1}{8x}\right)$.

Rezultă $(4x\cos a+1)^2=0$, deci $x=-\frac{1}{4\cos a}$, $|x|>\frac{1}{4}$, este rădăcină dublă. Astfel, dreapta d este tangentă la curba L în punctul de contact $\left(-\frac{1}{4\cos a},\frac{1+\cos^2 a}{2\cos a}\right)$.

11.5. Construcții geometrice

Acest subcapitol va prezenta în detaliu anumite construcții sau proprietăți deosebite ale acestora (de exemplu: secțiunea de aur, poligoanele regulate).

În antichitate, geometria era o manifestare generală de cultură, un fel de a gândi, făcând parte integrantă din filozofie (Pitagora, Democrit, Platon, Aristotel au fost nu numai geometri, ci şi unii dintre cei mai mari gânditori ai timpului lor).

Euclid, în lucrarea sa „Elemente”, prezintă în mod concis şi metodic o sinteză a cunoştințelor de geometrie şi de aritmetică cunoscute anterior lui. Aritmetica este inclusă şi ea în această carte deoarece, în acea perioadă, aceasta era subordonată geometriei, numerele fiind rezultatul unor măsurători. Astfel, fracțiile erau considerate rapoarte ale lungimilor unor segmente; numerele iraționale rezultau din măsurarea ipotenuzei unui triunghi dreptunghic ale cărui catete aveau lungimile numere naturale.

Grecii antici aveau o tehnică de calcul relativ slab dezvoltată; din acest motiv ei căutau să rezolve principalele probleme matematice prin construcții geometrice cu rigla şi compasul.

De exemplu, pentru extragerea rădăcinii pătrate dintr-un număr a ei construiau media proporțională a două segmente: unul de lungime 1 şi celălalt de lungime a. Pentru aceasta, se trasau pe o dreaptă segmentele $AB=a$ şi $BC=1$. Perpendiculara ridicată din B pe AC intersectează semicercul de diametru AC în D. În acest fel, BD este înălțime în triunghiul dreptunghic ACD (cu unghiul drept în D). Folosind teorema înălțimii, obținem $BD = \sqrt{a}$.

Conform sistemului axiomatic al lui Euclid, se puteau realiza:

1. trasarea unei drepte prin două puncte arbitrare date;
2. descrierea cercurilor cu centrele în anumite puncte şi de raze considerate distanțe între două puncte arbitrare date.

Cerința ca o anumită construcție să se facă doar cu rigla şi compasul derivă astfel din însăşi sistemul axiomatic al lui Euclid, fiind o problemă a construcției întregii geometrii plane şi nu una privind exactitatea unei anumite construcții (de multe ori, se poate obține o construcție mai precisă aplicând alte metode). De asemenea, în problemele de construcții geometrice, trebuie să se țină cont de spațiul avut la dispoziție şi să se evite construcțiile care conduc la erori mari (de exemplu: trasarea unei drepte ce trece prin două puncte mult prea apropiate, determinarea punctului de intersecție a două drepte concurente care fac între ele un unghi foarte mic).

Nu au putut fi însă astfel rezolvate trei probleme devenite celebre:

1. *Cuadratura cercului* – găsirea unui pătrat de arie egală cu cea a unui cerc dat. Egiptenii şi babilonienii căutau valoarea numerică a raportului dintre aria cercului şi aria pătratului înscris sau circumscris. Cu toate că au obținut aproximații considerate la acel moment bune, ei nu au încercat să evalueze exact acest raport. Reluată de greci, problema revine la construcția unui pătrat echivalent cu un cerc dat, deci la rezolvarea ecuației $x^2 = \pi r^2$. Dacă am şti să construim $\sqrt{\pi}$, sau chiar pe π, am putea construi pătratul. Problema nu a fost rezolvată decât atunci când Lindemann a arătat că π este număr transcendent, ceea ce a dovedit imposibilă construcția folosind rigla şi compasul.
2. *Dublarea cubului* - construcția unui cub al cărui volum să fie dublul volumului unui cub considerat inițial. După relatarea lui Eratostene, această problemă a fost pusă de către oracolul de la Delos care a cerut locuitorilor oraşului să-i dubleze un altar cubic. Din acest motiv, problema mai este întâlnită şi sub numele de *problema deliacă.* Ea revine la a construi cu rigla şi compasul pe $\sqrt[3]{2}$, ceea ce s-a dovedit mai târziu imposibil.

3. *Trisecțiunea unghiului* - împărțirea unui unghi în trei părți egale folosind rigla şi compasul, fapt care nu este întotdeauna posibil.

Aceste probleme, ca şi construcția poligoanelor regulate, au fost studiate intens de către matematicienii Evului Mediu şi ai Renaşterii. Cercetările moderne au arătat că ele nu puteau fi rezolvate în sensul lui Euclid. Acum, folosind rezultatele oferite de algebra superioară, fundamentate de teoria lui Galois, se poate răspunde complet la întrebarea dacă o construcție geometrică poate fi realizată cu rigla şi compasul.

Elementele cunoscute (date) cât şi cele care se cer determinate într-o problemă de construcție cu rigla şi compasul pot fi: puncte, drepte, cercuri, unghiuri, fiecare într-un număr finit. Elementele date sunt determinate doar prin puncte. Astfel, o dreaptă este determinată de două puncte distincte ale sale; unghiul prin trei puncte: vârful şi două puncte aflate pe laturi, egal depărtate de vârf; cercul prin centru şi un punct de pe frontiera sa.

Dacă notăm cu $S_0 = \{P_1, P_2, ..., P_n\}$ o mulțime de puncte din plan, putem obține recursiv noi mulțimi de puncte S_k, $k \geq 1$, prin procedeul următor: S_{k+1} este mulțimea de puncte din plan care se obține reunind la S_k punctele ce se obțin prin intersecții:

- de drepte determinate de două puncte din S_k;
- dintre o dreaptă determinată de două puncte din S_k şi un cerc care are centrul un punct din S_k şi raza egală cu lungimea unui segment determinat de două puncte din S_k;
- de cercuri cu centrele din S_k şi raze egale cu lungimile unor segmente determinate de puncte din S_k.

Notăm:

$$C(P_1, P_2, ..., P_n) = \bigcup_{k \geq 1} S_k .$$

Dacă $P \in C(P_1, P_2, ..., P_n)$, vom spune că el *se obține cu rigla şi compasul* din punctele P_1, P_2, ..., P_n.

Pentru a rezolva o problemă de construcţie cu rigla şi compasul trebuie parcurse în general următoarele etape care, de cele mai multe ori, se întrepătrund reciproc:

1. *Analiza*. Se presupune în general problema rezolvată şi, prin construcţii ajutătoare, se stabilesc anumite proprietăți ale figurii ce trebuie obținută.
2. *Construcția sau sinteza* stabileşte modul în care utilizăm instrumentele pentru a putea construi figura cerută, folosind proprietățile aflate anterior.
3. *Demonstrarea*. Toate construcţiile făcute trebuie justificate (nu se reduce totul doar la realizarea unui desen), arătând că elementele obținute satisfac proprietățile enunțate.
4. *Discuția*. Se pun în evidență condiții asupra datelor problemei pentru ca să existe soluții şi se estimează numărul acestora. Se pot realiza analogii, generalizări ale problemei.

11.5.1. Construcţii geometrice fundamentale

Începând cu clasa a VI-a, elevii sunt familiarizați cu modul de construcție a mediatoarei unui segment, a bisectoarei unui unghi, al unui triunghi când se cunosc anumite elemente ale sale, etc. În continuare vom menționa alte astfel de construcţii uzuale.

Pentru ***construcția unui unghi***, atunci când se cunoaşte măsura sa în grade, folosim deseori la clasă raportorul, chiar dacă el nu este un instrument acceptat în construcțiile de care discutăm. La fel, cu ajutorul echerelor se pot construi unghiuri de măsură particulară unele direct (30°, 45°, 60°, 90°), iar altele prin suprapunere (75°, 15°, 105°).

Dacă măsura unghiului în grade nu este cunoscută, pentru a construi un unghi congruent cu un unghi $\measuredangle xOy$ dat în punctul O' al unei drepte orientate *d,* folosim rigla şi compasul.

Pentru aceasta, se trasează mai întâi un arc de cerc cu centrul în O care taie laturile unghiului $\measuredangle xOy$ în punctele A şi B (Fig. 11.5.1.).

Cu aceeaşi deschidere în compas, se trasează un arc de cerc cu centrul în O' care va intersecta dreapta d în A'.

Arcul de cerc cu centrul în A' şi raza AB va tăia cercul trasat anterior în punctul B', unic determinat, dacă ținem cont de orientarea planului (altfel, se obțin două puncte în semiplanele determinate de dreapta d).

Din construcție, deoarece punctul B' se află la intersecția celor două cercuri, $O'B' = OB = = OA = O'A'$, $AB = A'B'$. Astfel, $\Delta OAB \equiv \Delta O'A'B'$, deci:

$$\measuredangle B'O'A' \equiv \measuredangle BOA.$$

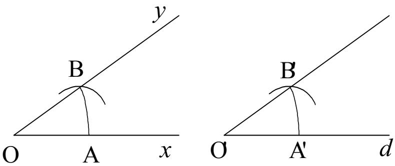


Fig. 11.5.1.

Între ***cazurile de construcție ale unui triunghi*** şi cazurile de congruență ale acestora există o strânsă legătură: în general, se poate construi un singur triunghi când se dau trei elemente al sale, corespunzând unuia din cazurile de congruență.

Să presupunem însă că dorim să construim un triunghi ABC cunoscând: $a = 3$ cm, $c = 5$ cm şi $m(\measuredangle A) = 20°$. Trasăm segmentul $AB = c$ şi în A se construieşte un unghi cu măsura de 20° (Fig. 11.5.2.). Din B se trasează apoi un arc de cerc de rază egală cu a. Fie BD înălțimea dusă din B. Cum $BD = c \sin 20° \approx 1{,}71\,\text{cm} < a$, cercul intersectează cealaltă latură a unghiului A în două puncte, C şi C'. Se observă că, în acest caz, construcția nu este unică, ambele triunghiuri ABC şi ABC' satisfăcând condițiile inițiale.

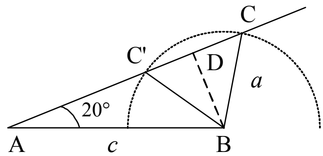


Fig. 11.5.2.

Dacă se alege însă $m(\measuredangle A) = 80°$, cercul cu centrul în B şi de rază a nu intersectează cealaltă latură a unghiului A şi deci, nu există niciun triunghi care să satisfacă condiția din enunț ($BD \approx 4{,}92 > a$).

Putem generaliza acest exemplu la următoarea problemă:

Să se construiască un triunghi când se cunosc: $BC = a$, $AB = c$ şi $m(\measuredangle A) = \alpha$.

Pentru construcție, pornim cu segmentul $AB = c$. Apoi, construim semidreapta $[AX$ astfel încât $m(\measuredangle XAB) = \alpha$ şi cercul $C(B, a)$. Pentru a realiza construcția triunghiului, trebuie să stabilim când $[AX$ intersectează cercul şi câte puncte de intersecție există.

1. Dacă $\alpha \geq 90°$ (Fig. 11.5.3.) ținând cont că, într-un triunghi, la latura mai mare se opune unghiul mai mare, $[AX$ intersectează cercul într-un singur punct dacă şi numai dacă $a > c$.

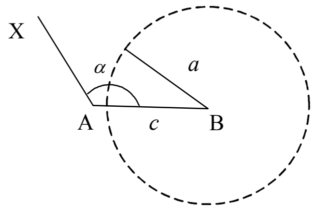


Fig. 11.5.3.

2. Pentru $\alpha < 90°$ (Fig. 11.5.4.) construim perpendiculara BD pe AX. Obținem că $BD = c \sin \alpha$, deci segmentul $[BD]$ este determinat de datele din ipoteză. Comparând distanța de la punctul B la dreapta AX cu raza cercului, avem posibilitățile:

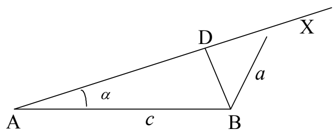


Fig. 11.5.4.

- Dacă $a < BD$, cercul $C(B, a)$ nu intersectează AX, deci nici $[AX$.

- Dacă $a = BD$, problema are soluție unică triunghiul ABD deoarece $C(B, a) \cap [AX = \{D\}$.

- Dacă $BD < a < c$ (Fig. 11.5.5.), atunci problema admite două soluții: triunghiurile ABC_1 şi ABC_2.

- Dacă $BD < a$ şi $a \geq c$, AX intersectează cercul $C(B, a)$ în două puncte dintre care convine doar punctul C situat pe $[AX$ şi astfel, soluția este unică în acest caz (Fig. 11.5.6.).

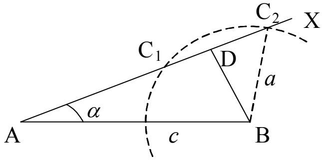


Fig. 11.5.5.

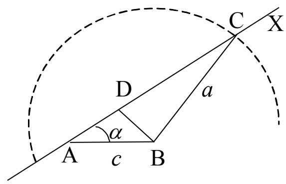


Fig. 11.5.6.

Pentru ***ridicarea unei perpendiculare pe o dreaptă într-un punct dat***, putem proceda astfel:

Fie d o dreaptă şi $M \in d$. Pentru a ridica o perpendiculară în punctul M pe dreapta d, din M se descrie un cerc cu o rază oarecare r (Fig. 11.5.7.). Acest cerc intersectează dreapta d în punctele A şi B. Din A şi din B se trasează câte un cerc de rază egală, mai mare decât r, iar un punct de intersecţie al lor îl notăm cu N. Perpendiculara căutată este MN deoarece triunghiurile AMN şi BMN sunt congruente (cazul LLL).

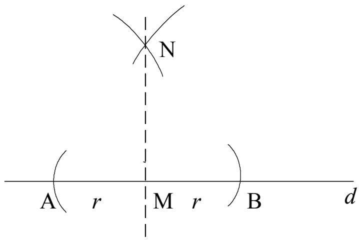


Fig. 11.5.7.

Fie acum M, un punct din plan care nu se află pe dreapta d. Pentru ***a coborî o perpendiculară pe dreapta*** d ***din punctul*** M, trasăm mai întâi un arc de cerc din M de rază suficient de mare pentru a intersecta dreapta d în punctele A şi B (astfel $MA = MB$) (Fig. 11.5.8.). Mediatoarea MN a segmentului AB este perpendiculara căutată.

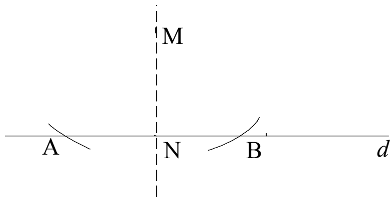


Fig. 11.5.8.

Dacă dorim ***să trasăm o paralelă*** d' ***la dreapta*** d, ridicăm perpendiculare în două puncte arbitrare A şi B ale dreptei d. Pe acestea se marchează la aceeaşi distanţă şi de aceeaşi parte a lui d câte un punct. Fie acestea A' şi B'.

Dreapta $A'B'$ este paralelă cu d (Fig. 11.5.9.).

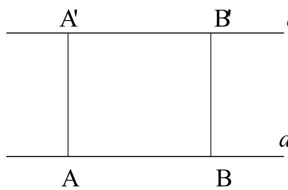


Fig. 11.5.9.

Pentru ***împărţirea unui segment*** AB într-un raport $r = \dfrac{m}{n}$ dat (număr raţional), notăm cu M punctul de diviziune. Astfel,

$\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} = \frac{m}{n}$. Dacă $r < 0$, M se află între extremitățile segmen-tului; în caz contrar, M este exterior segmentului. Trasăm prin A şi B două drepte paralele ca în figura 11.5.10.. Apoi, construim segmentele AC, BD şi BE astfel încât: $AC = |m|$ şi $BD = BE = |n|$ unități de lungime (oarecare).

Ținând cont de asemănarea triunghiurilor, obținem că intersecția dreptei AB cu CD este punctul de diviziune interioară M_i iar M_e, punctul de intersecție dintre AB şi CE, este punctul de diviziune exterioară. În acest caz,

$$\frac{\overline{M_i A}}{\overline{M_i B}} = -\frac{\overline{M_e A}}{\overline{M_e B}}.$$

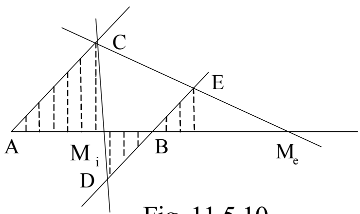


Fig. 11.5.10.

Spunem atunci că punctele M_i şi M_e sunt *conjugate* în raport cu A şi B. Relația mai poate fi scrisă şi sub forma $\frac{\overline{AM_i}}{\overline{AM_e}} = -\frac{\overline{BM_i}}{\overline{BM_e}}$, deci punctele A şi B sunt conjugate în raport cu M_i şi M_e. Vom spune că punctele A, B, M_i şi M_e formează o ***diviziune armonică*** (o împărțire armonică a dreptei). Diviziunea armonică era cunoscută încă din şcoala lui Pitagora.

Să considerăm că punctele A, B, C, D formează o diviziune armonică. Obținem:

$$\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} = -\frac{\overline{DA}}{\overline{DB}} \Leftrightarrow \overline{AD} \cdot \left(\overline{AB} - \overline{AC}\right) = \overline{AC} \cdot \left(\overline{AD} - \overline{AB}\right).$$

De aici rezultă

$$\frac{2}{\overline{AB}} = \frac{1}{\overline{AD}} + \frac{1}{\overline{AC}},$$

relație datorată lui Maclaurin (1748) care exprimă faptul că segmentul AB este ***medie armonică*** a segmentelor AC şi AD.

Arcul capabil de un unghi $\measuredangle xOy$ ***subîntins de segmentul*** $[AB]$ este locul geometric al punctelor *M* dintr-un semiplan *S* determinat de dreapta *AB* astfel încât $\measuredangle AMB \equiv \measuredangle xOy$.

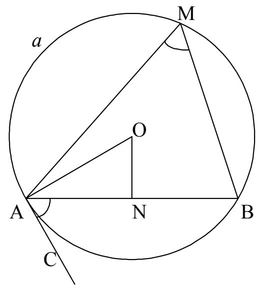


Fig. 11.5.11.

Pentru a realiza construcţia acestuia, trasăm segmentul $[AB]$ şi construim în celălalt semiplan un unghi $\measuredangle BAC$ congruent cu unghiul dat. Se ridică apoi în punctul *A* perpendiculara pe *AC* şi se trasează mediatoarea segmentului $[AB]$. Cele două se intersectează în punctul *O*. Din congruenţa triunghiurilor *AON* şi *ONB* rezultă: $OA = OB$ şi

$$m(\measuredangle OAN) = m(\measuredangle OBN) = 90° - m(\measuredangle xOy).$$

Astfel, $m\left(\measuredangle AOB\right) = 2m(\measuredangle xOy)$ şi *AC* este tangentă la cercul cu centrul în *O* şi rază *OA* (din $OA = OB$, *B* se află şi el pe acest cerc).

Atunci, pentru orice punct *M* aflat pe arcul α al cercului,

$$m(\measuredangle AMB) = \frac{1}{2} m(\measuredangle AOB) = m(\measuredangle xOy).$$

Dacă $m(\measuredangle xOy) < 90°$, arcul α este „cel mare”; α este semicerc pentru $m(\measuredangle xOy) = 90°$, iar dacă $m(\measuredangle xOy) > 90°$, α este „arcul mic” deschis cu extremităţile în *A* şi *B* (centrul *O* nu se mai află în semiplanul *S*).

În cazul în care excludem în enunţ condiţia ca punctul *M* să facă parte din semiplanul *S*, locul geometric este reuniunea arcelor α şi α', unde α' este arcul simetric lui α în raport cu dreapta *AB.* Cele două arce se află pe acelaşi cerc dacă şi numai dacă $O \in AB$, condiţie echivalentă cu $m(\measuredangle xOy) = 90°$.

Pentru a construi ***tangentele dintr-un punct exterior*** *M* ***la cercul*** *C*(*O*, *r*), trasăm în mijlocul *N* al segmentului *OM* un cerc de rază *MN* (Fig. 11.5.12.). Acesta intersectează cercul iniţial în punctele *A* şi *B*. Cum *OM* este diametru, unghiurile $\measuredangle OAM$ şi $\measuredangle OBM$ sunt drepte, deci *MA* şi *MB* sunt tangentele căutate.

Dacă considerăm acum punctul M pe cerc (Fig. 11.5.13.), pentru a construi ***tangenta la cerc în punctul*** M ***al cercului*** prelungim raza în punctul de contact în afara cercului cu un segment de lungime egală cu raza. Atunci, cum M este mijlocul segmentului OC, tangenta în M la cerc este de fapt mediatoarea segmentului.

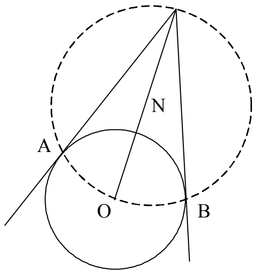


Fig. 11.5.12.

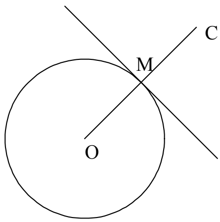


Fig. 11.5.13.

Fie două cercuri exterioare $C(O_1, r_1)$ şi $C(O_2, r_2)$ cu $r_1 < r_2$. Vom construi ***tangentele exterioare la ambele cercuri***.

Trasăm mai întâi un cerc ajutător cu centrul în punctul O_2, de rază $r_2 - r_1$ şi construim tangentele din O_1 la acest cerc.

Obţinem $O_1C = O_1D$ iar unghiurile $\measuredangle O_1CO_2$ şi $\measuredangle O_1DO_2$ sunt drepte. Construim, cum am arătat anterior, paralelele A_1A_2 şi B_1B_2, la distanţa r_1, la aceste tangente.

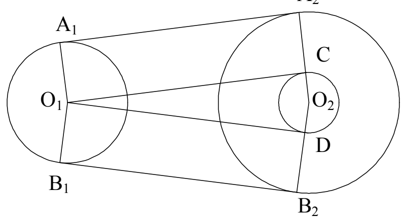


Fig. 11.5.14.

Atunci, $O_1A_1A_2C$ şi $O_1B_1B_2D$ sunt dreptunghiuri şi rezultă că tangentele exterioare la cercurile date sunt dreptele A_1A_2 şi B_1B_2.

Dacă $r_1 = r_2$, construcţia se face direct, fără a mai trasa cercul ajutător.

Considerăm cercurile $C(O_1,r_1)$ şi $C(O_2,r_2)$. Pentru a trasa ***tangentele interioare la aceste două cercuri*** (dacă ele există, deci cercurile sunt exterioare), construim un cerc cu centrul în punctul O_2, de rază r_1+r_2 şi ducem tangentele din O_1 la acest cerc. Astfel $O_1M=O_1N$ şi triunghiurile O_1MO_2 şi O_1NO_2 sunt dreptunghice în *M*, respectiv *N*. Construim apoi paralelele A_1A_2 şi B_1B_2 la distanţa r_1, la aceste tangente (Fig. 11.5.15.). La fel ca înainte, se arată imediat că acestea sunt tangentele căutate.

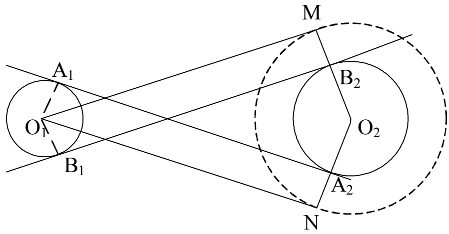


Fig. 11.5.15.

11.5.2. Numărul de aur

Spunem că un punct *M* împarte un segment *AB* în ***medie şi extremă raţie*** dacă raportul dintre întreg *AB* şi „partea mai mare a segmentului”, *AM*, este egal cu raportul dintre *AM* şi „partea mai mică a segmentului”, *MB*. Denumirea de medie şi extremă raţie provine din relaţia $\frac{\overline{AM}}{\overline{AB}}=\frac{\overline{MB}}{\overline{AM}}\Leftrightarrow\frac{\overline{AM}+\overline{AB}}{\overline{AB}}=\frac{\overline{AB}}{\overline{AM}}$, care arată că $\overline{AB}$ este medie proporţională (medie) a extremilor $\overline{AM}$ şi $\overline{AB}+\overline{AM}$.

Relaţia $\frac{\overline{AB}}{\overline{AM}}=\frac{\overline{AM}}{\overline{MB}}$ conduce la determinarea a două puncte *M* şi M' pe dreapta *AB* (*M* este punct interior al segmentului iar M' este punct exterior segmentului, aflat în stânga punctului *A*) pentru care condiţia este verificată.

Obţinem: $\overline{AM}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}\overline{AB}$ şi $\overline{M'A}=\frac{\sqrt{5}+1}{2}\overline{AB}.$

$\Phi = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \approx 1,6180339887...$ poartă numele de ***număr de aur*** şi era cunoscut încă din perioada lui Pitagora. El a fost studiat îndelung de către matematicieni datorită proprietăților sale deosebite. Alături de aceştia, mulți cercetători din domenii diferite cum ar fi arhitectură, pictură, muzică, ştiințele naturii, au realizat studii (majoritatea puternic disputate) în care apar rapoarte (între dimensiunile organismelor vii, în spirala ADN, între componentele sistemului solar, etc.) ce aproximează foarte bine acest număr.

Matemateticianul Mark Barr a propus ca litera Φ (Phi) să simbolizeze numărul de aur, pornind de la prima literă a numelui sculptorului grec Phidias, despre care se spune că a folosit raportul de aur în lucrările sale (statuile din Parthenon).

Raportul în care un punct *M* împarte un segment $[AB]$ astfel încât $\frac{\overline{AB}}{\overline{AM}} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \Phi$ a purtat de-a lungul timpului mai multe denumiri cum ar fi: „***proporția divină***”, (Luca Pacioli), „***secțiunea de aur***” (Leonardo da Vinci), „***secțiune divină***” (Johann Kepler).

Cu $\varphi = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0,6180339887...$ notăm numărul $\frac{1}{\Phi} = \Phi - 1$. Numerele Φ şi $-\varphi$ sunt rădăcinile ecuației $x^2 - x - 1 = 0$ (în unele lucrări de specialitate putem întâlni cele două notații Φ şi φ inversate).

Pentru a determina punctele M şi M' (Fig. 11.5.16.), construim un cerc de rază $\frac{1}{2}AB$ tangent la *AB* în punctul *B*. Notăm cu *O* centrul acestui cerc. Dreapta *AO* intersectează cercul în punctele *S* şi *T*. Trasăm un cerc cu centrul în *A*, de rază *AS*, care intersectează *AB* în punctul M. Cercul cu centrul în *A*, de rază *AT* intersectează semidreapta $AB)$ în M'. Pentru a arăta că aceste puncte sunt cele căutate, ținem cont de puterea unui punct față de cerc. Astfel, $AB^2 = AS \cdot AT$ se poate scrie sub formă echivalentă:

$$\frac{AB}{AT}=\frac{AS}{AB}. \quad (1)$$

Cum $AS = AM$ şi $AB = ST$, obţinem, folosind proporţiile derivate:

$$\frac{AB}{AM}=\frac{AM}{MB}.$$

De asemenea, deoarece $AT = M'A$, relaţia (1) se va scrie:

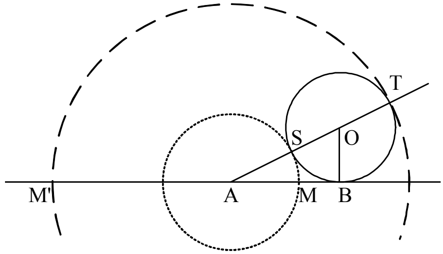


Fig. 11.5.16.

$$\frac{AB}{M'A}=\frac{M'A-AB}{AB} \Leftrightarrow \frac{M'B}{M'A}=\frac{M'A}{AB}.$$

Numărul Φ este strâns legat de *şirul numerelor Fibonacci* $\left(f_n\right)_{n\geq 1}$ definit prin: $f_1 = f_2 = 1$, $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$, $n \geq 3$. Pentru $n \geq 1$, se demonstrează prin inducţie matematică relaţia:

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\Phi^n - \left(-\frac{1}{\Phi}\right)^n\right). \quad (2)$$

De asemenea, se arată uşor că puterile lui Φ verifică relaţia de recurenţă a şirului Fibonacci, adică $\Phi^{n+1} = \Phi^n + \Phi^{n-1}$, pentru $n \geq 1$.

Relaţia $\Phi = 1 + \dfrac{1}{\Phi}$ poate fi extinsă recursiv pentru a obţine fracţia continuă ce reprezintă numărul de aur. Vom obţine: $\Phi = [1;1,1,1,...]$ şi deci, $\varphi = [0;1,1,1,...]$.

Dacă pentru $n \geq 0$ vom calcula numărătorii p_n şi numitorii q_n ai convergentelor (reduselor) fracţiei continue corespunzătoare lui Φ, observăm că $p_n = f_{n+2}$ şi $q_n = f_{n+1}$. Atunci, convergentele verifică relaţiile: $C_0 = 1$ şi, pentru $n \geq 1$,

$$C_n = \frac{p_n}{q_n} = \frac{f_{n+2}}{f_{n+1}} = \frac{f_{n+1}+f_n}{f_{n+1}} = 1 + \frac{1}{\dfrac{f_{n+1}}{f_n}} = 1 + \frac{1}{C_{n-1}}. \quad (3)$$

Relația (3) arată că fiecare din convergentele fracției continue care reprezintă numărul Φ, este egală cu raportul dintre doi termeni succesivi ai şirului Fibonacci, deci:

$$C_0 = \frac{f_2}{f_1} = 1;\ C_1 = \frac{f_3}{f_2} = 2;\ C_2 = \frac{f_4}{f_3} = \frac{3}{2};\ldots$$

Ținând cont de definiția fracțiilor continue infinite, obținem:

$$\Phi = \lim_{n\to\infty} C_n = \lim_{n\to\infty} \frac{f_{n+1}}{f_n},$$

relație ce rezultă şi din (2).

În geometrie, numărul Φ este des întâlnit. De exemplu, un dreptunghi ale cărui laturi sunt în raportul $1:\Phi$ se numeşte ***dreptunghi de aur***. Această denumire provine din faptul că numărul de aur a fost utilizat în crearea multor opere de artă (mult timp dimensiunile care au verificat acest raport au condus la stabilirea unui criteriu al frumuseții ideale a figurilor, inclusiv a corpului omenesc). Pentru a realiza construcția cu rigla şi compasul a acestui tip de dreptunghi, construim pentru început un pătrat *ABCD* cu latura egală cu unitatea. Unim mijloacele *M* şi *N* ale laturilor *AB*, respectiv *DC* (Fig. 11.5.17.).

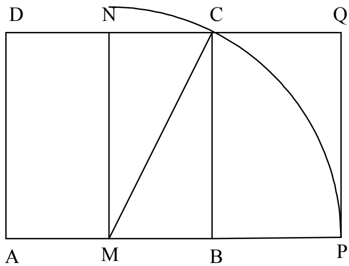


Fig. 11.5.17.

Trasăm un cerc cu centrul în *M*, de rază *MC*, care intersectează *AB* în *P* şi un cerc cu centrul în *N*, de rază *NB* care intersectează *DC* în *Q*, deci *MPQN* este dreptunghi. Din construcție, $MC = \frac{\sqrt{5}}{2}$ şi astfel obținem $AP = \Phi$. Dreptunghiul *APQD* îndeplineşte condițiile cerute.

Din relațiile cunoscute: $\cos\frac{\pi}{5} = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$; $\sin\frac{\pi}{10} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$, deducem uşor următoarele legături:

$$\Phi = 1 + 2\sin\frac{\pi}{10}; \quad \Phi = \frac{1}{2\sin\frac{\pi}{10}}; \quad \Phi = 2\cos\frac{\pi}{5}. \qquad (4)$$

Triunghiul isoscel ABC în care raportul dintre latura de lungime mai mare şi latura mai scurtă este numărul de aur Φ se numeşte ***triunghi de aur***. Dacă ***triunghiul de aur*** este ***ascuțitunghic***, ($AB = AC$), atunci $\frac{AB}{BC} = \Phi$. În acest caz, deoarece:

$$\sin\left(\frac{\measuredangle BAC}{2}\right) = \frac{BC}{2AB} = \frac{1}{2\Phi} = \frac{\Phi - 1}{2} = \sin\frac{\pi}{10}$$

obținem că $m(\measuredangle A) = 36°$. Astfel, $m(\measuredangle B) = m(\measuredangle C) = 72°$.

Considerăm acum un triunghiul isoscel ABC ($AB = AC$) obtuzunghic în care raportul dintre latura de lungime mai mare, BC, şi latura mai scurtă, AB, este numărul de aur : $\frac{BC}{AB} = \Phi$. Atunci,

$$\cos\left(\measuredangle ABC\right) = \frac{BC}{2AB} = \frac{\Phi}{2} = \cos\frac{\pi}{5}$$

şi astfel, $m(\measuredangle B) = m(\measuredangle C) = 36°$ iar $m(\measuredangle A) = 108°$. Un asemenea triunghi îl vom numi ***triunghi de aur obtuzunghic*** (în lucrările de specialitate redactate în limba engleză se diferențiază cele două tipuri de triunghiuri astfel: triunghiul ascuțitunghic apare ca ***golden triangle*** iar ***golden gnomon*** este titulatura folosită pentru cazul triunghiului obtuzunghic).

O piramidă patrulateră regulată $VABCD$ în care apotema este de Φ ori mai mare decât jumătatea laturii bazei, se numeşte ***piramidă de aur***. Să vedem ce caracteristici speciale are această piramidă. Pentru aceasta, notăm $VM = a$, $\frac{AB}{2} = b$ şi înălțimea piramidei $VO = h$. Ştim că $a = b\Phi$ (Fig. 11.5.18.).

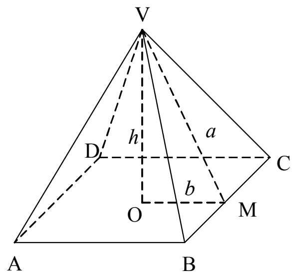


Fig. 11.5.18.

În triunghiul dreptunghic VOM, obținem $h^2 = b^2(\Phi^2 - 1) = b^2\Phi$, de unde, $h = b\sqrt{\Phi}$. Rezultă că laturile b, h, a ale triunghiului VOM sunt în raportul: $1 : \sqrt{\Phi} : \Phi$.

De asemenea, $h^2 = S_{\Delta VBC} = \frac{\Phi}{4} S_{ABCD}$ şi $tg(\measuredangle VMO) = \frac{h}{b} = \sqrt{\Phi}$, adică o față laterală a piramidei face cu planul bazei un unghi de măsură aproximativ egală cu 51°49'38".

Multe piramide egiptene au proprietăți asemănătoare cu tipul de piramidă prezentat. Dintre ele, Marea Piramidă de la Giza (Piramida lui Keops) este uimitor de apropiată de o piramidă de aur: fața laterală are o înclinare de aproximativ 51°52' față de planul bazei iar raportul dintre lungimea apotemei piramidei şi jumătate din lungimea laturii bazei aproximează cu multe cifre zecimale numărul de aur.

Să evidențiem acum câteva situații în care anumite segmente au raportul egal cu Φ.

1. Presupunem triunghiul echilateral ABC înscris în cercul $C(O,R)$. Cu E şi F notăm mijloacele laturilor AB şi AC. Semidreapta $(EF$ intersectează cercul în punctul G (Fig. 11.5.19.). Atunci, $AB = R\sqrt{3}$ iar $EF = \frac{R\sqrt{3}}{2}$. Fie $AD \cap EF = \{H\}$. Din $AD = \frac{AB\sqrt{3}}{2} = \frac{3R}{2}$, obținem:

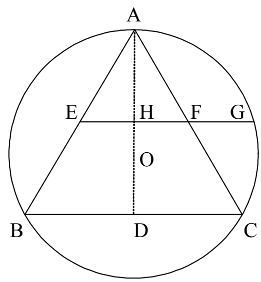


Fig. 11.5.19.

$$AH = \frac{AD}{2} = \frac{3R}{4} \text{ şi } OH = R - \frac{3R}{4} = \frac{R}{4}.$$

În triunghiul dreptunghic OHG, $HG = \frac{R\sqrt{15}}{4}$. Atunci:

$$FG = HG - \frac{EF}{2} = \frac{R\sqrt{3}}{4}(\sqrt{5} - 1) \text{ şi } \frac{EF}{FG} = \frac{2}{\sqrt{5} - 1} = \frac{1}{\varphi} = \Phi.$$

2. Se înscrie un pătrat $ABCD$ în semicercul cercului $C(O,R)$ ca în figura 11.5.20.. Notăm cu G punctul aflat la dreapta lui B obținut prin intersecția dreptei AB cu cercul.

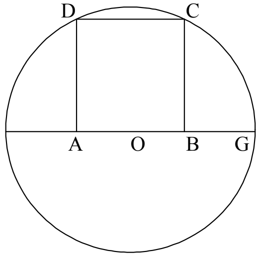


Fig. 11.5.20.

Să arătăm că $\dfrac{AB}{BG}=\Phi.$

Pentru aceasta, din triunghiul dreptunghic OBC, rezultă:

$AB=\dfrac{2R\sqrt{5}}{5}$; $BG=R-\dfrac{R\sqrt{5}}{5}=\dfrac{R(5-\sqrt{5})}{5}.$

De aici, $\dfrac{AB}{BG}=\dfrac{1}{\varphi}=\Phi.$

Relațiile (4) arată că numărul Φ este legat cât se poate de natural de pentagoane, decagoane regulate şi pentagrame (pentagoane regulate stelate).

3. Considerăm un pentagon regulat $ABCDE$ înscris în cercul $C(O,R)$. Notăm cu M şi N intersecțiile lui BE cu AC şi respectiv AD (Fig. 11.5.21.). Atunci, $\dfrac{BN}{NE}=\Phi.$

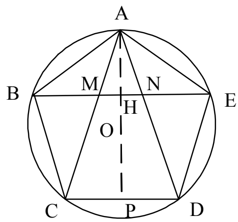


Fig. 11.5.21.

Pentru a demonstra relația, ținem cont că

$$l_5=AB=\frac{R}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}\ .$$

Aplicând în triunghiul dreptunghic OPD teorema lui Pitagora, rezultă:

$PO=\dfrac{R}{4}\left(1+\sqrt{5}\right)$, deci $AP=\dfrac{R(\sqrt{5}+5)}{4}.$

Din triunghiul dreptunghic APD obținem:

$AD=BE=\dfrac{R}{2}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$. Atunci, $AH=\dfrac{R}{4}\left(5-\sqrt{5}\right)$. Vom nota:

$$HE=\frac{AD}{2}=\frac{R}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}=a\ .$$

Din asemănarea triunghiurilor ANH şi ADP,

$$NH = \frac{AH \cdot PD}{AP} = \frac{R}{8}(3-\sqrt{5})\sqrt{10-2\sqrt{5}} = b.$$

În urma calculului, $\frac{a}{b} = 2+\sqrt{5} = 2\Phi+1,$ de unde:

$$\frac{BN}{NE} = \frac{a+b}{a-b} = \Phi.$$

Deoarece $\frac{AD}{CD} = \Phi$ (calculul este asemănător) observăm că triunghiul ACD este un triunghi de aur iar triunghiurile ABC şi ADE sunt obtuzunghice de aur.

4. Considerăm *ABCD*, patrulaterul inscriptibil obţinut dintr-un pentagon regulat prin înlăturarea unui vârf. Notăm cu *a* lungimea laturii pentagonului iniţial şi cu *b* lungimea diagonalei acestuia (Fig. 11.5.22.). Aplicăm teorema lui Ptolemeu:

$$AD \cdot BC + AB \cdot CD = AC \cdot BD.$$

În cazul nostru, $a^2 + ab = b^2$, de unde $\frac{b}{a} = \Phi.$

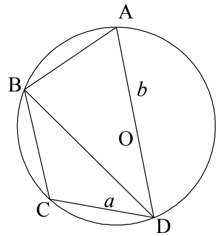


Fig. 11.5.22.

Astfel, am stabilit că *lungimea diagonalei unui pentagon regulat este de* Φ *ori mai mare decât lungimea laturii sale*. Această relaţie poate fi folosită pentru a da o altă demonstraţie problemei anterioare.

5. O pentagramă se obţine unind din 2 în 2 vârfurile unui pentagon regulat (Fig. 11.5.23.). Ţinând cont de relaţiile obţinute la 3., obţinem că fiecare punct de intersecţie a două laturi împarte latura în raportul de aur. Astfel, raportul dintre lungimea laturii şi segmentul de lungime mai mare al laturii, raportul dintre lungimea segmentului mai lung şi cea a celui mai scurt al unei laturi cât şi raportul dintre lungimea segmentului mai scurt şi lungimea segmentului mărginit de cele două puncte de intersecţie (latura pentagonului din

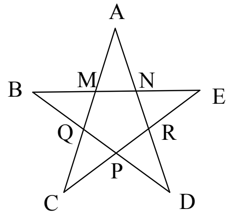


Fig. 11.5.23.

centru) sunt toate egale cu Φ (aceste rapoarte se pot calcula mai uşor exprimând lungimile segmentelor în funcţie de a şi b şi de faptul că $\frac{a}{b} = 2\Phi + 1$, aşa cum am obţinut la 3.). Putem scrie:

$$\frac{BE}{BP} = \frac{BP}{RE} = \frac{RE}{PR} = \Phi.$$

Pentagrama include 10 triunghiuri de aur: 5 ascuţitunghice şi 5 obtuzunghice.

În încheierea acestui paragraf, prezentăm o problemă de geometrie în care proprietatea enunţată este legată de numărul de aur:

Se consideră triunghiul oarecare ABC şi $A' \in (BC)$, $B' \in (AC)$, $C' \in (AB)$ astfel încât $A'B < A'C$, $B'C < B'A$, $C'A < C'B$.

Notăm: $BB' \cap CC' = \{A''\}$, $AA' \cap CC' = \{B''\}$, $AA' \cap BB' = \{C''\}$.

Atunci, următoarele afirmaţii sunt echivalente:

1) $S_{\Delta AB''C'} = S_{\Delta BC''A'} = S_{\Delta CA''B'} = S_{\Delta A''B''C''}$.

2) $\frac{A'C}{A'B} = \frac{B'A}{B'C} = \frac{C'B}{C'A} = \Phi.$

În plus, dacă 1) *sau* 2) *se verifică şi notăm* $S = S_{\Delta ABC}$, *avem*:

$$S_{\Delta AB''C'} = S_{\Delta BC''A'} = S_{\Delta CA''B'} = S_{\Delta A''B''C''} = \frac{S}{6\Phi + 4}.$$

$$S_{BC'B''C''} = S_{CA'C''A''} = S_{AB'A''B''} = \frac{\Phi S}{3\Phi + 2}.$$

Soluţie: Înainte de demonstraţia propriu-zisă a echivalenţei celor două afirmaţii, vom face câteva calcule preliminarii.

Facem notaţiile: $\frac{A'B}{BC} = m$, $\frac{B'C}{CA} = n$, $\frac{C'A}{AB} = p$ şi presupunem că $p \le n \le m$. Din condiţiile ipotezei, $0 < p \le n \le m < \frac{1}{2}$.

Aplicând teorema lui Menelaus pentru triunghiul BCB' tăiat de transversala $AC''A'$, obținem relația:

$$\frac{C''B}{C''B'}\cdot\frac{AB'}{AC}\cdot\frac{A'C}{A'B}=1 \qquad (1)$$

Ținând cont de faptul că:

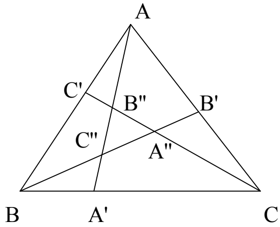


Fig. 11.5.24.

$\frac{B'C}{CA}=n\Rightarrow\frac{B'A}{CA}=1-n\Rightarrow\frac{AC}{AB'}=\frac{1}{1-n}$ şi

$\frac{1}{m}=\frac{BC}{BA'}=1+\frac{A'C}{BA'}\Rightarrow\frac{A'B}{A'C}=\frac{m}{1-m}$, relația (1) devine:

$$\frac{BC''}{C''B'}=\frac{1}{1-n}\cdot\frac{m}{1-m}$$

şi din $\frac{BB'-BC''}{BC''}=\frac{(1-m)(1-n)}{m}$ obținem:

$$BC''=\frac{m}{1-n+mn}BB' \qquad (2)$$

Din condițiile inițiale, $(m-1)(1-n)<0$ şi astfel, $m<1-n+mn$, adică $BC''<BB'$.

Aplicăm acum teorema lui Menelaus triunghiului ABB' tăiat de transversala $C'A''C$ şi obținem:

$$\frac{A''B}{A''B'}\cdot\frac{CB'}{CA}\cdot\frac{C'A}{C'B}=1 \qquad (3)$$

Deoarece $\frac{CA}{CB'}=\frac{1}{n}$ şi $\frac{C'B}{C'A}=\frac{1-p}{p}$, din relația (3) rezultă:

$$\frac{A''B}{A''B'}=\frac{1-p}{np}\Rightarrow\frac{BB'}{A''B}=\frac{1-p+np}{1-p}\Rightarrow BA''=\frac{1-p}{1-p+np}BB' \qquad (4)$$

Din (4) este evident că $BA''<BB'$. Din relațiile (2) şi (4) obținem:

$$BA''-BC''=\left(\frac{1-p}{1-p+np}-\frac{m}{1-n+mn}\right)BB'=$$

$$=\frac{(1-p)(1-n)(1-m)-mnp}{(1-p+np)(1-n+mn)}BB'. \qquad (5)$$

$a=(1-p)(1-n)(1-m)-mnp>0$ deoarece $1-m>m,$ $1-n>n$ şi $1-p>p.$ Astfel, $BA''-BC''>0,$ deci $BA''>BC''.$

A rezultat ordonarea $BC''<BA''<BB'$ şi relaţia (5) devine:

$$C''A''=\frac{(1-p)(1-n)(1-m)-mnp}{(1-p+np)(1-n+mn)}BB'. \qquad (6)$$

Din (4) mai rezultă:

$$A''B'=BB'-BA''=\frac{np}{1-p+np}BB'. \ (7)$$

Folosind (2), (6), (7), prin permutări circulare, obţinem următoarele relaţii (R):

$$BC''=\frac{m}{1-n+mn}BB', \ C''A''=\frac{a}{(1-p+np)(1-n+mn)}BB',$$

$$A''B'=\frac{np}{1-p+np}BB', \ CA''=\frac{n}{1-p+np}CC',$$

$$A''B''=\frac{a}{(1-p+np)(1-m+mp)}CC', \ B''C'=\frac{pm}{1-m+pm}CC',$$

$$AB''=\frac{p}{1-m+mp}AA', \ B''C''=\frac{a}{(1-m+mp)(1-n+mn)}AA',$$

$$C''A'=\frac{mn}{1-n+nm}AA'.$$

Cu ajutorul acestui sistem de relaţii, demonstrăm echivalenţa afirmaţiilor din enunţul problemei.

1) $\Rightarrow$ 2) Din $S_{\Delta AB''C'}=S_{\Delta A''B''C''}$ rezultă că $B''C'\cdot B''A=B''C''\cdot B''A'',$ de unde, folosind relaţiile necesare din sistemul (R), obţinem:

$$a^2=p^2m(1-n+mn)(1-p+pn) \qquad (8)$$

În mod analog, din $S_{\Delta BC''A'}=S_{\Delta A''B''C''}$ şi $S_{\Delta CA''B'}=S_{\Delta A''B''C''}$, prin permutări circulare, rezultă:

$$a^2=m^2n(1-p+pn)(1-m+pm) \qquad (9)$$

$$a^2=n^2p(1-m+pm)(1-n+mn) \qquad (10)$$

Din (8) şi (9) rezultă:

$$p^2 - np^2 + mnp^2 = mn - m^2 n + m^2 np . \qquad (11)$$

Analog, relațiile (8), (9), (10) conduc la:

$$m^2 - m^2 p + m^2 np = np - n^2 p + mn^2 p \qquad (12)$$

$$n^2 - mn^2 + mn^2 p = mp - mp^2 + mnp^2 \qquad (13)$$

Adunând relațiile (11), (12) şi (13) membru cu membru, obținem: $M_1 = M_2$, unde:

$$M_1 = m^2 + n^2 + p^2 - np - pm - mn \qquad (14)$$

$$M_2 = np(p-n) + pm(m-p) + mn(n-m). \qquad (15)$$

$M_1 = \frac{1}{2}\left[(m-n)^2 + (n-p)^2 + (p-m)^2\right] \geq 0$; $M_1 = 0 \Leftrightarrow m = n = p.$

Deoarece $p \leq n \leq m$, putem scrie $n = p + v$ şi $m = p + u + v$, unde $u, v \geq 0$. Atunci, $M_2 = -uv(u+v) \leq 0$.

Astfel, din $M_1 = M_2$ rezultă $M_1 = M_2 = 0$, de unde $m = n = p = x$.

Egalitatea (8) devine:

$$\left[(1-x)^3 - x^3\right]^2 = x^3(1 - x + x^2)^2, \qquad (16)$$

care conduce la ecuația $(x-1)(x^2 - 3x + 1) = 0$. Deoarece $0 < x < \frac{1}{2}$, soluția ecuației este $x = \frac{3-\sqrt{5}}{2} = \frac{1}{\Phi^2}$.

Atunci, din $\frac{A'B}{BC} = \frac{B'C}{CA} = \frac{C'A}{AB} = \frac{1}{\Phi^2}$ şi $\Phi^2 - \Phi - 1 = 0$ rezultă:

$$\frac{A'C}{A'B} = \frac{BC}{A'B} - 1 = \Phi^2 - 1 = \Phi$$

şi, în mod analog, celelalte două egalități.

$2) \Rightarrow 1)$ Din $\frac{BC}{A'B} = \frac{A'C}{A'B} + 1 = 1 + \Phi = \Phi^2$, rezultă $m = \frac{A'B}{BC} = \frac{1}{\Phi^2}$.

În mod analog, rezultă $\frac{B'C}{CA} = \frac{C'A}{AB} = \frac{1}{\Phi^2}$, deci $m = n = p = \frac{1}{\Phi^2}$.

Folosind (R) şi notând $\frac{1}{\Phi^2} = x$, obținem:

$$S_{\Delta AB''C'} = \frac{B''C' \cdot B''A \sin(\measuredangle AB''C')}{2} = \frac{x^3}{2(1-x+x^2)^2} AA' \cdot CC' \sin(\measuredangle AB''C')$$

$$S_{\Delta A''B''C''} = \frac{((1-x)^3 - x^3)^2}{2(1-x+x^2)^4} AA' \cdot CC' \sin(\measuredangle AB''C').$$

Din aceste relații observăm că egalitatea $S_{\Delta AB''C'} = S_{\Delta A''B''C''}$ revine la (16) care se verifică pentru $\frac{1}{\Phi^2} = x$. În mod similar rezultă şi egalitățile $S_{\Delta BC''A'} = S_{\Delta A''B''C''}$ şi $S_{\Delta CA''B'} = S_{\Delta A''B''C''}$.

Am arătat în acest moment că 1) $\Leftrightarrow$ 2). Presupunem acum că se verifică una dintre acestea. Facem notațiile:

$S_{\Delta AB''C'} = S_{\Delta BC''A'} = S_{\Delta CA''B'} = S_{\Delta A''B''C''} = S_0$, $S_{BC'B''C''} = S_1$, $S_{CA'C''A''} = S_2$, $S_{AB'A''B''} = S_3$.

Dacă h_A este înălțimea din A a triunghiului ABC, avem:

$2S_{\Delta ABA'} = 4S_0 + 2S_1 = h_A \cdot A'B$ şi $2S_{\Delta ACA'} = 4S_0 + 2S_2 + 2S_3 = h_A \cdot A'C$.

De aici, $\frac{2S_0 + S_2 + S_3}{2S_0 + S_1} = \frac{A'C}{A'B} = \Phi$ de unde:

$$2S_0\Phi + S_1\Phi = 2S_0 + S_2 + S_3.$$

Cu relația astfel obținută şi cu celelalte două relații analoage, se formează următorul sistem în S_1, S_2, S_3:

$$(S)\begin{cases} -\Phi S_1 + S_2 + S_3 = 2(\Phi - 1)S_0 \\ S_1 - \Phi S_2 + S_3 = 2(\Phi - 1)S_0 \\ S_1 + S_2 - \Phi S_3 = 2(\Phi - 1)S_0. \end{cases}$$

Determinantul sistemului $\Delta = \Phi + 1 = \Phi^2$ fiind nenul, sistemul (S) este cramerian şi vom obține $S_1 = S_2 = S_3 = 2\Phi S_0$.

Din relația $S_1 + S_2 + S_3 + 4S_0 = S$ rezultă, în final, $S_0 = \frac{S}{6\Phi + 4}$ şi $S_1 = S_2 = S_3 = \frac{\Phi S}{3\Phi + 2}$.

11.5.3. Construcții de poligoane regulate

O altă problemă clasică este cea de a ***construi poligoane convexe regulate folosind rigla si compasul***.

Un poligon convex regulat poate fi înscris într-un cerc. Suma unghiurilor unui astfel de poligon este $(n-2)\cdot 180°$, deci fiecare unghi al său are măsura $180° - 360°\frac{1}{n}$. Dacă unim centrul cercului circumscris poligonului regulat cu fiecare vârf al acestuia, se obțin n triunghiuri isoscele congruente în care unghiul din vârf are măsura $360°\frac{1}{n}$. Acest unghi şi raza cercului determină complet poligonul.

Rezultă astfel că a construi un poligon convex regulat cu n laturi presupune a putea împărți un cerc dat în n părți egale.

În antichitate se cunoştea deja modul de construcție a poligoanelor regulate cu 3, 4, 6, 15 laturi.

Pentru $n=6$, latura *hexagonului* este egală cu raza R a cercului în care acesta este înscris. Dacă unim vârfurile din două în două, se va obține un *triunghi echilateral*, a cărui latură este $R\sqrt{3}$. Invers, construind mai întâi un triunghi echilateral şi cercul circumscris lui, putem obține vârfurile unui hexagon regulat înscris în acelaşi cerc: la vârfurile triunghiului adăugăm punctele în care perpendicularele coborâte din centrul cercului pe laturile triunghiului intersectează cercul.

Folosind procedeul de înjumătățire a arcului corespunzător unei laturi, din construcția unui poligon regulat cu n laturi se obține cea a unui poligon regulat cu $2n$ laturi. În cazul nostru, pornind de la construcția unui triunghi echilateral, se pot construi *poligoane regulate cu* 6, 12, 24, ..., $3\cdot 2^n$ *laturi*.

Pentru construcția unui *pătrat* ($n=4$) totul se reduce la a construi două diametre perpendiculare ale unui cerc. Punctele de intersecție ale acestora cu cercul sunt vârfurile pătratului. Prin înjumătățirea laturilor sale se pot obține *poligoane regulate cu* 8, 16, ..., 2^n *laturi*.

Pentru a construi un *decagon regulat*, să observăm mai întâi că, unind centrul cercului circumscris cu fiecare vârf al unui decagon regulat, vom obține triunghiuri isoscele congruente cu triunghiul OA_1A_2 în care: $m(\measuredangle A_1OA_2) = 36°$, $m(\measuredangle OA_1A_2) = 72°$, $A_1A_2 = l_{10}$ şi $OA_1 = OA_2 = R$.

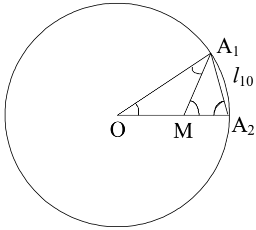


Fig. 11.5.25.

AM, bisectoarea unghiului $\measuredangle OA_1A_2$, determină triunghiurile isoscele OA_1M (cu $OM = MA_1$) şi MA_2A_1 (unde $MA_1 = A_1A_2$).

Din asemănarea triunghiurilor A_1OA_2 şi MA_1A_2, rezultă:

$$\frac{A_1A_2}{MA_2} = \frac{OA_1}{A_1M} \Leftrightarrow \frac{l_{10}}{R - l_{10}} = \frac{R}{l_{10}}.$$

Astfel, lungimea laturii decagonului regulat este soluție a ecuației de gradul al doilea $l_{10}^2 + Rl_{10} - R^2 = 0$ şi obținem $l_{10} = \frac{R}{2}\left(\sqrt{5} - 1\right) = \frac{R}{\Phi}$.

Obținem că *latura decagonului regulat divide raza în medie şi extremă rație* (adică este cel mai mare segment al razei *R* împărțite conform secțiunii de aur).

Pentru construcția unui *decagon regulat convex* numai cu rigla şi compasul, prezentăm o metodă simplă oferită de Ptolemeu.

Ținând cont de cele demonstrate, trasăm diametrul *AB* al unui cerc considerat inițial şi raza *OC* perpendiculară pe acesta. Fie *D* mijlocul razei *AO*. Lungimea segmentului *CD* se obține aplicând teorema lui Pitagora în triunghiul *DOC* ca fiind egală cu $\frac{R\sqrt{5}}{2}$. Arcul de cerc cu centrul în *D* de rază *CD* intersectează *OB* în punctul *M* şi $OM = l_{10}$.

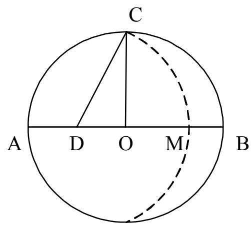


Fig. 11.5.26.

Un *pentagon regulat* se obține, de cele mai multe ori, unind din 2 în 2 vârfurile unui decagon regulat. O metodă directă de construcție a unui pentagon regulat rezultă din construcția anterioară şi anume:

Construim un cerc $C(O,R)$ şi considerăm un diametru AB. Perpendiculara ridicată din O pe AB intersectează cercul în M. Trasăm un cerc cu centrul în C, mijlocul razei OB, de rază MC care intersectează $[AB]$ în D (Fig. 11.5.27.). Atunci,

$$MC = CD = \frac{1}{2}R\sqrt{5} \text{ şi } OD = \frac{1}{2}R\left(\sqrt{5}-1\right).$$

Aplicând teorema lui Pitagora în triunghiul dreptunghic MOD, rezultă:

$$MD = \frac{1}{2}R\sqrt{10-2\sqrt{5}} = l_5.$$

Construim acum cercul cu centrul în M, de rază MD; notăm cu N şi R punctele în care acesta intersectează cercul inițial. Obținem:

$$MN = MR = MD.$$

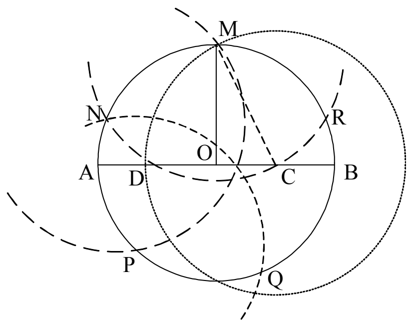


Fig. 11.5.27.

Procedând analog, notăm cu P şi Q punctele de intersecție ale cercului inițial cu cercurile $C(N,MN)$ şi $C(P,MR)$. În final, $MNPQR$ este pentagonul regulat căutat.

Pornind de la decagonul regulat, rezultă şi construcția poligoanelor regulate cu $2^n \cdot 5$ laturi, n număr natural.

Am arătat că dacă putem construi un poligon regulat cu n laturi, reuşim să construim şi poligonul regulat care are $2^k n$ laturi ($k \in \mathbb{N}$) şi invers.

Rezultă imediat că, dacă este posibil să se construiască un poligon regulat cu mn laturi, se pot construi şi poligoanele regulate cu m şi respectiv n laturi, unind vârfurile din n în n, sau din m în m.

Să considerăm acum că putem construi cu rigla şi compasul poligoane regulate cu m şi n laturi unde, de această dată, numerele m şi n sunt relativ prime. Arătăm că, în acest caz, folosind rigla şi compasul, se construieşte şi poligonul regulat cu mn laturi.

Unghiurile la centru ale celor trei poligoane regulate sunt:

$$\frac{2\pi}{m},\ \frac{2\pi}{n},\ \frac{2\pi}{mn}.$$

Deoarece $(m,n)=1$, conform relațiilor lui Bézout, există numerele întregi a şi b astfel încât $am+bn=1$ (cum m şi n sunt naturale, doar unul dintre a şi b este întreg negativ). Relația aceasta mai poate fi scrisă sub forma: $b\cdot\frac{2\pi}{m}+a\cdot\frac{2\pi}{n}=\frac{2\pi}{mn}$ şi oferă modul în care se construieşte unghiul $\frac{2\pi}{mn}$, cunoscând unghiurile $\frac{2\pi}{m}$ şi $\frac{2\pi}{n}$.

Pentru a înțelege mai uşor acest mod de construcție, considerăm următorul exemplu:

Ştim să construim triunghiul echilateral ($m=3$) şi pentagonul regulat ($n=5$). Folosind observația anterioare, să construim pentadecagonul regulat (cu $mn=15$ laturi). Rezolvând ecuația $3a+5b=1$ (sau aplicând algoritmul extins al lui Euclid), obținem $a=2,\ b=-1$ (soluția nu este unică; alegem una care are formă simplă).

Atunci, $2\cdot\frac{2\pi}{5}-\frac{2\pi}{3}=\frac{2\pi}{15}$, adică unghiul la centru al pentadecagonului este egal cu diferența dintre dublul unghiului la centru al pentagonului şi unghiul la centru al triunghiului echilateral. Altfel spus, pentru a construi latura pentadecagonului regulat, dintr-un punct al cercului trasăm (într-un anumit sens) de două ori latura pentagonului şi apoi, din punctul obținut, purtăm în sens invers, o dată, latura triunghiului echilateral.

Ținând cont de cele prezentate şi de teorema fundamentală a aritmeticii, rezultă că trebuie cercetată doar posibilitatea construirii poligoanelor regulate care au numărul de laturi un număr prim sau o putere a unui număr prim.

În 1796, la vârsta de 19 ani, Gauss a demonstrat că se poate construi cu rigla şi compasul un poligon regulat cu 17 laturi. Conform teoriei sale, el reduce împărțirea cercului în n părți egale la rezolvarea ecuației binome $x^n-1=0$ deoarece soluțiile acesteia (rădăcinile de ordinul n ale unității) sunt afixele punctelor din plan, aflate la distanțe egale pe cercul unitate cu centrul în originea axelor. În celebra sa lucrare „Disquisitiones Arithmeticae”, el rezolvă complet problema generală a determinării numerelor naturale n pentru care se pot construi cu rigla şi compasul poligoane regulate cu n laturi.

Astfel, el demonstrează că este posibil să construim cu rigla şi compasul poligoanele convexe regulate cu n laturi dacă şi numai dacă $n = 2^k \cdot p_1 p_2 ... p_m$, unde $k \in \mathbb{N}$ iar toate numerele p_i sunt numere prime Fermat distincte (reamintim că un număr Fermat este un număr de forma $2^{2^t} + 1$ unde t este număr natural). În memoria importantei descoperiri făcute, pe piatra sa funerară este desenat un poligon regulat cu 17 laturi.

În încheierea scurtei tratări a problemei de construcţie cu rigla şi compasul a poligoanelor regulate mai facem o observaţie, considerată de noi importantă şi care, dacă nu este subliniată, poate conduce la grave greşeli de interpretare a rezultatelor acestui capitol.

În cadrul construcţiilor grafice uzuale care se predau la orele de desen tehnic sunt prezentate în manual procedee de construcţie cu rigla şi compasul pentru poligoane regulate cu 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10 şi 11 laturi. Deoarece numerele 7 şi 11 nu sunt numere prime Fermat, apare în mod natural întrebarea: unde s-a greşit? Greşeala constă în omiterea precizării faptului că aceste construcţii oferite pentru cazurile $n = 7$ şi $n = 11$ nu sunt exacte, ele fiind utilizate în desen pornind de la anumite relaţii care aproximează latura respectivului poligon regulat. De exemplu, din relaţia (Heron) $8l_7 \approx 7r$ rezultă $l_7 \approx 0,875$ şi $25l_{11} \approx 14r$ (Hipare) implică $l_{11} \approx 0,56$.

11.5.4. Probleme rezolvate

1. *Să se construiască un triunghi ABC, cunoscând poziţia simetricelor M, N, P, ale ortocentrului său H faţă de laturile sale.*

Soluţie. Analiza. Presupunem problema rezolvată. Fie A', B' şi C' picioarele înălţimilor triunghiurilor şi M, N, P simetricele lui H

față de laturile BC, AC, respectiv, AB. În triunghiul HMN, $A'B'$ este linie mijlocie, deci $A'B' \parallel MN$.

De asemenea, din $AM \perp BC$ și $HA' = A'M$, rezultă că dreapta BC este mediatoarea segmentului HM.

În mod analog, $A'C' \parallel MP$, AB este mediatoarea segmentului PH și $B'C' \parallel NP$, AC mediatoarea lui HN.

Știm că înălțimile unui triunghi sunt bisectoarele unghiurilor triunghiului ortic corespunzător. În cazul nostru, $A'A$, $B'B$ și $C'C$ sunt bisectoarele unghiurilor triunghiului $A'B'C'$.

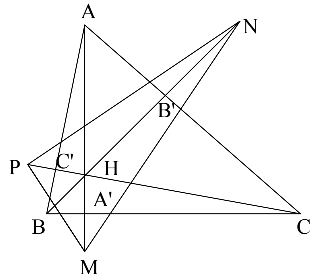


Fig. 11.5.28.

Construcția. Vom construi bisectoarele unghiurilor triunghiului MNP care sunt concurente în H. Construim mediatoarele segmentelor HM, HN, HP. Punctele de intersecție ale acestor drepte sunt vârfurile triunghiului căutat (notațiile sunt corespunzătoare figurii 11.5.28.).

Demonstrația construcției. Patrulaterul $C'HA'B$ fiind inscriptibil, obținem $\measuredangle C'A'H \equiv \measuredangle C'BH$. Deoarece MH este bisectoarea unghiului $\measuredangle PMN$, $C'A' \parallel PM$ iar $A'B' \parallel MN$, rezultă $\measuredangle C'A'H \equiv \measuredangle HA'B'$. Deoarece $HA'CB'$ este și el inscriptibil, $\measuredangle HA'B' \equiv \measuredangle HCB'$. Astfel,

$$\measuredangle HCA \equiv \measuredangle C'BH. \quad (1)$$

În mod analog, rezultă:

$$\measuredangle HAC \equiv \measuredangle HC'B' \equiv \measuredangle HC'A' \equiv \measuredangle HBA' \qquad (2)$$

$$\measuredangle A'CH \equiv \measuredangle HB'A' \equiv \measuredangle C'B'H \equiv \measuredangle C'AH \qquad (3)$$

Din (1) și (2) avem:

$$m(\measuredangle HAC) + m(\measuredangle HCA) = m(\measuredangle C'BA') = 180° - m(\measuredangle C'HA').$$

Cum $m(\measuredangle AHC) = 180° - [m(\measuredangle HAC) + m(\measuredangle HCA)]$, obținem;

$$m(\measuredangle AHC) = m(\measuredangle C'HA'). \quad (4)$$

Ținând cont de (3), $\measuredangle A'CH \equiv \measuredangle C'AH$. Astfel, triunghiurile dreptunghice $AC'H$ și $HA'C$ sunt asemenea, deci

$$\measuredangle AHC' \equiv \measuredangle A'HC. \quad (5)$$

Din relațiile (4) şi (5) va rezulta $m(\measuredangle AHC') + m(\measuredangle C'HA') = 180°$ şi $m(\measuredangle C'HA) + m(\measuredangle AHC) = 180°$, de unde $H \in AA' \cap CC'$ şi astfel, H este ortocentrul triunghiului ABC.

2. *Fie un triunghi ABC şi notăm cu A' mijlocul laturii BC. Bisectoarea interioară a unghiului B intersectează mediana AA' în punctul E iar mediatoarea laturii AC intersectează aceeaşi mediană în F. Să se precizeze modul de construcție al triunghiului ABC atunci când se cunoaşte poziția punctelor A, E, F şi A'.*

Soluție: Vom considera în rezolvare două situații: când E este mijlocul segmentului AA' (Fig. 11.5.29.) şi cazul complementar, în care putem discuta de conjugatul punctului E (Fig. 11.5.30.).

Analiza. Presupunem problema rezolvată. 1) Dacă E este mijlocul lui AA', triunghiul ABA' este isoscel iar $BE \perp AA'$. Fie N pe AE astfel încât A' este mijlocul segmentului EN (punctul N este fix). Triunghiurile BEA' şi $A'NC$ sunt congruente şi astfel $CN \perp AA'$, adică punctul C se găseşte la intersecția cercului $C(F, FA)$ cu perpendiculara dusă din N pe AA'.

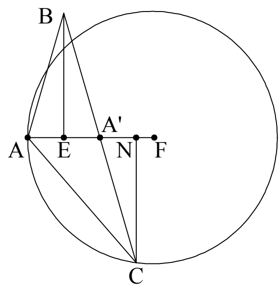


Fig. 11.5.29.

2) Dacă $AE \neq EA'$, bisectoarea exterioară a unghiului B intersectează AA' în punctul E' care este conjugatul punctului E față de punctele A şi A'. B se află pe cercul de diametru EE' ($m(\measuredangle E'BE) = 90°$). Notăm cu O centrul acestui cerc şi cu O' simetricul lui O față de punctul A'. Rezultă astfel că triunghiurile $BA'O$ şi $CA'O'$ sunt congruente. De aici, $O'C = BO$, adică punctul C se află pe cercul de centru O' şi rază egală cu raza primului cerc. Din $FC = FA$

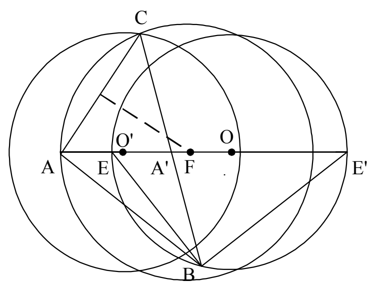


Fig. 11.5.30.

obținem că C se găsește și pe cercul cu centrul în F, de rază AF.

Construcția. 1) E este mijlocul lui AA'. Construim N pe AE astfel încât A' este mijlocul segmentului EN. Notăm cu C punctul de intersecție dintre cercul $C(F, FA)$ și perpendiculara dusă din N pe AA'. Pentru a determina vârful B al triunghiului, prelungim $(CA'$ și alegem B astfel încât A' să fie mijlocul lui BC. Pentru a exista punctul C, din datele problemei trebuie să rezulte $NF < AF$.

2) Construim conjugatul armonic E' al punctului E față de punctele A și A' (vezi împărțirea unui segment într-un raport dat) și apoi $C(O, r)$ unde $OE = OE' = r$.

Determinăm apoi O', simetricul lui O față de A' și construim cercurile $C(O', r)$ și $C(F, FA)$. Fie C un punct de intersecție al acestor două cercuri; punctul B se va afla ca fiind simetricul lui C față de A'.

Facem observația că, pentru a exista triunghiul ABC, cele două cercuri $C(O', r)$ și $C(F, FA)$ trebuie să se intersecteze; considerăm că punctele A, E, F și A' sunt alese astfel încât să aibă loc relația:

$$|EO - FO'| \leq FA \leq EO + O'F.$$

Demonstrația construcției. 1) Deoarece $C \in C(F, FA)$, F aparține mediatoarei laturii AC a triunghiului. Rămâne să arătăm că BE este bisectoarea unghiului $\measuredangle ABC$. Din $EA' = A'N$ și $BA' = A'C$ rezultă congruența triunghiurilor BEA' și $A'CN$. Astfel, $BE \perp AA'$. Deoarece în acest caz $AE = EA'$, triunghiul ABA' ese isoscel, deci BE este și bisectoarea unghiului $\measuredangle ABC$. 2) Cum $AF = CF$, F se află pe mediatoarea laturii AC. Pentru că $BA' = A'C$ și $O'A' = A'O$, triunghiurile $O'A'C$ și $OA'B$ sunt congruente, deci $BO = O'C = r$. Astfel, punctul B se află pe cercul $C(O, r)$, deci $m(\measuredangle EBE') = 90°$. Dacă ținem cont și de relația $\dfrac{\overline{EA}}{\overline{EA'}} = -\dfrac{\overline{E'A}}{\overline{E'A'}}$ (care precizează că punctele A, E, A' și E' sunt conjugate armonic), rezultă (la fel ca în demonstrația problemei 4 de la 11.4.), că BE și BE' sunt bisectoarele (interioară și exterioară) unghiului $\measuredangle ABC$.

3. *Să se construiască centrul O al unui cerc doar cu compasul.*

Soluție. (*Construcția şi demonstrația*). Fie M un punct al cercului. Construim un cerc de centru M şi rază r aleasă astfel încât cercul inițial să aibă puncte comune cu $C(M,r)$. Fie acestea A şi B. Atunci, $MA = MB = r.$ Cu centrul în punctele A şi B construim cercuri de rază r care se intersectează în C.

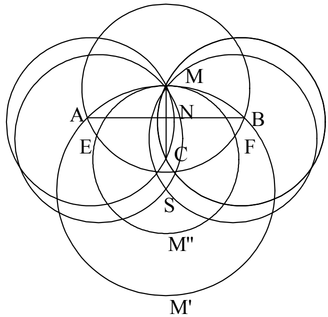


Fig. 11.5.31.

Din $AC = CB = r$ şi $MC \perp AB$, rezultă că $MACB$ este romb. Astfel, $MC = 2MN$ (N este mijlocul coardei AB). Centrul cercului inițial, O, trebuie să se afle pe dreapta MC deoarece diametrul este perpendicular pe coardă şi o înjumătățeşte. Notăm cu E şi F punctele de intersecție ale cercului $C(C,MC)$ cu $C(M,r)$.

Astfel, $EC = MC = FC$ şi $EM = FM = r.$
Din $MC \perp EF$ rezultă $AB \parallel EF$ şi P, mijlocul coardei EF, este coliniar cu punctele M, N şi C. Cercurile $C(E,EM)$ şi $C(F,FM)$ se vor intersecta în punctul S. Atunci, $SE = SF = r$; rezultă $ESFM$ romb şi astfel, $MS = 2MP.$

Deoarece $MO \perp AB$, ştim că centrul O se află pe dreapta MC. Vom arăta că S este chiar centrul O. Pentru aceasta, notăm cu M' punctul de intersecție al cercului inițial cu dreapta MS (este deci diametral opus lui M în acest cerc) şi cu M'', punctul diametral opus lui M în cercul $C(C,MC)$.

În triunghiurile dreptunghice MAM' şi MEM'' aplicând teorema catetei, rezultă relațiile:

$$AM^2 = MN \cdot MM',\ ME^2 = MP \cdot MM''.$$

Dar $AM = ME = r,$ $MC = 2MN$, $MS = 2MP.$ Obținem astfel:
$\frac{MC}{2} \cdot MM' = \frac{MS}{2} \cdot 2 \cdot MC,$ deci $MM' = 2MS.$ Cum MM' este diametru, centrul căutat O este de fapt S.

4. *Să se construiască un patrulater circumscriptibil, cunoscând cercul $C(O,r)$ înscris, un vârf A şi punctul de intersecție al diagonalelor.*

Soluție. Pentru a realiza construcția cerută este necesar să cunoaştem următorul rezultat, datorat lui Newton.

Teoremă (*Newton*) *Fie ABCD un patrulater circumscriptibil şi A', B', C', D' punctele de tangență ale cercului înscris cu laturile patrulaterului* (Fig. 11.5.32.). *Atunci, dreptele AC, BD, $A'C'$ şi $B'D'$ trec prin acelaşi punct N* (*numit punctul lui Newton*).

Demonstrație. Facem notațiile:

$$AC \cap B'D' = \{N\}, \quad \alpha = m(\measuredangle AD'N), \;\; \beta = m(\measuredangle AND').$$

Este evident că $m(\measuredangle AD'N) + m(\measuredangle NB'C) = 180°$. Folosind această relație, aplicăm teorema sinusurilor în triunghiurile NAD' şi $NB'C$ şi obținem:

$$\frac{AD'}{\sin\beta} = \frac{AN}{\sin\alpha}, \;\; \frac{B'C}{\sin\beta} = \frac{NC}{\sin\alpha}.$$

Rezultă: $\dfrac{AD'}{B'C} = \dfrac{AN}{NC}$. (1)

Fie N' punctul de intersecție al dreptelor AC *şi* $A'C'$. Dacă reluăm raționamentul anterior, va rezulta relația:

$$\frac{AN'}{N'C} = \frac{AA'}{CC'}. \qquad (2)$$

Din (1) şi (2), ținând cont de $AA' = AD'$ şi $CC' = CB'$, avem: $\dfrac{AN}{NC} = \dfrac{AN'}{N'C}$, de unde deducem $N = N'$. Am arătat că dreapta AC trece prin punctul de intersecție al segmentelor $[A'C']$ şi $[B'D']$. Pentru a arăta că $N \in BD$ se procedează în mod analog.

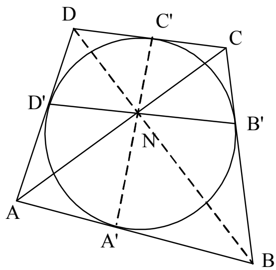


Fig. 11.5.32.

Revenim la problema de construcție propusă.

Construcția. Conform teoremei demonstrate, punctul de intersecție al diagonalelor patrulaterului *ABCD* este *N*, punctul de intersecție

al dreptelor care trec prin punctele de contact ale laturilor opuse cu cercul înscris.
Din vârful A se construiesc tangentele AA' şi AD' la cercul $C(O,r)$. Unim A' şi D' cu N. Dreptele $A'N$ şi $D'N$ intersectează cercul în celelalte puncte de tangenţă ale patrulaterului, C' şi B'. Pentru a determina celelalte vârfuri ale patrulaterului circumscriptibil, realizăm intersecţia dintre tangentele la cerc în B' şi C' şi tangentele AA' şi AD'. Motivarea (*demonstraţia*) construcţiei este oferită de teorema anterioară.

5. *Să se construiască un triunghi cunoscându-i centrul cercului circumscris, direcţiile celor trei mediatoare şi un punct pe una din laturi.*

Soluţie. Analiza. Presupunem problema rezolvată. Fie ABC triunghiul care se construieşte, $A'B'C'$ triunghiul format de mijloacele laturilor triunghiului iniţial, O centrul cercului circumscris şi M un punct pe latura BC (Fig. 11.5.33.).

Observăm că $MA' \perp OA'$, $A'B' \perp OC'$ şi $A'C' \perp OB'$.
Deoarece cunoaştem direcţiile dreptelor OA', OB' şi OC', vom realiza *construcţia* următoare:
Notăm cu d_1, d_2, d_3 cele trei drepte care trec prin O şi au direcţiile precizate în ipoteză. Coborâm perpendiculara din M pe dreapta d_1; fie A' piciorul perpendicularei.
Perpendiculara din A' pe d_3 intersectează d_2 în B' iar perpendiculara coborâtă din A' pe d_2 taie d_3 în C'. Am construit astfel triunghiul $A'B'C'$.

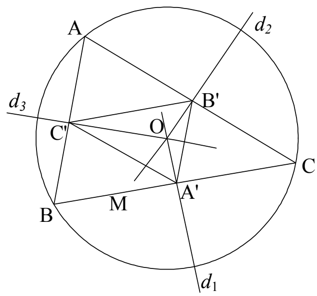


Fig. 11.5.33.

Pentru a obţine vârfurile triunghiului dorit, procedăm după cum urmează: vârful C se obţine ca fiind punctul de intersecţie dintre paralela la $B'C'$ dusă prin A' şi paralela trasată prin B' la $A'C'$; celelalte două vârfuri se construiesc în mod asemănător.

Demonstraţia. Deoarece $A'C' \perp OB'$ şi $A'B' \perp OC'$, O este ortocentrul triunghiului $A'B'C'$, de unde $OA' \perp B'C'$. Deci, $B'C' \perp d_1 \Leftrightarrow MA' \parallel B'C'$ şi astfel, $M \in BC$. Din construcţie şi din relaţia anterioară, $BA'B'C'$ şi $A'CB'C'$ sunt paralelograme, de unde $A'C = BA'$. Am arătat în acest fel că OA' este mediatoare a laturii BC. După un raţionament similar rezultă că O este centrul cercului circumscris triunghiului construit (ABC este triunghiul căutat).

6. *Să se împartă un triunghi ABC în n părţi echivalente.*

Soluţie. Analiza. Notăm cu S aria triunghiului ABC. Considerăm un punct M aflat în interiorul triunghiului şi îl unim cu un vârf, de exemplu A. Dacă trasăm (în mod corespunzător) $n-1$ semidrepte cu originea în M, fiecare dintre acestea va intersecta una din laturile triunghiului realizând o suprafaţă plană de arie $\frac{S}{n}$.

Construcţia şi demonstraţia. Proiectăm punctul M pe latura AC şi notăm cu M' piciorul perpendicularei. Fie N_1 punctul de pe AC ales astfel încât $S_{\Delta AMN_1} = \frac{S}{n}$ (Fig. 11.5.34.).

Astfel, $\frac{1}{2} MM' \cdot AN_1 = \frac{1}{2n} AC \cdot h_B$, unde h_B este înălţimea triunghiului ABC corespunzătoare vârfului B. Obţinem astfel relaţia:

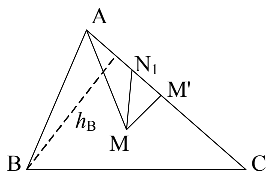


Fig. 11.5.34.

$$\frac{AN_1}{AC} = \frac{h_B}{nMM'} = a.$$

În funcţie de datele problemei şi de alegerea punctului M, valoarea acestui raport conduce la studierea a două cazuri:

1. Dacă $a < 1$, atunci $AN_1 < AC$ şi astfel punctul N_1 este situat între A şi C. Trecem apoi la construcţia unui alt punct N_2 pe latura AC aşa încât $AN_1 = N_1N_2$ (triunghiurile AMN_1 şi N_1MN_2 sunt echi-

valente, de arie $\frac{S}{n}$); vom continua acest tip de construcție de câte ori este posibil (de fiecare dată punctul se află între A şi C, eventual chiar în C).

2. Presupunem că am construit $N_1, N_2, ..., N_k \in [AC]$ ca în primul caz. Procedăm la fel şi determinăm toate punctele de pe latura AB (proiectând M pe AB) astfel încât toate triunghiurile formate au aria egală cu $\frac{S}{n}$. Presupunem că următorul punct N_{k+1} construit pe AC astfel încât $S_{\Delta N_k M N_{k+1}} = \frac{S}{n}$ se află pe prelungirea acesteia (această situație se poate întâmpla chiar la căutarea primul punct, dacă $h_B > nMM'$ sau pe parcurs). $C \in [N_k, N_{k+1}]$) adică $k < \frac{1}{a} < k+1$. Vom uni M cu C şi din N_{k+1} construim o paralelă la MC care intersectează latura BC în R. Vom arăta că CR este segmentul căutat demonstrând că:

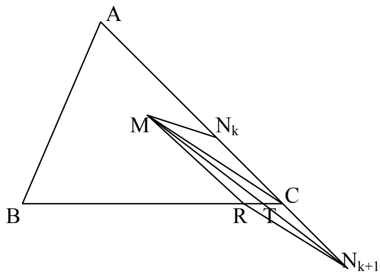


Fig. 11.5.35.

$$S_{N_k MRC} = S_{\Delta N_k M N_{k+1}}.$$

Pentru aceasta, notăm cu T intersecția diagonalelor RC şi MN_{k+1} ale trapezului $RMCN_{k+1}$. Din $MC \parallel RN_{k+1}$ rezultă $S_{\Delta RMC} = S_{\Delta MN_{k+1}C}$ şi, de aici, deducem în final că $S_{N_k MRC} = S_{\Delta N_k M N_{k+1}}$.

7. *Se dau punctele de intersecție M, N, P şi respectiv Q ale laturilor AB, CD, AD şi BC ale dreptunghiului ABCD, cu o dreaptă d. Lungimea laturii AB este p. Să se construiască dreptunghiul ABCD. În ce condiții poate fi rezolvată problema şi câte soluții are?*

Soluție. Analiza. Presupunem problema rezolvată. Paralela dusă prin P la AB intersectează BQ în S. Triunghiul PSQ este dreptunghic, deci S se află pe un cerc de diametru PQ.

Construcția. Construim cercul de diametru PQ şi considerăm un punct S pe unul din semicercuri astfel încât $PS = p$.

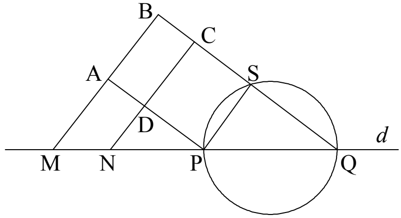


Fig. 11.5.36.

Triunghiul PSQ este dreptunghic în S. Ducem prin M şi N paralele la PS iar prin P şi Q perpendiculare pe acestea, notând punctele de intersecție ca în figură.

Demonstrația. Din construcție, $AB \parallel DC$, $AD \parallel BC$, $AD \perp AB$ şi $AB = DC = PS = p$, deci $ABCD$ este dreptunghiul căutat.

Discuție. Problema are soluție dacă datele problemei permit construcția triunghiului PSQ, deci dacă $p < PQ$. În acest caz, se obțin două triunghiuri PSQ, în cele două semiplane determinate de dreapta d, simetrice față de aceasta.

8. *Se consideră trapezul cu vârful A mobil, iar vârfurile B, C, D fixe. Cercul de diametru BD taie bazele CD şi AB respectiv în E şi F. Dreptele EA şi CF taie pe BD în K şi L.*

1) *Arătați că există relația*:
$$\frac{DB}{DL} + \frac{DB}{DK} - \frac{DE}{CD} - \frac{AB}{DE} = 2.$$

2) *Să se afle poziția punctului A pentru care dreptele DB, CF şi EA sunt concurente.*

3) *Să se construiască trapezul în cazul* 2) *cunoscând suma bazelor, înălțimea şi diagonala BD.*

Soluție. 1) Din asemănarea triunghiurilor KDE şi AKB obținem relația:
$$\frac{AB}{DE} = \frac{AK}{EK} = \frac{BK}{DK} \qquad (1)$$
de unde:
$$\frac{DB}{DK} - \frac{AB}{DE} = \frac{DB - BK}{DK} = \frac{DK}{DK} = 1\,. \ (2)$$

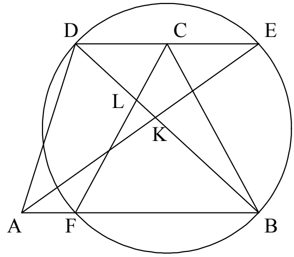


Fig. 11.5.37.

La fel, din $\Delta DCL \sim \Delta FBL$ rezultă:

$$\frac{DC}{BF}=\frac{DL}{BL}=\frac{CL}{FL}. \qquad (3)$$

Deoarece *DFBE* este dreptunghi (*BD* este diametru), $DE = BF$.

Înlocuind în (3), rezultă $\frac{DL}{CD}=\frac{BL}{DE}$. Atunci,

$$\frac{BD}{DL}-\frac{DE}{CD}=\frac{BD-BL}{DL}=\frac{DL}{DL}=1. \qquad (4)$$

Din relațiile (2) şi (4) rezultă afirmația de la primul subpunct.

2) În cazul în care dreptele sunt concurente, $L = K$. Relația (3) devine:

$$\frac{DC}{BF}=\frac{DK}{BK}=\frac{CK}{FK} \qquad (3')$$

Din (1) şi (3'), obținem $\frac{AB}{DE}=\frac{BF}{DC}=\frac{DE}{DC}$, adică $AB=\frac{DE^2}{CD}$. Punctele *B*, C, *D*, *E* fiind fixe, *AB* are lungime constantă.

3) Deoarece $DF \perp AB$, *DF* este înălțimea trapezului de lungime *h*. Mai cunoaştem $a = AB + DC$ şi lungimea diagonalei *BD*.

Pentru ca problema să aibă soluție, $h < BD$. Construim mai întâi cercul de diametru *BD*. Notăm cu *F* un punct de intersecție al acestui cerc cu $C(D,h)$.

Cunoscând ipotenuza *BD* şi cateta *DF*, putem construi triunghiul dreptunghic *BFD*, deci aflăm $BF = DE = b = \sqrt{BD^2 - h^2}$ (punctul *E* se află la intersecția paralelei dusă din *D* la *FB* cu cercul de diametru *BD*). Pentru a determina lungimile laturilor *AB* şi *CD*, formăm sistemul alcătuit din condiția impusă la 2) şi din ipoteză:

$$\begin{cases} b^2 = AB \cdot DC \\ a = AB + DC. \end{cases}$$

Obținem o ecuație de gradul al II-lea al cărei discriminant este:

$$\Delta = a^2 - 4b^2 = (a-2b)(a+2b).$$

Pentru a putea construi trapezul, trebuie impusă condiția $\Delta \geq 0$, adică, $b \leq \frac{a}{2}$ (în cazul egalității obținem dreptunghiul *FDEB*). Cunoscând lungimile celor două laturi, construim celelalte două vârfuri A şi C ale trapezului.

Deoarece $h < BD$, intersecția cercului $C(D,h)$ cu cel de diametru BD este formată din două puncte, F şi F' (ele sunt simetrice față de BD). Vom obține două triunghiuri dreptunghice, BFD şi $BF'D$. În cazul în care considerăm al doilea triunghi, realizând aceeaşi construcție, mai rezultă încă un trapez.

9. *Construiți un trapez cunoscând diagonalele, linia mijlocie şi unul din unghiurile alăturate bazei mari.*

Soluție. Analiza. Presupunem problema rezolvată. Fie $ABCD$ trapezul care trebuie construit cunoscând $m(\measuredangle ABC)$, $\dfrac{BC + AD}{2}$ şi vectorii $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{AC}$. Dacă facem o translație a diagonalei AC de vector $\overrightarrow{AD}$, obținem paralelogramul $ACC'D$.

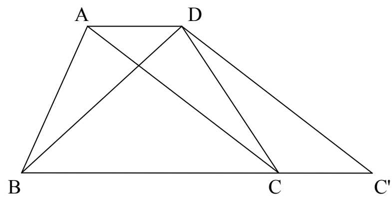


Fig. 11.5.38.

Deoarece $BC' = AD + BC$ putem construi triunghiul BDC' (lungimea lui BC' este dublul lungimii liniei mijlocii).

Construcția. Trasăm segmentul de lungime BC'. Construim în B un vector echipotent cu $\overrightarrow{BD}$ şi în C' unul echipotent cu $-\overrightarrow{AC}$. Ei vor avea aceeaşi extremitate, vârful D al trapezului (din $\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{BC}$ şi $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DC'} - \overrightarrow{CC'}$ rezultă $\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC'}$).

În punctul B, construim în acelaşi semiplan, un unghi $\measuredangle MBC'$ de măsură egală cu cea dată. Punctul A se obține intersectând BM cu paralela dusă din D la BC'. Pentru a rezulta şi poziția punctului C, trasăm o paralelă din A la DC' care va intersecta BC' în C.

Demonstrația. Din analiza problemei, observăm că avem toate datele necesare să construim triunghiul $BC'D$ (bineînțeles, dacă lungimile sunt corect alese). Cum $ADC'C$ este paralelogram, $AD = CC'$ şi $AC = DC'$. În mod evident, trapezul $ABCD$ este cel căutat.

10. *Să se construiască un trapez când se cunosc laturile sale.*

Soluție. Analiza. Presupunem că bazele trapezului sunt *AB* (baza mare) şi *CD*. Dacă considerăm: $DD' \parallel BC$, $D' \in (AB)$, $BD' = CD$ iar $DD' = BC$.

Construcția. Notăm lungimile laturilor trapezului cu: $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $AD = d$. Construim un segment *AB* de lungime *a*, apoi construim cercurile $C(A,d)$ şi $C(B,b)$. Punctele *C* şi *D* se vor afla pe aceste cercuri. Pentru a determina punctul *D* (de exemplu), aplicăm cercului $C(B,b)$ o translație de vector echipotent cu $\overrightarrow{CD}$. Obținem cercul $C(D',b)$. Atunci, *D* este punctul ce se obține prin intersecția acestui cerc cu $C(A,d)$ (considerat într-un semiplan determinat de dreapta *AB*). Pentru a determina vârful *C*, determinăm transformatul punctului *D* prin translația de vector $\overrightarrow{DC}$.

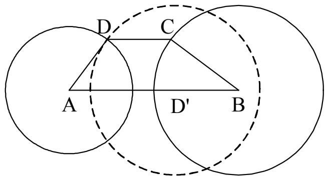


Fig. 11.5.39.

Demonstrația. Este evident că punctele *D* şi *C* aparțin celor două cercuri construite. Prin translația realizată, transformatul lui *B* este D'. Punctul *D*, aflat la intersecția celor două cercuri, are proprietatea că $DD' = BC$. Deoarece $\overrightarrow{DC} \sim \overrightarrow{D'B}$, rezultă că $CD \parallel AB$ şi $CD = D'B$. Astfel, punctul *C* este vârful trapezului care trebuie construit.

Dacă considerăm D_1, punctul de intersecție al cercurilor $C(A,d)$ şi $C(D',b)$ din celălalt semiplan, construim în mod analog un alt trapez AD_1C_1B, unde D_1 şi C_1 sunt simetricele punctelor *D* şi *C* față de dreapta *AB*.

Discuție. Pentru a putea construi trapezul, intersecția cercurilor $C(A,d)$ şi $C(D',b)$ trebuie să fie nevidă. Pentru aceasta, între lungimile *a*, *b*, *c*, *d* ($a > c$), trebuie să se verifice relația:

$$\left|d-(a-c)\right| \le b \le d+(a-c).$$

Dacă una dintre inegalități devine egalitate, cele două cercuri sunt tangente şi $D \in AB$, situație care nu convine.

11. *Să se construiască un segment de dreaptă de lungime şi direcție dată care se sprijină pe două cercuri date.*

Soluție. Analiza. Fie $C(O_1,r_1)$, $C(O_2,r_2)$ şi $\vec{v}$ elementele cunoscute din enunț. Pentru a construi un segment AB care are aceeaşi lungime şi direcție cu vectorul $\vec{v}$, trebuie să obținem:

$$\overrightarrow{AB} \sim \vec{v} \text{ sau } \overrightarrow{AB} \sim -\vec{v}.$$

Presupunem problema rezolvată; fie $\overrightarrow{AB} \sim \vec{v}$ astfel încât: $A \in C(O_1,r_1)$ şi $B \in C(O_2,r_2)$.

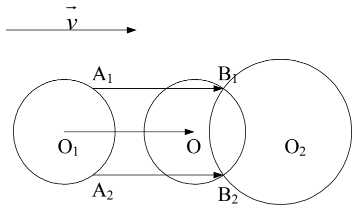


Fig. 11.5.40.

Dacă construim $\overrightarrow{O_1O} \sim \vec{v}$, deoarece AO_1OB este paralelogram, punctul B se află şi pe cercul $C(O,r_1)$.

Construcția (*demonstrația* rezultă din analiza problemei). Aplicăm o translație de vector $\vec{v}$ cercului $C(O_1,r_1)$ şi notăm cu $C(O,r)$ cercul obținut ($\overrightarrow{O_1O} \sim \vec{v}$ şi $r_1 = r$). Fie B_1 şi B_2 punctele de intersecție ale cercului $C(O,r)$ cu $C(O_2,r_2)$. Ele sunt transformatele punctelor A_1 şi A_2 ale cercului $C(O_1,r_1)$.

Deoarece $A_1O_1OB_1$ şi $A_2O_1OB_2$ sunt paralelograme, iar capetele segmentelor se află pe cele două cercuri, A_1B_1 şi A_2B_2 sunt segmentele căutate.

Dacă aplicăm o translație de vector $-\vec{v}$ cercului $C(O_2,r_2)$, prin acelaşi procedeu mai obținem două segmente.

Discuție. Pentru ca problema să aibă soluție, intersecția cercurilor $C(O,r)$ şi $C(O_2,r_2)$ trebuie să fie nevidă.

Pentru aceasta:

Dacă $|r_1 - r_2| < OO_2 < r_1 + r_2 \Leftrightarrow |r_1 - r_2| < \left\|\overrightarrow{O_1O_2} - \vec{v}\right\| < r_1 + r_2$, atunci cercurile sunt secante şi obținem două soluții.

Dacă $|r_1 - r_2| = OO_2$ sau $OO_2 = r_1 + r_2$, atunci cercurile sunt tangente (interior sau exterior) şi vom avea o singură soluție.

Dacă $OO_2 > r_1 + r_2$ sau $OO_2 < |r_1 - r_2|$, cercurile nu au puncte comune, deci nu există soluţie.

Vom face apoi aceeaşi discuţie pentru cercurile $C(O,r)$, transformatul lui $C(O_2,r_2)$ printr-o translaţie de vector $-\vec{v}$ şi $C(O_1,r_1)$.

12. *Să se construiască un triunghi echilateral ale cărui vârfuri se află pe trei drepte paralele* d_1, d_2 *şi* d_3.

Soluţia. Analiza. Vom presupune problema rezolvată. Fie $A \in d_1$, $B \in d_2$ şi $C \in d_3$. Deoarece $AB = AC$ şi $m(\measuredangle BAC) = 60°$, rezultă că vârful B este punctul obţinut din C printr-o rotaţie de unghi $\alpha = \frac{\pi}{3}$ şi centru A (C este transformatul lui B prin rotaţia de centru A şi de unghi $-\frac{\pi}{3}$). Deoarece $C \in d_3$, rezultă că B se află pe dreapta obţinută prin rotirea lui d_3 cu $\frac{\pi}{3}$ în jurul lui A.

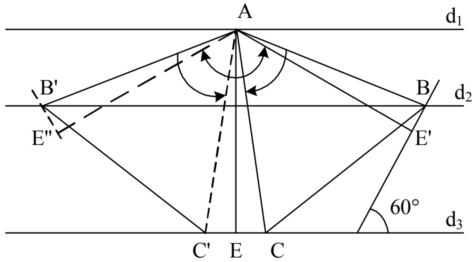


Fig. 11.5.41.

Construcţia. Alegem $A \in d_1$. Construim $AE \perp d_3$. Rotind AE în jurul lui A cu $\frac{\pi}{3}$, obţinem segmentul AE'. Fie d perpendiculara ridicată din E' pe AE'. B se obţine ca fiind punctul de intersecţie al dreptelor d_2 şi d (d rezultă de fapt din d_3 printr-o rotaţie de centru A şi unghi $\frac{\pi}{3}$). Punctul C se află rotind B în jurul lui A cu unghi $-\frac{\pi}{3}$.

Demonstraţia. Din $AB = AC$ şi $m(\measuredangle BAC) = 60°$, rezultă imediat că triunghiul ABC este echilateral. Mai trebuie să arătăm că $C \in d_3$. Ţinând cont de modul de construcţie al punctelor E, E', B, C, obţinem că $AE \equiv AE'$; $AC \equiv AB$; $\measuredangle EAC \equiv \measuredangle E'AB$. Astfel, triunghiurile AEC şi $AE'B$ sunt congruente. De aici rezultă că triunghiul AEC este dreptunghic, deci $C \in d_3$.

Discuție. Dacă vom roti AE în jurul lui A cu $-\frac{\pi}{3}$, printr-o construcție similară, obținem un al doilea triunghi echilateral, simetric cu primul față de AE. Cu toate că este evident, facem observația că lungimea laturii triunghiului echilateral construit depinde de poziția celor trei drepte paralele considerate inițial.

13. *Să se construiască un cerc tangent la două drepte concurente date şi care trece printr-un punct dat.*

Soluție. Analiza. Notăm cu d_1 şi d_2 dreptele concurente în O şi cu M, punctul dat. Considerăm că $M \notin d_1 \cup d_2$. Deoarece cercul pe care dorim să-l construim este tangent la cele două drepte, centrul său se va afla pe bisectoarea unghiului format de cele două drepte. De asemenea, acest cerc este omotetic oricărui cerc tangent la cele două drepte (centrul omotetiei este O).

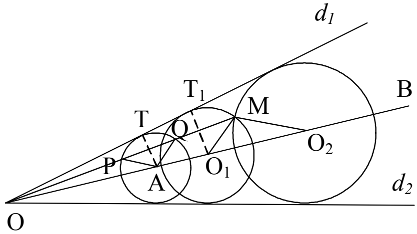


Fig. 11.5.42.

Construcția. Vom construi bisectoarea $(OB$ a unghiului format de drepte d_1 şi d_2, apoi un cerc $C(A,r)$ cu centrul A pe bisectoare, tangent dreptelor (pentru aceasta, din punctul A ales arbitrar pe $(OB$ coborâm perpendiculara din A pe d_1. Raza r a cercului dorit este AT unde T este piciorul perpendicularei). Notăm $C(A,r) \cap OM = \{P,Q\}$ (Fig. 11.5.42.).

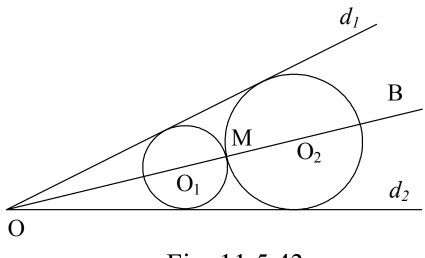


Fig. 11.5.43.

Prin M trasăm paralele la AQ şi AP. Notăm cu O_1 şi O_2 punctele în care aceste paralele intersectează bisectoarea; ele reprezintă centrele cercurilor căutate.

Demonstrația. $O_1M \parallel AQ$ şi $O_2M \parallel AP$ implică:

$$\frac{OO_1}{OA} = \frac{O_1M}{r} = k_1 \text{ şi } \frac{OO_2}{OA} = \frac{O_2M}{r} = k_2.$$

Cercurile $C(O_1, rk_1)$ şi $C(O_2, rk_2)$ sunt imaginile cercului $C(A,r)$ prin omotetii de centru O şi raport k_1, respectiv k_2. Deoarece O_1T_1 este imaginea lui AT prin transformarea precizată şi, în cazul acesta, imaginea unei drepte este o dreaptă paralelă, rezultă că $O_1T_1 \perp d_1$. Procedând analog, obținem că cele două cercuri construite sunt tangente dreptelor date inițial.

Discuție. În cazul prezentat ($M \notin d_1 \cup d_2$) au rezultat două soluții.

O situație particulară este cea când $M \in (OB$. Cele două cercuri care convin sunt construite în mod direct ca în figura 11.5.43.. Pentru a determina cercul $C(O_1, r_1)$ unde $r_1 = O_1M$, notăm cu l_1 distanța de la M la d_1. Din $\dfrac{OM - r_1}{OM} = \dfrac{r_1}{l_1}$ rezultă $r_1 = \dfrac{l_1 OM}{l_1 + OM}$. În mod analog vom determina şi raza celuilalt cerc.

Dacă punctul M se află pe una din drepte şi $M \neq O$, soluția va fi unică (fig. 11.5.44.) unde O_1 este punctul de intersecție dintre $(OB$ şi perpendiculara ridicată din M pe d_1.

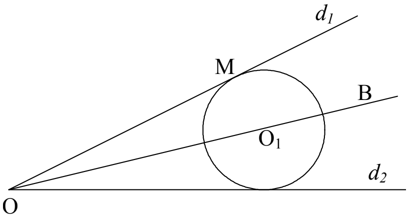


Fig. 11.5.44.

14. *Să se înscrie un pătrat într-un triunghi.*

Soluție. Analiza. Fie $MNPQ$ pătratul înscris în triunghiul ABC cu $M, N \in (BC)$, $P \in (AC)$, $Q \in (AB)$. Notăm cu l lungimea laturii sale. Fie $M'N'P'Q'$ imaginea acestui pătrat printr-o omotetie de centru B şi raport k unde $0 < k < 1$ (Fig. 11.5.45.).

Deoarece orice dreaptă ce trece prin centrul de omotetie se transformă în ea însăşi, va rezulta:

$$M', N' \in (BC),\ \ P' \in (BP),\ \ Q' \in (BQ).$$

Construcția şi demonstrația.
Construim pătratul $M'N'P'Q'$ astfel încât: $M', N' \in (BC),\ \ Q' \in (AB)$ iar P' este în interiorul triunghiului. Dreapta BP' intersectează latura AC în P. Trasăm prin P paralele la $P'N'$ şi la $P'Q'$ care intersectează BC în N şi AB în Q. Punctul M se obține prin intersecția paralelei duse din Q la $Q'M'$ cu BC.

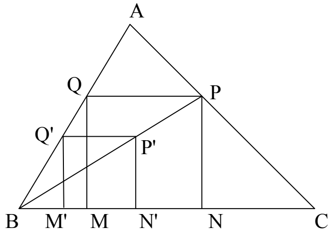


Fig. 11.5.45.

Deoarece $\dfrac{QP}{Q'P'} = \dfrac{BP}{BP'} = \dfrac{PN}{P'N'} = k,$

rezultă că $MNPQ$ este pătrat (el este imaginea lui $M'N'P'Q'$ prin omotetia de centru B şi raport k).

Discuție. Problema, astfel rezolvată, are soluție dacă unghiurile B şi C sunt ascuțite. Dacă unul dintre ele este obtuz, ne vom raporta construcția la celelalte două unghiuri ascuțite ale triunghiului.

15. *Să se construiască un triunghi ABC când se cunosc elementele: latura BC, unghiul A, iar medianele duse din B şi C sunt perpendiculare.*

Soluție. Analiza. Notăm cu AA', BB' şi CC' cele trei mediane şi cu G centrul de greutate al triunghiului. Deoarece $BB' \perp CC'$, punctul G se află pe cercul de diametru BC; deci $A'G = \dfrac{a}{2} = b$, unde $BC = a$.

Astfel, $AA' = 3b = ct$, deci A este pe cercul $C(A', 3b)$.

Din $m(\measuredangle BAC) = \alpha = ct$, locul geometric al punctului A este reuniunea a două arce deschise de extremități B şi C, simetrice față de latura BC.

Construcția. Construim mijlocul segmentului *BC*, A' şi cercurile $C(A',b)$ şi $C(A',3b)$ (Fig. 11.5.46.).

Trasăm locul geometric descris de *A* (arcele capabile de unghi dat α subîntinse de *BC*) ca în 11.5.1.. Ținând cont de simetria celor două arce față de *BC*, considerăm doar arcul de deasupra lui *BC*.

Vârful *A* se va afla la intersecția acestui arc de cerc cu cercul $C(A',3b)$ (considerând celălalt arc de cerc, se obține simetricul lui *A* față de *BC*).

Demonstrația. Notăm cu *G* punctul de intersecție al segmentului AA' cu cercul $C(A',b)$. Obținem $AA'=3A'G$, deci *G* este centrul de greutate al triunghiului *ABC*. Pentru că *G* se află pe cercul de diametru *BC*, medianele *BG* şi *CG* sunt perpendiculare.

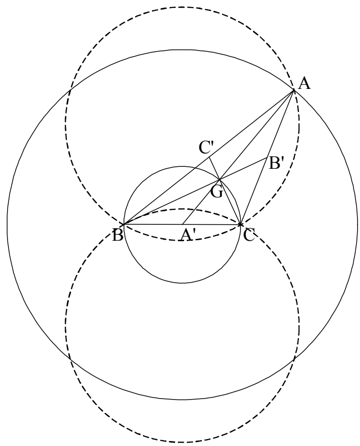


Fig. 11.5.46.

Discuție. Din modul de determinare al triunghiului, este evident că problema are soluție numai în cazul în care arcul intersectează cercul $C(A',3b)$. Notăm cu *O* centrul cercului pe care se află arcul capabil de unghi α.
Conform construcției de la 11.5.1., obținem raza acestuia egală cu $OC=\dfrac{a}{2\sin\alpha}$. Cele două mediane sunt perpendiculare, deci $\alpha<\dfrac{\pi}{2}$. Astfel, $0<\sin\alpha<1,\ 0<\cos\alpha<1.$

Condiția de existență a soluției: $\left|\mathrm{OA}-\mathrm{OA}'\right|\le \mathrm{AA}'\le \mathrm{OA}+\mathrm{OA}'\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\left|\frac{a}{2\sin\alpha}-\frac{a}{2}ctg\alpha\right|\le\frac{3a}{2}\le\frac{a}{2\sin\alpha}+\frac{a}{2}ctg\alpha \text{ devine:}$$

$$\left|1-\cos\alpha\right|\le 3\sin\alpha\le 1+\cos\alpha.$$

Deoarece $1-\cos\alpha>0,$ obținem:

$$1-\cos\alpha \le 3\sin\alpha \le 1+\cos\alpha \Leftrightarrow 2\sin^2\frac{\alpha}{2} \le 6\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} \le 2\cos^2\frac{\alpha}{2}.$$

Notăm $\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}$ cu x. Din $0<\frac{\alpha}{2}<\frac{\pi}{4}$ rezultă $x\in(0,1)$. Rezolvând inecuațiile, obținem $0<x\le\frac{1}{3}$.

Astfel, dacă $\frac{1}{3}<\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}<1$, problema nu are soluții.

Pentru $\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{3}$, există un singur punct de intersecție (discutăm doar în raport cu arcul capabil situat deasupra lui BC), deci o singură soluție pentru determinarea vărfului A. În cazul $0<\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}<\frac{1}{3}$, se obțin două soluții pentru A, deci se pot construi două triunghiuri.

ANEXA 1

Plan-cadru de învățământ pentru clasa a XI-a (ciclul superior al liceului) la filiera teoretică,
privit comparativ la profilele real (specializarea matematică-informatică) și umanist (specializarea filologie)

Filiera teoretică. Profil real/umanist
Specializarea: Matematică-Informatică/Filologie

Aria curriculară/ Disciplina	Clasa a XI-a Profil real Specializarea: Matematică-Informatică				Clasa a XI-a Profil umanist Specializarea: Filologie			
	TC	CD	TC+CD	CDS	TC	CD	TC+CD	CDS
LIMBĂ ȘI COMUNICARE	7	-	7		7	6	13	
Limba și literatura română	3	-	3		3	1	1	
Limba modernă 1	2	-	2		2	1	3	
Limba modernă 2	2	-	2		2	1	3	
Limba latină					-	2	2	
Literatură universală					-	1	1	
MATEMATICĂ ȘI ȘTIINȚE ALE NATURII	6	3	9	4-6	-	1	1	4-6
Matematică	2	2	4		-	-	-	
Fizică	2	1	3					
Chimie	1	-	1					
Biologie	1	-	1					
Pentru filologie: Științe					-	1	1	

Aria curriculară/ Disciplina	Clasa a XI-a Profil real Specializarea: Matematică-Informatică				Clasa a XI-a Profil umanist Specializarea: Filologie			
	TC	CD	TC+CD	CDS	TC	CD	TC+CD	CDS
OM ŞI SOCIETATE	**4**	**-**	**4**		**6**	**-**	**6**	
Istorie	1	-	1		2	-	2	
Geografie	1	-	1		1	-	1	
Discipline socio-umane (Economie)	1	-	1		1	-	1	
Discipline socio-umane (Sociologie)					1	-	1	
Discipline socio-umane (Filosofie)	-	-	-		-	-	-	
Religie	1	-	1		1	-	1	
ARTE	**-**	**-**	**-**		**1**	**-**	**1**	
Educaţie artistică	-	-	-		1	-	1	
TEHNOLOGII	**-**	**4**	**4**		**-**	**1**	**1**	
Informatică	-	4	4		-	-	-	
Pentru filologie: Tehnologia informaţiei şi a comunicaţiilor					-	1	1	
EDUCAŢIE FIZICĂ ŞI SPORT	**1**	**-**	**1**		**1**	**-**	**1**	
Educaţie fizică	1	-	1		1	-	1	
CONSILIERE ŞI ORIENTARE	**1**	**-**	**1**		**1**	**-**	**1**	
Consiliere şi orientare	1	-	1		1	-	1	
TOTAL TC/CD/CDS	**19**	**7**	**26**	**4-6**	**16**	**8**	**24**	**4-6**
TOTAL (TC+CD+CDS)	**30-32**				**28-30**			

ANEXA 2

Matrice de corespondență corespunzătoare conținutului ***Numere naturale***
Clasa a V-a

Obiective cadru	**OC.1**									**OC.2**					**OC.3**			**OC.4**	
Obiective de referință / Conținuturi	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**1**	**2**	**3**	**1**	**2**
Scrierea și citirea numerelor naturale; șirul $\mathbb{N}$.	x									x					0				
Reprezentarea numerelor naturale pe axă. Compararea și ordonarea numerelor naturale.	x	0											0			x		0	
Adunarea numerelor naturale,		x	x	0						x		x	x	x	x	x		x	
Scăderea numerelor naturale.		x	x	0						x		x	x	x	x	x		x	
Înmulțirea numerelor naturale, ordinea efectuării operațiilor.		x	x	0						x		x	x	x	x	x		x	
Împărțirea cu rest a numerelor naturale.		x	x	0						x		x	x	x	x	x		x	
Ordinea efectuării operațiilor. Factor comun.		x	x	0										0		x	x	x	
Divizor, multiplu. Divizibilitatea cu 10, 2, 5. Numere pare și impare.		0		x						x	x	x			0			x	
Rezolvarea și alcătuirea de ecuații, inecuații și probleme care conduc la efectuarea operațiilor studiate (inclusiv elemente de organizarea datelor).					x						x			x	x	x		x	x
Ridicarea la putere cu exponent natural a unui număr natural; **pătrate perfecte.*		x	x							x	0				x	x		x	
Pătratul și cubul unui număr natural.		x	x							x					x	x		x	
Compararea și ordonarea puterilor; reguli de comparare a puterilor.	x		x								0				x			x	
Ordinea efectuării operațiilor. **Reguli de calcul cu puteri.*		x												x		x	x	x	
Sistemul de numerație zecimal.	x	x								x	0					x	x	x	

ANEXA 3

Împărţirea conţinutului *Numere naturale* de la clasa a V-a în unităţi de învăţare

Unitatea de învăţare	Obiective de referinţă	Conţinuturi	Nr. de ore alocate	Săpt.	Obs.
Şirul numerelor naturale	1.1, 2.1, 5.1	Scrierea şi citirea numerelor naturale. Reprezentarea lor pe axă.	3		
Adunarea şi scăderea numerelor naturale	1.2, 1.3, 2.1, 3.1, 4.1	Adunarea şi scăderea numerelor naturale.	2		
Înmulţirea numerelor naturale	1.2, 1.3, 2.2, 3.1, 4.1	Înmulţirea numerelor naturale. Factor comun. Ridicarea la putere cu exponent natural a unui număr natural. Pătratul şi cubul unui număr natural.	3		
Împărţirea cu rest	1.2, 1.4, 2.1, 2.3, 3.3, 4.1	Împărţirea cu rest a numerelor naturale. Numere pare şi impare. Divizor, multiplu. Divizibilitatea cu 10, 2, 5.	3		
Ridicarea la putere a numerelor naturale	1.1, 2.2, 3.2, 4.1	Compararea şi ordonarea numerelor naturale. Compararea puterilor. Reguli de comparare a puterilor. Sistemul de numeraţie zecimal.	4		
Ecuaţii şi inecuaţii	1.5, 2.2, 3.2, 4.2	Rezolvarea şi alcătuirea de ecuaţii, inecuaţii. Probleme care conduc la efectuarea operaţiilor studiate (inclusiv elemente de organizarea datelor).	6		

ANEXA 4

Clasa a IX-a, M1, (TC+CD-4 ore/săptămână)

Proiectul unității de învățare: Progresii

Nr. ore alocate: 5

Detalieri de conținut	CS	Activități de învățare	Resurse	Evaluare
Tipuri de șiruri: progresii aritmetice, geometrice; formula termenului general în funcție de un termen dat și rație; suma primilor n termeni ai unei progresii.	1.2, 1.4, 1.6	Aplicarea raționamentului inductiv pentru determinarea și verificarea formulei termenului general al unor șiruri.	Fișă de lucru individuală.	Probă de evaluare ințială.
	1, 2, 4	Identificarea proprietăților unor progresii care apar sub formă de șiruri în situații problemă date.	Fișe de lucru. Activitate în grupe de 4 elevi. Tema pentru acasă.	Raportare prin scrierea pe tablă a unor răspunsuri date de fiecare grupă, compararea lor și obsevarea activității în grup.
Condiția ca n numere să fie în progresie aritmetică sau geometrică pentru $n \geq 3$.	1, 2, 3, 4, 5	Exprimarea prin simboluri matematice a relațiilor între mărimi ce apar în situațiile problemă analizate.	Activitate în grupe. Compararea relațiilor scrise pe tablă .	Verificarea prin sondaj a temei. Raportarea prin scrierea pe tablă a relațiilor identificate.
	1, 2, 3, 4	Identificarea condițiilor în care un șir de numere este o progresie.	Activitate frontală	Aprecierea răspunsurilor primite.
	1, 2, 3, 4,	Utilizarea legilor de succesiune pentru exprimarea termenului general al unei	Activitate în grup cu revenire la situa-	Observarea activității în grupe.

	5	progresii.	ţiile problemă anterior analizate. Temă pentru acasă.	Raportarea rezultatelor.
	1, 2, 3, 4, 5	Utilizarea proprietăţilor progresiilor pentru calculul unei sume.	Activitate în perechi. Fişe de lucru, manuale, culegeri de probleme.	Raportarea prin scrierea pe tablă a rezolvărilor şi evaluarea corectitudinii răspunsurilor şi a metodelor folosite.
	1, 2, 4, 5, 6	Analiza unei probleme pentru identificarea metodelor de rezolvare sau pentru alegerea celei mai simple metode.	Activitate în perechi, cu sarcini articulate: găsirii unor metode diferite de rezolvare pentru aceeaşi problemă. Tema pentru acasă.	Raportarea prin scrierea pe tablă şi compararea metodelor găsite.
	1, 2, 3, 4, 5, 6	Realizarea unei investigaţii ce priveşte modificarea datelor unei probleme, modificarea întrebării, probleme tip din contexte diferite.	Activitate diferenţiată. Tema pentru acasă.	Corectitudinea rezolvărilor, optimizarea soluţiei.
	1, 2, 3, 4, 5, 6	Evaluarea sumativă a unităţii de învăţare.	Activitate individuală. Fişe de lucru.	Proba de evaluare

ANEXA 5

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN DOLJ

FIŞĂ DE OBSERVARE A LECŢIEI

DATA....................
UNITATEA DE ÎNVĂŢĂMÂNT...
CLASA/GRUPA..................
DISCIPLINA DE ÎNVĂŢĂMÂNT ....
TEMA LECŢIEI ....
TIPUL LECŢIEI ....
NUMELE ŞI PRENUMELE CANDIDATULUI................................

NR. CRT.	CRITERIUL	ASPECTE VERIFICATE	PCT. MAX	EVALUARE, OBSERVAŢII
I.	Proiectarea lecţiei (20 pct.)	1. Respectarea metodologiei de elaborare a proiectului lecţiei.	3 pct.	
		2. Stabilirea obiectivelor de referinţă / competenţelor specifice în conformitate cu programa şcolară.	3 pct.	
		3. Stabilirea conţinuturilor şi proiectarea activităţilor de învăţare în raport cu obiectivele / competenţentele urmărite.	4 pct.	
		4. Estimarea resurselor şi a strategiilor de învăţare.	4 pct.	
		5. Proiectarea itemilor de evaluare în concordanţă cu obiectivele / competenţele specifice.	4 pct.	
		6. Creativitate în proiectarea lecţiei.	2 pct.	

NR. CRT.	CRITERIUL	ASPECTE VERIFICATE	PCT. MAX	EVALUARE, OBSERVAŢII
II.	Desfăşurarea lecţiei (40 pct.)	1. Asigurarea volumului optim, caracterului ştiinţific şi rigurozităţii conţinutului; esenţializarea şi sistematizarea lor.	6 pct.	
		2. Valorificarea valenţelor educaţionale ale conţinuturilor, dezvoltarea creativităţii elevilor.	5 pct.	
		3. Folosirea strategiilor didactice de predare cu accent pe metodele activ - participative în corelaţie cu obiectivele şi competenţele stabilite. Respectarea principiilor şi cerinţelor învăţării active -participative.	7 pct.	
		4. Corelaţii intra, inter, trans şi cross disciplinare	2 pct.	
		5. Individualizarea învăţării şi asigurarea egalităţii şanselor.	5 pct.	
		6. Asigurarea şi utilizarea mijloacelor de învăţământ.	5 pct.	
		7. Succesiunea logică a situaţiilor de învăţare în corelaţie cu tipul lecţiei; ritmarea şi secvenţierea optimă a activităţilor.	5 pct.	
		8. Utilizarea temei pentru acasă ca mijloc de asigurare a eficienţei demersului didactic	5 pct.	
III.	Comportamentul cadrului didactic (30 pct.)	1. Managementul clasei; organizare, conducere, control al activităţii.	5 pct.	
		2. Abilitate pedagogică, creativitate, adaptabilitate în depăşirea situaţiei problematice apărute în demersul didactic.	5 pct.	
		3. Stăpânirea de sine, controlul asupra colectivului.	5 pct.	
		4. Conduita în relaţiile cu elevii (cooperare, respect faţă de elevi).	5 pct.	
		5. Ţinuta, tehnicile comunicaţionale, limbajul verbal şi nonverbal.	5 pct.	
		6. Stimularea interesului elevilor pentru disciplina de studiu,	5 pct.	

NR. CRT.	CRITERIUL	ASPECTE VERIFICATE	PCT. MAX	EVALUARE, OBSERVAŢII
		cultivarea încrederii în sine şi a capacităţilor de progres, încurajarea dezvoltării personale a elevilor.		
IV.	Competenţa evaluativă (10 pct.)	1. Utilizarea tehnicilor adecvate de evaluare (diversitate, coerenţă, relevanţă).	3 pct.	
		2. Asigurarea caracterului motivant şi stimulativ al evaluării.	2 pct.	
		3. Dezvoltarea capacităţilor de autoevaluare.	2 pct.	
		4. Dezvoltarea capacităţilor de utilizare a celor învăţate, asigurarea feed-back-ului procesului de învăţare.	3 pct.	

NOTĂ: Pentru acordarea calificativului Admis, candidatul trebuie să întrunească cel puţin 50% din punctajul fiecărui criteriu şi 60% pe total fişă. Comisia va întocmi un proces verbal consemnat în registrul de inspecţii din şcoală, în care se va menţiona rezultatul obţinut de fiecare candidat.

CALIFICATIV (ADMIS-RESPINS)...

COMISIA DE EXAMEN

Inspector scolar...
Director...
Membri 1...
2..
3..
Secretar...

Bibliografie

1. Aramă, L., Morozan, T., *Probleme de calcul diferențial şi integral*, Editura Tehnică, Bucureşti, 1978.
2. Becheanu, M., Dincă, A., Ion, D. I., Niță, C., Purdea, I., Radu, N., Ştefănescu, M., Vraciu, C., *Algebră pentru perfecționarea profesorilor*, Editura didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1983.
3. Bieltz, P., Dumitru, M., *Logică elementară şi argumentare*, manual pentru clasa a IX-a, Editura All Educational, Bucureşti, 1999.
4. Bocoş, M., Chiş, V., Ferenczi, I., Ionescu, M., Lăscuş, V., Preda, V., *Didactica modernă*, Editura Dacia, Cluj-Napoca, 2004.
5. Bonnefond, G., Daviaud, D., Revranche, B., *Mathématiques Pythagore* 3^e, Hatier, Paris, 1993.
6. Bonnefond, G., Daviaud, D., Revranche, B., *Mathématiques Pythagore* 5^e, Hatier, Paris, 1991.
7. Bonnefond, G., Daviaud, D., Revranche, B., *Mathématiques Pythagore* 6^e, Hatier, Paris, 1990.
8. Brânzei, D., Onofraş, E., Anița, S., Isvoranu, Gh., *Bazele raționamentului geometric*, Editura Academiei RSR, Bucureşti, 1983.
9. Brânzei, D., Brânzei, R., *Metodica predării matematicii*, Editura Paralela 45, 2000.
10. Buşneag, D., Maftei, I., *Teme pentru cercurile şi concursurile de matematică ale elevilor*, Scrisul Românesc, Craiova, 1983.
11. Buşneag, D., *Teoria grupurilor*, Editura Universitaria, Craiova, 1994.
12. Catană, A., Săcuiu, M., Stănăşilă, O., *Metodica predării analizei matematice*, Editura didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1983.

13. Chițescu, I., *O problemă de geometrie elementară în care apare numărul de aur*, Gazeta Matematică, nr.9, 1995.
14. Corduneanu, A., Radu, Gh., Pop, I., Grămadă, V., *Culegere de probleme de matematică pentru admiterea în învățământul superior*, Editura Junimea, 1972.
15. Cucoş, C., *Pedagogie*, Editura Polirom, Iaşi, 2006.
16. Drăghicescu, I.C., Masgras, V., *Probleme de geometrie*, Editura Tehnică, Bucureşti, 1987.
17. Duican, L., Duican, I., *Transformări geometrice,* Editura Ştiințifică şi Enciclopedică, Bucureşti, 1987.
18. Farcaş, Gh., *Algebră*, Editura didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1979.
19. Gautier, C., Girard, G., Lentin, A., *Alef$_0$ / Algebră*, Editura didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1973.
20. Georgescu-Buzău, E., Onofraş, E., *Metode de rezolvare a problemelor de matematică în liceu*, Editura didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1983.
21. Ghircoiaşiu, N., Iasinschi, M., Viciu, A., *Fişe de geometrie şi trigonometrie pentru elevi şi absolvenți de liceu*, Editura Dacia, Cluj-Napoca, 1978.
22. Iliescu, I., Ionescu, B., Radu, D., *Probleme de matematică pentru admiterea în învățământul superior*, Editura didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1976.
23. Ionel, V., *Fundamentele pedagogiei*, Editura Universitaria, Craiova, 2004.
24. Ionescu-Țiu, C., Mihăileanu, N., Pîrşan, L., Rogai, E., *Probleme de matematică pentru examenele de bacalaureat şi admitere în învățământul superior*, Editura Tehnică, Bucureşti, 1972.
25. Joița, E., *Pedagogia - ştiința integrativă a educației*, Editura Polirom, Iaşi, 1999.
26. Joița, E., *Management educațional*, Editura Polirom, Iaşi, 2000.
27. Lupu, C., Săvulescu, D., *Metodica predării geometriei*, Editura Paralelea 45, 2000.

28. Marcus, S., *Şocul matematicii*, Editura Albatros, Bucureşti, 1987.
29. M.E.C., C.N.C., *Ghid metodologic pentru aplicarea programelor de matematică, primar-gimnaziu*, Editura Aramis, Bucureşti, 2001.
30. M.E.C., C.N.C., *Ghid metodologic. Aria curriculară. Matematică şi ştiinţe ale naturii, liceu,* Editura Aramis, Bucureşti, 2002.
31. Mialaret, G., *La Psycho-pédagogie,* Presses Universitaires de France, Paris, 1987.
32. Mihăileanu, N., *Lecţii complementare de geometrie*, Editura didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1976.
33. Miron, R., Brânzei, D., *Fundamentele aritmeticii şi geometriei*, Editura Academiei RSR, 1983.
34. Morozova, E.A., Petrakov, I.S., Skvorţov, V.A., *Olimpiadele internaţionale de matematică*, Editura Tehnică, Bucureşti, 1978.
35. Năstăsescu, C., Niţă, C., *Teoria calitativă a ecuaţiilor algebrice*, Editura Tehnică, Bucureşti, 1979.
36. Năstăsescu, C., Niţă, C., Brandiburu, M., Joiţa, D., *Exerciţii şi probleme de algebră pentru clasele IX-XII*, Editura didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1981.
37. Năstăsescu, C., Niţă, C., Rizescu, Gh., *Algebră*, manual pentru clasa a IX-a, Editura didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1987.
38. Năstăsescu, C., Niţă, C., Vraciu, C., *Aritmetică şi algebră*, Editura didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1993.
39. Negomireanu, I., Georgescu, A., *Noţiuni introductive de desen tehnic*, manual experimental pentru clasele a VI-a, a VII-a şi a VIII-a, Editura didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1981.
40. Nicolescu, L., Boskoff, V., *Probleme practice de geometrie*, Editura Tehnică, Bucureşti, 1990.
41. Peretti, A., de, Legrand, J.A., Boniface, J., *Tehnici de comunicare*, Editura Polirom, Iaşi, 2001.
42. Pimsner, M., Popa, S., *Probleme de geometrie elementară*, Editura didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1979.

43. Popescu-Neveanu, P., Fischbein, E., Didilescu, I., *Psihologie generală şi noţiuni de logică*, manual pentru anul IV de liceu, Editura didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1975.
44. Rus, I., Varna, D., *Metodica predării matematicii*, Editura didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1983.
45. Savu, I., Popovici, D., Streinu-Cercel, G., Andronache, M., Chiteş, C., Prajea, M., Rădulescu, S., *Ghidul profesorului de matematică Concursul pentru ocuparea posturilor didactice-2003*, Editura Sigma, 2003.
46. Savu, I., Prajea, M., Rădulescu, S., Chiteş, C., Moțățeanu, M., Poştaru, C., Lupşor, V., Streinu-Cercel, G., Marinescu, D., Moldoveanu, S., Povarnă, A., Heuberger, C., Constantinescu, E., *Ghidul profesorului de matematică Concursul pentru ocuparea posturilor didactice-2004*, Editura Sigma, 2004.
47. Simionescu, Gh. D., *Geometrie analitică*, manual pentru clasa a XI-a, Editura didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1980.
48. Sirețchi, Gh., *Calcul diferențial şi integral*, vol. I, II, Editura Ştiințifică şi Enciclopedică, Bucureşti, 1985.
49. Stoica, M., *Pedagogie şi psihologie*, Editura Gheorghe Alexandru, 2001.
50. Teodorescu, N., Mangu, V., Negru, A., Cărbunaru, C., Trifu, M., *Matematica în gimnaziu şi liceu*, vol. I, partea I şi partea a II-a - Culegere de probleme în sprijinul candidaților care se pregătesc pentru admiterea în treapta a II-a de liceu şi olimpiade, I.P. Informația, Bucureşti, 1984.
51. Udrişte, C., Tomuleanu, V., *Geometrie analitică*, manual pentru clasa a XI-a, Editura didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1985.
52. Vârtopeanu I., *Metodica predării matematicii*, Sinteze, vol. I, Editura Sitech, Craiova, 1998.
53. *** *Revista de matematică Mehedinți*, Anul II, nr.1, Editura Radical, Craiova, 2003.
54. *** *Mică Enciclopedie Matematică* (Traducere din limba germană), Editura Tehnică, Bucureşti, 1980.
55. *** Colecția *Gazeta Matematică*.