**Modulul 1**

**MULŢIMI, RELAŢII, FUNCŢII**

|  |
| --- |
| **Subiecte :**   1. **Proprietăţile mulţimilor. Mulţimi numerice importante.** 2. **Relaţii binare. Relaţii de ordine. Relaţii de echivalenţă.** 3. **Imagini directe şi imagini inverse de submulţimi printr-o funcţie.**   **Cardinalul unei submulţimi.** |

|  |
| --- |
| ***Evaluare: 1. Prezentarea noţiunulor importante introduse.***  ***2. Rezolvarea problemelor finale.*** |

**1.1. MULŢIMI.**

În acest paragraf ne vom referi la câteva noţiuni de bază ale analizei matematice absolut necesare în abordarea acesteia. Vom presupune cunoscute şi nu vom defini riguros noţiuni primare ca: obiect, element, mulţime, colecţie, egalitate, proprietate. De exemplu, o mulţime poate fi dată prin:

1. A = {a, b, c, …} - punând în evidenţă elementele sale,
2. B = {b: b are proprietatea P} - punând în evidenţă o proprietate caracteristică a elementelor mulţimii B.

Faptul că a este un element al mulţimii A se notează prin a ∈ A, am utilizat aici semnul “∈” de apartenenţă. Contrariul acestuia este semnul “∉” de neapartenenţă, simbolizând că un element nu aparţine unei mulţimi.

Dacă A este o parte (submulţime) a mulţimii B, simbolizăm aceasta prin semnul de incluziune “ ⊂ ”, şi anume scriem A ⊂ B. Utilizând semnele “ ⇒ ” (implică) şi “ ⇔ ” (echivalent) putem scrie:

1. (A ⊂ B) ⇔ (x ∈ A ⇒ x ∈ B)

Următoarele operaţii asupra mulţimilor sunt foarte des întâlnite:

1. Reuniunea: A ∪ B = {x: x ∈ A sau x ∈ B};
2. Intersecţia: A ∩ B = {x: x ∈ A şi x ∈ B};
3. Diferenţa: A - B = (A \ B) = {x: x ∈ A şi x ∉ B};
4. Complementara: C BA = (A \ B) (aici am presupus că B ⊂ A);
5. Produsul cartezian: A x B = {(a, b): a ∈ A, b ∈ B};

Ca de obicei semnul “ = ” indică egalitatea mulţimilor între care este pus şi vom avea:

1. (A = B) ⇔ (A ⊂ B şi B ⊂ A);

Dacă presupunem că A şi B sunt submulţimi de puncte ale planului, putem reprezenta operaţiile menţionate mai sus astfel:

**A**

**A**

**B**

**B**

**A**

∪

**B**

**A**

∩

**B**

**A**

**A**

**B**

**B**

**A\B**

**(**

**A-B**

**)**

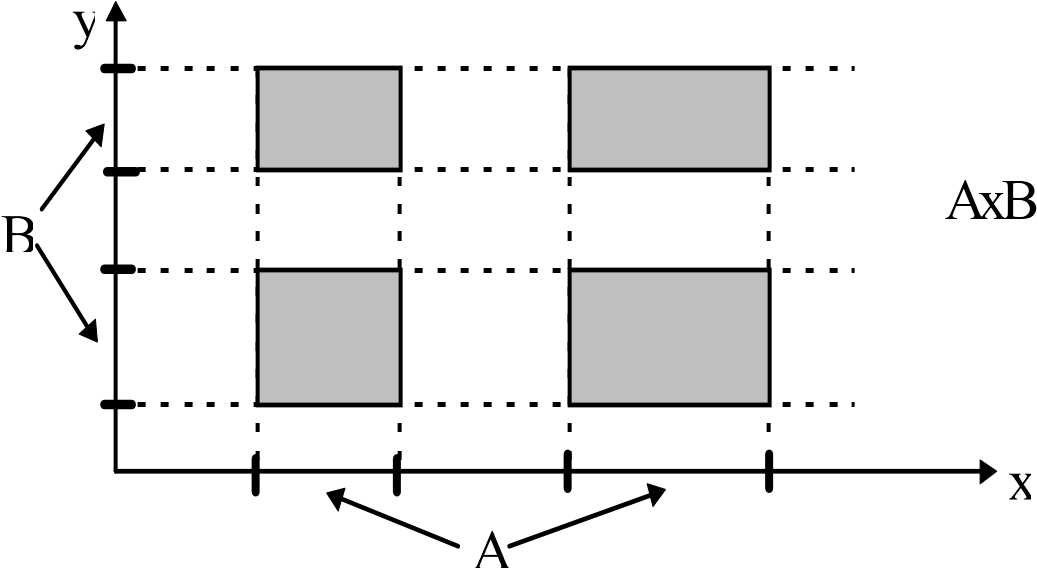
**C**

**A**

**B**

(10)

Dacă A şi B sunt submulţimi ale mulţimii (axei) numerelor reale, atunci A x B este o submultime a planului **R**2 .



Mulţimea fără nici un element o notăm cu ∅ şi se numeşte mulţimea vidă. Pentru o mulţime A ≠ ∅ familia submulţimilor acesteia formează o nouă mulţime pe care o notăm cu P(A) şi care se numeşte familia părţilor lui A.

În continuare considerăm o multime totală E şi celelalte mulţimi care apar le considerăm ca fiind părţi ale lui E. Referitor la operaţiile cu mulţimi definite mai sus amintim câteva proprietăţi mai importante:

1. CAA = ∅, CA∅ = A, CE E(C A) = A;
2. A ∪ B = B ∪ A (comutativitatea reuniunii);
3. (A ∩ B) ∪ C = A ∪ (B ∪ C) (asociativitatea reuniunii);
4. A ∪ ∅ = A, A ∪ E = E;
5. A ∩ B = B ∩ A (comutativitatea intersecţiei);
6. (A ∩ B) ∩ C = A ∩ (B ∩ C) (asociativitatea intersecţiei);
7. A ∩ ∅ = ∅, A ∩ E = A;
8. CE(A ∪ B) = C AE ∩ C BE ;
9. CE(A ∩ B) = C AE ∪ C BE .

(18) si (19) sunt cunoscute sub numele de relaţiile lui De Morgan.

1. A x ∅ = ∅; A x B este în general diferit de B x A, adică produsul cartezian nu este comutativ.
2. (A ∪ B) ∩ C = (A ∩ C) ∪ (B ∩ C) (distributivitatea intersecţiei faţă de reuniune)
3. (A ∩ B) ∪ C = (A ∪ C) ∩ (B ∪ C) (distributivitatea reuniunii faţă de

intersecţie)

1. (A ∪ B) x C = (A x C) ∪ (B x C);

(A ∩ B) x C = (A x C) ∩ (B x C) (distributivitatea produsului cartezian faţă de reuniune, respectiv intersecţie).

Demonstraţia egalităţilor precizate mai sus se poate face prin dublă incluziune. De exemplu, să demonstrăm egalitatea (18).

Arătam mai întâi că CE(A ∪ B) ⊂ C AE ∩ C BE .

Fie x ∈CE(A ∪ B) ⇒ x ∈ E şi x ∉ A ∪ B ⇒ x ∈ E şi (x ∉ A) şi

(x ∉ B) ⇒ (x ∈ E si x∉ A) şi (x ∈ E şi x ∉ B) ⇒ x ∈C AE şi x ∈C BE ⇒ x ∈C AE ∩ C BE .

Arătăm apoi că C AE ∩C BE ⊂ CE(A ∪ B) :

Fie x ∈ C AE ∩ C BE ⇒ (x ∈ E şi x ∉ A) şi (x ∈ E şi x ∉ B) ⇒

⇒ x ∈ E şi (x ∉ A şi x ∉ B) ⇒ x ∈ E şi x ∉ A ∪ B ⇒ x ∈CE(A ∪ B) .

Din cele două incluziuni rezultă egalitatea (18).

În continuare prezentăm mulţimile numerice de bază ale analizei matematice.

Vom nota prin **N** mulţimea numerelor naturale:

1. **N** = {1,2,3,...}; prin **Z** mulţimea numerelor întregi:
2. **Z** = {..., 3− −, 2, 1,0,1,2,− 3,...} ; si prin **Q** mulţimea numerelor rationale:

⎧ p ⎫

1. **Q** = ⎨x: x = , p ∈**Z**, q ∈**N**⎬.

⎩ q ⎭

Proprietăţile acestor mulţimi de numere le presupunem cunoscute. Probleme practice simple arată că aceste mulţimi de numere sunt insuficiente pentru a le rezolva. De exemplu, lungimea diagonalei unui pătrat având latura de lungime l (un număr raţional) nu va fi un număr raţional, deoarece este egal cu p l 2 , iar 2 nu poate fi scris sub forma cu p ∈ **Z**, q ∈ **N**. De aici a apărut

q

necesitatea extinderii lui **Q** la o mulţime mai bogată, şi anume la mulţimea numerelor reale, notată cu **R**.

Vom avea astfel:

1. **N** ⊂ **Z** ⊂ **Q** ∪ **I** = **R**, unde **I** este multimea numerelor iraţionale care o completează pe **Q** până la **R**.

Mulţimea numerelor reale se poate defini direct punând în evidenţă elementele sale sau axiomatic, ca o mulţime de elemente ce satisface la anumite grupe de axiome. În mod direct, constructiv, **R** se defineşte ca fiind mulţimea numerelor de forma:

1. x = r r, 1 2 3,r ,r ,...,rn,...= r + r1 + r22 +...+ rnn +...

# 10 10 10

unde ri ∈{0,1,2,...,9} iar r este un numar întreg denumit partea întreagă a lui x

(r = [ ]x ). Această definiţie nu este prea comodă, deoarece în membrul drept din

(28) apare o suma infinită de termeni care conduce inevitabil la o limită.

Definiţia axiomatică a numerelor reale este mai comodă, şi prin axiomele ei regăsim proprietăţile submulţimilor ei considerate anterior.

Prin mulţimea numerelor reale înţelegem mulţimea **R** care satisface următoarele grupe de axiome:

(A1) Axiome de adunare:

(**R**,+) formează un grup comutativ, notăm cu 0 elemntul neutru si cu -x opusul unui element x.

(A2) Axiome de înmulţire sau multiplicare:

(**R** \ 0 ,{ } ⋅) formează un grup comutativ, notăm cu 1 elementul neutru şi cu

1 sau x−1 inversul elementului x faţă de operaţia multiplicativă.

x

(A3) Axioma distributivităţii:

x y( + z) = x y⋅ + x z⋅ , pentru orice x, y, z ∈ **R**, adică operaţia multiplicativă este distributivă faţă de cea aditivă şi deci (**R**, ,+ ⋅) este un corp comutativ.

Axiomele de mai sus nu-l determina pe **R** deoarece si multimea **Q** le verifică. De asemenea submulţimea {0,1} ⊂ **R** verifică sistemul de axiome considerat anterior.

(A4) Axiome de ordine:

Oricare ar fi elementele x, y ∈ **R** se verifică cel puţin una din relaţiile x ≤ y sau y ≤ x si următoarele proprietăţi sunt satisfăcute:

|  |  |
| --- | --- |
| (A4.1.) | x ≤ x, oricare ar fi x ∈ **R**, iar x ≤ y si y ≤ x implică x = y; |
| (A4.2.) | x ≤ y si y ≤ z implică x ≤ z; |
| (A4.3.) | x ≤ y implică x + z ≤ y + z, oricare ar fi z ∈ **R**; |
| (A4.4.) | 0 ≤ x, 0 ≤ y implică 0 ≤ x⋅y. |

Nici sistemul de axiome enunţat până în prezent nu este suficient pentru a defini mulţimea numerelor reale, deoarece şi **Q** satisface la toate aceste axiome.

Axioma finală pentru definirea mulţimii numerelor reale este axioma următoare, numită axioma marginii superioare. Pentru a enunţa însă această axiomă avem nevoie de câteva noţiuni pregătitoare:

O mulţime nevidă A ⊂ **R** se numeşte mărginită superior dacă există x∈ **R**, astfel încât să avem a ≤ x, pentru orice a ∈ A, acest număr se numeşte margine superioară pentru mulţimea A.

Numărul x ∈ **R** se numeşte cea mai mică margine superioară sau margine superioară strictă a mulţimii A dacă este margine superioră pentru mulţimea A şi pentru orice altă margine superioară x’ a lui A avem x ≤ x’. Marginea superioară stricta a unei mulţimi A, dacă există, se notează prin “sup A” şi ea este unică. Într-adevar, dacă ar exista două margini stricte x1 si x2 pentru o mulţime nevidă

A, atunci din x1 ≤ x2 şi x2 ≤ x1 rezultă că ele coincid.

Analog se defineşte marginea inferioară strictă a unei mulţimi A şi se notează prin y = inf A.

(A5) Axioma marginii superioare:

Dacă A este o submulţime nevidă a mulţimii **R**, care este mărginită superior, atunci multimea A admite o margine superioară strictă şi aceasta este un element al lui **R**.

Mulţimea numerelor reale poate fi pusă în corespondenţa biunivocă cu mulţimea punctelor unei drepte pe care s-a fixat o origine O, un sens si o unitate de măsură şi care de obicei este numită axa reală. Punctele de la infinit ale dreptei reale se notează cu ± ∞. Mulţimea numerelor reale **R** completată cu cele două

simboluri se noteaza **R** şi se numeşte închiderea mulţimii numerelor reale,

**R R**= ∪ ± ∞{ } . Între aceste simboluri şi numerele reale se poate atribui sens unor operaţii, iar altora nu, de exemplu, x ± ∞ = ± ∞, a ⋅ ∞ = ∞ dacă a > 0, a ⋅ ∞ = - ∞ dacă a < 0, ∞ + ∞ = ∞, pe când 0 ⋅ ∞, ∞ - ∞ sunt considerate operaţii fără sens.

**Daţi exemple de mulţimi.**

**Construiţi pe baza mulţimilor date noi mulţimi, prin operaţiile prezentate.**

**Prezentaţi câteva mulţimi numerice importante.**

## 1.2. RELAŢII BINARE, RELAŢII DE ORDINE, RELAŢII DE ECHIVALENŢĂ

Fie M o mulţime diferiţă de mulţimea vidă şi R ⊂ M x M o parte a produsului cartezian a lui M cu ea însăşi. Mulţimea R se numeşte relaţie binară pe M. De exemplu, dacă M = Z putem considera:

R = {(x, y): x, y ∈ Z şi x este divizibil cu y}.

Faptul că (x, y) ∈ R se mai scrie x R y şi citim x se află în relaţia R cu y.

Despre o relaţie binară R definită pe o mulţime M spunem că este:

1. reflexivă dacă x R x are loc pentru orice x ∈ M;
2. simetrică dacă x R y implică y R x;
3. antisimetrică dacă x R y şi y R x implică x = y;
4. tranzitivă dacă x R y şi y R z implică x R z.

O relaţie binară R definită pe o mulţime nevidă M se numeşte:

1. relaţie de ordine dacă este reflexivă, antisimetrică şi tranzitivă;
2. relaţie de ordine strictă dacă este tranzitivă;
3. relatie de echivalentă dacă este reflexivă, simetrică şi tranzitivă. Dacă R este o relaţie de ordine pe o mulţime M ≠ ∅ şi oricare ar fi x, y ∈ M are loc x R y sau y R x spunem că mulţimea M este total ordonată în raport cu relaţia R, în caz contrar spunem că M este parţial ordonată.

Dacă R este o relaţie de echivalenţă pe mulţimea M, atunci clasa de echivalenţă a unui element a ∈ M se defineşte prin a$ ={x ∈M xRa: } . Mulţimea claselor de echivalenţa ce pot fi formate din elementele mulţimii M se numeşte mulţime cât a lui M prin raport cu relaţia R şi se notează prin M / R.

Dacă, de exemplu, considerăm M = **R** (mulţimea numerelor reale) atunci “ ≤ ” defineşte o relaţie de ordine totală pe **R**, “ < “ defineşte o relaţie de ordine strictă, iar x R y ⇔ x - y = 0 defineşte pe **R** o relaţie de echivalenţă.

Fie acum, M = { 1, 2, …, 9 }, pe M definim relaţia binară x R y ⇔ (x - 1)⋅

⋅(x - 2)(x - 3) + (y - 1)(y - 2)(y - 3) = 0. Se constată uşor că relaţia R este simetrică şi tranzitivă dar nu este reflexivă.

**Definţi relaţiile binare de ordine şi relaţiile binare de echivalenţă.**

**Construiţi exemple din relaţiile definite anterior.**

**Construţi pentru relaţiile de echivalenţă considerate mulţimea claselor de echivalenţă.**

## 1.3. IMAGINI DIRECTE, IMAGINI INVERSE DE SUBMULŢIMI PRINTR-O FUNCŢIE, CARDINALUL UNEI MULŢIMI

Să considerăm acum două mulţimi M şi N. O relaţie binară de la M la N se defineşte ca o parte a produsului cartezian, F ⊂ M × N. Elementele lui M × N se împart astfel în două clase, care aparţin lui F şi care nu aparţin lui F.

Dacă pentru orice x ∈ M există în mod unic y ∈ N astfel ca (x, y) ∈ F atunci relaţia binară F se numeşte relaţie funcţională sau funcţie de la M la N. Se regăseşte astfel definiţia clasică a noţiunii de funcţie (aplicaţie) de la M la N prin care înţelegem o asociere la fiecare element x din M a unui element unic y din N. De fapt relaţia funcţională F ⊂ M × N se identifică cu graficul funcţiei

f

M ∋ x ⎯⎯→y ∈N, adică F = {(x, f (x) ): x ∈ M }.

Subliniem faptul că printr-o funcţie de la M la N înţelegem tripletul (M, N, f ), M se numeşte domeniul de definiţie, N se numeşte mulţime în care funcţia ia valori, iar f este corespondenţa de la M la N. Nu ne vom ocupa de cazul când unui element x ∈ M i se asociază o parte f(x) ⊂ N, dar precizăm că de aceste cazuri se ocupa teoria funcţiilor multivoce sau a multifuncţiilor.

Un caz particular de funcţie îl constituie şirul de elemente dintr-o mulţime M. Fie **N** mulţimea numerelor naturale. Se numeşte şir de elemente din M o aplicaţie f : **N** → M. Dacă notăm an = f n( ) atunci şirul realizează corespondenţa (succesiunea) n → an şi acest lucru se notează pe scurt prin { }an n≥1 sau

{ }an n∈**N**. În esenta noţiunea de şir stabileşte o ordonare, o enumerare de termeni dintr-o mulţime, în corespondenţa cu mulţimea numerelor naturale sau cu o parte infinită a sa. Evident putem înlocui pe **N** cu N ∪ {0} sau cu N-{1, 2,…, k}, k ≥ 1 enumerarea temenilor în corespondenţă cu **N** se păstrează.

Fie o funcţie f : M → N (definită pe M cu valori în N) şi A ⊂ M. Mulţimea f(A) = {f(a) : a ∈ A} se numeşte imaginea submulţimii A prin funcţia f. Dacă considerăm A = M atunci f(M) se numeşte mulţimea valorilor funcţiei f. Evident f(A), f(M) sunt incluse în N.

Fie acum B ⊂ N. Prin f −1( )B înţelegem mulţimea {x ∈ M: f(x) ∈ B} care se numeşte imaginea inversă sau contraimaginea lui B prin functia f.

Imaginea directă şi imaginea inversă definite prin funcţia f : M → N, considerate ca funcţii definite pe P(M) cu valori în P(N), respectiv pe P(N) cu valori în P(M), au următoarele proprietăţi ce decurg imediat din definiţie:

1. f (∅) = ∅;
2. dacă A ⊂ B rezultă f (A) ⊂ f (B);
3. f (A ∪ B) = f (A) ∪ f (B);
4. f (A ∩ B) ⊂ f (A) ∩ f (B);
5. f −1(∅ = ∅) ;
6. dacă P ⊂ Q rezultă f −1( )P ⊂ f −1(Q);
7. f −1(P ∪ =Q) f −1( )P ∪ f −1(Q);
8. f −1(P ∩ =Q) f −1( )P ∩ f −1(Q);
9. f −1(CA) = Cf −1(A); unde A, B ∈ P(M) si P, Q ∈ P(N).

Demonstraţia acestor proprietăţi se bazează pe definiţia egalităţii a două mulţimi, prin dublă incluziune. De asemenea extinderea la cazul reuniunii şi intersecţiei finite, respectiv numarabile, este imediată.

Funcţia f pentru care f (M) = N se numeste surjectivă. Dacă pentru orice x1,x2 ∈M şi x1 ≠ x2 implică f x( 1) ≠ f x( 2) atunci funcţia f se numeşte injectivă.

Funcţiile f care sunt şi injective şi surjective se numesc funcţii bijective.

Dacă f : M → N este o functie bijectiva, atunci putem defini corespondenţa inversă (funcţia inversă) f −1:N → M prin: dacă f (a) = b atunci f −1( )b = a Deci clasa funcţiilor bijective coincide cu clasa funcţiilor inversabile,

adică a funcţiilor f : M → N pentru care există f −1:N → M, astfel ca:

(f −1 o f)( )a = f −1(f a( )) = f −1( )b = a, ∀ ∈a M

(1)

(f o f −1)( )b = f f( −1( )b ) = f a( ) = b, ∀ ∈b N

Fie acum P şi Q două mulţimi. Spunem că P şi Q sunt echipotente sau că au acelaşi cardinal dacă există o aplicaţie bijectivă f : P → Q (evident atunci există şi f −1:Q → P). Relaţia de echipotenţă este o relaţie de echivalenţă, adică P ∼ Q ⇔

⇔ P şi Q sunt echipotente atrage după sine faptul că relaţia “ ∼ “ este o relaţie binară de echivalenţă.

Spunem despre o mulţime M că este finită dacă ea este echipotentă cu o parte mărginită a mulţimii numerelor naturale. Dacă P este echipotentă cu {1, 2, …, n} spunem că P are n elemente sau că are cardinalul n, adică card (P) = n.

O mulţime P se numeşte numărabilă dacă este echipotentă cu mulţimea numerelor naturale; notăm acest fapt prin card (P) = χ0 (prin alef zero fiind notat cardinalul numerelor naturale).

O mulţime care este finită sau numărabilă se numeşte cel mult numărabilă.

Dintre proprietăţile mulţimilor numărabile amintim :

1. reuniunea unui şir de mulţimi numărabile este o mulţime numărabilă;
2. produsul cartezian a doua mulţimi numărabile este numărabilă; (4) o reuniune numărabilă de mulţimi finite este cel mult numărabilă.

În continuare ne vom referi la câteva proprietăţi ale mulţimii numerelor reale.

Mulţimea numerelor reale **R** este nenumarabilă (nu poate fi pusă în corepondenţă biunivocă cu mulţimea numerelor naturale). Notăm card **R =** χ (alef) şi spunem că **R** are cardinalul χ sau că este de puterea continuului .

De asemenea orice interval de forma (a, b) cu a < b este echipotent cu **R**, mulţimea **Q** este numărabilă iar mulţimea **R** - **Q** este nenumarabilă, aşadar putem spune că există “ mai puţine “ numere raţionale decât numere iraţionale. Dacă considerăm funcţiile : x

1. f:(−1 1,− ) → R f x, ( ) =

x

−

1

2

1. f: o,( ∞ →) R,f(x) = lnx
   1. − x
2. f a b:( , ) → (0,∞), ( )f x =

x − b

c − d ad − bc

1. f a b:( , ) → (c d f x, ), ( ) = ⋅d +
   1. − b a − d

vom constata că toate sunt bijecţii şi deci mulţimile care apar mai sus sunt toate echipotente între ele şi au acelaşi cardinal cu **R**.

Următoarea proprietate a numerelor reale este cunoscută sub numele de proprietatea lui Arhimede : Pentru orice numere reale fixate x, y ∈ **R**, x > 0 există n ∈ **N** astfel încât nx ≥ y.

Aşadar se poate parcurge o distanţă oricât de mare y dar finită cu paşi oricât de mici x, căci există n ≥ 1 astfel ca x142 3+ x+...4+x ≥ y.

n

Fie acum In = [an n,b ] n ≥ 0 un şir de intervale închise de numere reale astfel ca I0 ⊃ I1 ⊃ I2 ⊃...⊃In⊃ In+1 ⊃..., şi dacă l I( n) este lungimea intervalului

In, adica l I( n) = bn − an şi lim In = 0 atunci lema (proprietatea ) intervalelor

n→∞

închise incluse afirma că intersecţia IIn , a acestor intervale este nevidă şi se

n≥0

reduce la un punct.

Remarcăm că închiderea intervalelor este esenţială fiindcă dacă luam, de exemplu, In = ⎛⎜⎝0, n1⎤⎥⎦ atunci celelalte condiţii de mai sus sunt îndeplinite şi totuşi

IIn =∅ .

n≥1

În practică mulţimea **R** a numerelor reale nu este suficientă pentru a exprima rezultatele obţinute. Chiar rezolvarea unei ecuaţii de gradul al doilea cu coeficienţi reali necesită introducerea numerelor complexe

**C = R** + i**R =** {x + iy : x, y ∈ **R**, i2 = −1}**.**

**Definiţi imaginea directă şi imaginea inversă a unei submulţimi printr-o funcţie.**

**Definiţi funcţia injectivă , funcţia surjectivă, funcţia bijectivă şi funcţia inversabilă.**

**Daţi exemplu de mulţimi finite şi mulţimi numărabile.**

|  |
| --- |
| **Probleme finale :**    **1. Să se figureze în plan mulţimile:**   1. **A = {(x , y)** ∈ **R2** | **x – y2** ≤ **0 , x – y > 1 }** 2. **B = {(x , y)** ∈ **R2** | **2x2 + y2 = 1 , x , y** ≥ **0 }**      1. **Fie A = {-2 , -4}** ∪ **(-1 , 0] şi B = [-2 , 1)** ∪ **{3}** ∪ **[5 , +**∞**). Să se determine A** ∪ **B , A** ∩ **B , A – B , A x B , (A** ∪ **B) –(B – A).**      1. **Să se compare mulţimile:**   **A = {(x , y)** ∈ **R2** | **x + y= 5 } şi B = {(x , y)** ∈ **R2** | **2x2 + 2y2** ≥ **25 }.**     1. **Fie A = {x** ∈ **R** | **2** ≤ **x** ≤ **5 } şi B = { x** ∈ **R** | **3** ≤ **x** ≤ **10}. Să se verifice egalitatea C(A** ∪ **B) = CA** ∩ **CB.**      1. **Fie A = {1,2,3,4} şi relaţia** ρ⊂ **A2 ,** ρ **= {(1,1),(1,2),(2,1),(1,3),(2,2),(3,1)**   **(2,3),(3,3),(3,2)}. Să se verifice că** ρ **este o relaţie binară : reflexivă, simetrică, antisimetrică şi transitivă.**     1. **Fie E = {1,2,3,4} şi relaţia** ρ⊂ **R2, (x,y)** ρ **(x’,y’)** ⇔ **xy’ = x’y.**   **Să se arate că** ρ **este o relaţie binară de echivalenţă. Determinaţi clasele de echivalenţă C(1,2) şi C(2,3).**     1. **Fie relaţia** ρ⊂ **N2 definită astfel x** ρ **y** ⇔ **x** ⏐**y. Să se verifice că** ρ **este o relaţie de ordine pe N.** *x* 2. **Să se arate că funcţia f: R** → **(-1,1), unde f(x) = este bijectivă .**   1+ *x*   1. **Să se arate că funcţia f: (0, +**∞**)** → **(0,1), unde f(x) = Error! este inversabilă. Determinaţi inversa sa.**      1. **Să se arate că mulţimea A =(-1,1) are acelaşi cardinal ca şi mulţimea numerelor reale R .** |