

# RELATII METRICE IN TRIUNGHIUL DREPTUNGHIU CLASA a 7-a

**Autori** :-

Prof. **V. Corcalciuc**

Prof. **Dragos Constantinescu**

# Cuprins

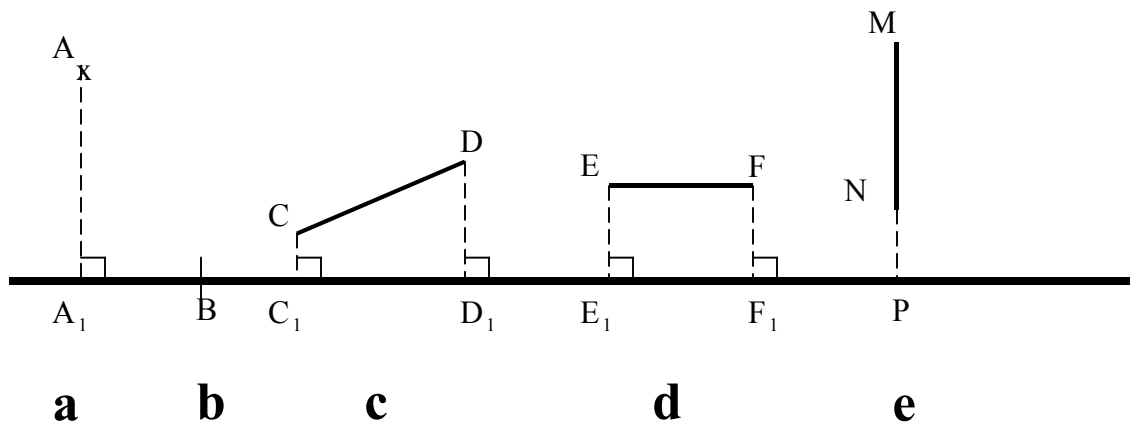
1. Proiecții ortogonale.....	3
2. Teorema înălțimii în triunghiul dreptunghic.....	4
3. Teorema catetei.....	5
4. Teorema lui Pitagora.....	7
5. Aplicații.....	8

# 1. Proiecții ortogonale

## Definiția 1

- Proiecția ortogonală a unui punct pe o dreaptă este piciorul perpendicularei duse din acel punct pe dreapta.

**Schiță :**

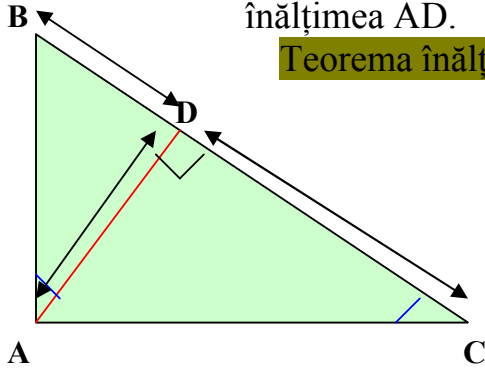


**Deducții :**

- Proiecția punctului A este tot un punct,  $A_1$ ;
- Proiecția punctului B care se afla chiar pe dreapta de proiecție este tot punctul B;
- Proiecția segmentului CD este tot un segment, segmentul  $C_1D_1$ . (se va vedea în lecțiile următoare ca acest segment este mai mic decât segmentul inițial);
- Proiecția segmentului EF care este paralel cu dreapta de proiecție, este un segment egal cu segmentul inițial;
- Proiecția segmentului MN care este perpendicular pe dreapta de proiecție, este un punct, P;

## 2. Teorema înălțimii în triunghiul dreptunghic

Se da  $\Delta ABC$  dreptunghic în A. Se duce înălțimea AD.



**Teorema înălțimii** spune ca:

**Înălțimea este media geometrică a proiecțiilor catetelor pe ipotenuză.**

Matematic scriem :

$$\boxed{AD^2 = BD \cdot DC}$$

### Demonstrație:

$\Delta ABD \sim \Delta ADC$  ( $\angle BAD \equiv \angle ACD$  fiind unghiuri cu laturi perpendiculare)

Rezulta ca  $\frac{AD}{DC} = \frac{BD}{AD} \rightarrow AD^2 = BD \cdot DC$

### Reciprocele teoremei înălțimii:

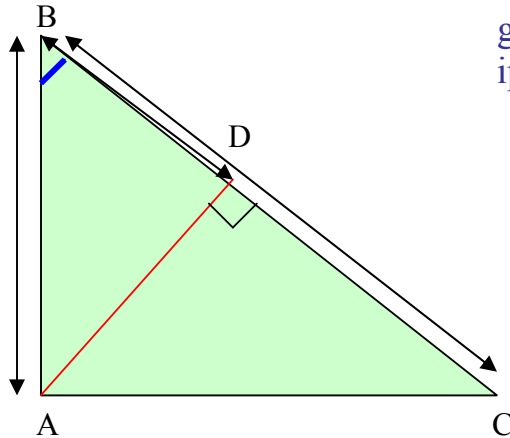
1. Dacă în  $\Delta ABC$ ,  $\angle BAC = 90^\circ$  și  $AD^2 = BD \cdot DC$  atunci  $\boxed{AD \perp BC}$
2. Dacă în  $\Delta ABC$ ,  $AD \perp BC$  și  $AD^2 = BD \cdot DC$ , atunci  $\boxed{\angle BAC = 90^\circ}$

## Exercițiu temă.

Se da triunghiul dreptunghic ABC cu unghiul A de  $90^\circ$  și  $AD \perp BC$ . Sa se completeze tabelul :

<b>BD</b>	2		8		27	0,2	1,5
<b>DC</b>	8	63		16		5	
<b>BC</b>	10	70	26				6,5
<b>AD</b>	4			12	12		

### 3. Teorema catetei



Intr-un triunghi dreptunghic, cateta este media geometrica a lungimii proiecției sale pe ipotenuza și ipotenuza.

$$\boxed{AB^2 = BD \cdot BC}$$

#### Demonstrație:

$\Delta ABD \sim \Delta ABC$   
( $\angle B$  este comun)

$$\text{Deci } \frac{AB}{BC} = \frac{BD}{AB} \rightarrow AB^2 = BD \cdot BC$$

**Observație** : pentru cateta AC  $\rightarrow \boxed{AC^2 = DC \cdot BC}$

### **Teorema reciproca 1:**

Daca intr-un triunghi ABC,  $AD \perp BC$  si  $AB^2 = BD \cdot BC \rightarrow \boxed{\angle BAC = 90^\circ}$

### **Teorema reciproca 2:**

Daca intr-un triunghi ABC  $\angle BAC = 90^\circ$  si  $AB^2 = BD \cdot BC \rightarrow \boxed{AD \perp BC}$

### **Exercițiu temă**

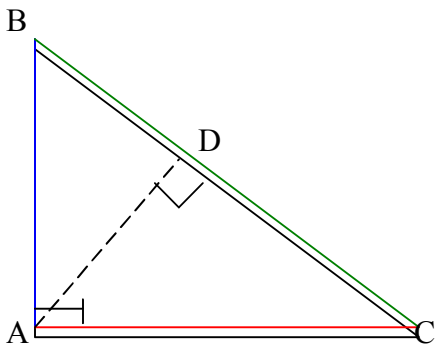
Sa se completeze tabelul de mai jos

<b>BD</b>	<b>DC</b>	<b>AB</b>	<b>AC</b>	<b>BC</b>
<b>6</b>	12			
	3,2			5
<b>9</b>		15		
	27,2		34	

## 4. Teorema lui Pitagora

Intr-un triunghi dreptunghic, pătratul lungimii ipotenuzei este egal cu suma pătratelor lungimilor catetelor.

$$\boxed{BC^2 = AB^2 + AC^2}$$



### Demonstrație

In  $\Delta ABC$  aplicăm de două ori teorema catetei:

$$AC^2 = DC \cdot BC$$

$$AB^2 = BD \cdot BC$$

Adunăm relațiile:

$$AC^2 + AB^2 = DC \cdot BC + BD \cdot BC =$$

$$= BC(DC + BD) = BC \cdot BC \Rightarrow \Rightarrow BC^2 + AB^2 = BC^2$$

### Teorema reciproca.

Dacă într-un triunghi suma pătratelor a două laturi este egală cu pătratul laturii a treia, atunci triunghiul este dreptunghic.

## Exercițiu temă

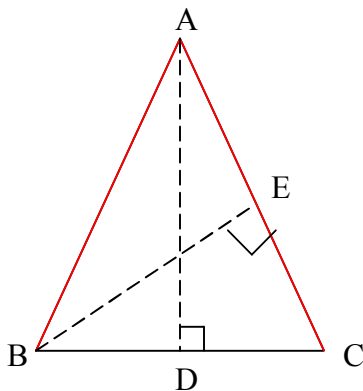
Sa se completeze tabelul știind ca triunghiul este dreptunghic in A si AD este înălțimea.

<b>AB</b>	15	8		12			25
<b>AC</b>	20	8	20		1		
<b>BC</b>			29	13	2,6	64	
<b>BD</b>						8	
<b>AD</b>							7

## Aplicații.

1. Sa se calculeze înălțimile într-un triunghi isoscel ABC in care  $AB=AC=10$  si  $BC=12$ .

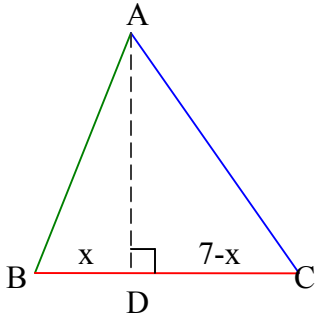
### Soluție



- In  $\Delta ABC$  ducem  $AD \perp BC$  si  $BE \perp AC$
- In  $\Delta ACD$  aplicam T. Pitagora:  $AD^2 = AC^2 - DC^2 = 100 - 36 = 64$
- Rezulta ca  $AD = 8$ .
- Dar  $AD \cdot BC = BE \cdot AC \Rightarrow BE = \frac{AD \cdot BC}{AC} = \frac{8 \cdot 12}{10} = 9,6$



2. Sa se calculeze înălțimea într-un triunghi oarecare cu laturile  $AB=5$ ;  $AC=6$ ;  $BC=7$



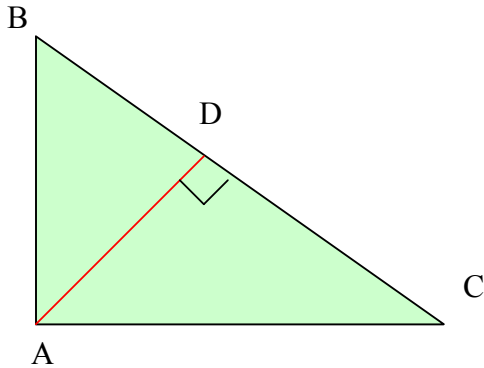
- Calculăm înălțimea din A. (celelalte se calculează în mod asemănător exercițiului precedent)
- Notăm BD cu  $x$  și DC cu  $7-x$
- Aplicăm teorema lui Pitagora în cele două triunghiuri dreptunghice formate:

$$AD^2 = AB^2 - BD^2 = 25 - x^2$$

$$AD^2 = AC^2 - DC^2 = 36 - (7-x)^2 = -13 + 14x - x^2$$

• Rezulta ca  $25 - x^2 = -13 + 14x - x^2 \Rightarrow x = \frac{19}{7} \Rightarrow BD = \frac{19}{7} \Rightarrow AD = \sqrt{25 - \left(\frac{19}{7}\right)^2} = \frac{12\sqrt{6}}{7}$

3. Fie triunghiul dreptunghic  $ABC$  ( $\angle A = 90^\circ$ ),  $AD \perp BC, D \in (BC)$ . Demonstrați relațiile :  $AD \cdot BC = AB \cdot AC$  (1);  $\frac{1}{AD^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2}$  (2)



**Observație** : relațiile (1) și (2) au numeroase aplicații. Ele pot fi « botezate » astfel : a doua, respectiv a treia teorema a înălțimii.