MINISTERUL EDUCAȚIEI ȘI ÎNVĂȚĂMÎNTULUI

CONSTANTIN UDRIȘTE
CONSTANTIN RADU
CONSTANTINA DICU
ODETTA MĂLĂNCIOIU

ALGEBRĂ, GEOMETRIE ȘI ECUAȚII DIFERENȚIALE

COORDONATOR: CONF. DR. CONSTANTIN UDRIȘTE

EDITURA DIDACTICĂ ȘI PEDAGOGICĂ – BUCUREȘTI

Manuscrisul lucrării a fost analizat şi aprobat de colectivul catedrei Matematici I, de Consiliul profesoral al Facultăţii de transporturi şi de Biroul senatului Institutului politehnic Bucureşti.

Redactor: DRĂGHICI ELEONORA

Tehnoredactor: PROSAN ILINCA

PREFAȚĂ

Această carte se adresează studenților de la institutele de învățămînt superior tehnic și cadrelor didactice de specialitate. De asemenea ea mai poate fi folosită și de către studenții și cadrele didactice de la alte forme de învățămînt superior, materialul conținînd algebră liniară, geometrie analitică, geometrie diferențială și ecuații diferențiale.

Algebra liniară este expusă în cinci capitole (Recapitulare – matrice și determinanți, Spații vectoriale, Transformări liniare, Valori și vectori proprii, Forme biliniare și pătratice). Prin acestea se ating problemele de bază ale teoriei elementare a spațiilor vectoriale, care au aplicații relativ imediate în disciplinele ce se predau viitorilor ingineri. Punctul de vedere acceptat în prezentarea noțiunilor decurge din experiența căpătată de autori în orele de curs și seminar și reflectă opinia materialelor bibliografice de referință, inclusiv a cursului de Analiză matematică care se predă în paralel. Informația este prelucrată corespunzător nivelului anului întîi de facultate.

Geometria analitică în E_3 cuprinde șase capitole (Vectori liberi, Dreapta și planul în spațiu, Schimbări de repere carteziene, Conice, Cuadrice, Coordonate polare și semipolare). Prin conținutul acestor capitole se acoperă necesarul de noțiuni de geometrie analitică pentru viitorii ingineri, iar varianta de prezentare pune în evidență că vectorii liberi constituie un bun model-instrument atît pentru partea de geometrie cît și pentru mecanică, fizică etc. Conicele și cuadricele sînt privite ca mulțimi de nivel constant, fapt familiar celorlalți specialiști care concură la formarea inginerilor. Reducerea la forma canonică a ecuației unei conice sau cuadrice este expusă atît cu ajutorul roto-translațiilor cît și cu metoda valorilor și a vectorilor proprii procurată de teoria formelor pătratice.

Geometria diferențială este prezentată în patru capitole (Noțiuni introductive, Curbe, Suprafețe, Algebră și analiză tensorială). Pentru o cît mai bună apropiere de Analiza matematică *conceptele sînt expuse direct pe $\mathbb{R}^n$, modelul standard de spațiu euclidian (în special $n = 2, 3$). De asemenea se scoate în evidență că geometria diferențială elementară modernă folosește cu precădere conceptele de vector legat și cel de cîmp vectorial, instrumente de lucru accesibile la nivelul anului întîi de facultate. Avîndu-se în vedere formația unui viitor inginer, în primele trei capitole se insistă cu precădere pe introducerea riguroasă a noțiunilor, pe aspectele locale și globale ale teoriei curbelor și suprafețelor, pe elementele intrinseci ale unei curbe sau unei suprafețe și pe formule de calcul. În capitolul al patrulea se expun elementele de bază, introductive, ale algebrei și analizei tensoriale, într-o variantă care garantează generalitatea și aplicabilitatea conceptelor.*

Ecuațiile diferențiale sînt expuse în cinci capitole (Ecuații diferențiale de ordinul întîi. Probleme și metode de rezolvare, Ecuații diferențiale liniare, Sisteme diferențiale liniare de ordinul întîi, Linii și hipersuprafețe de cîmp). Modelul de prezentare este relativ propriu, comun cu restul lucrării. Se insistă atît pe introducerea riguroasă a conceptelor cît și pe metodologia de calcul, toate prezentate pe fondul de [illegible] specifice cazurilor mai frecvente și mai bine cunoscute.

În toată lucrarea exemplele și problemele care însoțesc textul sînt de bază, asigură o bună funcționalitate și garantează aprofundarea noțiunilor. Unele dintre acestea au conținut pur matematic, altele sînt împrumutate din disciplinele aplicate. Terminologia și notațiile au fost selectate cu grijă pentru a se evita diferențele de înțelegere ce țin mai mult de formă decît de conținut.

Sîntem îndatorați autorilor citați în bibliografie, profesorilor, colegilor, studenților și familiilor noastre care ne-au influențat modul de a gîndi și ne-au ajutat la realizarea acestei lucrări.

martie 1982 **Autorii**

CUPRINS

I. ALGEBRĂ LINIARĂ

2. GEOMETRIE ANALITICĂ ÎN E_3

[illegible] GEOMETRIE DIFERENȚIALĂ

4. ECUAŢII DIFERENŢIALE

1

ALGEBRĂ LINIARĂ

Capitolul I

RECAPITULARE: MATRICE ŞI DETERMINANŢI

1.1. Fie $I_{m,n} = \{(i, j) \mid i = 1, 2, \ldots, m;\ j = 1, 2, \ldots, n\}$. Orice funcţie A definită pe $I_{m,n}$ şi cu valori într-un corp se numeşte *matrice*. Dacă $A(i, j) = a_{ij}$, valorile a_{ij} se numesc *elementele matricei* şi tradiţional ele sînt dispuse într-un tabel dreptunghiular cu m linii şi n coloane

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \ldots & a_{2n} \\ a_{m1} & a_{m2} \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

O matrice de tipul $m \times n$ se mai numeşte şi *matrice dreptunghiulară* şi prescurtat se notează prin $A = [a_{ij}]$.

O matrice de tipul $m \times 1$ se numeşte *matrice (vector) coloană*, iar o matrice de tipul $1 \times n$ se numeşte *matrice (vector) linie*. Dacă $m = n$, atunci matricea A se numeşte *pătratică*, iar n se numeşte *ordinul* matricei.

1.2. Matricea care se obţine din A prin schimbarea liniilor în coloane (sau a coloanelor în linii) se numeşte *transpusa* lui A şi se notează cu A^t.

1.3. Fie $\mathbb{K}$ unul dintre corpurile $\mathbb{R}$ sau $\mathbb{C}$, şi $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ mulţimea matricelor de tipul $m \times n$ cu elemente din $\mathbb{K}$. Adunarea matricelor şi respectiv înmulţirea cu scalari se definesc ca în liceu: dacă $A = [a_{ij}]$ şi $B = [b_{ij}]$ aparţin lui $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, atunci $A + B = [a_{ij} + b_{ij}]$ şi respectiv $kA = [ka_{ij}]$, $k \in \mathbb{K}$.

Adunarea matricelor are proprietăţile

$$A + B = B + A,$$

$$(A + B) + C = A + (B + C),$$

$$A + O = A,$$

$$A + (-A) = O,$$

unde O este *matricea zero*, iar $-A$ este *opusa* lui A.

Exerciţiu. [illegible] matricei [illegible] din $\mathbb{K}$.

1.4. Dacă $A = [a_{ij}]$ este o matrice de tipul $m \times n$, iar $B = [b_{jk}]$ este o matrice de tipul $n \times p$, atunci prin *produsul* AB a lor două matrice se înţelege matricea

$$AB = \left[\sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk}\right]$$

de tipul $m \times p$. Înmulţirea matricelor are proprietăţile

$$(AB)C = A(BC),$$

$$A(B + C) = AB + AC,$$

$$(B + C)D = BD + CD.$$

Matricele X şi Y cu proprietatea $XY = YX$ vor fi numite *comutabile*.

Produsul dintre un scalar şi o matrice are proprietăţile:

$$1A = A,$$

$$(kl)A = k(lA),$$

$$(k + l)A = kA + lA,$$

$$k(A + B) = kA + kB.$$

1.5. O matrice pătratică A pentru care $A = {}^tA$ ($A = -{}^tA$) se numeşte *simetrică* (*antisimetrică*). Orice matrice pătratică poate fi scrisă în mod unic ca suma dintre o matrice simetrică şi o matrice antisimetrică.

1.6. O matrice pătratică $A = [a_{ij}]$ care are proprietăţile $a_{ij} = 0$, $i \neq j$ şi $\exists\, l$ aşa ca $a_{ll} \neq 0$ se numeşte *matrice diagonală*. O matrice diagonală în care $a_{ll} = 1$, $l = 1, 2, \ldots, n$, se numeşte matrice unitate şi se notează cu I. Avem $IA = AI = A$.

1.7. O matrice pătratică care satisface condiţia ${}^tAA = I$ se numeşte matrice ortogonală.

1.8. Dacă A este o matrice pătratică, atunci puterile naturale ale lui A se definesc inductiv:

$$A^0 = I,\ A^n = AA^{n-1} \text{ pentru } n = 1, 2, \ldots$$

1.9. Fie mulţimea $J_n = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$. O aplicaţie bijectivă $\sigma : J_n \to J_n$ se numeşte *permutare* a mulţimii J_n şi se notează prin

$$\sigma = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \ldots \alpha_n \\ \sigma(\alpha_1) & \sigma(\alpha_2) \ldots \sigma(\alpha_n) \end{pmatrix}$$

Signatura unei permutări σ se defineşte prin

$$\varepsilon_\sigma = \begin{cases} +1, & \text{dacă } \sigma \text{ este o permutare pară} \\ -1, & \text{dacă } \sigma \text{ este o permutare impară.} \end{cases}$$

1.10. *Simbolul lui Kronecker*,

$$\delta^i_j = \begin{cases} 1, & \text{dacă } i = j \\ 0, & \text{dacă } i \neq j. \end{cases}$$

1.11. Presupunem că indicii $i_1, i_2, \ldots, i_n$ şi $j_1, j_2, \ldots, j_n$ iau valori din mulţimea $\{1, 2, \ldots, m\}$, unde $m \geqslant n$. Definim *simbolul lui Kronecker generalizat*:

$$\delta^{i_1, i_2, \ldots, i_n}_{j_1, j_2, \ldots, j_n} = \begin{cases} 0, & \text{dacă întregii } (i_1, i_2, \ldots, i_n) \text{ sau } (j_1, j_2, \ldots, j_n) \text{ nu sînt distincţi,} \\ 0, & \text{dacă întregii } (i_1, i_2, \ldots, i_n) \text{ şi } (j_1, j_2, \ldots, j_n) \text{ sînt distincţi dar mulţimile } \{i_1, i_2, \ldots, i_n\} \text{ şi } \{j_1, j_2, \ldots, j_n\} \text{ nu sînt egale} \\ \varepsilon_\sigma, & \text{dacă întregii } (i_1, i_2, \ldots, i_n) \text{ şi } (j_1, j_2, \ldots, j_n) \text{ sînt distincţi, iar mulţimile } \{i_1, i_2, \ldots, i_n\} \text{ şi } \{j_1, j_2, \ldots, j_n\} \text{ sînt egale, unde} \\ & \sigma = \begin{pmatrix} i_1 & i_2 \ldots i_n \\ j_1 & j_2 \ldots j_n \end{pmatrix} \end{cases}$$

1.12. Cu ajutorul simbolului lui Kronecker generalizat se definește simbolul ε:

$$\varepsilon^{i_1 i_2 \ldots i_n} = \delta^{i_1 i_2 \ldots i_n}_{1\,2 \ldots n}, \quad \varepsilon_{j_1 j_2 \ldots j_n} = \delta^{1\,2 \ldots n}_{j_1 j_2 \ldots j_n},$$

și se constată că

$$\varepsilon^{i_1 i_2 \ldots i_n} \varepsilon_{j_1 j_2 \ldots j_n} = \delta^{i_1 i_2 \ldots i_n}_{j_1 j_2 \ldots j_n}.$$

1.13. Fie $A = [a_{ij}]$ o matrice pătratică cu elemente din cîmpul $\mathbb{K}$ (numere reale sau complexe). Elementul din $\mathbb{K}$ definit prin

$$\det A = \sum_{j_1, j_2, \ldots, j_n = 1}^{n} \varepsilon^{j_1 j_2 \ldots j_n} a_{1j_1} a_{2j_2} \ldots a_{nj_n}$$

se numește *determinantul matricei* A și tradițional se notează prin $|a_{ij}|$ sau

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Vectorii $[a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}]$, $i = 1, 2, \ldots, n$, poartă numele de liniile *determinantului*, iar vectorii ${}^t[a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{nj}]$ $j = 1, 2, \ldots, n$ poartă numele de *coloanele determinantului*.

Numărul n se numește *ordinul determinantului*.

1.14. Dacă A este o matrice pătratică și ${}^tA$ este transpusa sa, atunci $\det A = \det {}^tA$. De aceea orice proprietate referitoare la liniile unui determinant este adevărată și pentru coloane.

1.15. (1) Dacă elementele unei linii (coloane) sînt respectiv sume de cîte doi termeni, atunci determinantul se descompune într-o sumă de doi determinanți.

(2) Dacă elementele unei linii (coloane) se multiplică cu $t \in \mathbb{K}$, atunci determinantul se multiplică cu t. În general $\det(tA) = t^n \det A$, unde n este ordinul lui A și $t \in \mathbb{K}$.

(3) Dacă într-un determinant se schimbă două linii (coloane) între ele, atunci se schimbă și semnul determinantului.

Consecințe: (i) Un determinant este nul dacă: are două linii (coloane) egale sau are două linii (coloane) proporționale sau una din linii (coloane) este o combinație liniară de alte linii (coloane). (ii) Valoarea unui determinant nu se schimbă dacă: schimbăm liniile în coloane de același ordin sau la elementele unei linii (coloane) adăugăm combinații liniare formate cu elementele din celelalte linii (coloane).

1.16. (*Dezvoltările lui Laplace*). Fie determinantul $|a_{ij}|$ de ordinul n atașat matricei $A = [a_{ij}]$.

Determinantul de ordinul $n - 1$ care se obține suprimînd linia i și coloana j din $|a_{ij}|$ se numește *minorul elementului* a_{ij} și se notează cu minor a_{ij}. Numărul cof $a_{ij} = (-1)^{i+j}$ minor a_{ij} se numește *complementul algebric sau cofactorul elementului* a_{ij}.

Avem

$$\sum_{i=1}^{n} a_{pi} \operatorname{cof} a_{qi} = \delta_{pq} \det A, \quad \sum_{k=1}^{n} a_{kp} \operatorname{cof} a_{kq} = \delta_{pq} \det A.$$

1.17. Matricele pătratice A pentru care $\det A \neq 0$ ($\det A = 0$) se numesc *nesingulare* (*singulare*).

1.18. Fie A o matrice pătratică. Matricea A^{-1} care satisface condițiile $AA^{-1} = A^{-1}A = I$ se numește *inversa* lui A.

O matrice pătratică A posedă o inversă dacă și numai dacă $\det A \neq 0$. Această inversă se poate determina astfel: se calculează $\det A \neq 0$; se face transpusa, ${}^tA$, și reciproca A^+ (= matricea ale cărei elemente sînt cofactorii elementelor lui ${}^tA$); $A^{-1} = \frac{1}{\det A} A^+$.

Inversa unei matrice are proprietățile:

$$({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1}),\ (A^{-1})^{-1} = A,$$

$$(kA)^{-1} = \frac{1}{k} A^{-1},\ \text{unde}\ k \in \mathbb{K} - \{0\},$$

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

Cu ajutorul inversei se definesc puterile întregi, negative, ale unei matrice nesingulare:

$$A^{-n} = (A^{-1})^n,\ n = 1, 2, \ldots$$

1.19. Fie $A = [a_{ij}]$ o matrice de tipul $m \times n$ și p un număr natural $\leqslant \min\{m, n\}$. Prin suprimarea în matricea A a $(m - p)$ linii și $(n - p)$ coloane, se obține o matrice pătratică de ordinul p al cărui determinant se numește minor de ordinul p al matricei A.

Dacă A posedă un minor nenul de ordinul p, iar toți minorii de ordinul $p + 1$ sînt nuli sau nu există, atunci numărul p se numește *rangul* lui A. Rezultă:

$$\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} {}^tA,$$

$$\operatorname{rang} AB \leqslant \min(\operatorname{rang} A, \operatorname{rang} B),$$

iar dacă B este o matrice pătratică nesingulară, atunci

$$\operatorname{rang} AB = \operatorname{rang} BA = \operatorname{rang} A.$$

1.20. Fie $A = [a_{ij}]$ o matrice de tipul $m \times n$. Următoarele operații se numesc *transformări elementare*.

(1) Schimbarea a două linii (coloane) între ele.

(2) Înmulțirea elementelor unei linii (coloane) cu un număr nenul.

(3) Adunarea la elementele unei linii (coloane) a elementelor corespondente din altă linie (coloană) înmulțite cu același număr nenul.

Matricele obținute din A prin transformări elementare au același rang ca și matricea A. Mai mult, în cazul în care A este o matrice pătratică nesingulară, inversa A^{-1} poate fi obținută cu ajutorul transformărilor elementare.

1.21. Fie $A = [a_{ij}]$ o matrice de numere reale sau complexe, de tipul $m \times n$, și $b_1, b_2, \ldots, b_m$ niște numere reale sau complexe date. O mulțime de ecuații de forma

$$(*)\quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i,\quad i = 1, 2, \ldots, m,$$

se numește *sistem de m ecuații liniare cu n necunoscute* x_j. Printr-o *soluție* a sistemului se înțelege orice n-uplu $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ care verifică toate ecuațiile sistemului. Matricea A se numește *matricea coeficienților sistemului*.

Fie $B = {}^t[b_1, b_2, \ldots, b_n]$ şi $X = {}^t[x_1, x_2, \ldots, x_n]$. Sistemul $(*)$ este echivalent cu ecuaţia matricială $(**)$ $AX = B$. Matricea $[A \mid B]$ se numeşte *matricea extinsă* a sistemului.

1.22. Sistemul $(*)$ este compatibil dacă şi numai dacă rang A = rang $[A \mid B]$.

Dacă A este o matrice pătratică nesingulară, atunci $(**)$ are soluţia $X = A^{-1}B$.

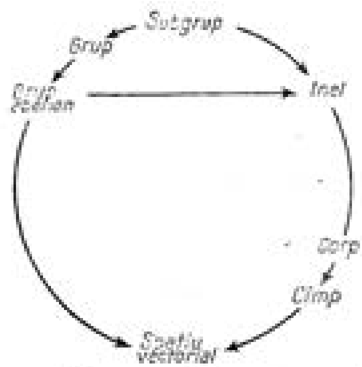
Capitolul 2

SPAŢII VECTORIALE

§ 1. Grupuri

Prin *structură algebrică* înţelegem o mulţime pe care s-au definit un număr finit de legi de compoziţie şi de relaţii împreună cu proprietăţile lor. O lege de compoziţie poate fi o operaţie binară, trinară, ..., n-ară.

Dependenţa structurilor algebrice cele mai des folosite este ilustrată schematic astfel



Înainte de a defini spaţiul vectorial — structură algebrică ce ne propunem să o studiem în acest capitol — reamintim prin definiţii şi exemple noţiunile de grup şi cîmp.

Fie G o mulţime nevidă. O funcţie definită pe $G \times G$ şi cu valori în G se numeşte *operaţie binară pe* G. O operaţie binară pe G se notează cu $*$, valoarea ei se notează cu $g_1 * g_2$ şi se citeşte „g_1 compus cu g_2".

1.1. *Definiţie. O mulţime G împreună cu o operaţie binară $*$ pe G care satisface condiţiile:*

(1) $\forall\, g_1, g_2, g_3 \in G,\ g_1*(g_2*g_3) = (g_1*g_2)*g_3$,

(2) $\exists\, e \in G,\ \forall\, g \in G,\ e*g = g*e = g$,

(3) $\forall\, g \in G,\ \exists\, g' \in G,\ g*g' = g'*g = e$

se numeşte grup.

Un grup se notează fie prin $(G, *)$, fie mai scurt prin G, caz în care operaţia binară se subînţelege din context.

Dacă $\forall g_1, g_2 \in G$, $g_1 * g_2 = g_2 * g_1$, atunci grupul G se numeşte *comutativ* (*abelian*).

Elementul e care satisface (2) se dovedeşte a fi unic şi se numeşte *element neutru*; elementul g' care satisface (3) se dovedeşte a fi unic determinat de g şi se numeşte *simetricul* lui g.

Dacă $*$ este o „adunare", grupul *aditiv* se notează $(G, +)$; atunci e se notează cu 0 şi se numeşte *zero*, iar g' se notează cu $-g$ şi se numeşte *opusul* lui g. Diferenţa $g_1 - g_2$ se defineşte ca fiind suma $g_1 + (-g_2)$.

Dacă $*$ este o „inmulţire", grupul *multiplicativ* se notează $(G, \cdot)$; atunci e se notează cu 1 şi se numeşte *unitate*, iar g' se notează cu g^{-1} şi se numeşte *inversul* lui g.

Exemple. Concretizind mulţimea G şi specificind operaţia binară obţinem grupuri particulare. Astfel pentru următoarele exemple se pot verifica uşor axiomele de grup

1) $(\mathbb{R}, +)$;

2) $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$;

3) $(G, *)$, unde G est e mulţimea matricelor

$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, iar $*$ inmulţirea matricelor;

4) mulţimea bijecţiilor definite pe A şi cu valori în A formează un grup în raport cu compunerea funcţiilor.

1.2. *Definiţie. Fie $(G, *)$ un grup. O submulţime nevidă H a lui G se numeşte subgrup al lui G dacă $\forall g_1, g_2 \in H$, $g_1 * g_2' \in H$.*

Interpretind definiţia putem spune că H este un subgrup al grupului $G, *)$ dacă şi numai dacă H este grup in raport cu $*$.

Exemplu. Fie $G = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ şi $*$ inmulţirea obişnuită. Se verifică uşor că (1) numerele raţionale formează un subgrup, (2) numerele reale pozitive formează un subgrup, (3) numerele iraţionale nu formează un subgrup.

1.3. *Definiţie. Fie $(G_1, *)$ şi $(G_2, \circ)$ două grupuri. O funcţie $\varphi : G_1 \to G_2$ care satisface $\varphi(g_1 * g_2) = \varphi(g_1) \circ \varphi(g_2)$, $\forall g_1, g_2 \in G_1$ se numeşte* **homomorfism.** *Un homomorfism bijectiv se numeşte izomorfism.*

De cele mai multe ori grupurile izomorfe se identifică.

Dacă $G_1 = G_2$ şi $* \equiv \circ$, atunci in loc de homomorfism spunem *endomorfism*, iar in loc de izomorfism spunem *automorfism*.

Exemplu. Grupul Cayley (grup finit cu şase elemente)

	E	A	B	C	D	F
E	E	A	B	C	D	F
A	A	E	D	F	B	C
B	B	F	E	D	C	A
C	C	D	F	E	A	B
D	D	C	A	B	F	E
F	F	B	C	A	E	D

este izomorf cu grupul permutărilor a trei obiecte (grupul simetric S_3),

$$E \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix},\ A \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix},\ B \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix},\ D \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix},\ F \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

şi cu grupul următoarelor matrice

$$E \to \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\ A \to \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\ B \to \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix},$$

$$C \to \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix},\ D \to \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix},\ F \to \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

(operaţia binară este înmulţirea matricelor). Pe de altă parte există un homomorfism de la grupul Cayley la grupul $(\{-1, 1\}, \cdot)$ şi anume

$$\begin{array}{cccccc} E & A & B & C & D & F \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \end{array}$$

Compunînd acest homomorfism cu izomorfismul dintre S_3 şi grupul Cayley se obţine homomorfismul care asociază fiecărei permutări signatura sa.

1.4. *Definiţie. O mulţime* $\mathbb{K}$ *împreună cu două aplicaţii ale lui* $\mathbb{K} \times \mathbb{K}$ *în* $\mathbb{K}$, *numite respectiv adunare şi înmulţire, care satisfac condiţiile*:

(1) *adunarea determină pe* $\mathbb{K}$ *o structură de grup comutativ,*

(2) *înmulţirea determină pe* $\mathbb{K} - \{0\}$ *o structură de grup,*

(3) *înmulţirea este distributivă faţă de adunare, se numeşte corp.* Un corp pentru care şi înmulţirea este comutativă se numeşte *cîmp* (*corp comutativ*).

Un cîmp se notează $(\mathbb{K}; +, .)$ sau mai simplu $\mathbb{K}$.

Exemplu. Tripletele $(\mathbb{Q}; +, .)$, $(\mathbb{R}; +, .)$, $(\mathbb{C}; +, .)$ sînt cîmpuri; operaţiile de adunare şi înmulţire sînt cele obişnuite.

Precizare. În cele ce urmează vom folosi în special cîmpul numerelor reale $\mathbb{R}$ şi cîmpul numerelor complexe $\mathbb{C}$.

§ 2. Spaţii vectoriale

Spaţiul vectorial este una dintre cele mai importante structuri matematice care serveşte şi disciplinelor aplicate.

Această structură constă dintr-un grup aditiv comutativ V, un cîmp $\mathbb{K}$ şi o „înmulţire" definită pe $\mathbb{K} \times V$ cu valori în V care satisface patru axiome.

Notațiile pentru elementele lui V, respectiv $\mathbb{K}$, vor fi potrivite contextului.

2.1. *Definiție. Mulțimea V se numește spațiu vectorial peste cîmpul $\mathbb{K}$ dacă admite*

(1) *o structură de grup comutativ, notată aditiv,*

$$(v, w) \to v + w;$$

(2) *o funcție $f: \mathbb{K} \times V \to V$, $f(k, v) = kv$, astfel încît $\forall k, l \in \mathbb{K}$, $\forall v, w \in V$ să avem:*

$$1v = v,$$
$$k(lv) = (kl)v,$$
$$(k + l)v = kv + lv,$$
$$k(v + w) = kv + kw.$$

Un spațiu vectorial se notează fie prin tripletul $(V, \mathbb{K}, f)$, fie pe scurt prin V. Elementele lui V se numesc *vectori*, elementele lui $\mathbb{K}$ se numesc *scalari*, iar aplicația f se numește *înmulțirea cu scalari*.

Un spațiu vectorial peste cîmpul numerelor reale $\mathbb{R}$ se numește *spațiu vectorial real*. Un spațiu vectorial peste cîmpul numerelor complexe $\mathbb{C}$ se numește *spațiu vectorial complex*. Acestea sînt cele două situații întîlnite mai frecvent în disciplinele aplicate, motiv pentru care noi ne vom referi numai la ele. De aceea ori de cîte ori scriem simplu „spațiu vectorial" subînțelegem că el poate fi real sau complex.

Să prezentăm acum cîteva consecințe directe ale definiției spațiului vectorial, consecințe care constituie punctele de sprijin ale tehnicii calculatorii elementare.

2.2. Teoremă. Dacă V este un spațiu vectorial peste cîmpul $\mathbb{K}$, atunci $\forall v \in V$ și $\forall k \in \mathbb{K}$ au loc următoarele proprietăți:

(i) $0v = 0$,

(ii) $k0 = 0$,

(iii) $(-1)v = -v$.

Demonstrație. (i) Avem $v + 0v =$ (ținem seama de axioma $(2)_1$), $1v + 0v =$ (vezi axioma $(2)_3$), $(1 + 0)v =$ ($\mathbb{K}$ este un grup aditiv), $1v =$ (axioma $(2)_1$), v. Deoarece V este un grup, elementul neutru este unic și deci relația $v + 0v = v$ implică $0v = 0$.

(ii) și (iii) se demonstrează analog.

Pornind de la consecințele anterioare se pot justifica și relațiile:

$$-(kv) = (-k)v = k(-v),$$

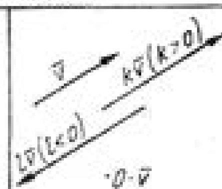
$$(k - l)v = kv + (-l)v = kv + (-lv) = kv - lv,$$

$$k(v - w) = k[v + (-1)w] = kv + (-k)w = kv + (-kw) = kv - kw,$$

$\forall k, l \in \mathbb{K}$ și $\forall v, w \in V$. Drept urmare, adunarea și scăderea elementelor din V, precum și înmulțirea cu scalari au formal proprietățile transformărilor echivalente de la expresiile algebrice elementare.

Alcătuim tabelul 1 pentru a exemplifica spații vectoriale mai des întîlnite. Precizăm mulțimile V și $\mathbb{K}$, adunarea din V și înmulțirea cu scalari, iar verificarea axiomelor o lăsăm pe seama cititorului.

Tabelul 1

Mulțimea V	Cîmpul $\mathbb{K}$	Adunarea din V	Înmulțirea cu scalari
$\mathbb{K}$	$\mathbb{K}$	Adunarea din $\mathbb{K} = V$	Înmulțirea în $\mathbb{K}$
$\mathbb{C}$ mulțimea numerelor complexe	$\mathbb{R}$ mulțimea numerelor reale	Adunarea din $\mathbb{C}$	Înmulțirea dintre un număr real și un număr complex
$\mathbb{K}^n = \underbrace{\mathbb{K}\times\mathbb{K}\times\cdots\times\mathbb{K}}_{n \text{ factori}}$	$\mathbb{K}$	$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ $y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)$ $x=y \Longleftrightarrow x_i=y_i$ $x+y=(x_1+y_1,x_2+y_2,\cdots,x_n+y_n)$ $0=(0,0,\cdots,0)$ originea lui $\mathbb{K}^n$	$x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ $kx=(kx_1,kx_2,\cdots,kx_n)$
Denumire : spațiul vectorial aritmetic cu n dimensiuni			
V_3	$\mathbb{R}$	 $\bar{v}=\bar{w} \Longleftrightarrow$ au aceeași direcție, sens, lungime	
Denumire : spațiul vectorial al vectorilor liberi			
$\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$ mulțimea matricelor de tipul $m\times n$ cu elemente din cîmpul $\mathbb{K}$	$\mathbb{K}$	Adunarea matricelor	Înmulțirea dintre un scalar și o matrice
Denumire : spațiul vectorial al matricelor de tipul $m\times n$			
Mulțimea soluțiilor unui sistem liniar omogen de m ecuații cu n necunoscute, cu coeficienți din $\mathbb{K}$	$\mathbb{K}$	Adunarea din $\mathbb{K}^n$, n = numărul necunoscutelor	$x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ $kx=(kx_1,kx_2,\ldots,kx_n)$
Denumire : spațiul vectorial al soluțiilor sistemului $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j=0;\ i=1,2,\cdots,m$			
$F=\{f \mid f: S\to W\}$ S = mulțime nevidă W = spațiu vectorial peste cîmpul $\mathbb{K}$	$\mathbb{K}$	Adunarea funcțiilor	Înmulțirea unei funcții cu un scalar
Denumire : spațiul vectorial de funcții			
Mulțimea soluțiilor unei ecuații diferențiale ordinare, liniară și omogenă	$\mathbb{R}$	Adunarea funcțiilor	Înmulțirea unei funcții cu un scalar

§ 3. Subspații vectoriale

Fie V un spațiu vectorial peste cîmpul $\mathbb{K}$.

3.1. *Definiție. O submulțime nevidă W a lui V se numește subspațiu vectorial al lui V dacă*

(1) $\forall u, v \in W,\ u + v \in W$

(2) $\forall k \in \mathbb{K},\ \forall u \in W,\ ku \in W$.

Aceste condiții pot fi înlocuite prin condiția echivalentă

$$\forall u, v \in W,\ \forall k, l \in \mathbb{K},\ ku + lv \in W.$$

De asemenea, întrucît adunarea și înmulțirea cu scalari sînt restricții la W ale operațiilor de pe V, perechea $(W, \mathbb{K})$ satisface toate axiomele spațiului vectorial. Prin urmare putem da o definiție echivalentă, aceea că W este un subspațiu vectorial al lui V dacă și numai dacă W este un spațiu vectorial peste $\mathbb{K}$ în raport cu operațiile din V.

Exemple. 1) Fie V un spațiu vectorial peste cîmpul $\mathbb{K}$. Mulțimile $\{0\}$ și V sînt subspații vectoriale ale lui V. Acestea se numesc subspații *improprii*; oricare alt subspațiu al lui V se numește *propriu*.

2) Mulțimea n-uplurilor de forma $(0, x_2, \ldots, x_n)$ este un subspațiu vectorial al lui $\mathbb{K}^n$.

3) Mulțimea funcțiilor impare și mulțimea funcțiilor pare sînt respectiv subspații ale spațiului vectorial real al funcțiilor reale definite pe $(-a, a)$.

3.2. *Definiție. Fie V un spațiu vectorial peste cîmpul $\mathbb{K}$ și S o submulțime nevidă a sa. Un vector $v \in V$ de forma*

$$v = \sum_{i=1}^{p} k_i v_i, \quad unde\ v_i \in S,\ k_i \in \mathbb{K},$$

se numește combinație liniară finită de elemente din S.

3.3. Teoremă. Dacă S este o submulțime nevidă a lui V, atunci mulțimea tuturor combinațiilor liniare finite de elemente din S este un subspațiu vectorial al lui V.

Acest subspațiu se numește *subspațiul generat de submulțimea* S sau *acoperirea liniară a lui* S și se notează cu $L(S)$. Dacă S este mulțimea vidă, atunci prin definiție $L(S) = \{0\}$.

Demonstrație. Suma a două combinații liniare finite de elemente din S este o combinație liniară finită de elemente din S. Produsul dintre un scalar $k \in \mathbb{K}$ și o combinație liniară finită de elemente din S este o combinație liniară finită de elemente din S.

Evident diferite submulțimi de vectori din V pot să genereze același subspațiu. De exemplu mulțimile $\{1, t, t^2, \ldots, t^n\}$, $\left\{1, \frac{t}{1!}, \frac{t^2}{2!}, \ldots, \frac{t^n}{n!}\right\}$, $\{1, (1-t), (1-t)^2, \ldots, (1-t)^n\}$ generează spațiul vectorial al funcțiilor polinomiale care au cel mult gradul n, iar mulțimile $\{1, t, t^2, \ldots, t^n, \ldots\}$,

$\left\{1, \frac{t}{1!}, \frac{t^2}{2!}, \ldots, \frac{t^n}{n!}, \ldots\right\}$, $\{1, (1-t), (1-t)^2, \ldots, (1-t)^n, \ldots\}$ generează spaţiul vectorial al tuturor funcţiilor polinomiale.

3.4. Teoremă. Dacă W_1 şi W_2 sînt două subspaţii ale spaţiului vectorial V, atunci

(1) *mulţimea* $W_1 + W_2 = \{v = v_1 + v_2 \mid v_1 \in W_1, v_2 \in W_2\}$, numită *suma* dintre W_1 şi W_2, este un subspaţiu vectorial al lui V;

(2) intersecţia $W_1 \cap W_2$ este un subspaţiu vectorial al lui V;

(3) reuniunea $W_1 \cup W_2$ nu este un subspaţiu vectorial al lui V.

Demonstraţie. (1) Fie $u, v \in W_1 + W_2$, adică $u = u_1 + u_2$, $v = v_1 + v_2$, unde $u_1, v_1 \in W_1$ şi $u_2, v_2 \in W_2$. Deoarece $u_1 + v_1 \in W_1$ şi $u_2 + v_2 \in W_2$, rezultă că vectorul $u + v = (u_1 + v_1) + (u_2 + v_2)$ aparţine lui $W_1 + W_2$. Fie $k \in \mathbb{K}$. Deoarece $ku_1 \in W_1$ şi $ku_2 \in W_2$ rezultă că vectorul $ku = (ku_1) + (ku_2)$ aparţine lui $W_1 + W_2$.

(2) Fie $u, v \in W_1 \cap W_2$. Rezultă $u, v \in W_1$ şi $u, v \in W_2$. Dar W_1 şi W_2 sînt subspaţii vectoriale. Deci $\forall k, l \in \mathbb{K}$, $ku + lv \in W_1$ şi $ku + lv \in W_2$, adică $ku + lv \in W_1 \cap W_2$.

(3) Fie $v_1 \in W_1$ şi $v_1 \notin W_2$, $v_2 \notin W_1$ şi $v_2 \in W_2$. Rezultă $v_1 + v_2 \notin W_1$, $v_1 + v_2 \notin W_2$ şi deci $v_1 + v_2 \notin W_1 \cup W_2$.

Exemplu. Fie subspaţiile W şi U generate respectiv de vectorii $w_1 = (1,5)$, $w_2 = (-2, -10)$, $w_3 = (3,15)$ şi $u_1 = (-1, -4)$, $u_2 = (-1,2)$, $u_3 = (2,0)$. Să se construiască subspaţiile $W + U$ şi $W \cap U$.

Soluţie. Subspaţiul sumă $W + U$ este acoperirea liniară a vectorilor $w_1, w_2, w_3, u_1, u_2, u_3$, adică $v \in W + U$ este de forma

$$v = k_1w_1 + k_2w_2 + k_3w_3 + k_4u_1 + k_5u_2 + k_6u_3.$$

Subspaţiul $W \cap U$ conţine acei vectori pentru care

$$\alpha_1w_1 + \alpha_2w_2 + \alpha_3w_3 = \beta_1u_1 + \beta_2u_2 + \beta_3u_3.$$

Folosind operaţiile cu vectori obţinem sistemul

$$\alpha_1 - 2\alpha_2 + 3\alpha_3 = -\beta_1 - \beta_2 + 2\beta_3$$

$$5\alpha_1 - 10\alpha_2 + 15\alpha_3 = -4\beta_1 + 2\beta_2.$$

Întrucît rangul matricei sistemului este unu, conform teoremei lui Roché, compatibilitatea este asigurată de anularea determinantului caracteristic $\beta_1 + 7\beta_2 - 10\beta_3 = 0$. Obţinem $\beta_1 = -7\lambda + 10\mu$, $\beta_2 = \lambda$, $\beta_3 = \mu$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Atunci $(-7\lambda + 10\mu)u_1 + \lambda u_2 + \mu u_3 = (6\lambda - 8\mu, 30\lambda - 40\mu) \in W \cap U : \lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

3.5. Teoremă. Fie W_1 şi W_2 două subspaţii vectoriale şi $v \in W_1 + W_2$. Descompunerea $v = v_1 + v_2$ este unică dacă şi numai dacă $W_1 \cap W_2 = \{0\}$.

Demonstraţie. Fie $v = v_1 + v_2 = v_1' + v_2'$. Deoarece $v_1, v_1' \in W_1$ şi $v_2, v_2' \in W_2$ vectorul $u = v_1 - v_1' = v_2' - v_2$ este conţinut în $W_1 \cap W_2$. De aceea $W_1 \cap W_2 = \{0\}$ implică $v_1 = v_1'$, $v_2 = v_2'$, adică unicitatea descompunerii.

Reciproc, unicitatea implică $W_1 \cap W_2 = \{0\}$, deoarece în caz contrar orice vector nenul $w \in W_1 \cap W_2$ ar avea cel puțin două descompuneri $w = w + 0 = 0 + w$.

3.6. *Definiție. Fie W_1 și W_2 două subspații vectoriale ale lui V. Dacă $W_1 \cap W_2 = \{0\}$, atunci suma $W_1 + W_2$ se numește sumă directă și se notează cu $W_1 \oplus W_2$. Dacă în plus $W_1 \oplus W_2 = V$, atunci W_1 și W_2 se numesc subspații suplimentare.*

Exemplu. Subspațiul funcțiilor pare și respectiv impare sînt suplimentare în spațiul vectorial real al funcțiilor reale definite pe $(-a, a)$ întrucît intersecția conține numai funcția zero și $f(x) = \frac{1}{2}[f(x) + f(-x)] + \frac{1}{2}[f(x) - f(-x)]$, $\forall x \in (-a, a)$, $\forall f$ adică orice funcție $f\colon (-a, a) \to \mathbb{R}$ este suma dintre o funcție pară și una impară.

Evident noțiunile de sumă și sumă directă se pot extinde la cazul unui număr finit de subspații vectoriale.

§ 4. Dependență și independență liniară

Fie V un spațiu vectorial peste cîmpul $\mathbb{K}$ și S o submulțime de elemente din V.

4.1. *Definiție. Mulțimea S se numește liniar dependentă dacă există o mulțime finită de elemente distincte din S, să zicem $v_1, v_2, \ldots, v_p$ și scalarii $k_1, k_2, \ldots, k_p$ cel puțin unul diferit de zero, astfel încît $\sum_{i=1}^{p} k_i v_i = 0$.*

Mulțimea S se zice liniar independentă dacă nu este liniar dependentă, adică dacă pentru orice alegere a elementelor $v_i \in S$ și a scalarilor $k_i \in \mathbb{K}$, relația $\sum_{i=1}^{p} k_i v_i = 0$ implică $k_1 = k_2 = \ldots = k_p = 0$.

Facem observația că mulțimea S poate fi o mulțime finită sau infinită. De asemenea subliniem și faptul că deși liniar dependența și liniar independența sînt proprietăți specifice unor mulțimi de vectori, adeseori se vorbește direct despre *vectori liniar dependenți*, respectiv *vectori liniar independenți*.

Exemple.

1) $\{v \mid v \neq 0\}$ este liniar independentă; $\{0\}$ este liniar dependentă.

2) Dacă $0 \in S$, atunci S este liniar dependentă. Dacă în S există un vector care se poate exprima ca un multiplu scalar al unui alt vector, atunci S este liniar dependentă.

3) Fie $v_1(t) = e^t$, $v_2(t) = e^{-t}$, $v_3(t) = \operatorname{sh} t$. Deoarece $e^t - e^{-t} - 2\operatorname{sh} t = 0$, mulțimea $\{v_1, v_2, v_3\}$ este liniar dependentă.

4.2. Teoremă. Fie $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_p\} \subset V$ o mulțime liniar independentă și $L(S)$ acoperirea liniară a lui S. Orice mulțime de $p+1$ elemente din $L(S)$ este liniar dependentă.

Demonstrație. Fie $w_i = \sum_{j=1}^{p} a_{ij} v_j$, $i = 1, 2, \ldots, p+1$ vectori arbitrari care aparțin lui $L(S)$. Relația $k_1 w_1 + k_2 w_2 + \ldots + k_{p+1} w_{p+1} = 0$ conduce la $\sum_{j=1}^{p} \left(\sum_{i=1}^{p+1} k_i a_{ij} \right) v_j = 0$ și întrucît $v_j, j = 1, 2, \ldots, p$ sînt liniar independenți obținem $k_1a_{1j} + k_2a_{2j} + \ldots + k_{p+1}a_{p+1j} = 0$, $j = 1, 2, \ldots, p$. Acest sistem omogen cu p ecuații și $p+1$ necunoscute admite și soluții nebanale. Prin urmare w_i sînt liniar dependenți.

§ 5. Bază și dimensiune

Fie V un spațiu vectorial peste cîmpul $\mathbb{K}$.

5.1. *Definiție. O mulțime* B *de vectori din* V *se numește bază pentru* V *dacă* B *este liniar independentă și generează pe* V.

Utilizînd axioma alegerii se poate demonstra că orice spațiu vectorial diferit de $\{0\}$ admite o bază [21].

Spațiul vectorial V se numește *finit dimensional* dacă are o bază finită sau dacă $V = \{0\}$. În caz contrar V se numește *infinit dimensional*.

5.2. Teoremă. Fie V un spațiu vectorial finit dimensional. Oricare două baze ale lui V au același număr de elemente.

Demonstrație. Fie B și B' două baze ale lui V. Fie n numărul elementelor din B și n' numărul elementelor din B'. Dacă B este independentă și generează spațiul V, teorema 4.2 (orice mulțime formată din $n+1$ vectori este dependentă) implică $n' \leqslant n$. Același raționament pentru mulțimea B' conduce la $n \leqslant n'$; deci $n = n'$.

Teorema 5.2 justifică următoarea *definiție*:

$$\textit{numărul } \dim V = \begin{cases} n, & \textit{dacă } V \textit{ posedă o bază formată din } n \textit{ elemente} \\ 0, & \textit{dacă } V = \{0\} \end{cases}$$

se numește dimensiunea lui V. Un spațiu vectorial cu dimensiunea n se numește *n-dimensional* și se notează cu V_n.

Exemple. Fie $\mathbb{K}^n$ spațiul vectorial aritmetic. Vectorii $e_1 = (1, 0, 0, \ldots, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0)$, $\ldots$, $e_n = (0, 0, \ldots, 0, 1)$ determină o bază $B = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$. Să arătăm că B este independentă: relația $k_1e_1 + k_2e_2 + \ldots + k_ne_n = 0$ este echivalentă cu $(k_1, k_2, \ldots, k_n) = (0, 0, \ldots, 0)$, adică $k_1 = k_2 = \ldots = k_n = 0$. Pe de altă parte $\forall x \in \mathbb{K}^n$, avem $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1e_1 + x_2e_2 + \ldots + x_ne_n$, deci B generează pe V.

2) Spațiul vectorial $\mathbb{K}_n[X]$ al tuturor polinoamelor de grad $\leqslant n$ are dimensiunea $n+1$. Într-adevăr observăm că $B = \{1, X^1, X^2, \ldots, X^n\}$ este independentă, $k_0 + k_1X + k_2X^2 + \ldots + k_nX^n = 0 \Rightarrow k_0 = k_1 = k_2 = \ldots = k_n = 0$ și orice polinom de grad $\leqslant n$ este o combinație liniară finită de elemente din B.

3) Spațiul vectorial $\mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$ al matricelor dreptunghiulare are dimensiunea mn. O bază este mulțimea $B = \{E_{ij}, 1 \leqslant i \leqslant m, 1 \leqslant j \leqslant n\}$, E_{ij} fiind matricea care are elementul 1 la intersecția liniei i cu coloana j, celelalte elemente fiind nule.

4) Fie V un spațiu vectorial complex. Spațiul vectorial real $^{\mathbb{R}}V$ care coincide cu V ca grup aditiv și în care înmulțirea cu un număr real este definită ca în V se numește *trecerea în real* a lui V.

În particular, prin trecerea în real a spațiului n-dimensional $\mathbb{C}^n$ se obține spațiul real de dimensiune $2n$, notat $^{\mathbb{R}}\mathbb{C}^n = \mathbb{R}^{2n}$. Baza $\{e_1, e_2, \ldots, e_n, ie_1, ie_2, \ldots, ie_n\}$ din $^{\mathbb{R}}\mathbb{C}^n$ provine din trecerea în real a bazei $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ din $\mathbb{C}^n$.

5) Fie $\mathbb{K}[X]$ spațiul vectorial al tuturor polinoamelor în nedeterminata X. Polinoamele $1, X, X^2, \ldots, X^n, \ldots$ constituie o bază a lui $\mathbb{K}[X]$ și deci $\dim \mathbb{K}[X] = \infty$.

5.3. Teoremă. Pentru orice spațiu vectorial n-dimensional V_n sînt adevărate următoarele afirmații:

1) O mulțime de vectori liniar independenți din V_n este o submulțime a unei baze din V_n.

2) Orice mulțime formată din n vectori liniar independenți este o bază a lui V_n.

Demonstrație. 1) Dacă $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_p\}$ este o mulțime liniar independentă din V_n, atunci sau $L(S) = V_n$, și deci S este o bază, sau $L(S)$ este o submulțime proprie a lui V_n. În al doilea caz există $v \in V_n - L(S)$ astfel incit $S' = \{v_1, v_2, \ldots, v_p, v\}$ este independentă.

Dacă $L(S') = V_n$, atunci S' este o bază ce conține pe S, iar dacă $L(S')$ este o submulțime proprie a lui V_n, atunci se reia raționamentul făcut pentru S. Repetind raționamentul trebuie să ajungem la o bază, după un număr finit de pași, intrucit dimensiunea spațiului este finită.

În concluzie, mulțimea S poate fi prelungită sau completată pînă la o bază din V_n.

2) Fie S o submulțime liniar independentă care conține n vectori din V_n. Prima parte a teoremei arată că S este o submulțime a unei baze B a lui V_n, iar teorema 5.2 arată că baza B trebuie să aibă n elemente. Deci $S = B$.

Spațiile vectoriale finit dimensionale au un profit deosebit de pe urma prezenței bazelor intrucit in acest caz există posibilitatea introducerii și utilizării coordonatelor fără a se ieși din contextul combinațiilor liniare finite specific algebrei vectoriale. Precizăm însă că explicitarea teoriei coordonatelor impune în mod necesar ordonarea elementelor unei baze și de aceea, în cele ce urmează, printr-o *bază într-un spațiu vectorial finit dimensional se va înțelege o mulțime finită, ordonată, liniar independentă, care generează spațiul respectiv.*

Fie V_n un spațiu vectorial n-dimensional și fie $B = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ o bază în acest spațiu.

5.4. Teoremă. Orice vector $v \in V_n$ admite o exprimare unică de forma $v = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ (numită *descompunerea* lui v după vectorii bazei).

Demonstrație. Deoarece $V = L(B)$, orice vector $v \in V$ poate fi scris ca o combinație liniară de vectorii bazei, adică $v = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$.

Presupunem că vectorul v ar admite și o altă exprimare $v = \sum_{i=1}^{n} x'_i e_i$. Prin scădere obținem $0 = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x'_i) e_i$. Întrucit vectorii e_i sînt liniar independenți, din definiția 4.1 rezultă $x_i - x'_i = 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$ sau $x_i = x'_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Numerele x_i se numesc *coordonatele vectorului v în raport cu baza B*, iar bijecția $f : V_n \to \mathbb{K}^n$ definită prin $v \to (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ se numește *sistem de coordonate* pe V_n.

Uneori vom prefera identificarea $v = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$; în acest caz $kv = (kx_1, kx_2, \ldots, kx_n)$ și dacă $w = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ atunci $v + w = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n)$.

5.5. Teoremă. Dacă W şi U sînt două subspaţii ale spaţiului vectorial V_n, atunci

$$\dim W + \dim U = \dim (W + U) + \dim(W \cap U).$$

Verificăm valabilitatea acestei teoreme pentru subspaţiile date în exemplul teoremei 3.4.

Dimensiunea subspaţiului $W + U$ coincide cu rangul matricei

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 & -1 & 2 \\ 5 & -10 & 15 & -4 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Obţinem $\dim (W + U) = 2$.

Un vector oarecare din subspaţiul $W \cap U$ s-a găsit ca fiind de forma $(6\lambda - 8\mu,\ 30\lambda - 40\mu)$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, astfel încît $\dim(W \cap U) = 1$. Întrucît $\dim W = 1$, $\dim U = 2$, teorema 5.5 se verifică.

Fie V_n un spaţiu vectorial raportat la baza $B = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$. Dacă $v_1, v_2, \ldots, v_p \in V_n$, atunci

$$v_1 = \sum_{i=1}^{n} a_{i1} e_i,\ v_2 = \sum_{i=1}^{n} a_{i2} e_i,\ \ldots,\ v_p = \sum_{i=1}^{n} a_{ip} e_i.$$

Acestor relaţii li se ataşează matricea

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} \ldots & a_{2p} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} \ldots & a_{np} \end{bmatrix}$$

numită *matricea de trecere de la vectorii* $e_1, e_2, \ldots, e_n$ la vectorii $v_1, v_2, \ldots, v_p$. Evident, vectorii $v_1, v_2, \ldots, v_p$ pot fi identificaţi cu coloanele matricei A. De asemenea se ştie că rang A = rang ${}^tA$.

5.6. Teoremă. Rangul matricei A este egal cu numărul maxim al vectorilor coloană liniar independenţi.

Demonstraţie. Ipoteza rang $A = r$, adică

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1r} \\ \ldots & & \ldots \\ a_{r1} & \ldots & a_{rr} \end{vmatrix} \neq 0,$$

implică liniar independenţa vectorilor coloană $v_1, \ldots, v_r$. Fie coloana v_l, unde $r \leqslant l \leqslant p$, şi determinanţii

$$D_i = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1r} & a_{1l} \\ \ldots & & \ldots & \ldots \\ a_{r1} & \ldots & a_{rr} & a_{rl} \\ \hline a_{i1} & \ldots & a_{ir} & a_{il} \end{vmatrix},\quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Fiecare dintre acești determinanți este nul deoarece pentru $i \leq r$, D_i are două linii identice, iar pentru $i > r$, ordinul lui D_i este mai mare decît r. Dezvoltînd pe D_i după ultima linie găsim

$$a_{i1}A_1 + \ldots + a_{ir}A_r + a_{il}D = 0,$$

adică

$$a_{il} = \sum_{j=1}^{r} \lambda_j a_{ij}, \ \lambda_j = \frac{A_j}{D}, \ i = 1, 2, \ldots, n.$$

Aceste relații scalare sînt echivalente cu relația vectorială $v_l = \sum_{j=1}^{r} \lambda_j v_j$, $r < l \leq p$, adică cu faptul că fiecare coloană v_l este o combinație liniară de primele r coloane ale matricei A.

5.7. Consecință. Fie $B = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ o bază a lui V_n. Mulțimea $B' = \left\{e'_j = \sum_{i=1}^{n} c_{ij}e_i, j = 1, \ldots, n\right\}$ este o altă bază a lui V_n dacă și numai dacă det $[c_{ij}] \neq 0$.

Schimbarea bazei. Fie $B = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ și $B' = \{e'_1, e'_2, \ldots, e'_n\}$ două baze distincte în spațiul vectorial V_n. Notăm cu $C = [c_{ij}]$ matricea pătratică ale cărei coloane sînt coordonatele vectorilor bazei B' în raport cu baza B, adică *matricea de trecere* de la baza B la baza B'.

Fie x_i respectiv x'_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ coordonatele aceluiași vector v în raport cu baza B respectiv B'. Prin urmare $v = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ respectiv $v = \sum_{j=1}^{n} x'_j e'_j$. Prelucrăm ultima relație, $v = \sum_{j=1}^{n} x'_j \left(\sum_{i=1}^{n} c_{ij}e_i\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x'_j\right)e_i$. Rezultă $x_i = \sum_{j=1}^{n} c_{ij}x'_j$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Aceste relații caracterizează *transformarea coordonatelor* la o schimbare a bazei; matriceal se scrie $X = CX'$, unde X, X' sînt matricele coloană $X = {}^t[x_1, x_2, \ldots, x_n]$, respectiv $X' = {}^t[x'_1, x'_2, \ldots, x'_n]$.

Spații vectoriale izomorfe. Fie V și W două spații vectoriale peste cîmpul $\mathbb{K}$. O aplicație $\mathscr{T} : V \to W$ care satisface condițiile

$$\mathscr{T}(u + v) = \mathscr{T}(u) + \mathscr{T}(v), \ \forall\, u, v \in V$$

$$\mathscr{T}(ku) = k\mathscr{T}(u), \ \forall\, u \in V, \ \forall\, k \in \mathbb{K}$$

se numește *transformare liniară*.

5.8. *Definiție. O transformare liniară bijectivă se numește izomorfism.*

Un sistem de coordonate pe V_n este un izomorfism canonic între V_n și $\mathbb{K}^n$.

5.9. Teoremă. Două spații vectoriale V și W peste cîmpul $\mathbb{K}$, de dimensiuni finite, sînt izomorfe dacă și numai dacă au aceeași dimensiune.

Demonstrație. Presupunem că V_n și W_m sînt izomorfe, adică există o transformare liniară bijectivă $\mathscr{T} : V_n \to W_m$. Evident $\mathscr{T}(0) = 0$. Fie $B = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ o bază a lui V_n. Mulțimea $\mathscr{T}(B) = \{\mathscr{T}(e_1), \mathscr{T}(e_2), \ldots, \mathscr{T}(e_n)\} \subset W_m$ este liniar independentă, fapt dovedit de următorul șir de implicații : $k_1\mathscr{T}(e_1) + k_2\mathscr{T}(e_2) + \ldots + k_n\mathscr{T}(e_n) = 0 \Rightarrow \mathscr{T}(k_1e_1 + k_2e_2 + \ldots + k_ne_n) = 0 \Rightarrow k_1e_1 + k_2e_2 + \ldots + k_ne_n = 0 \Rightarrow k_1 = k_2 = \ldots = k_n = 0$. Pe de altă parte $\forall\, w \in W_m$, $\exists\, v = \sum_{i=1}^{n} x_ie_i \in V_n$ astfel încît $\mathscr{T}(v) = w$. Rezultă $w = \sum_{i=1}^{n} x_i\mathscr{T}(e_i)$ și deci $\mathscr{T}(B)$ generează pe W_m, adică $n = m$.

Reciproc, fie V_n și W_n. Utilizînd sistemele de coordonate $f : V_n \to \mathbb{K}^n$, $g : W_n \to \mathbb{K}^n$, găsim că $\mathscr{T} = g^{-1} \circ f : V_n \to W_n$ este un izomorfism.

§ 6. Spații vectoriale euclidiene

Adăugăm la structura de spațiu vectorial o nouă noțiune, aceea de produs scalar, cu ajutorul căreia putem defini lungimile, unghiurile, ortogonalitatea etc.

6.1. *Definiție. Fie V un spațiu vectorial complex. O aplicație $(,)$ definită pe $V \times V$ și cu valori în $\mathbb{C}$ care are proprietățile :*

$$(v, w) = \overline{(w, v)}$$

$$(u, v + w) = (u, v) + (u, w)$$

$$k(v, w) = (kv, w)$$

$$(v, v) \geqslant 0\,;\ (v, v) = 0 \Leftrightarrow v = 0,$$

$u, v, w \in V$, $k \in \mathbb{C}$, *se numește produs scalar pe* V.

Axiomele precedente au următoarele consecințe imediate :

$$(v, kw) = \bar{k}(v, w),$$

$$(u + v, w) = (u, w) + (v, w).$$

6.2. Teoremă. Dacă spațiul vectorial complex V este dotat cu un produs scalar, atunci este satisfăcută inegalitatea Cauchy-Schwarz

$$|(v, w)|^2 \leqslant (v, v)(w, w),$$

cu egalitate dacă și numai dacă v și w sînt liniar dependenți.

Demonstrație. Dacă $v = 0$ sau $w = 0$, demonstrația este banală. Presupunem că vectorii v și w sînt nenuli și notăm $z = kv + lw$, unde k și l sînt numere complexe pe care le vom preciza ulterior. Proprietățile produsului scalar implică $0 \leqslant (z, z) = (kv + lw, kv + lw) = k\bar{k}(v, v) + k\bar{l}(v, w) + \bar{k}l(w, v) + l\bar{l}(w, w)$, cu egalitate dacă și numai dacă $z = 0$.

Fie $k = (w, w) > 0$; $\bar{k} = k$ deoarece k este real. Prin simplificare cu k, inegalitatea precedentă devine

$$(w, w)(v, v) + l(v, w) + \bar{l}\overline{(v, w)} + l\bar{l} \geqslant 0.$$

Fie $l = -(v, w)$ și deci $\bar{l} = -\overline{(v, w)} = -(w, v)$. Inegalitatea devine

$$(w, w)(v, v) \geqslant (v, w)(w, v) = |(v, w)|^2.$$

Dacă V este un spațiu vectorial real, atunci în definiția precedentă $\mathbb{C}$ se înlocuiește cu $\mathbb{R}$, axioma $(v, w) = \overline{(w, v)}$ se înlocuiește cu $(v, w) = (w, v)$, consecința $(v, kw) = \bar{k}(v, w)$ devine $(v, kw) = k(v, w)$, iar inegalitatea Cauchy-Schwarz se scrie $(v, w)^2 \leqslant (v, v)(w, w)$.

6.3. *Definiție. Un spațiu vectorial (real sau complex) pe care s-a definit un produs scalar se numește spațiu vectorial euclidian (real sau complex).*

Exemple de spații vectoriale euclidiene canonice. 1) Fie $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ și $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ doi vectori oarecare din spațiul vectorial aritmetic $\mathbb{R}^n$. Funcția reală definită prin

$$(x, y) = x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n$$

este un produs scalar pe $\mathbb{R}^n$.

2) Analog $\mathbb{C}^n$ este un spațiu vectorial euclidian în raport cu

$$(x, y) = x_1\bar{y}_1 + x_2\bar{y}_2 + \ldots + x_n\bar{y}_n.$$

3) Spațiul vectorial real al tuturor funcțiilor cu valori reale, continue pe un interval $[a, b]$, este un spațiu euclidian real în raport cu aplicația definită prin

$$(f, g) = \int_a^b f(x)\, g(x)\, dx.$$

6.4. Teoremă. Fie V un spațiu vectorial euclidian. Funcția $\|\ \| : V \to \mathbb{R}_+$ definită prin $\|v\| = \sqrt{(v, v)}$ este o normă pe V, adică satisface relațiile

$$\|v\| > 0 \text{ pentru } v \neq 0,\ \|0\| = 0,$$

$$\|kv\| = |k|\,\|v\|,\ k = \text{scalar}$$

$$\|v + w\| \leqslant \|v\| + \|w\| \text{ (inegalitatea triunghiului).}$$

Norma din această teoremă se numește *norma euclidiană.*

Demonstrație. Presupunem că V este un spațiu vectorial complex. Inegalitatea $(v, v) \geqslant 0$ implică $\|v\| \geqslant 0$, cu egalitate dacă și numai dacă v este vectorul nul. De asemenea pentru $k \in \mathbb{C}$ și $v \in V$ găsim $\|kv\| = \sqrt{(kv, kv)} = \sqrt{k\bar{k}(v, v)} = \sqrt{|k|^2(v, v)} = |k|\sqrt{(v, v)} = |k|\,\|v\|$, adică și a doua proprietate este satisfăcută. Proprietatea a treia se demonstrează ținînd seama că $(v, w) + \overline{(v, w)} = 2\,\mathrm{Re}(v, w) \leqslant 2|(v, w)|$ și folosind inegalitatea Cauchy-Schwarz transcrisă în forma $|(v, w)| \leqslant \|v\|\,\|w\|$. Într-adevăr, $\|v + w\|^2 = (v + w, v + w) = (v, v) + (v, w) + \overline{(v, w)} + (w, w) \leqslant \|v\|^2 + 2\|v\|\,\|w\| + \|w\|^2 = (\|v\| + \|w\|)^2$.

Primele două proprietăți ale normei asigură că orice element v din V poate fi scris în forma $v = \|v\|e$, unde $\|e\| = 1$. Vectorul e cu proprietatea $\|e\| = 1$ se numește *versor*. Evident, versorul asociat unui vector nenul este $e = \dfrac{1}{\|v\|}\,v$.

Fie V un spațiu vectorial euclidian real. Pe submulțimea $V - \{0\}$, inegalitatea Cauchy-Schwarz, $|(v, w)| \leqslant \|v\|\,\|w\|$, se transcrie

$$-1 \leqslant \frac{(v, w)}{\|v\|\|w\|} \leqslant 1.$$

Această observație justifică următoarea definiție.

6.5. *Definiție. Fie V un spațiu vectorial euclidian real și v, w doi vectori nenuli din V. Numărul $\theta \in [0, \pi]$ definit de egalitatea*

$$\cos\theta = \frac{(v, w)}{\|v\|\|w\|}$$

se numește unghiul dintre v și w.

Denumiri. Un spațiu vectorial dotat cu o normă se numește *spațiu vectorial normat*. Un spațiu vectorial normat în care norma provine dintr-un produs scalar se numește *spațiu prehilbertian*. Un spațiu prehilbertian complet (în sensul că orice șir Cauchy de elemente din spațiu este un șir convergent) se numește *spațiu Hilbert*.

6.6. Teoremă. Fie V un spațiu vectorial normat. Funcția reală definită prin $\mathrm{d}(u, v) = \|u - v\|$ este o distanță (metrică) pe V, adică satisface relațiile

$$\mathrm{d}(u, v) \geqslant 0\,;\ \mathrm{d}(u, v) = 0 \Leftrightarrow u = v,$$

$$\mathrm{d}(u, v) = \mathrm{d}(v, u)$$

$$\mathrm{d}(u, v) \leqslant \mathrm{d}(u, w) + \mathrm{d}(w, v),\ \forall\, u, v, w \in V.$$

Demonstrația este simplă și o lăsăm drept temă pentru cititori. Dacă norma este euclidiană, atunci distanța definită cu ajutorul ei se numește *distanță euclidiană*.

În general o mulțime oarecare înzestrată cu o funcție distanță (metrică) se numește *spațiu metric*. Teorema 6.6 arată că orice spațiu vectorial normat este un spațiu metric.

Exemplu. Fie P_2 spațiul vectorial real al funcțiilor polinomiale reale de grad cel mult doi înzestrat cu produsul scalar $(\ ,\ ) : P_2 \times P_2 \to \mathbb{R}$ definit prin $(p, q) = a_0b_0 + 2a_1b_1 + a_2b_2$, $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$, $q(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2$.

În acest spațiu se consideră vectorii $p_1(x) = 2 + x + 5x^2$, $p_2(x) = 2 + x - x^2$, $p_3(x) = 4 + x + 5x^2$, $p_4(x) = 3 + 3x + 5x^2$ și se cere să se găsească un vector p_0 echidistant acestora ; să se calculeze această distanță.

Soluție. Fie $p_0(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2$; coeficienții c_0, c_1, c_2 se stabilesc din egalitățile $\|p_1 - p_0\| = \|p_2 - p_0\| = \|p_3 - p_0\| = \|p_4 - p_0\|$; obținem $c_0 = 3$, $c_1 = \frac{15}{8}$, $c_2 = 2$.

Distanța cerută este $d = \|p_1 - p_0\| = \sqrt{(p_1 - p_0, \; p_1 - p_0)} = \sqrt{(2-3)^2 + 2\left(1 - \frac{15}{8}\right)^2 + (5-2)^2} = \frac{3}{4}\sqrt{\frac{41}{2}}$.

§ 7. Ortogonalitate

Ortogonalitatea este una dintre cele mai importante relații dintre vectorii unui spațiu vectorial euclidian.

7.1. *Definiție. Fie V un spațiu vectorial euclidian. Doi vectori din V se numesc ortogonali dacă produsul lor scalar este nul. O submulțime $S \subset V$ se numește ortogonală dacă vectorii săi sînt ortogonali doi cîte doi, adică $(v, w) = 0$, $\forall v, w \in S$, $v \neq w$. O mulțime ortogonală se numește ortonormată dacă fiecare element al său are norma egală cu unitatea.*

7.2. Teoremă. Orice mulțime ortogonală dintr-un spațiu vectorial euclidian V formată din elemente nenule este liniar independentă. Dacă $\dim V = n$, atunci orice mulțime ortogonală care conține n elemente nenule este o bază a lui V.

Demonstrație. Fie $S \subset V - \{0\}$ o mulțime ortogonală, iar $k_1v_1 + k_2v_2 + \ldots + k_pv_p$ o oarecare combinație liniară finită de elemente din S. Ipoteza $k_1v_1 + k_2v_2 + \ldots + k_pv_p = 0$ implică

$$k_1(v_j, v_1) + k_2(v_j, v_2) + \ldots + k_p(v_j, v_p) = 0, \; j = \text{fixat din } \{1, 2, \ldots p\}.$$

Punînd pe rînd $j = 1, 2, \ldots, p$ și ținînd seama de ortogonalitate rezultă $k_1(v_1, v_1) = 0$, $k_2(v_2, v_2) = 0, \ldots, k_p(v_p, v_p) = 0$. Pe de altă parte ipoteza $v_j \neq 0$ implică $(v_j, v_j) > 0$ și deci $k_1 = k_2 = \ldots = k_p = 0$, adică S este liniar independentă.

Demonstrarea ultimei părți a teoremei rezultă imediat din teorema 5.3,2).

Pentru studiul spațiilor vectoriale euclidiene este comod să se lucreze cu baze ortonormate. Conform definiției 7.1 baza $B = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\} \subset V_n$ este ortonormată dacă

$$(e_i, e_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ dacă } i = j \\ 0 \text{ dacă } i \neq j \end{cases}$$

Simbolul δ_{ij} se numește *simbolul lui Kronecker*.

Exemplu. În spațiul vectorial $C^0([0, 2\pi])$ al funcțiilor reale, continue pe intervalul $[0, 2\pi]$ în care definim produsul scalar prin aplicația $(f, g) = \int_0^{2\pi} f(x)\, g(x) dx$, considerăm următoarea submulțime infinită de funcții trigonometrice $S=\{f_0, f_1, f_2, \dots\}$ unde $f_0(x)=1$, $f_{2n-1}(x)=\cos nx$, $f_{2n}(x)=\sin nx$, $n=1, 2, \dots$ Întrucît $(f_m, f_n)=0$, $m \neq n$ urmează că S este o mulțime ortogonală; datorită ortogonalității funcțiilor și faptului că S nu conține elementul nul al spațiului $C^0[0, 2\pi]$), urmează că S este independentă. Împărțind fiecare funcție prin norma sa, $\|f_0\|=$ $=\sqrt{(f_0, f_0)}=\sqrt{\int_0^{2\pi} dx}=\sqrt{2\pi}$, $\|f_{2n-1}\|=\sqrt{\int_0^{2\pi}\cos^2 nx dx}=\sqrt{\pi}$, $\|f_{2n}\|=\sqrt{\int_0^{2\pi}\sin^2 nx dx}=$ $=\sqrt{\pi}$, obținem mulțimea ortonormată $\{\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots\}$ unde $\varphi_0(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}$, $\varphi_{2n-1}(x)=\dfrac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}$, $\varphi_{2n}(x)=\dfrac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}$.

Observație. Mulțimea ortogonală S ne ajută să construim seria Fourier a unei funcții periodice.

7.3. *Definiție. Fie V un spațiu vectorial euclidian. Vectorul $\dfrac{(v, w)}{(w, w)}w$, unde $v, w \in V$, $w \neq 0$, se numește proiecția vectorului v pe w, iar numărul $\dfrac{(v, w)}{(w, w)}$ se numește mărimea algebrică a proiecției lui v pe w.*

7.4. Teoremă. Fie spațiul vectorial euclidian V_n. Dacă $B=\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ este o bază ortogonală a lui V și $v=\sum_{i=1}^{n} x_i e_i$, atunci $x_i=\dfrac{(v, e_i)}{(e_i, e_i)}$. În particular, dacă B este o bază ortonormată, atunci $x_i=(v, e_i)$.

Demonstrație. Conform teoremei 5.4, orice vector $v \in V_n$ se scrie unic ca o combinație liniară de vectorii bazei, adică $v=\sum_{j=1}^{n} x_j e_j$. Înmulțim scalar cu vectorul e_i, $i=1, 2, \dots, n$; $(v, e_i)=\sum_{j=1}^{n} x_j(e_j, e_i)=x_i(e_i, e_i)$; rezultă $x_i=\dfrac{(v, e_i)}{(e_i, e_i)}$, adică coordonata x_i este mărimea algebrică a proiecției lui v pe e_i.

Dacă baza este ortonormată, $(e_i, e_i)=1$ și rezultă $x_i=(v, e_i)$. Prin urmare oricare ar fi vectorul $v \in V_n$, raportat la o bază ortonormată, se scrie unic $v=\sum_{i=1}^{n}(v, e_i)e_i$. Coordonatele $x_i=(v, e_i)$, $i=1, 2, \dots, n$ ale vectorului v se numesc *coordonate euclidiene*.

7.5. Teoremă. Dacă V_n este un spațiu vectorial euclidian complex n-dimensional și $B=\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ este o bază ortonormată, atunci $(v, w)=\sum_{j=1}^{n} x_j \bar{y}_j$, unde $x_j=(v, e_j)$, $y_j=(w, e_j)$. În particular, $\|v\|^2=$ $=\sum_{j=1}^{n}|x_j|^2$.

Demonstrație. Prin ipoteză $(e_j, e_k)=\delta_{jk}$ și $v=\sum_{j=1}^{n} x_j e_j$, $w=\sum_{j=1}^{n} y_j e_j$. Ținînd seama de proprietățile produsului scalar

$$(v, w) = \left(\sum_{j=1}^{n} x_j e_j,\ \sum_{k=1}^{n} y_k e_k\right) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} x_j \bar{y}_k (e_j, e_k) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} x_j \bar{y}_k \delta_{jk} = \sum_{j=1}^{n} x_j \bar{y}_j.$$

Fie V un spațiu vectorial euclidian și S o submulțime a sa.

7.6. *Definiție. Un element al lui V se zice ortogonal lui S dacă este ortogonal pe fiecare element din S. Mulțimea tuturor vectorilor ortogonali lui S se numește „S ortogonal" și se notează cu $S^\perp$.*

Se observă că $S^\perp$ este un subspațiu vectorial al lui V, indiferent dacă S este sau nu un subspațiu al lui V. În cazul cînd S este un subspațiu vectorial $S^\perp$ se numește *complementul ortogonal al lui S*.

7.7. Teoremă. Dacă V este un spațiu vectorial euclidian și W_n este un subspațiu n-dimensional al lui V, atunci $V = W_n \oplus W_n^\perp$. Mai mult, dacă $v \in V$, $w \in W_n$ și $w^\perp \in W_n^\perp$, atunci este satisfăcută teorema lui Pitagora $\|v\|^2 = \|w\|^2 + \|w^\perp\|^2$.

Demonstrație. Fie $B = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ o bază ortonormată a lui W_n și $w = \sum_{i=1}^{n} (v, e_i)e_i$ *proiecția* lui $v \in V$ pe subspațiul W_n. Punînd $w^\perp = v - w$ rezultă:

$$(w^\perp, w) = (v, w) - (w, w) = \left(v, \sum_{i=1}^{n} (v, e_i)e_i\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} (v, e_i)e_i, \sum_{j=1}^{n} (v, e_j)e_j\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (v, e_i)^2 - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} (v, e_i)(v, e_j)\ (e_i, e_j) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (v, e_i)^2 - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} (v, e_i)(v, e_j)\delta_{ij} = 0$$

și deci $w^\perp \in W^\perp$. Exprimarea unică $v = w + w^\perp$ arată că $V = W_n \oplus W_n^\perp$.

Teorema lui Pitagora: $\|v\|^2 = (v, v)^2 = (w + w^\perp, w + w^\perp) = (w, w) + 2(w, w^\perp) + (w^\perp, w^\perp) = \|w\|^2 + \|w^\perp\|^2$.

§ 8. Procedeul de ortogonalizare Gram-Schmidt

Fie V un spațiu vectorial euclidian. Ne propunem să arătăm că din orice mulțime liniar independentă de vectori din V se poate construi o mulțime ortonormată (mulțime ortogonală ale cărei elemente au norma 1). În acest sens — prin demonstrațiile teoremelor care urmează — vom pune în evidență *procedeul de ortogonalizare Gram-Schmidt*.

8.1. Teoremă. Dacă V este un spațiu vectorial euclidian cu dimensiunea n, iar $v_1, v_2, \ldots, v_n$ este o bază a lui V, atunci există o bază ortonormată $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ astfel încît mulțimile $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ și $\{e_1, e_2, \ldots, e_k\}$ generează același subspațiu $U_k \subset V$ pentru fiecare $k = 1, 2, \ldots, n$.

Demonstrație. Mai intii construim o mulțime ortogonală și apoi îi normăm elementele. Mulțimea ortogonală $\{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$ se construiește din $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ în felul următor:

1) Se ia $w_1 = v_1$. 2) Se pune $w_2 = v_2 + kw_1$. Vectorul w_2 nu este zero deoarece v_1 și v_2 sint liniar independenți. Se determină k din condiția ca w_2 să fie ortogonal lui w_1, adică $0 = (w_2, w_1) = (v_2 + kw_1, w_1)$. Rezultă $k = -\dfrac{(v_2, w_1)}{(w_1, w_1)}$. Deci $w_2 = v_2 - \dfrac{(v_2, w_1)}{(w_1, w_1)} w_1$, adică vectorul w_2 se obține scăzind din v_2 proiecția lui v_2 pe w_1. 3) Vectorul w_3 este definit prin $w_3 = v_3 + k_1w_1 + k_2w_2$; el este nenul ca urmare a faptului că v_1, v_2, v_3 sint liniar independenți. Scalarii k_1, k_2 sint determinați din condițiile ca w_3 să fie ortogonal lui w_1 și lui w_2, adică

$$0 = (w_3, w_1) = (v_3, w_1) + k_1(w_1, w_1)$$

$$0 = (w_3, w_2) = (v_3, w_2) + k_2(w_2, w_2)$$

Găsim

$$k_1 = -\frac{(v_3, w_1)}{(w_1, w_1)},\ k_2 = -\frac{(v_3, w_2)}{(w_2, w_2)}$$

și deci

$$w_3 = v_3 - \frac{(v_3, w_1)}{(w_1, w_1)} w_1 - \frac{(v_3, w_2)}{(w_2, w_2)} w_2,$$

adică w_3 se obține scăzind din v_3 proiecțiile lui v_3 pe w_1 și pe w_2.

Repetăm schema precedentă pînă obținem o mulțime de n vectori ortogonali $\{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$. Mulțimea ortonormată se găsește definind

$$e_i = \frac{w_i}{\|w_i\|},\ i = 1, 2, \ldots, n.$$

Pentru final se poate arăta că $U_k = L(\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}) = L(\{e_1, e_2, \ldots, e_k\})$.

Exemplu. Fie $\mathbb{R}^3$ spațiul euclidian canonic cu trei dimensiuni. Să se găsească o bază ortonormată pentru subspațiul generat de vectorii $x_1 = (1, 1 -1)$, $x_2 = (3, -1, -1)$, $x_3 = (0, -1, 1)$.

Soluție. Utilizînd procedeul Gram-Schmidt, construim o mulțime ortogonală $\{y_1, y_2, y_3\}$ formată din vectorii nenuli

$$y_1 = x_1 = (1, 1, -1)$$

$$y_2 = x_2 - \frac{(x_2, y_1)}{(y_1, y_1)} y_1 = (3, -1, -1) - \frac{3}{3}(1, 1, -1) = (2, -2, 0)$$

$$y_3 = x_3 - \frac{(x_3, y_1)}{(y_1, y_1)} y_1 - \frac{(x_3, y_2)}{(y_2, y_2)} y_2 = (0, -1, 1) - \frac{(-2)}{3}(1, 1, -1) - \frac{2}{8}(2, -2, 0) =$$

$$= \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{3}\right).$$

Împărțim fiecare vector din baza ortogonală prin norma sa și obținem o bază ortonormată

$$\frac{v_1}{\|v_1\|}=\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}}\right),\ \frac{v_2}{\|v_2\|}=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\ \ 0\right),\ \frac{v_3}{\|v_3\|}=\left(\frac{\sqrt{6}}{6},\frac{\sqrt{6}}{6},\frac{\sqrt{6}}{3}\right).$$

Teorema 8.1 se generalizează în felul următor.

8.2. Teoremă. Fie V un spațiu vectorial euclidian, fie $\{v_1, v_2, \ldots\} \subset V$ o mulțime finită sau infinită și $L(v_1, \ldots, v_k)$ subspațiul generat de primii k vectori. Atunci există o mulțime $\{w_1, w_2, \ldots\} \subset V$ cu următoarele proprietăți, pentru fiecare $k \in \mathbb{N}$,

1) vectorul w_k este ortogonal pe $L(v_1, v_2, \ldots, v_{k-1})$,

2) $L(w_1, \ldots, w_k) = L(v_1, \ldots, v_k)$,

3) $w_1, w_2, \ldots$ sînt unic determinați abstracție făcînd de un factor scalar.

În loc de demonstrație ne mulțumim cu un mic comentariu. Vectorii $w_1, w_2, \ldots, w_k$ au expresiile

$$w_1 = v_1,\ w_{r+1} = v_{r+1} - \sum_{i=1}^{n} \frac{(v_{r+1}, w_i)}{(w_i, w_i)} w_i,\ r = 1, 2, \ldots, k-1,$$

care se dovedesc bune pentru fiecare $k \in \mathbb{N}$. Evident acești vectori sînt construiți astfel incît w_{r+1} să fie ortogonal cu $w_1, w_2, \ldots, w_r$ adică vectorul w_{r+1} se obține scăzind din v_{r+1} proiecțiile lui v_{r+1} pe vectorii $w_1, w_2, \ldots, w_r$. Din mulțimea ortogonală $\{w_1, w_2, \ldots\}$ se obține mulțimea ortonormată $\left\{\frac{w_1}{\|w_1\|}, \frac{w_2}{\|w_2\|}, \ldots\right\}$.

Exemplu. Fie P spațiul vectorial al tuturor funcțiilor polinomiale reale definite pe $[-1, 1]$ înzestrat cu produsul scalar $(v, w) = \int_{-1}^{1} v(t)\, w(t)dt$. Baza acestui spațiu este alcătuită din vectorii $v_n(t) = t^n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ Ortogonalizind această bază cu procedeul Gram-Schmidt, obținem polinoamele Legendre, $w_1(t) = t$, $w_2(t) = t^2 - \frac{1}{3}$, $w_3(t) = t^3 - \frac{3}{5}\, t, \ldots, w_n(t) = \frac{n!}{(2n)!}\frac{d^n}{dt^n}(t^2-1)^n, \ldots$

§ 9. Spații punctuale euclidiene

9.1. Fie $V = \{\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \ldots\}$ un spațiu vectorial euclidian. O mulțime $\mathbb{E} = \{A, B, C, \ldots\}$ se numește spațiu punctual euclidian dacă există o funcție $f: \mathbb{E} \times \mathbb{E} \to V$ astfel încît

(i) $f(A, B) + f(B, C) = f(A, C)$, $A, B, C \in \mathbb{E}$.

(ii) funcțiile parțiale $f_A : \mathbb{E} \to V$ definite prin $f_A(B) = f(A, B)$ sînt bijective.

V se numește *spațiu director*; elementele lui V se numesc *vectori directori*; elementele lui $\mathbb{E}$ se numesc *puncte*; f se numește *funcție de structură afină*.

Spațiul punctual euclidian $\mathbb{E}$ se numește *real (complex)* dacă V este un spațiu vectorial real (complex). *Dimensiunea* lui $\mathbb{E}$ se definește ca fiind dimensiunea lui V. Un spațiu punctual euclidian de dimensiune n va fi notat cu $\mathbb{E}_n$.

9.2. Pentru orice punct $A \in \mathbb{E}$ și orice vector $\bar{v} \in V$ există un singur punct $B \in \mathbb{E}$ astfel încît $\bar{v} = f(A, B)$.

9.3. Există spații punctuale euclidiene care nu sînt spații vectoriale. Orice spațiu vectorial euclidian V este un spațiu punctual euclidian deoarece funcția $f: V \times V \to V$ definită prin $f(\bar{u}, \bar{v}) = \bar{u} - \bar{v}$ satisface (i) și (ii).

9.4. Fie $\mathbb{E}$ un spațiu punctual euclidian, V spațiul vectorial euclidian asociat și f funcția de structură afină. O pereche ordonată (A, B) de puncte din $\mathbb{E}$ se numește ***vector tangent la*** $\mathbb{E}$ în punctul A (*segment orientat, vector legat*). Punctul A se numește *originea* sau *punctul de aplicație* al vectorului tangent, iar B se numește extremitatea sa. Valoarea $f(A, B)$ se numește *partea vectorială* a lui (A, B). Dacă O este originea lui $\mathbb{E}$, atunci (O, B) se numește *vector de poziție* al punctului B.

Mulțimea tuturor vectorilor tangenți la $\mathbb{E}$ în punctul A se numește *spațiu tangent la* $\mathbb{E}$ *în punctul* A și se notează cu $T_A\mathbb{E}$. Această mulțime este un spațiu vectorial euclidian izomorf cu V.

Doi vectori tangenți (A, B) și (C, D) se numesc egali dacă au aceeași parte vectorială $f(A, B) = f(C, D)$ și același punct de aplicație, $A = C$. Doi vectori (A, B) și (C, D) care au aceeași parte vectorială, $f(A, B) = f(C, D)$, dar care au puncte de aplicație diferite, $A \neq C$, se numesc *paraleli*.

Mulțimea tuturor vectorilor tangenți la $\mathbb{E}$ paraleli cu un vector tangent dat se numește *vector liber* și se identifică cu un vector director (element al lui V).

9.5. Un vector legat (A, B) se notează cu $\overrightarrow{AB}$ sau cu $\vec{v}$ dacă $f(A, B) = \vec{v}$; un vector liber se notează fie prin $\overline{AB}$, dacă $\overrightarrow{AB}$ este un segment orientat din mulțimea numită vector liber, fie prin $\bar{v}$ dacă $f(A, B) = \bar{v}$.

9.6. Fie $\mathbb{E}$ un spațiu punctual euclidian. Funcția $d: \mathbb{E} \times \mathbb{E} \to \mathbb{R}_+$ definită prin $d(A, B) = \|\overline{AB}\| = \sqrt{(\overline{AB}, \overline{AB})}$ este o distanță pe $\mathbb{E}$.

9.7. Fie Σ o mulțime închisă din $\mathbb{E}_n$, fie A un punct oarecare din $\mathbb{E}_n$ și B un punct oarecare din Σ. Marginea inferioară

$$d = d(A, \Sigma) = \inf_{B \in \Sigma} d(A, B)$$

se numește *distanța de la A la* Σ. Aceasta este de fapt minimul funcției $B \to d(A, B)$.

Fie Σ_1 și Σ_2 două mulțimi închise din $\mathbb{E}_n$, fie A un punct oarecare din Σ_1 și B un punct oarecare din Σ_2. Marginea inferioară

$$d = d(\Sigma_1, \Sigma_2) = \inf_{A \in \Sigma_1,\, B \in \Sigma_2} d(A, B)$$

se numește *distanța de la* Σ_1 *la* Σ_2. Dacă Σ_2 este compactă și dacă $\Sigma_1 \cap \Sigma_2 = \emptyset$, atunci $d = d(\Sigma_1, \Sigma_2)$ este minimul funcției $(A, B) \to d(A, B)$.

9.8. Fie $\{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n\}$ o bază ortonormată a spațiului director V și O originea spațiului punctual euclidian $\mathbb{E}_n$. Ansamblul $\mathscr{R} = \{O, \vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n\}$ se numește *reper cartezian* în $\mathbb{E}_n$.

Coordonatele $(x_1, \ldots, x_n)$ ale vectorului de poziție $\overrightarrow{OM} = x_1\vec{e}_1 + \ldots + x_n\vec{e}_n$ se numesc *coordonatele carteziene ale punctului* M în raport cu $\mathscr{R}$.

Fie $A(x_1, \ldots, x_n)$ şi $B(y_1, \ldots, y_n)$. Rezultă $\overrightarrow{AB} = (y_1 - x_1)\vec{e}_1 + \ldots + \ldots + (y_n - x_n)\vec{e}_n$, $d(A, B) = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + \ldots + (y_n - x_n)^2}$.

§ 10. Probleme

1. Fie mulţimea $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ pe care definim operaţiile (1) $x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3)$, $\forall x, y \in \mathbb{R}^3$, (2) $kx = (kx_1, 0, kx_3)$, $\forall k \in \mathbb{R}$, $\forall x \in \mathbb{R}^3$, (3) $kx = (kx_1, kx_2, x_3)$, $\forall k \in \mathbb{R}$, $\forall x \in \mathbb{R}^3$.

Formează $\mathbb{R}^3$ un spaţiu vectorial real faţă de operaţiile (1) şi (2)? Dar faţă de (1) şi (3)?

2. Să se arate că mulţimea tuturor şirurilor convergente cu elemente din $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{C}$ sau $\mathbb{K} = \mathbb{R}$) formează un spaţiu vectorial peste $\mathbb{K}$ în raport cu adunarea a două şiruri şi înmulţirea dintre un număr şi un şir.

3. Să se stabilească dacă mulţimea tuturor funcţiilor reale de clasă C^2 pe $U \subset \mathbb{R}^n$ este un spaţiu vectorial real în raport cu adunarea funcţiilor şi înmulţirea dintre un număr şi o funcţie.

4. Idem pentru mulţimea funcţiilor integrabile pe $[a, b]$.

5. Fie V un spaţiu vectorial real. Pe $V \times V$ definim operaţiile

$$(u, v) + (x, y) = (u + x, v + y)$$

$$(a + ib)(u, v) = (au - bv, bu + av), \quad a + ib \in \mathbb{C}.$$

Să se arate că $V \times V$ este un spaţiu vectorial peste $\mathbb{C}$ (acest spaţiu se numeşte *complexificatul* lui V şi îl notăm cu ${}^{\mathbb{C}}V$).

6. Să se stabilească dacă mulţimile

$$A = \{p \in \mathbb{R}_n[X] \mid \exists\, q \in \mathbb{R}_n[X] \text{ a.î. } p(x) = q(x + 1) - q(x),\ \forall x \in \mathbb{R}\}$$

$$B = \{p \in \mathbb{R}_n[X] \mid p(x) = p(x + 1),\ \forall x \in \mathbb{R}\}$$

sînt subspaţii vectoriale ale spaţiului vectorial al polinoamelor cu coeficienţi reali, de grad cel mult n.

7. Să se cerceteze dacă vectorul $v = (1, -2, 0, 3)$ este o combinaţie liniară a vectorilor $u_1 = (3, 9, -4, -2)$, $u_2 = (2, 3, 0, -1)$, $u_3 = (2, -1, 2, 1)$.

8. Dîndu-se subspaţiile W şi U generate respectiv de vectorii $w_1 = (2, 3, 11, 5)$, $w_2 = (1, 1, 5, 2)$, $w_3 = (0, 1, 1, 1)$; $u_1 = (2, 1, 3, 2)$, $u_2 = (1, 1, 3, 4)$, $u_3 = (5, 2, 6, 2)$, să se arate că aceste subspaţii sînt suplimentare şi să se găsească descompunerea vectorului $v = (2, 0, 0, 3)$ pe aceste subspaţii.

9. Să se stabilească care dintre următoarele submulţimi ale lui $C^\infty(\mathbb{R})$ sînt liniar dependente, respectiv liniar independente $\{1, \cos 2x, \cos^2 x\}$, $\{e^x, e^{-x}, \operatorname{ch} x\}$, $\{e^x, xe^x, \ldots, x^{n-1}e^x\}$.

Fie $f_1, f_2, \ldots, f_n \in C^\infty(\mathbb{R})$. Determinantul $w = \det [f_j^{(i-1)}]$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$, se numeşte *wronskianul* funcţiilor $f_1, f_2, \ldots, f_n$. Să se arate că $\{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$ este liniar dependentă dacă şi numai dacă wronskianul este nul.

10. Fie $\mathbb{K}[X]$ spaţiul vectorial al tuturor polinoamelor în nedeterminata X. Să se arate că $\{1, X, X^2, \ldots, X^n, \ldots\}$ este o mulţime liniar independentă.

11. Să se găsească o bază a sumei şi o bază a intersecţiei subspaţiilor vectoriale W şi U generate respectiv de vectorii

$$w_1 = (1, 2, 1),\ w_2 = (2, 3, 1),\ w_3 = (3, 1, 1)$$

$$u_1 = (0, 4, 1),\ u_2 = (1, 0, -2),\ u_3 = (1, 0, 3)$$

12. Să se stabilească dimensiunea subspaţiului $\mathscr{A} \subset \mathscr{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$

$$\mathscr{A} = \left\{ A \mid A = \begin{bmatrix} x & 0 & y \\ u & v & 0 \end{bmatrix},\ y = u - 3v,\ x, y, u, v \in \mathbb{R} \right\}$$

şi să se găsească o bază.

13. Să se determine coordonatele vectorului $x = (0, 0, 1, 1)$ în baza $B = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$; $e_1 = (1, 1, 0, 1)$, $e_2 = (2, 1, 3, 1)$, $e_3 = (1, 1, 0, 0)$, $e_4 = (0, 1, -1, -1)$.

14. Fie V_5 spaţiul vectorial real al polinoamelor în $\cos x$ care au cel mult gradul 4. Să se scrie transformarea de coordonate care permite trecerea de la baza $B = \{1, \cos x, \cos^2 x, \cos^3 x, \cos^4 x\}$ în baza $B' = \{1, \cos x, \cos 2x, \cos 3x, \cos 4x\}$ şi să se găsească inversa acestei transformări.

15. Fie spaţiul vectorial complex n-dimensional $\mathbb{C}^n$ şi fie ${}^{\mathbb{R}}\mathbb{C}^n$ trecerea în real a lui $\mathbb{C}^n$. Ştiind că oricărui vector $z = (a_1 + ib_1, a_2 + ib_2, \ldots, a_n + ib_n)$ din $\mathbb{C}^n$ îi corespunde vectorul $(a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n)$ din ${}^{\mathbb{R}}\mathbb{C}^n$, să se stabilească vectorul din ${}^{\mathbb{R}}\mathbb{C}^n$ care este asociat lui iz.

Dacă $\mathbb{C}^n$ este înzestrat cu produsul scalar $(z, w) = \alpha_1\bar{\beta}_1 + \alpha_2\bar{\beta}_2 + \ldots + \alpha_n\bar{\beta}_n$, unde $z = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, $w = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$, să se stabilească ce produs scalar se induce în ${}^{\mathbb{R}}\mathbb{C}^n$.

16. Să se arate că aplicaţiile $(\ ,\ ) : \mathbb{R}_n[X] \times \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}$ definite prin formulele $(*)$ $(p, q) = \sum_{j=0}^{n} a_j b_j$, $(**)$ $(p, q) = \sum_{j=0}^{n} (j!)^2 a_j b_j$, unde $p = \sum_{j=0}^{n} a_j X^j$, $q = \sum_{j=0}^{n} b_j X^j$, sînt respectiv produse scalare.

Să se calculeze unghiul dintre polinoamele p şi q, faţă de produsul scalar $(*)$, respectiv $(**)$, unde $p = 4 + X^2$, $q = 2 - 3X - 2X^2$.

17. Fie spaţiul vectorial euclidian real $C^0([0, 4])$ în care produsul scalar este dat de $(f, g) = \int_0^4 f(x)\, g(x) \mathrm{d}x$; să se scrie inegalitatea lui Cauchy-Schwarz şi să se calculeze $d(f, g)$, $\|g\|$, unde

$$f(x) = 1,\ g(x) = \begin{cases} x, & x \in [0, 2] \\ 4 - x, & x \in (2, 4]. \end{cases}$$

18. În spaţiul euclidian canonic $\mathbb{R}^3$, fie vectorul $v = (14, -3, -6)$ şi submulţimea $S = \{a_1, a_2, a_3\}$, unde $a_1 = (-3, 0, 7)$, $a_2 = (1, 4, 3)$, $a_3 = (2, 2, -2)$. Să se găsească proiecţia ortogonală w a lui v pe $L(S)$ şi vectorul $w^{\perp}$.

19. Fie $\mathbb{R}^4$ spaţiul vectorial euclidian canonic cu patru dimensiuni. Să se găsească o bază ortonormată pentru subspaţiul generat de vectorii $x_1 = (0, 1, 1, 0)$, $x_2 = (0, 4, 0, 1)$, $x_3 = (1, -1, 1, 0)$, $x_4 = (1, 3, 0, 1)$.

20. Fie spaţiul vectorial euclidian $C^0([0, 1])$ în care produsul scalar este definit prin aplicaţia $(f, g) = \int_0^1 f(x)\, g(x) \mathrm{d}x$. Să se ortonormeze mulţimea $\{2, 2 + x, (2 + x)^2, (2 + x)^3\}$.

Capitolul 3

TRANSFORMĂRI LINIARE

§ 1. Proprietăţi generale

Fie V şi W două spaţii vectoriale peste cîmpul $\mathbb{K}$.

1.1. *Definiţie. O funcţie* $\mathcal{T} : V \to W$ *cu proprietăţile*

$$\mathcal{T}(x + y) = \mathcal{T}(x) + \mathcal{T}(y), \quad \forall\, x, y \in V,$$

$$\mathcal{T}(kx) = k\mathcal{T}(x), \quad \forall\, k \in \mathbb{K},\ \forall\, x \in V$$

se numeşte transformare liniară (operator liniar sau homomorfism de spaţii vectoriale).

Precizare: uneori în loc de $\mathcal{T}(x)$ se scrie $\mathcal{T}x$.

Restricţia unei transformări liniare la un subspaţiu vectorial al lui V este tot o transformare liniară, dar restricţia unei transformări liniare la o submulţime a lui V care nu este subspaţiu vectorial nu mai este o transformare liniară. Orice transformare liniară definită pe un subspaţiu vectorial al unui spaţiu vectorial V poate fi prelungită la o transformare liniară definită pe V.

O transformare liniară $\ell : V \to \mathbb{K}$ (cîmpul $\mathbb{K}$ este considerat ca spaţiu vectorial aritmetic cu o dimensiune peste $\mathbb{K}$) se numeşte *formă liniară*.

1.2. Teoremă. Funcţia $\mathcal{T} : V \to W$ este o transformare liniară dacă şi numai dacă

$$\mathcal{T}(kx + ly) = k\mathcal{T}(x) + l\mathcal{T}(y), \quad \forall\, k, l \in \mathbb{K},\ x, y \in V.$$

Demonstraţie. Dacă $\mathcal{T} : V \to W$ este liniară, atunci conform definiţiei 1.1 avem $\mathcal{T}(kx + ly) = \mathcal{T}(kx) + \mathcal{T}(ly) = k\mathcal{T}(x) + l\mathcal{T}(y)$ şi deci condiţia din teoremă este satisfăcută.

Reciproc, condiţia din teoremă împreună cu ipoteza $k = l = 1$ dă $\mathcal{T}(x + y) = \mathcal{T}(x) + \mathcal{T}(y)$, iar împreună cu ipoteza $l = 0$ implică $\mathcal{T}(kx) = k\mathcal{T}(x)$.

Exemple. 1) Fie aplicaţia $\mathcal{T} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definită prin

$$\mathcal{T}(x_1, x_2) = (x_1, x_2, x_1 + x_2).$$

Succesiv avem $\mathcal{T}((x_1, x_2) + (y_1, y_2)) = \mathcal{T}(x_1 + y_1, x_2 + y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_1 + y_1 + x_2 + y_2) = (x_1, x_2, x_1 + x_2) + (y_1, y_2, y_1 + y_2) = \mathcal{T}(x_1, x_2) + \mathcal{T}(y_1, y_2)$, $\forall\, (x_1, x_2), (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$. Analog, $\mathcal{T}(k(x_1, x_2)) = \mathcal{T}(kx_1, kx_2) = (kx_1, kx_2, kx_1 + kx_2) = k(x_1, x_2, x_1 + x_2) = k\mathcal{T}(x_1, x_2)$, $\forall\, k \in \mathbb{R}$, $\forall\, (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$.

2) Fie $\mathbb{K}[X]$ spaţiul vectorial al polinoamelor în nedeterminata X cu coeficienţi din $\mathbb{K}$. Derivata $\mathrm{D} : \mathbb{K}[X] \to \mathbb{K}[X]$ este o transformare liniară.

1.3. Teoremă. Fie $\mathcal{T} : V \to W$ o transformare liniară.

1) $\mathcal{T}(0) = 0$.

2) Dacă U este un subspaţiu vectorial al lui V, atunci $\mathcal{T}(U)$ este un subspaţiu vectorial al lui W.

3) Dacă vectorii $x_1, x_2, \ldots, x_n \in V$ sînt liniar dependenţi, atunci şi vectorii $\mathcal{T}(x_1), \mathcal{T}(x_2), \ldots, \mathcal{T}(x_n) \in W$ sînt liniar dependenţi.

Demonstrație. 1) Relația $\mathcal{T}(kx) = k\mathcal{T}(x)$, $\forall k \in \mathbb{K}$, $\forall x \in V$ implică $\mathcal{T}(0) = 0\mathcal{T}(0) = 0$.

2) Fie $u, v \in \mathcal{T}(U)$ și $k, l \in \mathbb{K}$. Existența elementelor $x, y \in V$ astfel incit $u = \mathcal{T}(x)$, $v = \mathcal{T}(y)$, impreună cu liniaritatea lui $\mathcal{T}$ implică $ku + lv = k\mathcal{T}(x) + l\mathcal{T}(y) = \mathcal{T}(kx + ly) \in \mathcal{T}(U)$. De aceea $\mathcal{T}(U)$ este un subspațiu vectorial al lui W.

3) Temă.

Fie $\mathcal{L}(V, W)$ mulțimea tuturor transformărilor liniare definite pe V și cu valori in W. *Egalitatea* transformărilor liniare, *adunarea* și *inmulțirea cu scalari* se definesc ca la funcții; dacă $\mathcal{S}, \mathcal{T} \in \mathcal{L}(V, W)$, atunci

$$\mathcal{S} = \mathcal{T} \Leftrightarrow \mathcal{S}(x) = \mathcal{T}(x), \qquad \forall x \in V,$$

$$(\mathcal{S} + \mathcal{T})(x) = \mathcal{S}(x) + \mathcal{T}(x), \quad \forall x \in V,$$

$$(k\mathcal{S})(x) = k\mathcal{S}(x), \qquad \forall k \in \mathbb{K}, \ \forall x \in V.$$

În raport cu aceste operații mulțimea $\mathcal{L}(V, W)$ este un spațiu vectorial peste cimpul $\mathbb{K}$.

Elementele lui $\mathcal{L}(V, V)$ se numesc *endomorfisme* ale lui V.

Spațiul vectorial $\mathcal{L}(V, \mathbb{K})$ al tuturor formelor liniare definite pe V și cu valori in $\mathbb{K}$ se numește *dualul lui* V. O parte a dualului lui $\mathcal{L}(V, \mathbb{K})$ se identifică cu V, fiind izomorfe.

1.4. Teoremă. Fie V_n și W două spații vectoriale peste cimpul $\mathbb{K}$, fie $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ o bază a lui V_n, iar $w_1, w_2, \ldots, w_n$, n vectori arbitrari din W.

1) Există o transformare liniară unică $\mathcal{T} : V_n \to W$ care satisface $\mathcal{T}(e_i) = w_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

2) Dacă vectorii $w_1, w_2, \ldots, w_n$ sint liniar independenți, atunci transformarea liniară $\mathcal{T}$ determinată de condițiile $\mathcal{T}(e_i) = w_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$ este injectivă.

Demonstrație. 1) Fie $x \in V_n$, adică $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$. Regula $x \to \mathcal{T}(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i w_i$ definește o funcție $\mathcal{T} : V_n \to W$, cu proprietatea $\mathcal{T}(e_i) = w_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Să arătăm că $\mathcal{T}$ este o transformare liniară. Pentru aceasta observăm că dacă $y \in V_n$, $y = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i$, atunci $kx + ly = \sum_{i=1}^{n} (kx_i + ly_i)e_i \in V_n$, $\forall k, l \in \mathbb{K}$ și $\mathcal{T}(kx + ly) = \sum_{i=1}^{n} (kx_i + ly_i)w_i = k\sum_{i=1}^{n} x_i w_i + l\sum_{i=1}^{n} y_i w_i = k\mathcal{T}(x) + l\mathcal{T}(y)$.

Unicitatea lui $\mathcal{T}$ se demonstrează prin reducere la absurd.

2) Fie $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$, $y = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i$ doi vectori oarecare din V_n. Ipotezele $\mathcal{T}(e_i) = w_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $\mathcal{T}(x) = \mathcal{T}(y)$ implică $\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)w_i = 0$. Aceasta impreună cu liniar independența vectorilor $w_1, w_2, \ldots, w_n$ dă $x_i = y_i$, adică $x = y$.

Compunerea a două transformări liniare, definită ca la funcţii, este numită *înmulţire* (*produs*) şi are ca rezultat tot o transformare liniară. Evident compunerea nu este comutativă, dar este asociativă.

Compunerea poate fi combinată cu operaţiile algebrice de adunare şi înmulţire cu scalari:

1) dacă $\mathscr{A}, \mathscr{B}, \mathscr{C}$ sînt transformări liniare pentru care au sens $\mathscr{A} + \mathscr{B}$, $\mathscr{A}\mathscr{B}$, şi $\mathscr{B}\mathscr{C}$, atunci $\forall\, k, l \in \mathbb{K}$,

$$(k\mathscr{A} + l\mathscr{B})\mathscr{C} = k\mathscr{A}\mathscr{C} + l\mathscr{B}\mathscr{C}$$

2) dacă $\mathscr{A}, \mathscr{B}, \mathscr{C}$ sînt transformări liniare pentru care au sens $\mathscr{A} + \mathscr{B}$, $\mathscr{C}\mathscr{A}$ şi $\mathscr{C}\mathscr{B}$, atunci $\forall\, k, l \in \mathbb{K}$,

$$\mathscr{C}(k\mathscr{A} + l\mathscr{B}) = k\mathscr{C}\mathscr{A} + l\mathscr{C}\mathscr{B}.$$

Fie $\mathscr{T}$ un endomorfism al lui $\boldsymbol{V}$. Puterile naturale ale lui $\mathscr{T}$ se definesc inductiv:

$$\mathscr{T}^0 = \mathscr{I}, \quad \mathscr{T}^n = \mathscr{T}\mathscr{T}^{n-1}, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

unde $\mathscr{I}$ este identitatea.

Fie $\mathscr{T} : \boldsymbol{U} \to \boldsymbol{V}$ o transformare liniară *bijectivă* (*inversabilă*). Inversa $\mathscr{T}^{-1} : \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{U}$ este tot o transformare liniară. În plus dacă $\mathscr{T} : \boldsymbol{U} \to \boldsymbol{V}$ şi $\mathscr{S} : \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{W}$ sînt transformări liniare bijective, atunci $\mathscr{S} \circ \mathscr{T} : \boldsymbol{U} \to \boldsymbol{W}$ este o transformare liniară bijectivă şi $(\mathscr{S} \circ \mathscr{T})^{-1} = \mathscr{T}^{-1} \circ \mathscr{S}^{-1}$.

O transformare liniară bijectivă se numeşte *izomorfism* de spaţii vectoriale (vezi Cap. 2 § 5).

§ 2. Nucleu şi imagine

Fie $\boldsymbol{V}$ şi $\boldsymbol{W}$ două spaţii vectoriale peste cîmpul $\mathbb{K}$, iar $\mathscr{T} : \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{W}$ o transformare liniară.

2.1. *Definiţie* (fig. 1). *Mulţimea*

$$\mathrm{Ker}(\mathscr{T}) = \{x \mid x \in \boldsymbol{V},\ \mathscr{T}(x) = 0\} \subset \boldsymbol{V}$$

se numeşte nucleul lui $\mathscr{T}$.

Mulţimea $\mathrm{Im}(\mathscr{T}) = \mathscr{T}(\boldsymbol{V}) \subset \boldsymbol{W}$ *se numeşte imaginea lui* $\boldsymbol{V}$ *prin* $\mathscr{T}$.

2.2. Teoremă. Fie $\mathscr{T} \in \mathscr{L}(\boldsymbol{V}, \boldsymbol{W})$.

1) Nucleul lui $\mathscr{T}$ este un subspaţiu vectorial al lui $\boldsymbol{V}$.

2) Imaginea lui $\boldsymbol{V}$ prin $\mathscr{T}$ este un subspaţiu vectorial al lui $\boldsymbol{W}$

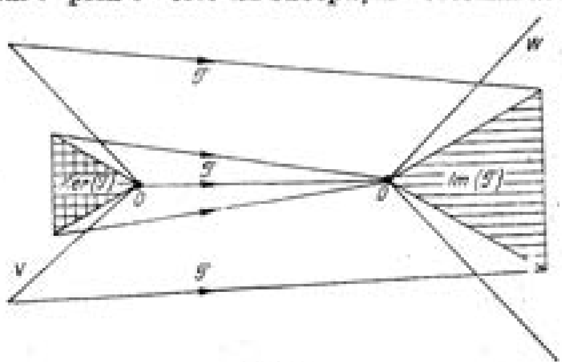


Fig. 1

Demonstrație. 1) Fie $x, y \in \operatorname{Ker}\mathcal{T}$, adică $\mathcal{T}(x) = 0$, $\mathcal{T}(y) = 0$. Liniaritatea lui $\mathcal{T}$ implică $\mathcal{T}(kx + ly) = 0$, $\forall\, k, l \in \mathbb{K}$, și deci $kx + ly \in \operatorname{Ker}(\mathcal{T})$, $\forall\, k, l \in \mathbb{K}$.

2) Temă!

Exemplu. Pentru $\mathcal{T} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $\mathcal{T}(x_1, x_2) = (x_1, x_2, x_1 + x_2)$ găsim $\operatorname{Ker}(\mathcal{T}) = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 | (x_1, x_2, x_1 + x_2) = (0, 0, 0)\} = \{(0, 0)\}$, $\operatorname{Im}(\mathcal{T}) = \{(y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3 / \exists\, (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, $(x_1, x_2, x_1 + x_2) = (y_1, y_2, y_3)\} = \{(y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3 / y_1 + y_2 = y_3\}$. Se observă că $\mathcal{T}$ este injectivă, dar nu este surjectivă.

2.3. Teoremă. Dacă $\mathcal{T} : V \to W$ este o transformare liniară, atunci următoarele afirmații sînt echivalente.

(1) $\mathcal{T}$ este injectivă.

(2) $\mathcal{T} : V \to \mathcal{T}(V)$ este inversabilă.

(3) $\operatorname{Ker}(\mathcal{T}) = \{0\}$.

Demonstrație. Echivalența dintre (1) și (2) este evidentă. De aceea este suficient să dovedim că (1) este echivalentă cu (3).

Fie $\operatorname{Ker}(\mathcal{T}) = \{0\}$. Ipoteza $\mathcal{T}(x) = \mathcal{T}(y)$ împreună cu liniaritatea lui $\mathcal{T}$ implică $\mathcal{T}(x - y) = 0$, adică $x - y \in \operatorname{Ker}(\mathcal{T})$. Astfel $x - y = 0$, adică $x = y$ și deci $\mathcal{T}$ este injectivă.

Presupunem că $\mathcal{T}$ este injectivă. Această ipoteză împreună cu proprietatea generală $\mathcal{T}(0) = 0$ implică $\operatorname{Ker}(\mathcal{T}) = \{0\}$.

2.4. Teoremă. Dacă V este finit dimensional, atunci și spațiul vectorial $\operatorname{Im}(\mathcal{T})$ este finit dimensional și

$$\dim \operatorname{Ker}(\mathcal{T}) + \dim \operatorname{Im}(\mathcal{T}) = \dim V.$$

Dimensiunea nucleului lui $\mathcal{T}$ se numește *defectul* lui $\mathcal{T}$, iar dimensiunea imaginii lui V prin $\mathcal{T}$ se numește *rangul* lui $\mathcal{T}$.

Demonstrație. Fie $n = \dim V$ și $p = \dim \operatorname{Ker}(\mathcal{T})$. Cazul $p = 0$ este lăsat pentru cititor. Dacă $p \geq 1$, alegem o bază $\{e_1, \ldots, e_p, e_{p+1}, \ldots, e_n\}$ în V astfel încît $\{e_1, \ldots, e_p\}$ să fie o bază în $\operatorname{Ker}(\mathcal{T})$. Pentru orice $y \in \operatorname{Im}(\mathcal{T})$ există un $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \in V$ astfel încît $y = \mathcal{T}(x) = \mathcal{T}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i \mathcal{T}(e_i) = x_{p+1}\mathcal{T}(e_{p+1}) + \ldots + x_n \mathcal{T}(e_n)$, deoarece $\mathcal{T}(e_1) = 0, \ldots, \mathcal{T}(e_p) = 0$. Rezultă că $\mathcal{T}(e_{p+1}), \ldots, \mathcal{T}(e_n)$ generează pe $\operatorname{Im}(\mathcal{T})$. Să arătăm că acești vectori sînt liniar independenți: din $k_{p+1}\mathcal{T}(e_{p+1}) + \ldots + k_n\mathcal{T}(e_n) = 0$ găsim $\mathcal{T}(k_{p+1}e_{p+1} + \ldots + k_n e_n) = 0$, adică $k_{p+1}e_{p+1} + \ldots + k_n e_n \in \operatorname{Ker}(\mathcal{T})$ sau $k_{p+1}e_{p+1} + \ldots + k_n e_n = k_1 e_1 + \ldots + k_p e_p$; liniar independența bazei din V implică $k_1 = \ldots = k_p = k_{p+1} = \ldots = k_n = 0$.

În concluzie spațiul vectorial $\operatorname{Im}(\mathcal{T})$ este finit dimensional și $\dim \operatorname{Im}(\mathcal{T}) = \dim V - \dim \operatorname{Ker}(\mathcal{T})$.

Exemple. 1) Pentru endomorfismul $\mathcal{T} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definit prin $\mathcal{T}(x) = (x_1 + x_2 + x_3,\ x_1 + x_2 + x_3,\ x_1 + x_2 + x_3)$, $x = (x_1, x_2, x_3)$ avem $\operatorname{Ker}(\mathcal{T}) = \{x | \mathcal{T}(x) = 0\}$. Din $\mathcal{T}(x) = 0$ obținem sistemul $x_1 + x_2 + x_3 = 0$, $x_1 + x_2 + x_3 = 0$, $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ care se reduce la ecuația $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ ceea ce arată că sistemul este dublu nedeterminat și are soluția $(x_1, x_2, x_3 = -x_1 - x_2)$. În concluzie orice vector $x \in \operatorname{Ker}(\mathcal{T})$ are forma $x = (x_1, x_2, -x_1 - x_2) = x_1(1, 0, -1) + x_2(0, 1, -1)$. Vectorii $e_1 = (1, 0, -1)$ și $e_2 = (0, 1, -1)$ sînt liniar independenți și generează pe $\operatorname{Ker}(\mathcal{T})$ așa încît ei formează o bază în $\operatorname{Ker}(\mathcal{T})$. Deci $\dim \operatorname{Ker}(\mathcal{T}) = 2$.

Din definiția subspațiului $\mathrm{Im}(\mathcal{T})$ conchidem că orice vector din $\mathrm{Im}(\mathcal{T})$ are coordonatele egale așa incit orice doi vectori din această mulțime sint liniar dependenți. Deci $\dim \mathrm{Im}(\mathcal{T}) = 1$. Evident $\dim \mathrm{Im}(\mathcal{T}) = \dim \mathbb{R}^3 - \dim \mathrm{Ker}(\mathcal{T}) = 3 - 2 = 1$.

2) Fie V spațiul vectorial al tuturor funcțiilor reale continue pe $[a, b]$ și endomorfismul $\mathcal{T} : V \to V$ definit prin $g = \mathcal{T}(f)$ unde $g(x) = \int_a^b f(t) \cos (x - t) dt$, $x \in [a, b]$. Să determinăm $\mathrm{Ker}(\mathcal{T})$. Anume condiția $\mathcal{T}(x) = 0$ implică $g(x) = 0$ adică $\int_a^b f(t) \cos (x - t) dt = 0$, $\forall x \in [a, b]$. Ori această condiție este echivalentă cu $\left(\int_a^b f(t) \cos t\, dt\right) \cos x + \left(\int_a^b f(t) \sin t\, dt\right) \sin x = 0$, $\forall x \in [a, b]$ ceea ce înseamnă că $\int_a^b f(t) \cos t \, dt = 0$, $\int_a^b f(t) \sin t \, dt = 0$.

Deci $\mathrm{Ker}(\mathcal{T})$ conține acele funcții f care sint ortogonale funcțiilor cos și sin.

2.5. Teoremă. Presupunem că $\mathcal{T} : V \to W$ este o transformare liniară, iar $\dim V = n$. Atunci următoarele afirmații sint echivalente.

(1) $\mathcal{T}$ este injectivă.

(2) Dacă $e_1, \ldots, e_p \in V$ sint vectori liniar independenți, atunci și $\mathcal{T}(e_1), \ldots, \mathcal{T}(e_p) \in \mathcal{T}(V) \subset W$ sint vectori liniar independenți.

(3) $\dim \mathcal{T}(V) = n$.

(4) Dacă $\{e_1, \ldots, e_n\}$ este o bază pentru V, atunci $\{\mathcal{T}(e_1), \ldots, \mathcal{T}(e_n)\}$ este o bază pentru $\mathcal{T}(V)$.

Demonstrație. Cea mai simplă justificare este dovedirea implicațiilor (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (4) $\Rightarrow$ (1).

Admitem că $\mathcal{T}$ este injectivă, iar $e_1, \ldots, e_p \in V$ sint vectori liniar independenți. Relația $k_1 \mathcal{T}(e_1) + \ldots + k_p\mathcal{T}(e_p) = 0$ implică $\mathcal{T}(k_1e_1 + \ldots + k_pe_p) = 0$, adică $k_1e_1 + \ldots + k_pe_p \in \mathrm{Ker}(\mathcal{T}) = \{0\}$. Deci $k_1e_1 + \ldots + k_pe_p = 0$ și prin urmare $k_1 = \ldots = k_p = 0$. Astfel (1) $\Rightarrow$ (2).

Dacă (2) este adevărată $\forall\, p \leqslant n$, iar $\{e_1, \ldots, e_n\}$ este o bază în V, atunci vectorii $\mathcal{T}(e_1), \ldots, \mathcal{T}(e_n)$ sint liniar independenți. De aceea $\dim \mathcal{T}(V) \geqslant n$. Pe de altă parte teorema 2.4 arată că $\dim \mathcal{T}(V) \leqslant n$. Rămine că $\dim \mathcal{T}(V) = n$, adică (2) $\Rightarrow$ (3).

Fie (3) și $\{e_1, \ldots, e_n\}$ o bază în V. Pentru orice $y \in \mathcal{T}(V)$ există $x = \sum_{i=1}^{n} x_ie_i \in V$ astfel incit $y = \mathcal{T}(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i\mathcal{T}(e_i)$. De aceea $\{\mathcal{T}(e_1), \ldots, \mathcal{T}(e_n)\}$ generează pe $\mathcal{T}(V)$. Aceasta impreună cu $\dim \mathcal{T}(V) = n$ implică faptul că $\{\mathcal{T}(e_1), \ldots, \mathcal{T}(e_n)\}$ este o bază a lui $\mathcal{T}(V)$. Deci (3) $\Rightarrow$ (4).

Dacă (4) este adevărată, atunci $\mathcal{T}(x) = 0$ implică $x = 0$ și deci $\mathrm{Ker}(\mathcal{T}) = \{0\}$, adică (4) $\Rightarrow$ (1).

2.6. Teoremă. O transformare liniară injectivă $\mathcal{T} : V_n \to W_n$ este bijectivă.

Demonstrație. Presupunem că $\mathcal{T}$ este injectivă, adică $\mathrm{Ker}(\mathcal{T}) = \{0\}$. Relațiile $\dim \mathrm{Ker}(\mathcal{T}) = 0$, $\dim V = \dim \mathrm{Ker}(\mathcal{T}) + \dim \mathrm{Im}(\mathcal{T})$ implică $\dim \mathrm{Im}(\mathcal{T}) = n$. Aceasta impreună cu $\mathrm{Im}(\mathcal{T}) \subset W_n$ implică $\mathrm{Im}(\mathcal{T}) = W_n$, adică $\mathcal{T}$ este și surjectivă.

Exemple. 1) Transformarea liniară $\mathcal{T} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definită prin $\mathcal{T}(x) = (x_1 + x_2 - 2x_3, x_2, x_1 - x_3)$, $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ este bijectivă. Într-adevăr $\mathcal{T}$ fiind un endomorfism este suficient să arătăm că este injectiv. Din $\mathcal{T}(x) = 0$ rezultă sistemul liniar și omogen $x_1 + x_2 - 2x_3 = 0$, $x_2 = 0$, $x_1 - x_3 = 0$, care admite numai soluția banală $x_1 = x_2 = x_3 = 0$. În concluzie $\operatorname{Ker} \mathcal{T} = \{0\}$. Pentru a determina transformarea inversă notăm $\mathcal{T}(x) = y$, unde $y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$. Obținem sistemul liniar $x_1 + x_2 - 2x_3 = y_1$, $x_2 = y_2$, $x_1 - x_3 = y_3$ cu soluția $x_1 = y_2 - y_1 + 2y_3$, $x_2 = y_2$, $x_3 = y_2 - y_1 + y_3$. Deci $\mathcal{T}^{-1}(x) = (x_2 - x_1 + 2x_3, x_2, x_2 - x_1 + x_3)$.

2) Endomorfismul $\mathcal{T} : V \to V$ cu proprietatea că $\mathcal{T}^2 - \mathcal{T} + \mathcal{J} = \mathcal{O}$ este inversabil. Într-adevăr dacă $\mathcal{T}(x_1) = \mathcal{T}(x_2)$, $x_1, x_2 \in V$ avem și $\mathcal{T}^2(x_1) = \mathcal{T}^2(x_2)$ și atunci, din $\mathcal{T}^2(x_1) - \mathcal{T}(x_1) + x_1 = 0$ și $\mathcal{T}^2(x_2) - \mathcal{T}(x_2) + x_2 = 0$, rezultă $x_1 = x_2$; deci $\mathcal{T}$ este injectiv.

Notînd $x = y - \mathcal{T}(y)$ rezultă $\mathcal{T}(x) = \mathcal{T}(y) - \mathcal{T}^2(y)$. Din condiția $\mathcal{T}^2 - \mathcal{T} + \mathcal{J} = \mathcal{O}$ avem $\mathcal{J} = \mathcal{T} - \mathcal{T}^2$ așa încît $y = \mathcal{T}(y) - \mathcal{T}^2(y)$. Cele două egalități implică $y = \mathcal{T}(x)$ adică $\mathcal{T}(\boldsymbol{V}) = \boldsymbol{V}$, ceea ce înseamnă că $\mathcal{T}$ este surjectiv. Cum $\mathcal{T}$ este injectiv și surjectiv rezultă că $\mathcal{T}$ este bijectiv.

§ 3. Matricea unei transformări liniare

Fie $\boldsymbol{V}_n$ și $\boldsymbol{W}_m$ două spații vectoriale finit dimensionale peste cîmpul $\mathbb{K}$ și $\mathcal{T} : \boldsymbol{V}_n \to \boldsymbol{W}_m$ o transformare liniară.

3.1. Teoremă. Dacă $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ este o bază a lui $\boldsymbol{V}_n$, iar $\{w_1, w_2, \ldots, w_m\}$ este o bază a lui $\boldsymbol{W}_m$, atunci există o matrice și numai una $T = [t_{ij}]$ de tipul $m \times n$ astfel încît $\mathcal{T}(e_j) = \sum\limits_{i=1}^{m} t_{ij} w_i$. În plus, dacă $x = \sum\limits_{j=1}^{n} x_j e_j$ are imaginea $\mathcal{T}(x) = \sum\limits_{i=1}^{m} y_i w_i$, atunci $y_i = \sum\limits_{j=1}^{n} t_{ij} x_j$, $i = 1, 2, \ldots, m$.

Notînd $X = {}^t[x_1, x_2, \ldots, x_n]$, $Y = {}^t[y_1, y_2, \ldots, y_m]$ obținem scrierea matriceală $Y = TX$ a lui $\mathcal{T}$.

Demonstrație. Teorema 1.4 arată că $\mathcal{T}$ este unic determinată de valorile $\mathcal{T}(e_j) \in \boldsymbol{W}_m$. Pe de altă parte fiecărui vector $\mathcal{T}(e_j)$, $j =$ fixat, i se atașează coordonatele sale $(t_{1j}, t_{2j}, \ldots, t_{mj})$ în raport cu baza $\{w_1, w_2, \ldots, w_m\}$. Deci $\mathcal{T}(e_j) = \sum\limits_{i=1}^{m} t_{ij} w_i$, $j = 1, 2, \ldots, n$, matricea $T = [t_{ij}]$ ale cărei coloane au drept elemente coordonatele vectorilor $\mathcal{T}(e_1), \mathcal{T}(e_2), \ldots, \mathcal{T}(e_n)$ în raport cu baza $\{w_1, w_2, \ldots, w_m\}$ fiind unic determinată.

Fie $x = \sum\limits_{j=1}^{n} x_j e_j \in \boldsymbol{V}$. Rezultă $\mathcal{T}(x) = \sum\limits_{j=1}^{n} x_j \mathcal{T}(e_j) = \sum\limits_{j=1}^{n} x_j \left(\sum\limits_{i=1}^{m} t_{ij} w_i \right) = \sum\limits_{i=1}^{m} \left(\sum\limits_{j=1}^{n} t_{ij} x_j \right) w_i$. Ținînd seama de $\mathcal{T}(x) = \sum\limits_{i=1}^{m} y_i w_i$, găsim $y_i = \sum\limits_{j=1}^{n} t_{ij} x_j$, $i = 1, 2, \ldots, m$.

T se numește *matricea asociată* transformării liniare $\mathcal{T}$ în raport cu perechea de baze considerate. Vom scrie $T = m(\mathcal{T})$.

Exemplu. Fie $\mathcal{T} : \boldsymbol{V}_3 \to \boldsymbol{V}_3$ endomorfismul definit prin $\mathcal{T}(\bar{v}) = \bar{v} \times \bar{a}$, $\bar{a}$ fixat (vezi Geometria analitică). Ne propunem să determinăm o bază în $\boldsymbol{V}_3$ față de care matricea lui $\mathcal{T}$ să fie de forma

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\|\bar{a}\|^2 & 0 \end{bmatrix}$$

Pentru aceasta considerăm baza formată din vectorii $\bar{e}_1 = \bar{a}$, $\bar{e}_2 \in \mathrm{Im}(\mathscr{T})$, $\bar{e}_3 = \bar{e}_2 \times \bar{a}$. Renumerotind, obținem baza formată de vectorii $\bar{f}_1 = \bar{e}_1$, $\bar{f}_2 = \bar{e}_3$, $\bar{f}_3 = \bar{e}_2$ in care $\mathscr{T}(\bar{f}_1) = \mathscr{T}(\bar{e}_1) = \bar{e}_1 \times \bar{a} = \bar{a} \times \bar{a} = \bar{0} = 0 \cdot \bar{f}_1 + 0 \cdot \bar{f}_2 + 0 \cdot \bar{f}_3$, $\mathscr{T}(\bar{f}_2) = \mathscr{T}(\bar{e}_3) = \bar{e}_3 \times \bar{a} = (\bar{e}_2 \times \bar{a}) \times \bar{a} = \bar{a}(\bar{a}, \bar{e}_2) - \bar{e}_2(\bar{a}, \bar{a}) = -(\bar{a}, \bar{a})\bar{e}_2 = -\|\bar{a}\|^2 \bar{f}_3 = 0 \cdot \bar{f}_1 + 0 \cdot \bar{f}_2 - \|\bar{a}\|^2 \bar{f}_3$ deoarece $\bar{e}_2 \in \mathrm{Im}(\mathscr{T})$ implică $(\bar{a}, \bar{e}_2) = 0$; $\mathscr{T}(\bar{f}_3) = \mathscr{T}(\bar{e}_2) = \bar{e}_2 \times \bar{a} = \bar{e}_3 = \bar{f}_2 = 0 \cdot \bar{f}_1 + 1 \cdot \bar{f}_2 + 0 \cdot \bar{f}_3$. Avind in vedere definiția matricei unui endomorfism intr-o bază rezultă că baza căutată este $\{\bar{f}_1, \bar{f}_2, \bar{f}_3\}$.

Fie $\mathscr{L}(\boldsymbol{V}_n, \boldsymbol{W}_m)$ mulțimea tuturor transformărilor liniare de la $\boldsymbol{V}_n$ la $\boldsymbol{W}_m$ și $\mathscr{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$ mulțimea tuturor matricelor de tipul $m \times n$ cu elemente din $\mathbb{K}$. Funcția $m : \mathscr{L}(\boldsymbol{V}_n, \boldsymbol{W}_m) \to \mathscr{M}_{m \times n}(\mathbb{K})$ definită prin $\mathscr{T} \to T$ (in raport cu baze fixate in $\boldsymbol{V}_n$ respectiv $\boldsymbol{W}_m$) este un izomorfism de spații vectoriale. De aceea spațiul vectorial $\mathscr{L}(\boldsymbol{V}_n, \boldsymbol{W}_m)$ are dimensiunea mn.

Izomorfismul m are proprietățile:

1) $m(\mathscr{S}\mathscr{T}) = m(\mathscr{S})m(\mathscr{T})$, dacă $\mathscr{S}\mathscr{T}$ are sens;

2) $\mathscr{S} : \boldsymbol{V}_n \to \boldsymbol{V}_n$ este inversabilă dacă și numai dacă $m(\mathscr{S})$ este inversabilă și $m(\mathscr{S}^{-1}) = (m(\mathscr{S}))^{-1}$.

Fie $\boldsymbol{V}_n$ un spațiu vectorial n-dimensional peste cimpul $\mathbb{K}$ și $\mathscr{T} : \boldsymbol{V}_n \to \boldsymbol{V}_n$ o transformare liniară (endomorfism). Fixind baze diferite in $\boldsymbol{V}_n$, lui $\mathscr{T}$ i se asociază matrice pătratice diferite.

3.2. Teoremă. Matricele A și B, pătratice de ordinul n, cu elemente din $\mathbb{K}$, reprezintă aceeași transformare liniară $\mathscr{T} : \boldsymbol{V}_n \to \boldsymbol{V}_n$ dacă și numai dacă există o matrice nesingulară C astfel incit $B = C^{-1}AC$. Matricea C este de fapt matricea de trecere de la baza veche la baza nouă.

Demonstrație. Fie $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ și $\{e'_1, e'_2, \ldots, e'_n\}$ două baze in $\boldsymbol{V}_n$, iar $C = [c_{ij}]$ matricea de trecere de la prima bază la a doua, adică $e'_j = \sum_{i=1}^{n} c_{ij}e_i$, $j = 1, 2, \ldots, n$. Fie $\mathscr{T} : \boldsymbol{V}_n \to \boldsymbol{V}_n$ o transformare liniară. Notăm cu $A = [a_{ij}]$ matricea atașată lui $\mathscr{T}$ in raport cu prima bază, adică $\mathscr{T}(e_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}e_i$, $j = 1, 2, \ldots, n$, și cu $B = [b_{ij}]$ matricea atașată lui $\mathscr{T}$ in raport cu a doua bază, adică $\mathscr{T}(e'_j) = \sum_{i=1}^{n} b_{ij}e'_i$, $j = 1, 2, \ldots, n$. Relațiile
$\mathscr{T}(e'_j) = \sum_{i=1}^{n} b_{ij}e'_i = \sum_{i=1}^{n} b_{ij}\left(\sum_{k=1}^{n} c_{ki}e_k\right) = \sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} c_{ki}b_{ij}\right)e_k$, $\mathscr{T}(e'_j) = \mathscr{T}\left(\sum_{i=1}^{n} c_{ij}e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} c_{ij}\mathscr{T}(e_i) = \sum_{i=1}^{n} c_{ij}\left(\sum_{k=1}^{n} a_{ki}e_k\right) = \sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} a_{ki}c_{ij}\right)e_k$ implică $\sum_{i=1}^{n} c_{ki}b_{ij} = \sum_{i=1}^{n} a_{ki}c_{ij}$ sau altfel scris $CB = AC$. Rezultă $B = C^{-1}AC$. Cu aceasta teorema devine evidentă.

Exemplu. Fie $\mathscr{T}_1, \mathscr{T}_2 : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ două endomorfisme definite prin $\mathscr{T}_1(x) = (x_4, x_2, x_3, x_1)$ respectiv $\mathscr{T}_2(x) = (x_1 + x_2 + x_3 + x_4, 0, 0, 0)$, $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$. Să se determine matricea sumei $\mathscr{T} = \mathscr{T}_1 + \mathscr{T}_2$ in raport cu baza determinată de vectorii $f_1 = (1, -1, 2, 3)$, $f_2 = (2, 1, 1, 0)$, $f_3 = (3, -2, 0, 0)$, $f_4 = (4, 0, 0, 0)$.

Deoarece $\mathscr{T}(x) = (\mathscr{T}_1 + \mathscr{T}_2)(x) = (x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4, x_2, x_3, x_1)$ rezultă că pentru baza canonică $e_1 = (1, 0, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1, 0)$, $e_4 = (0, 0, 0, 1)$ a lui $\mathbb{R}^4$ avem $\mathscr{T}(e_1) = (1, 0, 0, 1)$, $\mathscr{T}(e_2) = (1, 1, 0, 0)$, $\mathscr{T}(e_3) = (1, 0, 1, 0)$ și $\mathscr{T}(e_4) = (2, 0, 0, 0)$. Matricea lui

$\mathcal{T} = \mathcal{T}_1 + \mathcal{T}_2$ în această bază este

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

şi avînd în vedere că matricea de trecere de la baza canonică la baza formată de vectorii f_i, $i = 1, 2, 3, 4$ este

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

rezultă că matricea lui $\mathcal{T} = \mathcal{T}_1 + \mathcal{T}_2$ în baza formată de vectorii f_i, este

$$B = C^{-1}AC = \begin{bmatrix} 1/3 & 2/3 & 1 & 4/3 \\ 4/3 & -1/3 & -2 & -8/3 \\ 1 & -1 & -1/2 & -2 \\ 1/2 & 7/4 & 11/8 & 7/2 \end{bmatrix}$$

La acelaşi rezultat se ajunge dacă scriem matricele T_1 şi T_2 ale lui $\mathcal{T}_1$ şi $\mathcal{T}_2$.

Matricele $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ se numesc *asemenea* dacă există o matrice nesingulară $C \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ astfel incit $B = C^{-1}AC$. Asemănarea matricelor este o relaţie de echivalenţă pe $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$, fiecare clasă de echivalenţă corespunzînd la un endomorfism $\mathcal{T}$ al lui V_n.

1) Deoarece C este nesingulară, matricele B şi A au acelaşi rang; acest număr este de fapt *rangul endomorfismului* $\mathcal{T}$.

2) Deoarece $\det B = \det(C^{-1}AC) = (\det C^{-1})(\det A)(\det C) = \det A$, toate matricele dintr-o clasă de echivalenţă au acelaşi determinant. Această observaţie permite să definim *determinantul unui endomorfism* al lui V_n ca fiind determinantul matricei asociate în raport cu o bază fixată.

§ 4. Endomorfisme particulare

Fie V un spaţiu vectorial peste cîmpul $\mathbb{K}$ şi $\mathcal{L}(V, V)$ mulţimea tuturor endomorfismelor lui V. Mulţimea $\mathcal{L}(V, V)$ este (1) un spaţiu vectorial peste cîmpul $\mathbb{K}$ în raport cu adunarea endomorfismelor şi cu înmulţirea dintre un scalar şi un endomorfism, (2) un inel în raport cu adunarea endomorfismelor şi cu produsul (compunerea) endomorfismelor.

4.1. *Definiţie. Fie V un spaţiu vectorial peste cîmpul $\mathbb{K}$. Endomorfismul $\mathcal{T} : V \to V$ se numeşte*

1) *automorfism dacă este bijectiv*;

2) *proiecție dacă* $\mathcal{F}^2 = \mathcal{F}$;

3) *involuție sau structură produs dacă* $\mathcal{F}^2 = \mathcal{I}$, *unde* $\mathcal{I}$ *este transformarea identitate*;

4) *structură complexă dacă* $\mathcal{F}^2 = -\mathcal{I}$;

5) *endomorfism nilpotent de indice* p *dacă* $\mathcal{F}^p = \mathcal{O}$, *unde* $p = 2, 3, \ldots$, *iar* $\mathcal{O}$ *este transformarea zero. Un endomorfism nilpotent de indice 2 și de rang maxim posibil se mai numește structură tangentă.*

Submulțimea lui $\mathcal{L}(V, V)$ ale cărei elemente sînt automorfismele lui V este notată cu $\mathcal{GL}(V)$. Această submulțime nu este un subspațiu vectorial al spațiului vectorial $\mathcal{L}(V, V)$ deoarece suma a două automorfisme poate să nu fie un automorfism. În schimb $\mathcal{GL}(V)$ este un grup în raport cu produsul (compunerea) automorfismelor. Grupul $\mathcal{GL}(V)$ se numește *grupul liniar general.*

Exemplu. Dacă $\mathcal{F} : V_n \to V_n$ are proprietatea că $\mathcal{F}^2 = \mathcal{F} - \mathcal{I}$ atunci $\mathcal{F}$ este un automorfism. Într-adevăr fie $A = [a_{ij}]$ matricea asociată lui $\mathcal{F}$ în raport cu o bază din V_n. Relația $\mathcal{F}^2 - \mathcal{F} + \mathcal{I} = \mathcal{O}$ este echivalentă cu egalitatea matriceală $-A^2 + A - I = 0$ sau $A(I - A) = (I - A)A = I$ ceea ce arată că $I - A$ este inversa lui A și deci $\mathcal{F}$ este un automorfism.

4.2. Teoremă. Dacă $\mathcal{F} : V \to V$ este o proiecție, atunci

$$V = \operatorname{Ker}(\mathcal{F}) \oplus \operatorname{Im}(\mathcal{F}).$$

Demonstrație. Fie $v \in V$, $\mathcal{F}(v) \in \operatorname{Im}(\mathcal{F})$ și $w = v - \mathcal{F}(v) \in V$. Rezultă $\mathcal{F}(w) = \mathcal{F}(v - \mathcal{F}(v)) = \mathcal{F}(v) - \mathcal{F}^2(v) = 0$, adică $w \in \operatorname{Ker}(\mathcal{F})$. Deci $V = \operatorname{Ker}(\mathcal{F}) + \operatorname{Im}(\mathcal{F})$.

Să arătăm că $\operatorname{Ker}(\mathcal{F}) \cap \operatorname{Im}(\mathcal{F}) = \{0\}$: fie $u \in \operatorname{Ker}(\mathcal{F}) \cap \operatorname{Im}(\mathcal{F})$. Apartenența $u \in \operatorname{Im}(\mathcal{F})$ implică existența lui $v \in V$ astfel încît $u = \mathcal{F}(v)$; apartenența $u \in \operatorname{Ker}(\mathcal{F})$ implică $0 = \mathcal{F}(u) = \mathcal{F}(\mathcal{F}(v)) = \mathcal{F}(v) = u$.

Denumirea de proiecție provine din interpretarea geometrică a relației $V = \operatorname{Ker}(\mathcal{F}) \oplus \operatorname{Im}(\mathcal{F})$; fiind dat $v \in V$, există un singur vector $w \in \operatorname{Ker}(\mathcal{F})$ și un singur vector $u \in \operatorname{Im}(\mathcal{F})$ astfel încît $v = w + u$, unde $\mathcal{F}(w) = 0$ și $\mathcal{F}(u) = u$. Geometric, $\mathcal{F}$ proiectează (fig. 2) vectorul $v \in V$ pe subspațiul $\operatorname{Im}(\mathcal{F})$ de-a lungul subspațiului $\operatorname{Ker}(\mathcal{F})$.

Dacă $\mathcal{F}$ este o proiecție, atunci și $\mathcal{I} - \mathcal{F}$ este o proiecție. În plus se poate arăta că

$$V = \operatorname{Ker}(\mathcal{I} - \mathcal{F}) \oplus \operatorname{Im}(\mathcal{I} - \mathcal{F}), \ \operatorname{Ker}(\mathcal{I} - \mathcal{F}) = \operatorname{Im}(\mathcal{F}), \ \operatorname{Im}(\mathcal{I} - \mathcal{F}) = \operatorname{Ker}(\mathcal{F}).$$

Din acestea se observă că restricția lui $\mathcal{F}$ la $\operatorname{Im}(\mathcal{F})$ este identitatea pe $\operatorname{Im}(\mathcal{F})$, iar restricția lui $\mathcal{I} - \mathcal{F}$ la $\operatorname{Ker}(\mathcal{F})$ este identitatea pe $\operatorname{Ker}(\mathcal{F})$.

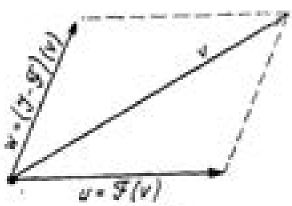


Fig. 2

Exemplu. Fie $\mathcal{F} : V \to V$ un endomorfism pe V. Să arătăm că endomorfismul $\mathcal{F}_1 = 2\mathcal{F} - \mathcal{I}$ este o involuție dacă și numai dacă $\mathcal{F}$ este o proiecție. Dacă $\mathcal{F}$ este o proiecție, atunci $\mathcal{F}^2 = \mathcal{F}$. Rezultă $\mathcal{F}_1^2 = 4\mathcal{F}^2 - 4\mathcal{F} + \mathcal{I} = \mathcal{I}$ ceea ce înseamnă că $\mathcal{F}_1$ este o involuție. Reciproc, relația $\mathcal{F}_1^2 = \mathcal{I}$ implică $\mathcal{F}^2 = \frac{1}{4}\mathcal{F}_1^2 + \frac{1}{2}\mathcal{F}_1 + \frac{1}{4}\mathcal{I} = \frac{1}{2}(\mathcal{F}_1 + \mathcal{I}) = \mathcal{F}$ și deci $\mathcal{F}$ este o proiecție.

Teorema 4.2 se generalizează în felul următor.

4.3. Teoremă. Dacă $\mathscr{F}_i : V \to V$, $i = 1, 2, \ldots, p$, sînt proiecții cu proprietățile $\mathscr{F}_i\mathscr{F}_j = \mathscr{O}$ pentru $i \neq j$ și $\sum_{i=1}^{p} \mathscr{F}_i = \mathscr{J}$, atunci

$$V = \mathrm{Im}(\mathscr{F}_1) \oplus \ldots \oplus \mathrm{Im}(\mathscr{F}_p).$$

4.4. Teoremă. Un spațiu vectorial finit dimensional V admite o structură complexă dacă și numai dacă dimensiunea sa este pară.

Demonstrație. Presupunem $\dim V = n = 2m$. Fie $\{e_1, e_2, \ldots, e_m, e_{m+1}, \ldots, e_{2m}\}$ o bază a lui V. Definim o transformare liniară $\mathscr{F}$ prin

$$\mathscr{F}(e_i) = e_{m+i}, \quad \mathscr{F}(e_{m+i}) = -e_i, \; i = 1, 2, \ldots, m.$$

Avem $\mathscr{F}^2(e_\alpha) = -e_\alpha$, $\alpha = 1, 2, \ldots, n$ și deci $\mathscr{F}^2 = -\mathscr{J}$, adică $\mathscr{F}$ este o structură complexă.

Reciproc, fie $\mathscr{F}$ o structură complexă pe V. Dacă alegem un vector nenul x_1 din V, atunci se poate arăta că vectorii $x_1, \mathscr{F}(x_1)$ sînt liniar independenți. De asemenea, luînd din V un alt vector x_2 cu proprietatea că $x_1, x_2, \mathscr{F}(x_1)$ sînt liniar independenți, deducem ușor că vectorii $x_1, x_2, \mathscr{F}(x_1), \mathscr{F}(x_2)$ sînt liniar independenți. Continuînd acest procedeu obținem o bază a lui V care conține un număr par de vectori, adică $\dim V = n = 2m$.

Observație. Matricea atașată structurii complexe $\mathscr{F} : V_{2m} \to V_{2m}$ în raport cu baza $\{x_1, \ldots, x_m, \mathscr{F}(x_1), \ldots, \mathscr{F}(x_m)\}$ este

$$\begin{bmatrix} 0 & -I_m \\ I_m & 0 \end{bmatrix}$$

4.5. Teoremă. Dacă $\mathscr{T} \in \mathscr{L}(V, V)$ este un endomorfism nilpotent de indice p și $x_0 \in V$, $x_0 \neq 0$ așa încît $\mathscr{T}^{p-1}(x_0) \neq 0$, atunci vectorii $x_0, \mathscr{T}(x_0), \ldots, \mathscr{T}^{p-1}(x_0)$ sînt liniar independenți.

Demonstrație. Fie combinația liniară $\sum_{i=1}^{p-1} k_i \mathscr{T}^i(x_0) = 0$, $k_i \in \mathbb{K}$, $i = 0, 1, \ldots$ $\ldots, p-1$ și fie j primul indice pentru care k_j ar fi nenul. Atunci împărțind prin k_j obținem $(*)\, \mathscr{T}^j(x_0) = \sum_{i=j+1}^{p-1} l_i \mathscr{T}^i(x_0) = \mathscr{T}^{j+1}\left(\sum_{i=j+1}^{p-1} l_i \mathscr{T}^{i-j-1}(x_0)\right) = \mathscr{T}^{j+1}(y)$ unde am notat $y = \sum_{i=j+1}^{p-1} l_i \mathscr{T}^{i-j-1}(x_0)$ iar $l_i = \dfrac{k_i}{k_j}$, $i = j+1, \ldots$ $\ldots, p-1$.

Luînd $j = p-1$, avem $\mathscr{T}^{p-1}(x_0) = \mathscr{T}^{p-j-1}(\mathscr{T}^j(x_0)) \overset{*}{=} \mathscr{T}^{p-j-1}(\mathscr{T}^{j+1}(y)) = \mathscr{T}^p(y) = 0$, deoarece prin ipoteză $\mathscr{T}$ este un endomorfism nilpotent de indice p. Ori $\mathscr{T}^{p-1}(x_0) = 0$ contrazice alegerea lui x_0. Rezultă $k_0 = k_1 = \ldots$ $\ldots = k_{p-1} = 0$.

Observații. 1) O altă demonstrație pentru teorema 4.5 este dată în [48], Cap. 1, § 3, problema 38.

2) Se poate arăta că dacă $L(S)$ este acoperirea liniară a mulțimii $S = \{x_0, \mathscr{T}(x_0), \ldots, \mathscr{T}^{p-1}(x_0)\}$, atunci există un subspațiu $U \subset V$, invariant față de $\mathscr{T}$, așa încît $V = U \oplus L(S)$.

4.6. Teoremă. Dacă $\mathscr{T} : V_n \to V_n$ este un endomorfism, atunci există două subspații vectoriale $U, W \subset V_n$, invariante față de $\mathscr{T}$, așa încît

1) $V_n = U \oplus W$,
2) restricția $\mathscr{T}/U$ *este nilpotentă*,
3) restricția $\mathscr{T}/W$ *este inversabilă*, dacă $W \neq \{0\}$.

Demonstrație. Fie $N_k = \mathrm{Ker}(\mathscr{T}^k)$ și $R_k = \mathrm{Im}(\mathscr{T}^k)$, $k \in \mathbb{N}$. Se poate arăta că N_k și R_k sînt subspații invariante față de $\mathscr{T}$ și că există un $p \in \mathbb{N}$, minim, aşa incit $N_1 \subset N_2 \subset \ldots \subset N_p = N_{p+1} = \ldots$ şi $R_1 \supset R_2 \supset \ldots \ldots \supset R_p = R_{p+1} = \ldots$ Într-adevăr dacă $x \in R_k$ şi $y \in V_n$ aşa incit $\mathcal{T}^k(y) = x$ atunci $\mathcal{T}(x) = \mathcal{T}^k(\mathcal{T}(y)) \in R_k$ adică $\mathcal{T}(R_k) \subset R_k$. Analog $\mathcal{T}(N_k) \subset \subset N_{k-1} \subset N_k$.

În continuare să arătăm că dacă $N_p = N_{p+1}$, rezultă $N_p = N_{p+q}$, $\forall\, q \in \mathbb{N}$. Într-adevăr, dacă $x \in N_{p+q}$ rezultă $\mathcal{T}^{p+q}(x) = 0$ sau $\mathcal{T}^{p+1}(\mathcal{T}^{q-1}(x)) = 0$ şi ipoteza $N_p = N_{p+1}$ implică $\mathcal{T}^p(\mathcal{T}^{q-1}(x)) = 0$ sau $\mathcal{T}^{p+q-1}(x) = 0$. Continuind procedeul obţinem $\mathcal{T}^p(x) = 0$, ceea ce inseamnă că $x \in N_p$; deci $N_{p+q} \subset N_p$. Aceasta impreună cu $N_p \subset N_{p+q}$ implică $N_p = N_{p+q}$. Analog se dovedeşte pentru R_p. Rezultă $U = N_p$ şi $W = R_p$.

Să arătăm că $V_n = U \oplus W$. Deoarece $\dim V_n = \dim N_p + \dim R_p$ rămine să dovedim că $U \cap W = \{0\}$. Într-adevăr, dacă $x \in U \cap W$, rezultă $x \in U$ şi $x \in W$, adică $\mathcal{T}^p(x) = 0$ şi $x = \mathcal{T}^p(y)$; deci $\mathcal{T}^{2p}(y) = 0$ şi cum $N_{2p} = N_{p+p} = N_p$ rezultă $\mathcal{T}^p(y) = 0$ ceea ce implică $x = 0$.

Să dovedim in continuare că $\mathcal{T}/U$ este nilpotent de indice p, iar $\mathcal{T}/W$ este inversabil. Deoarece $\mathcal{T}^p(N_p) = \{0\}$ rezultă că $\mathcal{T}/U$ este nilpotent de indice p. Apartenenţa $x \in W$ dă $x = \mathcal{T}^p(y)$, deoarece $W = R_p$. Relaţia $\mathcal{T}(x) = 0$ implică $\mathcal{T}(\mathcal{T}^p(y)) = 0$ sau $\mathcal{T}^{p+1}(y) = 0$, adică $\mathcal{T}^p(y) = 0$ şi deci $x = 0$. Rezultă $\operatorname{Ker}(\mathcal{T}/W) = \{0\}$, adică $\mathcal{T}/W$ este inversabil.

Exemple. 1) Endomorfismul $D: \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X]$ definit prin $D(p) = p'$, unde p' este derivata lui p, este un endomorfism nilpotent de indice $n + 1$. Într-adevăr, p fiind un polinom de grad cel mult n, derivata de ordinul $n + 1$ este identic nulă.

2) Endomorfismul $\mathcal{T}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definit prin matricea

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

este un endomorfism nilpotent de indice 2. Într-adevăr se constată că $A^2 = 0$.

§5. Transformări liniare pe spaţii euclidiene

Fie V şi W două spaţii vectoriale complexe şi euclidiene al căror produs scalar il notăm la fel. Fie $\mathcal{T}: V \to W$ o transformare liniară.

5.1 *Definiţie. Transformarea liniară $\mathcal{T}^*: W \to V$ definită prin $(x, \mathcal{T}y) = (\mathcal{T}^*x, y)$, $\forall\, x \in W$, $\forall\, y \in V$ se numeşte adjuncta lui $\mathcal{T}$.*

Un endomorfism $\mathcal{T} \in \mathcal{L}(V, V)$ se numeşte

1) *hermitian* dacă $\mathcal{T} = \mathcal{T}^*$,

2) *antihermitian* dacă $\mathcal{T} = -\mathcal{T}^*$.

5.2. Teoremă. Endomorfismul $\mathcal{T} \in \mathcal{L}(V, V)$ este hermitian dacă şi numai dacă produsul scalar $(x, \mathcal{T}x)$ *este real* $\forall\, x \in V$.

Demonstraţie. Dacă $\mathcal{T} = \mathcal{T}^*$, atunci $(x, \mathcal{T}x) = (\mathcal{T}x, x) = \overline{(x, \mathcal{T}x)}$ (bara inseamnă conjugatul complex). Deci $(x, \mathcal{T}x)$ este real $\forall\, x \in V$. Reciproc, dacă $(x, \mathcal{T}x)$ este real, atunci $(x, \mathcal{T}x) = \overline{(x, \mathcal{T}x)} = \overline{(\mathcal{T}^*x, x)} = (x, \mathcal{T}^*x)$.

Aşadar, $(x, (\mathcal{T} - \mathcal{T}^*)x) = 0$, $\forall\, x \in V$ şi deci $\mathcal{T} = \mathcal{T}^*$.

Exemplu. Fie $\mathcal{T}: \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ definit prin $\mathcal{T}(x) = (x_1 + ix_2, -ix_1 + x_2)$, $x = (x_1, x_2)$. Avem $(\mathcal{T}x, x) = (x_1 + ix_2)\bar{x}_1 + (-ix_1 + x_2)\bar{x}_2 = |x_1|^2 + ix_2\bar{x}_1 - ix_1\bar{x}_2 + |x_2|^2 = |x_1|^2 + ix_2\bar{x}_1 +$

$+(\overline{\mathrm{i}x_2\bar{x}_1})+|x_2|^2$ care este real (deoarece $z+\bar{z}\in\mathbb{R}$, dacă $z\in\mathbb{C}$). Astfel $\mathcal{T}$ este un endomorfism hermitian.

5.3. Teoremă. Fie $\mathcal{T}, \mathcal{S}\in\mathcal{L}(\boldsymbol{V},\boldsymbol{V})$ hermitieni şi $k\in\mathbb{R}$. Atunci
1) $k\mathcal{T}+\mathcal{S}$ este hermitian
2) dacă $\mathcal{T}$ este inversabil, atunci şi $\mathcal{T}^{-1}$ este hermitian
3) $\mathcal{T}\mathcal{S}$ este hermitian $\Leftrightarrow \mathcal{T}\mathcal{S}=\mathcal{S}\mathcal{T}$.

Demonstraţie. 1) este evidentă avînd în vedere că $(\mathcal{T}+\mathcal{S})^*=\mathcal{T}^*+\mathcal{S}^*$ şi $(k\mathcal{T})^*=k\mathcal{T}^*$. 2) rezultă din $(\mathcal{T}^{-1})^*=(\mathcal{T}^*)^{-1}=\mathcal{T}^{-1}$. 3) $\mathcal{T}\mathcal{S}$ hermitian implică $(\mathcal{T}\mathcal{S})^*=\mathcal{T}\mathcal{S}$. Dar $(\mathcal{T}\mathcal{S})^*=\mathcal{S}^*\mathcal{T}^*=\mathcal{S}\mathcal{T}$ deoarece $\mathcal{T}$ şi $\mathcal{S}$ sînt hermitieni. Deci $\mathcal{T}\mathcal{S}=\mathcal{S}\mathcal{T}$. Reciproca este evidentă.

5.4. *Definiţie. O transformare liniară $\mathcal{T}:\boldsymbol{V}\to\boldsymbol{W}$ se numeşte unitară dacă păstrează produsul scalar, adică $(\mathcal{T}x,\mathcal{T}y)=(x,y)$, $\forall\, x,y\in\boldsymbol{V}$.*

5.5. Teoremă. Transformarea liniară $\mathcal{T}:\boldsymbol{V}\to\boldsymbol{W}$ este unitară dacă şi numai dacă $\|\mathcal{T}x\|=\|x\|$, $\forall\, x\in\boldsymbol{V}$.

Demonstraţie. Dacă $\mathcal{T}$ este unitară, atunci $(\mathcal{T}x,\mathcal{T}y)=(x,y)$, $\forall\, x,y\in\boldsymbol{V}$; în particular pentru $y=x$ avem $(\mathcal{T}x,\mathcal{T}x)=(x,x)$, adică $\|\mathcal{T}x\|^2=\|x\|^2$ şi deci $\|\mathcal{T}x\|=\|x\|$. Reciproc dacă $\|\mathcal{T}x\|=\|x\|$, $\forall\, x\in\boldsymbol{V}$, atunci folosind egalitatea $(x,y)=\dfrac{1}{4}[\|x+y\|^2-\|x-y\|^2+\mathrm{i}\|x+\mathrm{i}y\|^2-\mathrm{i}\|x-\mathrm{i}y\|^2]$ avem $(\mathcal{T}x,\mathcal{T}y)=\dfrac{1}{4}[\|\mathcal{T}(x+y)\|^2-\|\mathcal{T}(x-y)\|^2+\mathrm{i}\|\mathcal{T}(x+\mathrm{i}y)\|^2-\mathrm{i}\|\mathcal{T}(x-\mathrm{i}y)\|^2]=(x,y)$. Deci $\mathcal{T}$ este unitară.

Observaţie. Condiţia $(\mathcal{T}x,\mathcal{T}y)=(x,y)$ este echivalentă cu $\mathcal{T}\mathcal{T}^*=\mathcal{T}^*\mathcal{T}=\mathcal{J}$; deci putem spune că $\mathcal{T}$ este unitar dacă şi numai dacă $\mathcal{T}\mathcal{T}^*=\mathcal{T}^*\mathcal{T}=\mathcal{J}$.

5.6. Teoremă. Orice transformare unitară $\mathcal{T}:\boldsymbol{V}\to\boldsymbol{W}$ este injectivă.

Demonstraţie. Dacă $\mathcal{T}$ este unitară atunci $\|\mathcal{T}x\|=\|x\|$. Deci $(\mathcal{T}x,\mathcal{T}x)=(x,x)$ şi dacă $\mathcal{T}x=0$ rezultă $(\mathcal{T}x,\mathcal{T}x)=0$ adică $(x,x)=0$ care implică $x=0$. Rezultă $\operatorname{Ker}\mathcal{T}=\{0\}$ şi deci $\mathcal{T}$ este injectivă.

Presupunem că $\boldsymbol{V}$ şi $\boldsymbol{W}$ sînt n-dimensionale şi că în fiecare s-a fixat o bază ortonormată. Transformării liniare $\mathcal{T}:\boldsymbol{V}\to\boldsymbol{W}$ i se ataşează matricea T. Matricea $T^*={}^t\bar{T}$ ataşată lui $\mathcal{T}^*$ se numeşte *adjuncta* matricei T.

Dacă $T={}^t\bar{T}$, atunci matricea pătratică T se numeşte *hermitică* iar dacă $T=-{}^t\bar{T}$, atunci matricea pătratică T se numeşte *antihermitică*. O matrice pătratică T cu proprietatea $TT^*=I$, unde I este matricea unitate, se numeşte matrice *unitară*.

5.7. Teoremă. Un endomorfism $\mathcal{T}:\boldsymbol{V}_n\to\boldsymbol{V}_n$ este hermitian dacă şi numai dacă matricea lui într-o bază ortonormată este hermitică.

Demonstraţie. Fie $\{e_1,\dots,e_n\}\subset\boldsymbol{V}_n$ baza ortonormată faţă de care matricea lui $\mathcal{T}$ este $T=[t_{ij}]$. Fie $\mathcal{T}$ hermitian. Din $\mathcal{T}e_j=\sum\limits_{k=1}^{n}t_{kj}e_k$, prin înmulţire scalară cu e_i, obţinem $(\mathcal{T}e_j,e_i)=\sum\limits_{k=1}^{n}t_{kj}(e_k,e_i)=t_{ij}$ şi analog $(\mathcal{T}^*e_j,e_i)=t^*_{ij}$. Dar $(\mathcal{T}^*e_j,e_i)=(e_j,\mathcal{T}e_i)=\overline{(\mathcal{T}e_i,e_j)}=\bar{t}_{ji}$. Deci $t^*_{ij}=\bar{t}_{ji}$ şi cum $\mathcal{T}^*=\mathcal{T}$ rezultă $t_{ij}=\bar{t}_{ji}$ adică $T={}^t\bar{T}$. Reciproc dacă $T={}^t\bar{T}$ avem $(x,\mathcal{T}x)=\left(\sum\limits_{j=1}^{n}x_je_j,\ \sum\limits_{j=1}^{n}x_j\mathcal{T}e_j\right)=\sum\limits_{j=1}^{n}|x_j|^2(e_j,\mathcal{T}e_j)=\sum\limits_{j=1}^{n}|x_j|^2\left(e_j,\ \sum\limits_{k=1}^{n}t_{kj}e_k\right)=$

$= \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} |x_j|^2 \bar{t}_{kj}(e_j, e_k) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} |x_j|^2 t_{jk}(e_j, e_k) = \sum_{j=1}^{n} |x_j|^2 t_{jj} = \overline{(x, \mathcal{T}x)}$ adică $(x, \mathcal{T}x) \in \mathbb{R}$ și deci $\mathcal{T}$ este hermitian.

Condiția ca baza să fie ortonormată este esențială și vom ilustra acest lucru prin exemplul următor.

Exemplu. Fie $\mathcal{T} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definit prin matricea $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ în baza $f_1 = (1, 0)$, $f_2 = (1, 1)$. Deoarece ${}^t\bar{A} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \neq A$ matricea A nu este hermitică și totuși $\mathcal{T}$ este hermitian. Să găsim matricea lui $\mathcal{T}$ în baza canonică a lui $\mathbb{R}^2$, $e_1 = (1, 0)$, $e_2 = (0, 1)$ care este o bază ortonormată. Avem $f_1 = e_1$, $f_2 = e_1 + e_2$. Deci $C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ este matricea de trecere așa încît matricea lui $\mathcal{T}$ în baza canonică, pe care o notăm prin B, este $B = C^{-1}AC = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = {}^t\bar{B}$.

Observație. Un endomorfism $\mathcal{T} : V_n \to V_n$ este unitar dacă și numai dacă matricea lui în raport cu o bază ortonormată a spațiului este unitară.

Exemplu. Endomorfismul $\mathcal{T} : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ definit prin $\mathcal{T}(x) = (x_1 \cos\alpha - x_2 \sin\alpha,\ x_1 \sin\alpha + x_2 \cos\alpha)$, $x = (x_1, x_2)$, $\alpha \in [0, 2\pi]$ este un endomorfism unitar deoarece matricea lui $\mathcal{T}$ în baza canonică ortonormată $e_1 = (1, 0)$, $e_2 = (0, 1)$ este unitară. Într-adevăr $T = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$, iar $T^* = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$ și deci $TT^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$.

În continuare presupunem că V și W sînt două spații vectoriale reale și euclidiene al căror produs scalar îl notăm la fel. Fie $\mathcal{T} : V \to W$ o transformare liniară.

5.8. *Definiție. Transformarea liniară $\mathcal{T}^* : W \to V$ definită prin $(x, \mathcal{T}y) = (\mathcal{T}^*y, x)$, $\forall x \in W$, $\forall y \in V$ se numește transpusa lui $\mathcal{T}$. Endomorfismul $\mathcal{T} \in \mathcal{L}(V, V)$ se numește:*

1) *simetric dacă $\mathcal{T} = \mathcal{T}^*$*
2) *antisimetric dacă $\mathcal{T} = -\mathcal{T}^*$.*

5.9. *Definiție. Transformarea liniară $\mathcal{T} : V \to W$ se numește ortogonală dacă păstrează produsul scalar, adică $(\mathcal{T}x, \mathcal{T}y) = (x, y)$, $\forall x, y \in V$ echivalentă cu condiția ca $\|\mathcal{T}x\| = \|x\|$, $\forall x \in V$.*

Dacă admitem V și W finit dimensionale și că în fiecare s-a fixat o bază ortonormată atunci transformării $\mathcal{T} : V \to W$ i se atașează matricea T iar lui $\mathcal{T}^*$ matricea ${}^tT$. Unui endomorfism simetric îi corespunde o matrice simetrică, iar unui endomorfism antisimetric îi corespunde o matrice antisimetrică. Unui endomorfism ortogonal îi corespunde o matrice ortogonală.

Observație. Transformările simetrice respectiv antisimetrice au proprietăți analoage proprietăților transformărilor hermitiene respectiv antihermitiene. Transformările ortogonale au proprietăți analoage proprietăților transformărilor unitare.

§ 6. Izometrii

Fie V un spațiu vectorial euclidian real. Transformările ortogonale pe V au proprietățile: păstrează distanța euclidiană și au drept punct fix originea.

Să introducem acum o altă funcție pe V care păstrează distanța euclidiană.

6.1. *Definiție. Funcția* $\mathcal{T}: V \to V$ *definită prin* $\mathcal{T}(x) = x + a$, $a \in V$, $a =$ fixat, *se numește translația de vector* a.

Se observă că translația prin 0 este identitatea pe V.

6.2. Teoremă. 1) Dacă $\mathcal{T}_1$ este translația de vector a_1 și $\mathcal{T}_2$ este translația de vector a_2, atunci $\mathcal{T}_1 \circ \mathcal{T}_2 = \mathcal{T}_2 \circ \mathcal{T}_1$ este translația de vector $a_1 + a_2$.

2) Dacă $\mathcal{T}$ este translația de vector a, atunci $\mathcal{T}^{-1}$ există și este translația de vector $-a$.

Demonstrație. 1) Fie $\mathcal{T}_1$ translația de vector a_1 și $\mathcal{T}_2$ translația de vector a_2. Produsul $\mathcal{T}_1 \circ \mathcal{T}_2$ este translația de vector $a_1 + a_2$. Analog $\mathcal{T}_2 \circ \mathcal{T}_1$ este translația prin $a_2 + a_1$ și deci $\mathcal{T}_1 \circ \mathcal{T}_2 = \mathcal{T}_2 \circ \mathcal{T}_1$.

2) $\mathcal{T} \circ \mathcal{T}^{-1} = \text{id pe } V$.

Rezultă că produsul definește pe mulțimea tuturor translațiilor lui V o structură de grup comutativ (*grupul translațiilor*). Acest grup este izomorf cu grupul aditiv comutativ V.

6.3. Teoremă. Translația păstrează distanța euclidiană adică $\mathrm{d}(\mathcal{T}(x), \mathcal{T}(y)) = \mathrm{d}(x, y)$, $\forall\, x, y \in V$.

Demonstrație. $\mathrm{d}(\mathcal{T}(x), \mathcal{T}(y)) = \|(y + a) - (x + a)\| = \|y - x\| = \mathrm{d}(x, y)$, $\forall\, x, y \in V$.

6.4. *Definiție. O funcție surjectivă* $\mathscr{F}: V \to V$ *care păstrează distanța euclidiană, adică* $\mathrm{d}(\mathscr{F}(x), \mathscr{F}(y)) = \mathrm{d}(x, y)$, $\forall\, x, y \in V$, *se numește izometrie.*

Transformările ortogonale și translațiile sînt izometrii. De asemenea se dovedește ușor că produsul a două izometrii este o izometrie.

6.5. Teoremă. O izometrie $\mathscr{F}: V \to V$ cu proprietatea $\mathscr{F}(0) = 0$ este o transformare ortogonală.

Demonstrație. Să arătăm că $\mathscr{F}$ păstrează normele:

$$\|x\| = \|x - 0\| = \mathrm{d}(0, x) = \mathrm{d}(\mathscr{F}(0), \mathscr{F}(x)) = \mathrm{d}(0, \mathscr{F}(x)) = \|\mathscr{F}(x) - 0\| = \|\mathscr{F}(x)\|, \ \forall\, x \in V.$$

Utilizînd acest rezultat putem dovedi că $\mathscr{F}$ păstrează produsul scalar:

$$\mathrm{d}(\mathscr{F}(x), \mathscr{F}(y)) = \mathrm{d}(x, y) \Leftrightarrow \|\mathscr{F}(y) - \mathscr{F}(x)\| = \|y - x\| \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (\mathscr{F}(y) - \mathscr{F}(x), \mathscr{F}(y) - \mathscr{F}(x)) = (y - x, y - x) \Leftrightarrow (\mathscr{F}(x), \mathscr{F}(y)) = (x, y), \ \forall\, x, y.$$

Rămîne să dovedim că orice izometrie care păstrează produsul scalar este o transformare liniară:

$$(\mathscr{F}(x), \mathscr{F}(y)) = (x, y) \Rightarrow (\mathscr{F}(kx), \mathscr{F}(y)) = (kx, y) = k(x, y) = k(\mathscr{F}(x), \mathscr{F}(y)) = (k\mathscr{F}(x), \mathscr{F}(y)) \Rightarrow (\mathscr{F}(kx) - k\mathscr{F}(x), \mathscr{F}(y)) = 0,$$

$\forall\, \mathscr{F}(y)$, $\forall\, k \in \mathbb{R}$. Facem $\mathscr{F}(y) = \mathscr{F}(kx) - k\mathscr{F}(x)$ și rezultă $\mathscr{F}(kx) - k\mathscr{F}(x) = 0$, adică $\mathscr{F}$ este omogenă.

$$(\mathscr{F}(x + y), \mathscr{F}(z)) = (x + y, z) = (x, z) + (y, z) = (\mathscr{F}(x), \mathscr{F}(z)) + (\mathscr{F}(y), \mathscr{F}(z)) = (\mathscr{F}(x) + \mathscr{F}(y), \mathscr{F}(z)) \Rightarrow (\mathscr{F}(x + y) - \mathscr{F}(x) - \mathscr{F}(y), \mathscr{F}(z)) = 0,$$

$\forall\, \mathscr{F}(z)$. Deci $\mathscr{F}(x + y) - \mathscr{F}(x) - \mathscr{F}(y) = 0$, adică $\mathscr{F}$ este aditivă.

6.6. Teoremă. Dacă $\mathscr{F}$ este o izometrie, atunci există o translație $\mathcal{T}$ și o transformare ortogonală $\mathscr{R}$ astfel încît $\mathscr{F} = \mathcal{T} \circ \mathscr{R}$.

Demonstrație. Fie $\mathcal{T}$ translația prin $\mathscr{F}(0)$ și $\mathcal{T}^{-1}$ translația prin $-\mathscr{F}(0)$. Funcția $\mathcal{T}^{-1} \circ \mathscr{F}$ este o izometrie care păstrează pe 0. Conform teoremei 6.5, izometria $\mathcal{T}^{-1} \circ \mathcal{F}$ este o transformare ortogonală $\mathcal{R}$. Deci $\mathcal{T}^{-1} \circ \mathcal{F} = \mathcal{R}$ sau $\mathcal{F} = \mathcal{T} \circ \mathcal{R}$.

Compunerea definește pe mulțimea tuturor izometriilor lui V o structură de grup.

Presupunem $\dim V = n$. Dacă $\{e_1, \ldots, e_n\}$ este o bază ortonormată și $\mathcal{R}$ este o transformare ortogonală pe V, atunci și $\{\mathcal{R}(e_1), \ldots, \mathcal{R}(e_n)\}$ este o bază ortonormată. Reciproc, dacă în V sînt date două baze ortonormate, atunci există o singură transformare ortogonală care ne duce de la una la alta.

Fie $\mathcal{F} = \mathcal{T} \circ \mathcal{R}$ o izometrie pe spațiul n-dimensional V. Dacă $\det \mathcal{R} = +1$, atunci $\mathcal{F}$ se numește *izometrie pozitivă*, iar dacă $\det \mathcal{R} = -1$ atunci $\mathcal{F}$ se numește *izometrie negativă*.

Exemplu. Punctele $M(x, y, z)$ raportate la triedrul tridreptunghic $Oxyz$ verifică ecuația $g(x, y, z) = x^2 + 3y^2 + 4yz - 6x + 14y + 4z + 1 = 0$.

Ne propunem să găsim ecuația verificată de coordonatele (x', y', z') ale acestor puncte față de triedrul $O'x'y'z'$ obținut din cel inițial printr-o translație în punctul $O'(3, -1, -2)$.

Deoarece formulele care dau translația sînt $x = x' + 3$, $y = y' - 1$, $z = z' - 2$, înlocuind în ecuația dată găsim $x'^2 + 3y'^2 + 4y'z' - 9 = 0$. Ecuația dată în enunț este ecuația generală a unei cuadrice cu centru; punctul O' reprezintă centrul de simetrie al cuadricei. Ecuația cuadricei raportată la sistemul translatat $O'x'y'z'$ s-a simplificat deoarece au dispărut termenii liniari, iar termenul liber a căpătat valoarea $g(3, -1, -2) = -9$.

§ 7. Probleme

1. Să se cerceteze care din funcțiile $\mathcal{T} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definite prin

$$\mathcal{T}(x) = a, \quad a \in \mathbb{R}^3, \text{ fixat}$$
$$\mathcal{T}(x) = x + a$$
$$\mathcal{T}(x) = \lambda x, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$
$$\mathcal{T}(x) = (x_1, x_2, x_3^2), \quad x = (x_1, x_2, x_3)$$
$$\mathcal{T}(x) = (x_3, x_1, x_2)$$
$$\mathcal{T}(x) = (x_3, x_1, x_2 + k), \quad k \in \mathbb{R}, \ k \neq 0$$
$$\mathcal{T}(x) = (x_1 + 2x_2 - 3x_3, \ 3x_1 - x_2 + 3x_3, \ 4x_1 + 7x_2 + 8x_3)$$

sînt transformări liniare.

2. Fie $\mathbb{R}_n[X]$ spațiul vectorial real al polinoamelor de grad $\leqslant n$. Să se arate că funcția $\mathcal{T} : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X]$ definită prin $\mathcal{T}p(x) = p(x + 2) - p(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$ este o transformare liniară.

3. Fie spațiul vectorial $V = \{f : [a, b] \to \mathbb{R} \mid f \in \mathbb{C}^0([a, b])\}$. Să se arate că primitiva $P : V \to V$ definită prin $g = P(f)$, cu $g(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ pentru $a \leqslant x \leqslant b$ este liniară.

4. Fie spațiile vectoriale $V = \{f : (a, b) \to \mathbb{R} \mid f \text{ derivabilă}\}$, $W = \{g : (a, b) \to \mathbb{R}\}$. Să se arate că derivata $D : V \to W$ definită prin $g = D(f) = f'$ este o transformare liniară. Să se determine $\operatorname{Ker}(D)$.

5. Pe spațiul vectorial real al funcțiilor polinomiale de grad cel mult n, notat P_n, se definește funcția $p(x) \to \mathcal{T}(p(x)) = x \int_0^1 t p(t)\,dt$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Să se arate că $\mathcal{T}$ este o transformare liniară și să se determine $\operatorname{Ker}(\mathcal{T})$ și $\operatorname{Im}(\mathcal{T})$.

6. În $\mathbb{R}^3$ se consideră vectorii $x = (3, 2, -1)$, $y = (1, -2, 1)$, $z = (1, 0, 2)$. 1) Să se arate că există o singură formă liniară $\ell : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ astfel încît $\ell(x) = -8$, $\ell(y) = 0$, $\ell(z) = 6$.

2) Să se determine o bază a subspațiului $\operatorname{Ker}(\ell)$.

7. Fie $\mathscr{T} : V_3 \to V_3$ funcția definită prin egalitatea $\mathscr{T}(\bar{v}) = \bar{v} \times \bar{a}$, $\bar{a}$ fixat. 1) Să se arate că $\mathscr{T}$ este o transformare liniară.

2) Să se găsească $\operatorname{Ker}(\mathscr{T})$ și $\operatorname{Im}(\mathscr{T})$ și să se arate că $\operatorname{Ker}(\mathscr{T}) \oplus \operatorname{Im}(\mathscr{T}) = V_3$.

8. Să se determine matricea asociată transformării liniare, în raport cu baza canonică a spațiului, în cazurile

1) $\mathscr{T} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{C}^3$, $\mathscr{T}(x) = (ix_1, ix_2, ix_3)$

2) $\mathscr{T} : \mathscr{M}_{2\times 2}(\mathbb{K}) \to \mathscr{M}_{2\times 2}(\mathbb{K})$, $\mathscr{T}(A) = {}^tA$

3) $\mathscr{T} : \mathbb{C} \to \mathscr{M}_{2\times 2}(\mathbb{C})$, $\mathscr{T}(x) = \begin{bmatrix} x & ix \\ -ix & x \end{bmatrix}$

9. În spațiul vectorial real al tuturor funcțiilor reale fiecare dintre mulțimile $\{\sin x, \cos x\}$, $\{e^{2x}\sin 3x, e^{2x}\cos 3x\}$, $\{1, 1 - x, 1 - x - e^x\}$ este liniar independentă și generează un subspațiu V finit dimensional.

Utilizînd mulțimile date ca baze pentru V, să se găsească matricea atașată operatorului de derivare $D : V \to V$.

10. Să se determine matricele transformărilor liniare $\mathscr{T} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ în raport cu baza formată din vectorii $f_1 = (1, 2, 3)$, $f_2 = (2, 1, 3)$, $f_3 = (1, 1, 1)$ cunoscînd că

$$1)\ T_1 = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad 2)\ T_2 = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -3 \\ -2 & 2 & -6 \\ -2 & 2 & -6 \end{bmatrix}, \quad 3)\ T_3 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -3 & 6 \\ 2 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

sînt matricele transformărilor respective în raport cu baza canonică a lui $\mathbb{R}^3$.

11. Fie V un spațiu vectorial real, ${}^{\mathbb{C}}V$ complexificatul său și $\mathscr{T} : V \to V$ un endomorfism. Funcția ${}^{\mathbb{C}}\mathscr{T} : {}^{\mathbb{C}}V \to {}^{\mathbb{C}}V$ definită prin ${}^{\mathbb{C}}\mathscr{T}(u, v) = (\mathscr{T}u, \mathscr{T}v)$, sau altfel scris ${}^{\mathbb{C}}\mathscr{T}(u + iv) = \mathscr{T}u + i\mathscr{T}v$, se numește *complexificatul* lui $\mathscr{T}$.

1) Să se arate că ${}^{\mathbb{C}}\mathscr{T}$ este o transformare liniară care are proprietățile

$${}^{\mathbb{C}}(k\mathscr{T}) = k\,{}^{\mathbb{C}}\mathscr{T}, \quad k \in \mathbb{R}$$
$${}^{\mathbb{C}}(\mathscr{S} + \mathscr{T}) = {}^{\mathbb{C}}\mathscr{S} + {}^{\mathbb{C}}\mathscr{T}$$
$${}^{\mathbb{C}}(\mathscr{S}\mathscr{T}) = {}^{\mathbb{C}}\mathscr{S}\,{}^{\mathbb{C}}\mathscr{T}$$
$$({}^{\mathbb{C}}\mathscr{T})^{-1} = {}^{\mathbb{C}}(\mathscr{T}^{-1}), \text{ dacă } \mathscr{T} \text{ este inversabilă.}$$

2) Fie $\{e_1, \ldots, e_n\}$ o bază a lui V_n și $\{(e_1, 0), \ldots, (e_n, 0)\}$ baza corespunzătoare din ${}^{\mathbb{C}}V$. Să se verifice că matricea ${}^{\mathbb{C}}T$ atașată lui ${}^{\mathbb{C}}\mathscr{T}$ este egală cu matricea T atașată lui $\mathscr{T}$.

12. Fie $\mathscr{T} : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$ o transformare liniară. Se numește *reprezentarea reală* a transformării $\mathscr{T}$, transformarea reală ${}^{\mathbb{R}}\mathscr{T} : {}^{\mathbb{R}}\mathbb{C}^n \to {}^{\mathbb{R}}\mathbb{C}^m$ care coincide punctual cu $\mathscr{T}$, unde ${}^{\mathbb{R}}\mathbb{C}^n$, ${}^{\mathbb{R}}\mathbb{C}^m$ sînt trecerile în real ale spațiilor $\mathbb{C}^n$ și $\mathbb{C}^m$. Știind că $\mathscr{T} : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ este transformarea liniară definită prin $\mathscr{T}(x) = (x_1 + ix_2, x_1 + x_2, ix_3)$, $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{C}^3$, să se determine matricea reprezentării reale a lui $\mathscr{T}$ în baza $\{f_1, f_2, f_3\}$ unde $f_1 = (0, 1, 1)$, $f_2 = (0, 0, 1)$, $f_3 = (1, -2, 2)$.

13. Să se arate că transformările liniare asociate matricelor

$$T_1 = \begin{bmatrix} 27 & 18 & 27 \\ -21 & -14 & -21 \\ -12 & -8 & -12 \end{bmatrix} \quad \text{și} \quad T_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

sînt proiecții.

14. Fie V_2 spațiul vectorial al segmentelor orientate cu originea O identificat cu mulțimea punctelor din plan și fie $\mathcal{T}: V_2 \to V_2$ transformarea liniară definită prin $\mathcal{T}(\vec{a}) = \vec{b}$, $\mathcal{T}(\vec{b}) = \vec{c}$ unde $A(\vec{a})$ și $B(\vec{b})$ sînt două puncte fixe necoliniare cu $O(0)$, iar $C(\vec{c})$ un punct din plan. Să se determine $C(\vec{c})$ astfel încît

1) $\mathcal{T}$ să fie o proiecție,
2) $\mathcal{T}$ să fie o involuție.

15. Să se arate că matricea $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ este o matrice nilpotentă de ordinul trei.

16. Fie $\mathcal{T}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ endomorfismul care transformă vectorii $v_1 = (0, 0, 1)$, $v_2 = (0, 1, 1)$, $v_3 = (1, 1, 1)$ în vectorii $w_1 = (1, 2, 1)$, $w_2 = (3, 1, 2)$, $w_3 = (7, -1, 4)$. Să se determine matricea lui $\mathcal{T}^*$, transpusa lui $\mathcal{T}$, în baza ortonormată $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1)$.

17. Fie $\mathcal{T}: \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ endomorfismul definit prin matricea $T = \begin{bmatrix} 3+2i & 2-2i \\ 1-i & 3+4i \end{bmatrix}$ în baza canonică a lui $\mathbb{C}^2$. Să se arate că $\mathcal{T} = \mathcal{T}_1 + i\mathcal{T}_2$, unde $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$ sînt endomorfisme hermitiene.

18. Fie $\mathcal{T}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ endomorfismul definit prin matricea $T = \begin{bmatrix} -\cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix}$ în baza canonică a lui $\mathbb{R}^3$. Să se arate că endomorfismul $\mathcal{T}$ este ortogonal.

Capitolul 4

VALORI ȘI VECTORI PROPRII

§ 1. Valori și vectori proprii

Fie V un spațiu vectorial peste cîmpul $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ sau $\mathbb{C}$) și $\mathcal{A}: V \to V$ un endomorfism pe V.

1.1. *Definiție. Un vector $x \in V - \{0\}$, se numește vector propriu al endomorfismului $\mathcal{A}: V \to V$ dacă există $\lambda \in \mathbb{K}$ așa încît $\mathcal{A}x = \lambda x$. Scalarul λ se numește valoarea proprie a lui $\mathcal{A}$ corespunzătoare lui x. Mulțimea tuturor valorilor proprii ale endomorfismului $\mathcal{A}$ poartă numele de spectrul lui $\mathcal{A}$.*

Ecuația $\mathcal{A}x = \lambda x$ de definiție a vectorului propriu este echivalentă cu $x \in \operatorname{Ker}(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{I})$, $x \neq 0$, unde $\mathcal{I}$ este endomorfismul identitate. De asemenea se observă că dacă x este un vector propriu al lui $\mathcal{A}$, atunci pentru fiecare $k \in \mathbb{K} - \{0\}$, vectorul kx este propriu.

1.2. Teoremă. 1) La un vector propriu al lui $\mathcal{A}$ îi corespunde o singură valoare proprie.

2) Vectorii proprii corespunzători la valori proprii distincte sînt liniar independenţi.

3) Mulţimea $\mathbf{S}(\lambda) = \{kx \mid \mathscr{A}x = \lambda x,\ \lambda$ valoare proprie, $k \in \mathbb{K}\}$ este un subspaţiu vectorial în $\boldsymbol{V}$ *invariant* faţă de $\mathscr{A}$, adică $\mathscr{A}(\mathbf{S}) \subseteq \mathbf{S}$. Acest subspaţiu poate fi finit sau infinit dimensional şi se numeşte *subspaţiul propriu* ataşat lui λ.

Demonstraţie. 1) Fie x un vector propriu corespunzător valorii proprii λ; $\mathscr{A}x = \lambda x$. Dacă ar exista $\lambda' \in \mathbb{K}$, $\lambda' \neq \lambda$ astfel încît $\mathscr{A}x = \lambda' x$, atunci $\lambda x = \lambda' x$. De aici găsim $(\lambda - \lambda')x = 0$ şi deci $x = 0$, ceea ce este absurd.

2) Fie $x_1, \ldots, x_p$ vectorii proprii ai lui $\mathscr{A}$ corespunzători la valorile proprii distincte $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$. Procedăm prin inducţie după $p \in \mathbb{N}$. Pentru $p = 1$ proprietatea este evidentă deoarece vectorul propriu este diferit de vectorul nul. Presupunem că proprietatea este adevărată pentru $p - 1$ vectori. Din ecuaţia $k_1x_1 + k_2x_2 + \ldots + k_{p-1}x_{p-1} + k_px_p = 0$ cu $k_i \in \mathbb{K}$, $i=1, 2, \ldots, p$ rezultă $\mathscr{A}(k_1x_1 + \ldots + k_px_p) = 0$ şi deci $k_1\lambda_1x_1 + \ldots k_p\lambda_px_p = 0$. Acestea implică $k_1(\lambda_1 - \lambda_p)x_1 + \ldots + k_{p-1}(\lambda_{p-1} - \lambda_p)x_{p-1} = 0$, care, împreună cu ipoteza de inducţie, dă $k_1 = k_2 = \ldots = k_{p-1} = 0$. Rezultă $k_px_p = 0$, adică şi $k_p = 0$.

3) Pentru orice $x, y \in \mathbf{S}(\lambda)$, şi $k, l \in \mathbb{K}$ avem $\mathscr{A}(kx + ly) = k\mathscr{A}(x) + l\mathscr{A}(y) = k\lambda x + l\lambda y = \lambda(kx + ly)$; deci $kx + ly \in \mathbf{S}(\lambda)$. Rezultă $\mathscr{A}(\mathbf{S}(\lambda)) \subseteq \mathbf{S}(\lambda)$.

Exemplu. Fie $\boldsymbol{V} = \{f : [-1, 1] \to \mathbb{R} \mid f \in \mathbb{C}^\infty\}$ spaţiul funcţiilor de clasă $\mathbb{C}^\infty$ pe $[-1, 1]$. Endomorfismul $\mathscr{S} : \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$, $\mathscr{S}(f(x)) = [(x^2 - 1)f'(x)]'$, $\forall x \in [-1, 1]$, se numeşte *operatorul Sturm-Liouville*. Să arătăm că $\lambda_n = n(n + 1)$, $n \in \mathbb{N}$ sînt valorile proprii iar vectorii $x \to P_n(x) = \dfrac{1}{n!\,2^n} \dfrac{d^n}{dx^n}[(x^2 - 1)^n]$, $n \in \mathbb{N}$ sînt vectori proprii. Anume dacă notăm $f_n(x) = (x^2 - 1)^n$ avem egalitatea evidentă $(x^2 - 1)f_n'(x) = 2nxf_n(x)$. Derivînd de $n + 1$ ori ambii membri, utilizînd formula Leibniz, găsim $(x^2 - 1)f_n^{(n+2)}(x) + 2x(n + 1)f_n^{(n+1)}(x) + n(n + 1)f_n^{(n)}(x) = 2nxf_n^{(n+1)}(x) + 2n(n + 1)f_n^{(n)}(x)$, sau $[(x^2 - 1)P_n'(x)]' = n(n + 1)P_n(x)$. Deci $\mathscr{S}(P_n(x)) = n(n + 1)P_n(x)$, ceea ce arată că $\lambda_n = n(n + 1)$ sînt valorile proprii iar $P_n(x)$ sînt vectorii corespunzători.

1.3. Propoziţie. Subspaţiile proprii corespunzătoare la valori proprii distincte, sînt disjuncte.

Demonstraţie. Fie valorile proprii distincte λ_1 şi λ_2, iar $\mathbf{S}(\lambda_1)$, $\mathbf{S}(\lambda_2)$ subspaţiile proprii corespunzătoare. Dacă ar exista $x \in \mathbf{S}(\lambda_1) \cap \mathbf{S}(\lambda_2)$, nenul, ar rezulta $\mathscr{A}x = \lambda_1 x$ şi $\mathscr{A}x = \lambda_2 x$ şi de aici $(\lambda_1 - \lambda_2)x = 0$, adică $x = 0$ ceea ce este absurd. Deci $\mathbf{S}(\lambda_1) \cap \mathbf{S}(\lambda_2) = \{0\}$.

§ 2. Polinom caracteristic

Fie $A = [a_{ij}]$ o matrice pătratică de ordinul n şi $X = [x_j]$ o matrice nenulă de tipul $n \times 1$ cu elemente din cîmpul $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ sau $\mathbb{C}$). Dacă există $\lambda \in \mathbb{K}$ astfel încît $AX = \lambda X$, atunci X se numeşte vector propriu, iar λ se numeşte valoare proprie pentru matricea A.

Ecuaţia matricealǎ $(A - \lambda I)X = 0$ este echivalentǎ cu sistemul liniar şi omogen,

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda)x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + (a_{22} - \lambda)x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + (a_{nn} - \lambda)x_n = 0 \end{cases}$$

care are soluţii nebanale dacǎ şi numai dacǎ

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \dots\dots\dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \dots a_{2n} \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots \\ a_{n1} & a_{n2} \dots a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

2.1. *Definiţie. Polinomul* $P(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ *se numeşte polinomul caracteristic al matricei* A, *iar ecuaţia* $P(\lambda) = \det(A - \lambda I) = 0$, $\lambda \in \mathbb{K}$, *se numeşte ecuaţia caracteristicǎ a matricei* A.

Valorile proprii ale matricei A sînt soluţiile ecuaţiei caracteristice. Fie A o matrice pǎtraticǎ realǎ de ordinul n şi $P(\lambda) = \det(A - \lambda I) = 0$ ecuaţia ei caracteristicǎ. Deoarece nu orice ecuaţie algebricǎ admite soluţii in $\mathbb{R}$, dar admite în $\mathbb{C}$, uneori valorile proprii ale lui A se definesc ca fiind elemente din $\mathbb{C}$. În acest caz vectorii proprii corespunzǎtori aparţin complexificatului lui $\mathbb{R}^n$ notat ${}^{\mathbb{C}}\mathbb{R}^n$.

2.2. Teoremǎ. 1) Polinomul caracteristic are expresia

$$P(\lambda) = (-1)^n(\lambda^n - \delta_1\lambda^{n-1} + \delta_2\lambda^{n-2} - \dots \pm \delta_n)$$

unde δ_i, $i = 1, \dots, n$, reprezintǎ suma minorilor principali de ordinul i ai matricei $A - \lambda I$.

2) Douǎ matrice asemenea au acelaşi polinom caracteristic.

Demonstraţie. 1) Descompunem $P(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ în 2^n determinanţi. Mai intii

$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \dots a_{2n} \\ \dots\dots & \dots\dots\dots\dots \\ a_{n1} & a_{n2} \dots a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -\lambda & a_{12} \dots\dots\dots a_{1n} \\ 0 & a_{22} - \lambda \dots a_{2n} \\ \dots\dots & \dots\dots\dots\dots \\ 0 & a_{n2} \dots a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = \Delta_1 + \Delta_2.$$

Apoi descompunem Δ_1 şi Δ_2 in 2^{n-1} determinanţi fixînd prima coloanǎ. Anume

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} -\lambda & a_{12} \dots a_{1n} \\ 0 & a_{22} \dots a_{2n} \\ \dots\dots & \dots\dots\dots \\ 0 & a_{n2} \dots a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -\lambda & 0 \dots a_{1n} \\ 0 & -\lambda \dots a_{2n} \\ \dots\dots & \dots\dots\dots \\ 0 & 0 \dots a_{nn} \end{vmatrix} + \dots$$

Analog pentru Δ_1. Deoarece $(-\lambda)^1$ poate apǎrea pe diagonala principalǎ în n moduri, coeficientul lui $(-\lambda)^1$ este format din *suma minorilor principali* *de ordin* $n-1$ din $A-\lambda I$, în număr de $C_n^1 = C_n^{n-1}$, adică

$$(-\lambda)^1 \left\{ \begin{vmatrix} a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{31} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \dots + \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,n-1} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1,1} & \dots & a_{n-1,n-1} \end{vmatrix} \right\}$$

Tot din dezvoltarea lui Δ_1 și Δ_2, se vede că perechea $(-\lambda, -\lambda)$ apare pe diagonală principală în C_n^2 moduri și deci *coeficientul* lui $(-\lambda)^2$ va fi format din *suma tuturor minorilor principali* de ordin „$n-2$" din matricea $A-\lambda I$, în număr de $C_n^2 = C_n^{n-2}$. Deci

$$(-\lambda)^2 \left\{ \begin{vmatrix} a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \dots + \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,n-2} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n-2,1} & \dots & a_{n-2,n-2} \end{vmatrix} \right\}$$

Analog, coeficientul lui $(-\lambda)^i$ va fi format din suma tuturor minorilor principali de ordinul „$n-i$" din matricea $A-\lambda I$ în număr de $C_n^i = C_n^{n-i}$. Coeficientul lui $(-\lambda)^0 = 1$ este evident $\delta_n = \det A$, deoarece $P(0) = \det(A - 0I) = \det A = \delta_n$. Coeficientul lui $(-\lambda)^{n-1}$ este urma lui A, adică $\delta_1 = \operatorname{tr} A$.

2) Fie A și B două matrice asemenea, adică $B = C^{-1}AC$ unde C este o matrice nesingulară. Atunci $\det(B-\lambda I) = \det(C^{-1}AC - \lambda I) = \det[C^{-1}(A-\lambda I)C] = \det(C^{-1})\det(A-\lambda I)\det C = \det(A-\lambda I)$.

Să presupunem că A este o matrice reală (A coincide cu conjugata ei $\bar{A}$) și simetrică (A coincide cu transpusa ${}^tA$).

2.3. Teoremă. Valorile proprii ale unei matrice reale și simetrice sînt reale.

Demonstrație. Pornim de la (1) $AX = \lambda X$ și prin conjugare complexă găsim (2) $A\bar{X} = \bar{\lambda}\bar{X}$. În (1) înmulțim la stînga cu ${}^t\bar{X}$, iar în (2) înmulțim la stînga cu ${}^tX$. Relația $A = {}^tA$ implică ${}^t\bar{X}AX = {}^tXA\bar{X}$ și deci $(\lambda - \bar{\lambda}){}^tX\bar{X} = 0$. Deoarece ${}^tX\bar{X} \neq 0$, rămîne că $\lambda = \bar{\lambda}$, adică $\lambda \in \mathbb{R}$.

Exemple. 1) Matricea

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 4 & -2 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

are polinomul caracteristic $P(\lambda) = \det(A - \lambda I) = (\lambda-1)^4$ și valorile proprii $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 1$.

Din $AX = 1X$, $X = {}^t[x_1, x_2, x_3, x_4]$ obținem sistemul $2x_3 - x_4 = 0$, $2x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0$ cu soluția nenulă $x_2 = 2x_1 + x_3$, $x_4 = 2x_3$. Notînd: $x_1 = a$ și $x_3 = b$ soluția se scrie: $x_2 = 2a + b$, $x_4 = 2b$. Rezultă $X = {}^t[a, 2a+b, b, 2b] = a{}^t[1, 2, 0, 0] + b{}^t[0, 1, 1, 2]$. Deci valorii proprii $\lambda = 1$ îi corespund doi vectori proprii: $v_1 = {}^t[1, 2, 0, 0]$ și $v_2 = {}^t[0, 1, 1, 2]$.

2) Pentru matricea

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 0 \\ -3 & -5 & 0 \\ -3 & -6 & 1 \end{bmatrix}$$

se obține: $P(\lambda) = (\lambda - 1)^2(\lambda + 2)$; valorile proprii: $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = -2$. Vectorii proprii: $v_1 = {}^t[1, -2, 0]$, $v_2 = {}^t[0, 0, 1]$, $v_3 = {}^t[1, -1, -1]$.

Fie V_n un spațiu vectorial finit dimensional peste cîmpul $\mathbb{K}$ și $\mathscr{A}: V_n \to V_n$ un endomorfism. Fie x un vector propriu al lui $\mathscr{A}$ și λ valoarea proprie asociată. Acestea satisfac relația $\mathscr{A}x = \lambda x$.

Fixăm o bază în V_n. Notăm cu A matricea atașată endomorfismului $\mathscr{A}$ și cu X matricea coloană atașată vectorului x. Relația $\mathscr{A}x = \lambda x$ este echivalentă cu ecuația matriceală $AX = \lambda X$.

Fie $P(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ polinomul caracteristic al matricei A. Considerațiile precedente arată că dacă există, valorile proprii ale endomorfismului $\mathscr{A}$ sînt rădăcinile lui $P(\lambda)$ în $\mathbb{K}$, iar vectorii proprii ai lui $\mathscr{A}$ sînt soluțiile ecuației matriceale $(A - \lambda I)X = 0$. Pe de altă parte teorema 2.2 arată că polinomul $P(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ este invariant față de o schimbare a bazei din V_n, adică coeficienții lui $P(\lambda)$ depind de $\mathscr{A}$ și nu de reprezentarea matriceală particulară A. Desigur numărul $\det A$ se numește determinantul lui $\mathscr{A}$, numărul $\operatorname{tr} A$ se numește urma lui $\mathscr{A}$ etc. Acestea justifică următoarea

2.4. *Definiție. Fie $\mathscr{A}: V_n \to V_n$ un endomorfism și A matricea asociată în raport cu o bază fixată în V_n. Polinomul $P(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ se numește polinomul caracteristic al endomorfismului $\mathscr{A}$.*

Endomorfismul $\mathscr{A}: V_n \to V_n$ are cel mult n valori proprii distincte. Dacă $\mathscr{A}$ are exact n valori proprii distincte, atunci vectorii proprii corespunzători determină o bază a lui V_n și matricea A atașată lui $\mathscr{A}$ în raport cu această bază este o matrice diagonală avînd drept elemente pe diagonală valorile proprii ale lui $\mathscr{A}$.

Fie V_n un spațiu vectorial real n dimensional și $\mathscr{A}: V_n \to V_n$ un endomorfism. Notăm cu ${}^{\mathbb{C}}V_n$ complexificatul lui V_n și cu ${}^{\mathbb{C}}\mathscr{A}$ complexificatul lui $\mathscr{A}$. Deoarece $\mathscr{A}$ și ${}^{\mathbb{C}}\mathscr{A}$ au aceeași reprezentare matriceală, valorile proprii ale lui ${}^{\mathbb{C}}\mathscr{A}$ sînt valorile proprii în $\mathbb{C}$ ale matricei reale asociată lui $\mathscr{A}$. Avînd în vedere acest lucru, uneori ${}^{\mathbb{C}}\mathscr{A}$ se identifică cu $\mathscr{A}$, căutîndu-se valorile proprii ale unui endomorfism real direct în $\mathbb{C}$ și bineînțeles vectorii proprii în complexificatul spațiului vectorial real.

Exemplu. Pentru endomorfismul $\mathscr{A}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, care în raport cu baza canonică a lui $\mathbb{R}^3$ are matricea

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix},$$

obținem polinomul caracteristic $P(\lambda) = (\lambda - 1)^2(\lambda - 4)$, valorile proprii $\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$ și vectorii proprii corespunzători $v_1 = (1, 0, 0)$, $v_2 = (0, 1, 1)$.

§ 3. Forma diagonală

Deoarece matricea oricărui endomorfism $\mathscr{A} : V_n \to V_n$ depinde de alegerea bazei in V_n, prezintă interes cazul cind se poate găsi o bază in V_n față de care matricea endomorfismului să aibă o formă cit mai simplă.

3.1. *Definiție. Un endomorfism $\mathscr{A} : V_n \to V_n$ se numește* ***diagonalizabil*** *dacă există o bază $\{e_1, \ldots, e_n\}$ astfel incit matricea lui in această bază să fie diagonală.*

Matricele din clasa de asemănare care ii corespunde endomorfismului $\mathscr{A}$ se numesc ***matrice diagonalizabile.***

3.2. Teoremă. Un endomorfism $\mathscr{A} : V_n \to V_n$ este diagonalizabil dacă și numai dacă există o bază a spațiului V_n formată din vectori proprii ai endomorfismului.

Demonstrație. Dacă $\mathscr{A}$ este diagonalizabil, atunci există o bază $\{e_1, \ldots, e_n\}$ a spațiului față de care matricea lui este diagonală :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a_{22} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Deci $\mathscr{A}e_i = a_{ii}e_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, ceea ce inseamnă că vectorii e_i, $i = 1, \ldots, n$ sint vectorii proprii ai endomorfismului $\mathscr{A}$.

Reciproc, dacă $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ este o bază in V_n, formată din vectorii proprii ai lui $\mathscr{A}$, adică $\mathscr{A}v_i = \lambda_i v_i$, $i = 1, \ldots, n$, atunci matricea lui $\mathscr{A}$ in această bază este

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Evident unele dintre numerele λ_i pot fi egale.

3.3. Teoremă. Dimensiunea unui subspațiu propriu al endomorfismului $\mathscr{A} : V_n \to V_n$ este cel mult egală cu ordinul de multiplicitate al valorii proprii corespunzătoare subspațiului.

Demonstrație. Fie λ_0 o valoare proprie multiplă de ordinul m, și $S(\lambda_0)$ subspațiul propriu corespunzător. Notăm $\dim S(\lambda_0) = p < n$. Fie $\{e_1, e_2, \ldots, e_p\} \subset S(\lambda_0)$ o bază in subspațiul propriu. Completăm această bază pină la o bază in V_n de forma $\{e_1, \ldots, e_p, f_{p+1}, \ldots, f_n\}$. Întrucit vectorii e_i, $i = 1, \ldots, p$ sint vectori proprii corespunzători la valoarea proprie λ_0, avem $\mathscr{A}(e_i) = \lambda_0 e_i$, $i = 1, \ldots, p$ și $\mathscr{A}(f_j) = \sum_{k=1}^{p} a_{kj} e_k + \sum_{k=p+1}^{n} a_{kj} f_k$,

$j = p + 1, \ldots, n$. Matricea lui $\mathscr{A}$ în această bază este

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_0 & 0 & \ldots & 0 & a_{1p+1} & \ldots & a_{1n} \\ 0 & \lambda_0 & \ldots & 0 & a_{2p+1} & \ldots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_0 & a_{pp+1} & \ldots & a_{pn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & a_{np+1} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

așa încît polinomul caracteristic al lui $\mathscr{A}$ are forma $P(\lambda) = \det(A - \lambda I) = (\lambda_0 - \lambda)^p \Delta(\lambda)$, unde $\Delta(\lambda)$ este un determinant de ordinul $n - p$.

În concluzie, $\Delta(\lambda_0) = 0$ implică $p < m$, iar $\Delta(\lambda_0) \neq 0$ implică $p = m$. Deci $p \leqslant m$.

3.4. Teoremă. Un endomorfism $\mathscr{A} : \boldsymbol{V}_n \to \boldsymbol{V}_n$ este diagonalizabil dacă și numai dacă polinomul caracteristic are toate rădăcinile în cîmpul peste care este luat $\boldsymbol{V}_n$ și dimensiunea fiecărui subspațiu propriu este egală cu ordinul de multiplicitate al valorii proprii corespunzătoare.

Demonstrație. Admitem că $\mathscr{A} : \boldsymbol{V}_n \to \boldsymbol{V}_n$ este diagonalizabil.

Rezultă că există o bază $\{e_1, \ldots, e_n\}$ în $\boldsymbol{V}_n$ formată din vectori proprii pentru $\mathscr{A}$ față de care matricea lui $\mathscr{A}$ este diagonală. Fie $P(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{m_1} \cdot (\lambda - \lambda_2)^{m_2} \ldots (\lambda - \lambda_p)^{m_p}$, adică λ_i, $i = 1, \ldots, p$ sînt valorile proprii ale lui $\mathscr{A}$ de multiplicități m_i cu $\sum_{i=1}^{p} m_i = n$. Fără a afecta generalitatea, putem admite că primii m_1 vectori din baza $\{e_1, \ldots, e_n\}$ corespund lui λ_1, următorii m_2 lui λ_2 etc. În concluzie, vectorii $\{e_1, \ldots, e_{m_1}\} \subset \boldsymbol{S}(\lambda_1)$ aparțin subspațiului propriu corespunzător valorii proprii λ_1, ceea ce înseamnă că numărul lor m_1 este mai mic sau cel mult egal cu $\dim \boldsymbol{S}(\lambda_1) : m_1 \leqslant \dim \boldsymbol{S}(\lambda_1)$. Pe de altă parte, conform teoremei 3.3, avem $\dim \boldsymbol{S}(\lambda_1) \leqslant m_1$. În concluzie $m_1 = \dim \boldsymbol{S}(\lambda_1)$. Analog rezultă $\dim \boldsymbol{S}(\lambda_i) = m_i$, $i = 2, \ldots, p$.

Reciproc, admitem că $\dim \boldsymbol{S}(\lambda_i) = m_i$, $i = 1, 2, \ldots, p$. Atunci fie $\boldsymbol{B} = \{e_1, \ldots, e_{m_1}, e_{m_1+1}, \ldots, e_{m_2}, \ldots, e_{m_{p-1}+1}, \ldots, e_{m_p}\}$, $\sum_{i=1}^{n} m_i = n$ o mulțime de vectori din $\boldsymbol{V}_n$ așa încît primii m_1 vectori să constituie o bază în $\boldsymbol{S}(\lambda_1)$, următorii m_2 să constituie o bază în $\boldsymbol{S}(\lambda_2)$ și așa mai departe. Utilizînd inducția asupra lui p se dovedește că $\boldsymbol{B}$ este o bază a lui $\boldsymbol{V}_n$. Față de această bază, matricea lui $\mathscr{A} : \boldsymbol{V}_n \to \boldsymbol{V}_n$ este

$$A = \left[\begin{array}{cccc|c|cccc} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 & & & & & \\ 0 & \lambda_1 & \ldots & 0 & & & & O & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & & & & & \\ 0 & 0 & & \lambda_1 & & & & & \\ \hline & & & & & \lambda_p & 0 & \ldots & 0 \\ & & O & & & 0 & \lambda_p & \ldots & 0 \\ & & & & & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & & & & 0 & 0 & & \lambda_p \end{array}\right]$$

adică o matrice diagonală.

Consecință. Dacă $\mathscr{A} : V_n \to V_n$ este diagonalizabil atunci $V_n = S(\lambda_1) \oplus \oplus S(\lambda_2) \oplus \ldots \oplus S(\lambda_p)$.

Practic, pentru diagonalizarea unui endomorfism $\mathscr{A} : V_n \to V_n$ procedăm în felul următor :

1) Fixăm o bază în V_n și determinăm matricea $A = [a_{ij}]$ a lui $\mathscr{A}$ în această bază.

2) Aflăm valorile proprii care sînt soluțiile în $\mathbb{K}$ ale ecuației $P(\lambda) = 0$.

3) Dacă există p ($p \leqslant n$) valori proprii distincte $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ cu ordinele de multiplicitate $m_1, \ldots, m_p$, calculăm rangul fiecărei matrice $A - \lambda_j I$, $j = 1, \ldots, p$. Dacă rang $(A - \lambda_j I) = n - m_j$, $j = 1, \ldots, p$, dim $S(\lambda_j) =$ $=$ dim Ker $(\mathscr{A} - \lambda_j \mathscr{I})$ este numărul de soluții independente ale sistemului omogen $(A - \lambda_j I)X = 0$, atunci (conform teoremei 3.4) $\mathscr{A}$ este diagonalizabil.

4) Se rezolvă cele p sisteme omogene $(A - \lambda_j I)X = 0$. Un sistem fundamental de soluții pentru un asemenea sistem reprezintă coordonatele vectorilor proprii corespunzători valorii proprii λ_j.

5) Matricea lui $\mathscr{A}$, în raport cu baza formată din vectorii proprii ai lui $\mathscr{A}$, are pe diagonală elementele $\lambda_1, \ldots, \lambda_1; \ldots; \lambda_p, \ldots, \lambda_p$, adică valorile proprii.

6) Notăm prin $D \in \mathscr{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ matricea diagonală atașată lui $\mathscr{A}$ în raport cu baza formată din vectorii proprii ai lui $\mathscr{A}$. Dacă $C \in \mathscr{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ este matricea ale cărei coloane sînt vectorii proprii care alcătuiesc noua bază a lui V_n, adică matricea de trecere de la baza inițială din V_n (baza canonică în $\mathbb{R}^n$) la baza formată din vectorii proprii, atunci

$$D = C^{-1}AC.$$

Exemple. 1) Pentru endomorfismul $\mathscr{A} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, definit prin matricea

$$A = \begin{bmatrix} -3 & -7 & -5 \\ 2 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

avem : polinomul caracteristic, $P(\lambda) = (\lambda - 1)^3$; valorile proprii, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$, (triplă, $m_1 = 3$) ; rang $(A - 1I) =$ rang $\begin{bmatrix} -4 & -7 & -5 \\ 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} = 2 \neq n - m_1 = 3 - 3 = 0.$

Deci endomorfismul $\mathscr{A}$ nu este diagonalizabil.

2) Fie $\mathscr{A} : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, $\mathscr{A}(x) = (x_1 + x_4, x_2, x_3 - 2x_4, x_1 - 2x_3 + 5x_4)$, $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$. În raport cu baza canonică a lui $\mathbb{R}^4$, matricea lui $\mathscr{A}$ este

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -2 & 5 \end{bmatrix}.$$

$P(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \lambda(1 - \lambda)^2(\lambda - 6)$. Rezultă valorile proprii $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$ și $\lambda_4 = 6$. Deci ordinele de multiplicitate sînt $m_1 = 1$, $m_2 = 2$, $m_3 = 1$.

Deoarece rang $(A - \lambda_1 I) = 3 = n - m_1 = 4 - 1 = 3$, prin rezolvarea sistemului omogen $(A - 0I)X_1 = 0$, obținem vectorul propriu $v_1 = {}^t[-1, 0, 2, 1]$.

Analog rang $(A - \lambda_2 I) = 2 = n - m_2 = 4 - 2$ așa încît $\dim S(\lambda_2) = 2$. Vectorii proprii corespunzători sînt $v_2 = {}^t[0, 1, 0, 0]$, $v_3 = {}^t[2, 0, 1, 0]$. Rang $(A - \lambda_4 I) = 3 = n - m_3$ așa încît vectorul propriu corespunzător valorii proprii $\lambda_4 = 6$ este $v_4 = {}^t[1, 0, -2, 5]$. În concluzie endomorfismul $\mathscr{A}$ este diagonalizabil cu matricea diagonalizatoare $C = [v_1, v_2, v_3, v_4] =$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}. \text{ Se obține } D = C^{-1}AC = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}.$$

§ 4. Forma Jordan

Fie V_n un spațiu vectorial peste cîmpul $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ sau $\mathbb{C}$) și $\mathscr{A} : V_n \to V_n$ un endomorfism. Matricea A a endomorfismului $\mathscr{A}$ depinde de alegerea bazei în V_n. Uneori această matrice poate fi diagonalizată, alteori nu. Condițiile în care matricea A se poate diagonaliza au fost date în teoremele 3.2 și 3.4. Una dintre formele relativ simple și utile, care se poate obține în unele dintre cazurile cînd nu este posibilă diagonalizarea, este *forma Jordan*.

Fie $\lambda \in \mathbb{K}$. Matricele de tipul

$$[\lambda], \quad \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}, \ldots, \begin{bmatrix} \lambda & 1 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \ldots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda \end{bmatrix},$$

se numesc *celule Jordan* atașate scalarului λ.

4.1. *Definiție. Spunem că endomorfismul $\mathscr{A} : V_n \to V_n$ este adus la forma Jordan dacă există o bază în V_n față de care matricea*

$$J = \begin{bmatrix} J_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & J_2 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & J_s \end{bmatrix}$$

să reprezinte pe $\mathscr{A}$, unde J_i sînt celule Jordan atașate valorilor proprii λ_i $i = 1, 2, \ldots, s$, ale endomorfismului $\mathscr{A}$.

O celulă Jordan de ordinul p atașată unei valori proprii λ multiplă de ordinul $s \geq p$ corespunde vectorilor liniar independenți $e_1, e_2, \ldots, e_p$ așa încît $\mathscr{A}e_1 = \lambda e_1$, $\mathscr{A}e_2 = e_1 + \lambda e_2, \ldots, \mathscr{A}e_p = e_{p-1} + \lambda e_p$. Vectorul e_1 este propriu, iar vectorii $e_2, \ldots, e_p$ se numesc *vectori principali*.

Există endomorfisme ale spaţiilor vectoriale reale care nu pot fi aduse la forma Jordan şi anume acelea pentru care ecuaţia caracteristică nu are toate rădăcinile în $\mathbb{R}$. Discuţia următoare pune în evidenţă că endomorfismele spaţiilor vectoriale complexe pot fi aduse totdeauna la forma Jordan.

Observaţii. 1) Forma diagonală a unui endomorfism diagonalizabil este un caz particular de formă canonică Jordan ,şi anume cazul cînd toate celulele Jordan sînt de ordinul unu.

2) Forma canonică Jordan nu este unică, dar numărul celulelor Jordan (egal cu numărul total de vectori proprii liniar independenţi ai lui $\mathscr{A}$) ca şi ordinul celulelor Jordan sînt unice pentru un endomorfism $\mathscr{A}$, dat.

3) Ordinea celulelor Jordan pe diagonala formei canonice Jordan depinde de ordinea vectorilor din bază.

4.2. Teoremă. Fie V_n un spaţiu vectorial n-dimensional peste cîmpul $\mathbb{K}$($\mathbb{R}$ sau $\mathbb{C}$). Dacă $\mathscr{A}: V_n \to V_n$ este un endomorfism şi $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ sînt valorile proprii distincte ale lui $\mathscr{A}$ cu multiplicităţile $m_1, m_2, \ldots, m_p$, $\sum_{k=1}^{p} m_k = n$, atunci există p subspaţii vectoriale $V_j \subset V$, $j = 1, \ldots, p$, invariante faţă de $\mathscr{A}$, de dimensiuni m_j, $j = 1, \ldots, p$ aşa încît $V_n = V_1 \oplus \oplus V_2 \oplus \ldots \oplus V_p$ iar $\mathscr{A}_{/V_j} = \mathscr{N}_j + \lambda_j \mathscr{I}_{m_j}$, $j = 1, \ldots, p$ unde $\mathscr{N}_j$ sînt *endomorfisme nilpotente* de diferite ordine.

Demonstraţie. Pentru $j \in \{1, 2, \ldots, p\}$ fixat considerăm endomorfismele $\mathscr{K}_j = \mathscr{A} - \lambda_j \mathscr{I}$ şi aplicînd teorema 4.6, cap. 3, se obţin subspaţiile V_j şi R_j aşa încît $\mathscr{K}_{j/V_j}$ este un endomorfism nilpotent, iar $\mathscr{K}_{j/R_j}$ este nesingular. Deoarece V_j este invariant faţă de $\mathscr{K}_j$ el este invariant şi faţă de endomorfismul $\mathscr{K}_j + \lambda_j \mathscr{I} = \mathscr{A}$. Fie $\mathscr{A}_{/V_j}$ şi $\mathscr{A}_{/R_j}$ restricţiile lui $\mathscr{A}$ la subspaţiile V_j şi R_j; deci unica valoare proprie a lui $\mathscr{A}_{/V_j}$ este λ_j care nu este valoare proprie şi pentru $\mathscr{A}_{/R_j}$ (deoarece $\mathscr{A} - \lambda_j \mathscr{I}$ este nesingular pe R_j iar $\det(A - \lambda_j \mathscr{I}) = \det(\mathscr{A}_{/V_j} - \lambda_j \mathscr{I}_1) \det(\mathscr{A}_{/R_j} - \lambda_j \mathscr{I}_2)$). Rezultă $\dim V_j = m_j$ şi $V_j \cap V_h = \{0\}$, pentru $j \neq h$, aşa încît $V_n = V_1 \oplus V_2 \oplus \ldots \oplus V_p$ $\left(\text{ştim prin ipoteză că } \sum_{k=1}^{p} m_k = n\right)$.

În plus, din $\mathscr{A} = \mathscr{K}_j + \lambda_j \mathscr{I}$ rezultă $\mathscr{A}_{/V_j} = \mathscr{K}_{j/V_j} + \lambda_j \mathscr{I}_{m_j} \overset{\text{not}}{=} \mathscr{N}_j + \lambda_j \mathscr{I}_{m_j}$, cu $\mathscr{N}_j$ nilpotent deoarece $\mathscr{K}_{j/V_j}$ este nilpotent prin construcţie.

4.3. Teorema Jordan. Fie V_n un spaţiu vectorial n-dimensional peste cîmpul $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ sau $\mathbb{C}$). Dacă endomorfismul $\mathscr{A}: V_n \to V_n$ are valori proprii (în $\mathbb{K}$) şi dacă suma multiplicităţilor acestor valori proprii este n, atunci există o bază în V_n faţă de care matricea lui $\mathscr{A}$ are forma Jordan.

Demonstraţie. Fie λ_j, $j = 1, \ldots, p$, valorile proprii ale lui $\mathscr{A}$ (în $\mathbb{K}$) de multiplicităţi m_j, $j = 1, \ldots, p$, $\sum_{j=1}^{p} m_j = n$. Construim subspaţiile $V_j = \operatorname{Ker}(\mathscr{A} - \lambda_j \mathscr{I})^{m_j}$, $j = 1, \ldots, p$. Conform teoremei 4.2 avem $V_n = V_1 \oplus \oplus V_2 \oplus \ldots \oplus V_p$.

Notăm $\mathscr{N}_j = \mathscr{A}_{/V_j} - \lambda_j \mathscr{I}_{m_j}$ endomorfismele nilpotente $\mathscr{N}_j$ de indice h_j. Admitem $h_j = m_j$, $j = 1, \ldots, p$ (cazul $h_j < m_j$ se tratează analog).

Construim mulţimea de vectori $\mathcal{F}^{m_j} = \{f_1^j, f_2^j, \ldots, f_{m_j}^j\}$ din V_j aşa încît $f_1^j = \mathcal{N}_j^{m_j-1}(x)$, $f_2^j = \mathcal{N}_j^{m_j-2}(x)$, $\ldots$, $f_{m_j-1}^j = \mathcal{N}_j(x)$, $f_{m_j}^j = x$ unde $x \in V_j$. Din definiţia lui $\mathcal{N}_j$ şi a mulţimii $\mathcal{F}^{m_j}$ avem

$$\text{(1)} \qquad \mathcal{N}_j(f_1^j) = 0, \quad \mathcal{N}_j(f_2^j) = f_1^j, \ldots, \mathcal{N}_j(f_{m_j}^j) = f_{m_j-1}^j,$$

deoarece $\mathcal{N}_j$ este prin construcţie un endomorfism nilpotent de indice $h_j = m_j$. Avînd în vedere definiţia lui $\mathcal{N}_j$ egalităţile (1) devin

$$\text{(2)} \quad \mathcal{A}_{/V_j}(f_1^j) = \lambda_j f_1^j, \quad \mathcal{A}_{/V_j}(f_2^j) = \lambda_j f_2^j + f_1^j, \ldots, \mathcal{A}_{/V_j}(f_{m_j}^j) = \lambda_j f_{m_j}^j + f_{m_j-1}^j.$$

Dovedim în continuare că vectorii mulţimii $\mathcal{F}^{m_j}$ sînt liniar independenţi. Pentru aceasta fie ecuaţia $\sum_{i=1}^{m_j} k_i f_i^j = 0$, $k_i \in \mathbb{K}$ şi aplicăm endomorfismul $\mathcal{N}_j$, succesiv de $m_j - 1$ ori. Obţinem, $\mathcal{N}_j\left(\sum_{i=1}^{m_j} k_i f_i^j\right) = \sum_{i=1}^{m_j} k_i \mathcal{N}(f_i^j) = 0$ sau, dacă ţinem cont de egalităţile (1), $k_2 f_1^j + k_3 f_2^j + \ldots + k_{m_j} f_{m_j-1}^j = 0$. Aplicînd din nou $\mathcal{N}_j$ şi folosind egalităţile (1) găsim $k_3 f_1^j + k_4 f_2^j + \ldots + k_{m_j} f_{m_j-2}^j = 0$.

Prin aplicarea succesivă a lui $\mathcal{N}_j$ de $m_j - 2$ ori obţinem $k_{m_j-1} f_1^j + k_{m_j} f_2^j = 0$. Aplicînd $\mathcal{N}_j$ din nou (deci în total de $m_j - 1$ ori) avem $k_{m_j} f_1^j = 0$. Deoarece $f_1^j \neq 0$, deducem $k_{m_j} = 0$. Aceasta implică $k_{m_j-1} f_1^j = 0$ şi deci $k_{m_j-1} = 0$.

Analog, din celelalte egalităţi, obţinem $k_{m_j-2} = k_{m_j-3} = \ldots = k_3 = k_2 = k_1 = 0$. În concluzie vectorii mulţimii $\mathcal{F}^{m_j}$ sînt liniar independenţi. Întrucît $\dim V_j = m_j$ rezultă că $\mathcal{F}^{m_j}$ este bază în V_j; aceasta este o bază Jordan în V_j datorită egalităţilor (2). În raport cu această bază matricea restricţiei lui $\mathcal{A}$ la V_j, este

$$J_j = \begin{bmatrix} \lambda_j & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_j & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \lambda_j \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{m_j \times m_j}(\mathbb{K}).$$

Datorită egalităţii $V_n = V_1 \oplus V_2 \oplus \ldots \oplus V_p$, mulţimea $\bigcup_{j=1}^{p} \mathcal{F}^{m_j}$ este baza căutată în V_n, numită bază Jordan faţă de care matricea lui $\mathcal{A}$ este de tip Jordan.

Concluzii. Numărul de submulţimi $\mathcal{F}^{m_j}$ din baza Jordan este egal cu numărul vectorilor proprii independenţi ai lui $\mathcal{A}$. Numărul de vectori principali care corespund unei valori proprii λ_j este egal cu $m_j - h_j$.

Presupunem $h_j \leqslant m_j$, unde h_j este indicele de nilpotenţă al endomorfismului $\mathcal{N}_j = \mathcal{A}_{/V_j} - \lambda_j \mathcal{I}_{m_j}$. Pentru a găsi baza Jordan este necesar să se urmărească problemele următoare:

1) Fixarea unei baze în V_n şi explicitarea matricei A ataşată endomorfismului $\mathcal{A} : V_n \to V_n$.

2) Determinarea valorilor proprii distincte λ_j, $j = 1, \ldots, n$ respectiv multiple de ordinul m_j, $j = 1, \ldots, p$ prin rezolvarea ecuației caracteristice; pentru continuare este suficient ca $\sum_{j=1}^{p} m_j = n$.

3) Găsirea vectorilor proprii liniar independenți corespunzători fiecărei valori proprii.

4) Calcularea numărului de celule Jordan,

$$\dim \mathbf{S}(\lambda_j) = \dim \mathbf{V}_n - \operatorname{rang}(A - \lambda_j I) = n - r_j.$$

5) Rezolvarea sistemului

$$(A - \lambda_j I)^{m_j} X = 0$$

pentru fiecare $j = 1, \ldots, p$. Pentru $j =$ fixat, soluțiile nenule generează subspațiul $\mathbf{V}_j$.

În cazul matricelor de ordin relativ mic putem ocoli unele dintre etapele precedente ținind seama de observația că la o celulă Jordan corespunde un singur vector propriu. Pentru găsirea vectorilor din bază corespunzători celulei de ordinul p, atașată valorii proprii λ_j, se determină soluția generală pentru $\mathscr{A} e_1 = \lambda_j e_1$, apoi se impun condiții de compatibilitate și se determină soluții pentru $\mathscr{A} e_2 = e_1 + \lambda_j e_2, \ldots, \mathscr{A} e_p = e_{p-1} + \lambda_j e_p$.

Dacă notăm prin C matricea care are pe coloane coordonatele vectorilor din baza Jordan, atunci

$$J = C^{-1} A C.$$

Exemplu. Să se reducă la forma canonică Jordan $\mathscr{A} : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, $\mathscr{A}(x) = (3x_1 + x_2, -4x_1 - x_2, 7x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4, -17x_1 - 6x_2 - x_3)$, $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$.

Soluția 1. În baza canonică a lui $\mathbb{R}^4$, endomorfismul $\mathscr{A}$ are matricea

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & -1 & 0 & 0 \\ 7 & 1 & 2 & 1 \\ -17 & -6 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ecuația caracteristică $(1 - \lambda)^4 = 0$ are soluția $\lambda_{1,2,3,4} = 1 = \lambda$ deci $m_1 = 4$. Deoarece $\operatorname{rang}(A - \lambda I) = 2$, numărul celulelor Jordan este egal cu $n - \operatorname{rang}(A - \lambda I) = \dim \mathbf{S}(\lambda) = 4 - 2 = 2$. Ele ar putea fi amindouă de tipul 2×2 sau una de tipul 1×1 și cealaltă de tipul 3×3. Pentru a lămuri situația folosim indicele de nilpotență al restricției $\mathscr{N}_1 = \mathscr{A}_{/\mathbf{V}_1} - \lambda \mathscr{I}_{\mathbf{V}_1}$ iar pentru aceasta trebuie să determinăm pe $\mathbf{V}_1 = \operatorname{Ker}(\mathscr{A} - \lambda \mathscr{I})^4$.

Deoarece

$$(A - \lambda I)^2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & -2 & 0 & 0 \\ 7 & 1 & 1 & 1 \\ -17 & -6 & -1 & -1 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

obținem,

$$\mathbf{S}(\lambda) = \operatorname{Ker}(\mathscr{A} - \lambda \mathscr{I}) \subset \operatorname{Ker}(\mathscr{A} - \lambda \mathscr{I})^2 = \operatorname{Ker}(\mathscr{A} - \lambda \mathscr{I})^3 = \operatorname{Ker}(\mathscr{A} - \lambda \mathscr{I})^4 = \mathbf{V}_1 = \mathbf{V} = \mathbb{R}^4.$$

Rezultă restricția $\mathcal{N}_1 = \mathcal{A}_{/V_1} - \lambda\mathcal{I}$ așa încît indicele de nilpotență h_1 al restricției $\mathcal{N}_1$ este egal cu 2. Deoarece $\dim \mathrm{Ker}(\mathcal{A}-\lambda\mathcal{I})^2 = 4$ și $\dim \mathrm{Ker}(\mathcal{A}-\lambda\mathcal{I}) = \dim \mathbf{S}(\lambda) = 2$ rezultă că numărul celulelor Jordan de tip $h_1 \times h_1$ cu $h_1 = 2$ este egal cu $\dim(\mathcal{A}-\lambda\mathcal{I})^2 - \dim(\mathcal{A}-\lambda\mathcal{I}) = 4 - 2 = 2$.

În concluzie forma Jordan va fi dată de matricea $J = \begin{bmatrix} J_1 & 0 \\ 0 & J_2 \end{bmatrix}$, unde $J_1 = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$ și $J_2 = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$.

Soluția II. Deoarece $\mathrm{rang}(A - \lambda I) = 2$, la $\lambda = 1$ corespund doi vectori proprii pe care-i determinăm rezolvînd sistemul omogen $(A - \lambda I)X_1 = 0$, unde $X_1 = {}^t[x_1, x_2, x_3, x_4]$ adică

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 0 \\ -4x_1 - 2x_2 = 0 \\ 7x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ -17x_1 - 6x_2 - x_3 - x_4 = 0, \end{cases}$$

care este dublu nedeterminat. Notînd $x_3 = a$, $x_4 = b$ obținem $x_1 = -\dfrac{a+b}{5}$, $x_2 = \dfrac{2(a+b)}{5}$.

Deci $X_1 = {}^t\left[-\dfrac{a+b}{5}, \dfrac{2(a+b)}{5}, a, b\right]$, $a \neq 0$, $b \neq 0$, adică există numai doi vectori proprii liniar independenți.

Fie $X_2 = {}^t[u_1, u_2, u_3, u_4]$ matricea corespunzătoare vectorului principal. Obținem sistemul neomogen $(A - \lambda I)X_2 = X_1$ (corespunzător la $\mathcal{A}(e_2) = e_1 + \lambda e_2$), adică

$$\begin{cases} 2u_1 + u_2 = -\dfrac{a+b}{5} \\ -4u_1 - 2u_2 = 2\dfrac{a+b}{5} \\ 7u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = a \\ -17u_1 - 6u_2 - u_3 - u_4 = b. \end{cases}$$

Notînd $u_3 = c$, $u_4 = d$ obținem

$$X_2 = {}^t\left[\frac{6a + b - 5c - 5d}{25}, \frac{-17a - 7b + 10c + 10d}{25}, c, d\right].$$

Deoarece sistemul neomogen este compatibil oricare ar fi a și b, rezultă că fiecăruia dintre vectorii proprii liniari independenți i se atașează un vector principal. Luînd $a = 7$, $b = -17$ deducem vectorul propriu $e_1 = (2, -4, 7, -17)$, iar pentru $a = 7$, $b = -17$, $c = d = 0$ se obține vectorul principal $e_2 = (1, 0, 0, 0)$ atașat lui e_1. Pentru $a = 1$, $b = -6$ se găsește vectorul propriu $e_3 = (1, -2, 1, -6)$; pentru $a = 1$, $b = -6$, $c = d = 0$, găsim vectorul principal $e_4 = (0, 1, 0, 0)$ care se atașează lui e_3. În baza Jordan $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ matricea lui $\mathcal{A}$ este

$$J = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matricea de trecere

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & -2 & 1 \\ 7 & 0 & 1 & 0 \\ -17 & 0 & -6 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{verifică } C^{-1}AC = J.$$

§ 5. Spectrul endomorfismelor pe spații euclidiene

Fie V un spațiu euclidian peste cîmpul $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ sau $\mathbb{C}$), $\mathscr{A} : V \to V$ un endomorfism, λ o valoare proprie a lui $\mathscr{A}$ și x un vector propriu atașat lui λ. În aceste condiții $\lambda = \dfrac{(\mathscr{A}x, x)}{(x, x)}$.

5.1. Teoremă. Fie V un spațiu euclidian complex și fie $\mathscr{A} : V \to V$ un endomorfism hermitian.

1) Valorile proprii sînt reale.

2) La valori proprii distincte corespund vectori proprii ortogonali.

3) Dacă $\dim V = n$, atunci endomorfismul hermitian $\mathscr{A} : V_n \to V_n$ admite exact n vectori proprii ortogonali doi cîte doi.

Demonstrație. 1) Se observă că

$$\bar{\lambda} = \frac{\overline{(\mathscr{A}x, x)}}{\overline{(x, x)}} = \frac{(x, \mathscr{A}x)}{(x, x)} = \frac{(\mathscr{A}x, x)}{(x, x)} = \lambda.$$

2) Fie $\lambda_1 \neq \lambda_2$ valori proprii ale lui $\mathscr{A}$ și $v_1, v_2 \in V$ vectorii proprii corespunzători. Atunci $(\mathscr{A}v_1, v_2) = (\lambda_1 v_1, v_2) = \lambda_1(v_1, v_2)$ și respectiv $(\mathscr{A}v_1, v_2) = (v_1, \mathscr{A}v_2) = (v_1, \lambda_2 v_2) = \lambda_2(v_1, v_2)$. Rezultă $(\lambda_1 - \lambda_2)(v_1, v_2) = 0$, adică $(v_1, v_2) = 0$, întrucît $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

3) Dacă $\dim V = n$, atunci polinomul caracteristic $P(\lambda)$ admite cel puțin o rădăcină λ_1 (eventual multiplă de ordinul n), iar acestei valori proprii îi corespunde cel puțin un vector propriu v_1. Fie $S_1 = S(\lambda_1)^{\perp}$ subspațiul ortogonal suplimentar in V al subspațiului propriu $S(\lambda_1)$.

Atunci $V = S(\lambda_1) \oplus S_1$ și $\dim S_1 = \dim V - \dim S(\lambda_1) = n - 1$. Fie de asemenea $\mathscr{A}_{/S_1}$ restricția lui $\mathscr{A}$ la S_1 și fie $y_0 \in \mathscr{A}_{/S_1}(S_1)$. Atunci există $x_0 \in S_1$ astfel încît $y_0 = \mathscr{A}_{/S_1}(x_0) = \mathscr{A}x_0$. Deci $(v_1, y_0) = (v_1, \mathscr{A}x_0) = (\mathscr{A}v_1, x_0) = (\lambda_1 v_1, x_0) = \lambda_1(v_1, x_0) = 0$, de unde rezultă $y_0 \perp v_1$, adică $y_0 \in S_1$ sau $\mathscr{A}_{/S_1}(S_1) \subset S_1$. Vectorii proprii ai endomorfismului $\mathscr{A}_{/S_1}$ satisfac egalitățile (*) $\mathscr{A}_{/S_1}x = \mathscr{A}x = \lambda_1 x$ ceea ce înseamnă că sînt în același timp vectori proprii ai lui $\mathscr{A}$.

Tot din egalitatea (*) rezultă că valorile proprii ale endomorfismului $\mathscr{A}_{/S_1}$ sînt și valori proprii ale endomorfismului $\mathscr{A}$, deci polinomul caracteristic $P_1(\lambda)$ al endomorfismului $\mathscr{A}_{/S_1}$ divide polinomul caracteristic $P(\lambda)$ al lui $\mathscr{A}$. Fie λ_2 o rădăcină a lui $P_1(\lambda)$ (λ_2 poate fi egal cu λ_1 sau nu) și v_2 vectorul propriu corespunzător: $\mathscr{A}_{/S_1}v_2 = \mathscr{A}v_2 = \lambda_2 v_2$. În calitate de vector propriu al endomorfismului $\mathscr{A}_{/S_1} : S_1 \to S_1$, putem lua $v_2 \in S_1$ și deci $v_2 \perp v_1$. Dar v_2 este vector propriu și pentru $\mathscr{A}$ astfel încît am determinat doi vectori proprii ai lui $\mathscr{A}$ care sînt ortogonali.

Procedura continuă pînă la construcția restricției $\mathscr{A}_{/S_{n-1}}$ la subspațiul (**) $S_{n-1} \subset S_{n-2} \subset \ldots \subset S_2 \subset S_1$, cu $\dim S_{n-1} = 1$. Polinomul caracteristic al lui $\mathscr{A}_{/S_{n-1}}$ are gradul întîi și deci singurei valori proprii a lui $\mathscr{A}_{/S_{n-1}}$ îi corespunde un vector propriu $V_n \in S_{n-1}$ care datorită incluziunilor (**) este ortogonal pe toți vectorii proprii construiți anterior. În concluzie am obținut exact n-vectori proprii ai lui $\mathscr{A}$ ortogonali doi cîte doi.

Consecință. Datorită proprietății 3), orice endomorfism hermitian este diagonalizabil.

Observații. 1) Pentru un endomorfism antihermitian valorile proprii sînt pur imaginare sau nule; vectorii proprii corespunzători au aceleași proprietăți ca și în cazul hermitian.

2) Pe spațiile euclidiene reale, valorile proprii ale unui endomorfism simetric sînt reale, iar valorile proprii ale unui endomorfism antisimetric sînt nule. Dacă V_n este un spațiu euclidian real n dimensional, iar $\mathscr{A} : V_n \to V_n$ este simetric, atunci $\mathscr{A}$ posedă n vectori proprii care constituie o bază ortogonală a lui V_n. Această proprietate nu este adevărată pentru un endomorfism antisimetric.

Exemplu. Fie spațiul euclidian complex $\mathbb{C}^3$ și $\mathscr{A} : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ endomorfismul dat prin matricea

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -i & 0 \\ i & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

Să arătăm că $\mathscr{A}$ este hermitian și să determinăm o bază în $\mathbb{C}^3$ față de care matricea endomorfismului să aibă forma diagonală. Valorile proprii sînt reale $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 4$, iar vectorii proprii corespunzători $e_1 = (1, i, 0)$, $e_2 = (0, 0, 1)$ pentru $\lambda = 4$, și $e_3 = (i, 1, 0)$, pentru $\lambda = 2$, sînt ortogonali doi cîte doi. Deci $\mathscr{A}$ este hermitian. Normînd vectorii proprii obținem baza ortonormată $u_1 = \dfrac{e_1}{\|e_1\|} = \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{i}{\sqrt{2}}, 0\right)$, $u_2 = \dfrac{e_3}{\|e_3\|} = \left(\dfrac{i}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$, $u_3 = e_2$. Matricea de trecere la această bază este

$$C = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{i}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{așa încît}$$

$$D = C^{-1}AC = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

5.2. Teoremă. Fie V un spațiu euclidian complex (real) și $\mathscr{A} : V \to V$ un endomorfism unitar (ortogonal).

1) Dacă există, valorile proprii ale lui $\mathscr{A}$ au modulul egal cu unitatea.

2) La valori proprii distincte corespund vectori proprii ortogonali.

3) Dacă V este complex și n-dimensional, atunci posedă n vectori proprii ortogonali doi cîte doi.

Demonstrație. 1) Fie $\lambda \in \mathbb{C}$ valoare proprie pentru endomorfismul unitar $\mathscr{A}: V \to V$ și $x \in V - \{0\}$ vectorul propriu corespunzător lui λ. Avem

$$(\mathscr{A}x, \mathscr{A}x) = (\lambda x, \lambda x) = \lambda \cdot \bar{\lambda}(x, x),$$

$$(\mathscr{A}x, \mathscr{A}x) = (x, x)$$

unde $\bar{\lambda}$ este conjugatul complex al lui λ. Prin scădere rezultă $(\lambda\bar{\lambda}-1)(x, x)=0$. Deoarece $(x, x) \neq 0$, rezultă $\lambda\bar{\lambda} - 1 = 0$ sau $|\lambda|^2 = 1$, adică $|\lambda| = 1$.

2) Fie $\lambda_1 \neq \lambda_2$ valori proprii și x_1, x_2 vectorii proprii corespunzători. Atunci $(\mathscr{A}x_1, \mathscr{A}x_2) = (x_1, x_2)$ și $(\mathscr{A}x_1, \mathscr{A}x_2) = (\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2) = \lambda_1\bar{\lambda}_2(x_1, x_2)$. Prin scădere rezultă $(\lambda_1\bar{\lambda}_2 - 1)(x_1, x_2) = 0$. Deoarece $\lambda_1\bar{\lambda}_2 - 1 \neq 0$ deducem $(x_1, x_2) = 0$; adică x_1 și x_2 sînt ortogonali.

3) Se demonstrează analog cu 3) din teorema 5.1 cu deosebire că egalitatea $(v_1, y_0) = (v_1, \mathscr{A}x_0) = (\mathscr{A}v_1, x_0) = \lambda_1(v_1, x_0)$ se înlocuiește prin $(v_1, y_0) = (v_1, \mathscr{A}x_0) = \left(\frac{1}{\lambda_1}\mathscr{A}v_1, \mathscr{A}x_0\right) = \frac{1}{\lambda_1}(v_1, x_0) = 0$, deoarece $x_0 \in S_1$.

5.3. Principiul minmax. Fie $\mathscr{A}: V_n \to V_n$ un endomorfism hermitian și $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_n$ valorile proprii ale lui $\mathscr{A}$. Dacă V_0 este un subspațiu vectorial al lui V_n, iar $\mu(V_0) = \max\limits_{x \in V_0,\ \|x\|=1} (\mathscr{A}x, x)$ și $\mu_k = \min\{\mu(V_0)/\dim V_0 = n - k + 1\}$, atunci $\mu_k = \lambda_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$.

Demonstrație. Fie o bază ortonormată $\{e_1, \ldots, e_n\}$ a lui V_n pentru care $\mathscr{A}e_i = \lambda_i e_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$ și fie $V_k \subset V_n$ subspațiul generat de vectorii $e_1, e_2, \ldots, e_k$, $k \leq n$. Prin construcție $V_k \cap V_0 \neq \{0\}$, deoarece am admis că $\dim V_0 = n - k + 1$. Fie $x \in V_k \cap V_0$ cu $\|x\| = 1$; avem $x = \sum\limits_{i=1}^{k} x_i e_i$ și $(\mathscr{A}x, x) = \sum\limits_{i=1}^{k} x_i(\mathscr{A}e_i, x) = \sum\limits_{i=1}^{k} x_i(\lambda_i e_i, x) = \sum\limits_{i=1}^{k} \lambda_i x_i(e_i, x) = \sum\limits_{i=1}^{k} \lambda_i |x_i|^2$.

Ipoteza $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_k \geq \ldots \geq \lambda_n$ implică $(\mathscr{A}x, x) \geq \lambda_k \sum\limits_{i=1}^{k} |x_i|^2 = \lambda_k\|x\|^2 = \lambda_k$. Deci $\mu(V_0) \geq \lambda_k$, adică $\mu_k \geq \lambda_k$. Fie $U_k \subset V$ subspațiul generat de vectorii $e_k, e_{k+1}, \ldots, e_n$ și fie $x \in U_k \cap V_0$. Atunci $x = \sum\limits_{i=k}^{n} x_i e_i$, $\|x\| = 1$ și $(\mathscr{A}x, x) = \sum\limits_{i=k}^{n} \lambda_i |x_i|^2 \leq \lambda_k \sum\limits_{i=k}^{n} |x_i|^2 = \lambda_k$. Rezultă $\mu(V_0) \leq \lambda_k$, adică $\mu_k \leq \lambda_k$. Din cele două inegalități obținem $\mu_k = \lambda_k$, $k = 1, \ldots, n$.

Exemplu. Pe spațiul euclidian canonic $\mathbb{R}^4$, fie endomorfismul $\mathscr{A}: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ dat prin matricea

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & -3/2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3/2 & 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}.$$

Deoarece $A\,{}^tA = I$ rezultă că matricea A este ortogonală; deci și endomorfismul $\mathscr{A}$ este ortogonal. Să verificăm că valorile proprii ale lui ${}^{\mathbb{C}}\mathscr{A} : {}^{\mathbb{C}}\mathbb{R}^n \to {}^{\mathbb{C}}\mathbb{R}^n$ au modulul egal cu unitatea și că vectorii proprii corespunzători sînt ortogonali.

Valorile proprii ale lui ${}^{\mathbb{C}}\mathscr{A}$ sînt soluțiile ecuației $\det(A - \lambda I) = 0$, adică $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = \frac{1}{4} + i\frac{\sqrt{15}}{4}$, $\lambda_4 = \frac{1}{4} - i\frac{\sqrt{15}}{4}$.

Evident $|\lambda_1| = |\lambda_2| = 1$ și $|\lambda_3| = |\lambda_4| = \sqrt{\frac{1}{16} + \frac{15}{16}} = 1$. Vectorii proprii corespunzători sînt respectiv $e_1 = (-\sqrt{3}, \sqrt{3}, -\sqrt{3}, 1)$, $e_2 = (-1, 1, 1, -\sqrt{3})$, $e_3 = (-1/4, 1/4, 1, \sqrt{3}/2) + i(\sqrt{15}/4, \sqrt{15}/4, 0, 0)$ și $e_4 = \bar{e}_3$. Vectorilor e_3 și e_4 li se atașează vectorii reali $u = (-1/4, 1/4, 1, 3/2)$ și $v = (\sqrt{15}/4, \sqrt{15}/4, 0, 0)$ astfel încît $e_3 = u + iv$, $e_4 = u - iv$. Se verifică imediat că $(e_1, e_2) = 0$, $(e_1, u) = 0$, $(e_1, v) = 0$, $(e_2, u) = 0$, $(e_2, v) = 0$, $(u, v) = 0$.

§6. Polinoame de matrice. Funcții de matrice

Fie V_n un spațiu n-dimensional peste cîmpul $\mathbb{K}$ și $\mathscr{A} : V_n \to V_n$ un endomorfism căruia, în raport cu o bază a lui V_n, i se atașează matricea $A = [a_{ij}] \in \mathscr{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$.

Oricărui polinom $P(t) = a_m t^m + a_{m-1}t^{m-1} + \ldots + a_1 t + a_0$ cu coeficienți din cîmpul $\mathbb{K}$ i se poate atașa polinomul $P(\mathscr{A}) = a_m\mathscr{A}^m + a_{m-1}\mathscr{A}^{m-1} + \ldots + a_1\mathscr{A} + a_0\mathscr{I}$ sau polinomul $P(A) = a_m A^m + a_{m-1}A^{m-1} + \ldots + a_1 A + a_0 I$.

6.1. *Definiție. Polinoamele $P(\mathscr{A})$ se numesc polinoame de endomorfisme, iar polinoamele $P(A)$ se numesc polinoame de matrice.*

Evident, cercetarea polinoamelor de endomorfisme se reduce la cercetarea polinoamelor de matrice. În ceea ce privește calculul matricei $P(A)$ cînd se dă A este recomandabil să se folosească observațiile următoare:

1) dacă A se reduce la o matrice diagonală D, atunci $A = CDC^{-1}$, $A^2 = CD^2C^{-1}, \ldots, A^m = CD^mC^{-1}$;

2) dacă A se reduce la o matrice Jordan J, atunci $A = CJC^{-1}$, $A^2 = CJ^2C^{-1}, \ldots, A^m = CJ^mC^{-1}$.

6.2. Teorema Cayley-Hamilton. Dacă $P(\lambda)$ este polinomul caracteristic al matricei A, atunci $P(A) = O$.

Demonstrație. Dacă $C \in \mathscr{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$, atunci $(*)\ C\cdot C^+ = (\det C)I$, unde C^+ este reciproca lui C. Fie $A \in \mathscr{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ și $P(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ polinomul său caracteristic. Avînd în vedere egalitatea $(*)$ avem $(**)$ $(A - \lambda I)(A - \lambda I)^+ = P(\lambda)I$.

Prin construcție $(A - \lambda I)^+$ este o matrice de polinoame de grad $n - 1$, adică $(A - \lambda I)^+ = B_{n-1}\lambda^{n-1} + B_{n-2}\lambda^{n-2} + \ldots + B_0$, unde $B_i \in \mathscr{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$, $i = 0, \ldots, n-1$. Fie $P(\lambda) = \sum_{k=0}^{n} a_k\lambda^k$, $a_k, \lambda \in \mathbb{K}$. Egalitatea $(**)$ devine

$$(A - \lambda I)(B_{n-1}\lambda^{n-1} + B_{n-2}\lambda^{n-2} + \ldots + B_1\lambda + B_0) = (a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_0)I$$

sau

$$(-B_{n-1})\lambda^n + (AB_{n-1} - B_{n-2})\lambda^{n-1} + \ldots + (AB_1 - B_0)\lambda + AB_0 = (a_nI)\lambda^n + \ldots + (a_1I)\lambda + a_0I.$$

Prin identificare, după puterile lui λ rezultă $-B_{n-1}=a_0I$, $AB_{n-1}-B_{n-2}=$ $=a_{n-1}I, \ldots, AB_1-B_0=a_1I, AB_0=a_0I$. Amplificînd, la stînga, respectiv cu $A^n, A^{n-1}, \ldots, A, I$ şi adunînd parte cu parte obţinem $P(A)=a_0A^n+$ $+a_1A^{n-1}+\ldots+a_{n-1}A+a_nI=-A^nB_{n-1}+A^nB_{n-1}-A^{n-1}B_{n-2}+\ldots$ $\ldots-AB_0+AB_0=0$.

Consecinţă. **Dacă** $\mathscr{A}: V_n \to V_n$ este un endomorfism iar $P(\lambda)$ este polinomul său caracteristic, atunci $P(\mathscr{A})=\mathcal{O}$.

Exemple. 1) Dacă

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

să calculăm matricea $P(A)=A^4-2A^2+I$. Polinomul caracteristic al matricei A este $P(\lambda)=\det(A-\lambda I)=(\lambda^2-1)^2=\lambda^4-2\lambda^2+1$ şi deci pe baza teoremei Cayley-Hamilton avem $P(A)=0$.

2) Să calculăm A^{-1} pentru matricea nesingulară

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 7 & 1 & 0 \\ -4 & -2 & 1 \end{bmatrix},$$

folosind teorema Cayley-Hamilton. Găsim $P(\lambda)=(1-\lambda)^3$ şi deci $P(A)=0$, adică $(A-I)^3=0$ sau $A^3-3A^2+3A-I=0$. De aici rezultă $A(A^2-3A+3I)=(A^2-3A+3I)A=I$ aşa încît

$$A^{-1}=A^2-3A+3I=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -7 & 1 & 0 \\ -10 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

6.3. Teoremă. Orice polinom în A de grad $\geq n$, unde n este ordinul matricei A, poate fi exprimat printr-un polinom de gradul $n-1$.

Demonstraţie. Fie $P(\lambda)=(-1)^n(\lambda^n-\delta_1\lambda^{n-1}+\ldots\pm\delta_n)$ polinomul caracteristic ataşat matricei A. Teorema Cayley-Hamilton implică

$$A^n=\delta_1A^{n-1}-\ldots\mp\delta_nI.$$

Prin recurenţă rezultă că puterile A^{n+p}, $p\in\mathbb{N}$, se exprimă cu ajutorul puterilor $A^{n-1}, \ldots, A, I$.

Fie acum o serie de puteri $f(t)=\sum_m a_mt^m$ cu coeficienţi din $\mathbb{K}$. Se ştie că aceste serii au sens pe acele spaţii vectoriale pe care putem defini puterea t^m (numere reale, numere complexe, matrice pătratice, endomorfisme etc.). Teoria convergenţei seriilor de puteri o presupunem cunoscută de la cursul de Analiză matematică.

6.4. *Definiție. Fie $\mathscr{A} : V_n \to V_n$ un endomorfism și A matricea pătratică de ordinul n atașată lui $\mathscr{A}$ în raport cu o bază din V_n. Seria $\sum_m a_m \mathscr{A}^m$ se numește serie de endomorfism, iar suma sa se numește funcție de endomorfism. Seria $\sum_m a_m A^m$ se numește serie de matrice, iar suma sa se numește funcție de matrice.*

Evident studiul seriilor de endomorfisme se reduce la studiul seriilor de matrice. Pe de altă parte teorema 6.3 (consecință a teoremei Cayley-Hamilton) asigură că $f(A) = \sum_m a_m A^m$ se reduce la un polinom de gradul $n-1$ în A, unde n este ordinul matricei A. Dacă $\sum_m a_m A^m$ este convergentă, atunci coeficienții acestui polinom sînt serii convergente.

În cazul cînd A admite valori proprii distincte, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, polinomul de gradul $n-1$ se poate scrie în forma Lagrange

$$f(A) = \sum_{j=1}^{n} \frac{(A-\lambda_1 I)\ldots(A-\lambda_{j-1}I)(A-\lambda_{j+1}I)\ldots(A-\lambda_n I)}{(\lambda_j-\lambda_1)\ldots(\lambda_j-\lambda_{j-1})(\lambda_j-\lambda_{j+1})\ldots(\lambda_j-\lambda_n)} f(\lambda_j).$$

Egalitatea precedentă se poate scrie și sub forma

$$f(A) = \sum_{j=1}^{p} Z_j f(\lambda_j),$$

unde $Z_j \in \mathscr{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ nu depind de funcția f și deci pot fi determinate prin particularizarea lui f.

În cazul valorilor proprii multiple se arată că

$$f(A) = \sum_{k=1}^{p} \sum_{j=0}^{m_k-1} Z_{kj} f^{(j)}(\lambda_k),$$

unde $f^{(j)}(.)$ sînt valorile derivatei de ordinul j a lui f, iar $Z_{kj} \in \mathscr{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ sînt matrice independente de f.

În particular se admit următoarele definiții

$$e^A = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A^m}{m!}, \quad \sin A = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{A^{2m+1}}{(2m+1)!}, \quad \cos A = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{A^{2m}}{(2m)!},$$

seriile avînd raza de convergență ∞. Dintre acestea un rol deosebit îl joacă *matricea exponențială* e^A. Deseori, în loc de e^A se utilizează e^{At}, $t \in \mathbb{R}$ (vezi capitolul de sisteme diferențiale liniare cu coeficienți constanți).

Exemplu. Să calculăm e^{At} pentru matricea

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Deoarece $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 3$ sînt valori proprii distincte ale lui A, rezultă (*) $f(A) = Z_1 f(1) + Z_2 f(2) + Z_3 f(3)$.

Matricele Z_j, $j = 1, 2, 3$ nu depind de f şi de aceea pentru a le determina particularizăm pe f, succesiv, prin : $f(z) = z - 1$, $f(z) = z + 1$, $f(z) = z^2$. Atunci, $f(A) = A - I$, $f(A) = A + I$, $f(A) = A^2$ şi din (*)

$$f(A) = 1 \cdot Z_2 + 2 \cdot Z_3,\ f(A) = 2Z_1 + 3Z_2 + 4Z_3,\ f(A) = Z_1 + 4Z_2 + 9Z_3,$$

aşa încît obţinem sistemul matriceal

$$\begin{cases} Z_2 + 2Z_3 = A - I \\ 2Z_1 + 3Z_2 + 4Z_3 = A + I \\ Z_1 + 4Z_2 + 9Z_3 = A^2 \end{cases}$$

cu soluţia

$$Z_1 = 1/2(A^2 + 5A + 6I),\quad Z_2 = -A^2 + 4A - 3I,\quad Z_3 = 1/2(A^2 - 3A + 2I).$$

Pentru $f(A) = e^{At}$, obţinem

$$e^{At} = 1/2[(A^2 + 5A + 6I)e^t + 2(-A^2 + 4A - 3I)e^{2t} + (A^2 - 3A + 2I)e^{3t}].$$

§ 7. Probleme

1. Fie V spaţiul vectorial al funcţiilor reale de clasă C^∞ pe $(0, 1)$. Să se găsească valorile proprii şi vectorii proprii ai endomorfismului $\mathscr{A} : V \to V$ definit prin $g = \mathscr{A}(f)$, $g(x) = xf'(x)$, $\forall\, x \in (0, 1)$.

2. Fie V_n un spaţiu vectorial real. Endomorfismul $\mathscr{F} : V_n \to V_n$ cu proprietatea $\mathscr{F}^3 + \mathscr{F} = \mathscr{O}$ se numeşte $\mathscr{F}$-structură pe V_n. Să se determine valorile proprii ale lui ${}^{\mathbb{C}}\mathscr{F} : {}^{\mathbb{C}}V_n \to {}^{\mathbb{C}}V_n$.

3. Să se determine valorile proprii şi vectorii proprii pentru endomorfismul $\mathscr{A} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dat prin matricea

$$A = \begin{bmatrix} -3 & -7 & -5 \\ 2 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

4. Să se determine polinomul caracteristic al matricei Frobenius

$$F = \begin{bmatrix} p_1 & p_2 \cdots p_{n-1} & p_n \\ 1 & 0 \;\ldots\; 0 & 0 \\ \cdots & \cdots\cdots & \cdots \\ 0 & 0 \;\ldots\; 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

5. Fie $A \in \mathscr{M}_{n \times n}(\mathbb{C})$, $U \in \mathscr{M}_{1 \times n}(\mathbb{C})$, $V \in \mathscr{M}_{n \times 1}(\mathbb{C})$ şi

$$B = \begin{bmatrix} A & -AV \\ -UA & UAV \end{bmatrix}.$$

Presupunînd $\det A = 0$ să se arate că polinomul caracteristic al lui B se divide cu λ^2.

6. Să se diagonalizeze matricea

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 0 \\ -3 & -5 & 0 \\ -3 & -6 & 1 \end{bmatrix}.$$

7. Fie $\mathscr{A} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ endomorfismul definit prin $\mathscr{A}(x) = (x_1 + 2x_2 - 4x_3,\ 2x_1 - 2x_2 - 2x_3,\ -4x_1 - 2x_2 + x_3)$, $x = (x_1, x_2, x_3)$. Să se determine o bază ortonormată în $\mathbb{R}^3$ față de care matricea endomorfismului să fie diagonală.

8. Să se cerceteze dacă matricea

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -2 & 5 \end{bmatrix}$$

poate fi diagonalizată. În caz afirmativ să se determine matricea diagonalizatoare C.

9. Fie $\mathscr{A} : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ endomorfismul definit prin matricea

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

în raport cu baza canonică a lui $\mathbb{R}^4$. Să se determine matricea Jordan pentru ${}^{\mathbb{C}}\mathscr{A} : {}^{\mathbb{C}}\mathbb{R}^4 \to {}^{\mathbb{C}}\mathbb{R}^4$ și să se scrie matricea corespunzătoare pentru $\mathscr{A} : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$.

10. Să se determine baza față de care matricea

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & -5 & 4 \end{bmatrix}$$

are forma canonică Jordan.

11. Fie $\mathscr{A} : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ endomorfismul definit prin matricea

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{bmatrix},$$

în raport cu baza canonică a lui $\mathbb{R}^4$. Să se determine matricea Jordan pentru ${}^{\mathbb{C}}\mathscr{A} : {}^{\mathbb{C}}\mathbb{R}^4 \to {}^{\mathbb{C}}\mathbb{R}^4$ și să se scrie matricea corespunzătoare pentru $\mathscr{A} : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$.

12. Fie matricea

$$A = \begin{bmatrix} 5+5i & -1+i & -6-4i \\ -4-6i & 2-2i & 6+4i \\ 2+3i & -1+i & -3-2i \end{bmatrix}$$

cu elemente din $\mathbb{C}$. Să se determine o matrice unitară T astfel ca matricea $T^{-1}AT$ să fie triunghiulară.

13. Să se determine valorile proprii şi vectorii proprii şi apoi să se diagonalizeze matricea ortogonală

$$A = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix}.$$

14. Să se determine valorile proprii şi vectorii proprii ai matricei antisimetrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ -1 & -2 & 0 \end{bmatrix}.$$

15. Să se determine valoarea polinomului de matrice $P(A) = A^4 - 4A^3 + 6A^2 - 4A + I$, pentru matricea

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 3 & -1 & 4 \\ -4 & 5 & -2 & 7 \\ -3 & 3 & -2 & 5 \\ -2 & 2 & -2 & 3 \end{bmatrix}.$$

16. Folosind teorema lui Cayley-Hamilton să se calculeze A^{-1} şi A^n, pentru matricea

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

17. Fie V un spaţiu euclidian complex şi $\mathscr{A}: V \to V$ un endomorfism hermitian. Să se arate că $e^{i\mathscr{A}}$ reprezintă un endomorfism unitar.

18. Să se calculeze matricea e^A, unde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

Capitolul 5

FORME BILINIARE ŞI PĂTRATICE

§1. Forme biliniare

1.1. *Definiţie. Fie V un spaţiu vectorial peste cîmpul $\mathbb{K}$. O funcţie $\mathscr{A}: V \times V \to \mathbb{K}$ se numeşte formă biliniară sau tensor covariant de ordinul doi pe V dacă*

$$\mathscr{A}(kx + ly, z) = k\mathscr{A}(x, z) + l\mathscr{A}(y, z),$$

$$\mathscr{A}(x, ky + lz) = k\mathscr{A}(x, y) + l\mathscr{A}(x, z), \quad x, y, z \in V, \; k, l \in \mathbb{K}.$$

Această definiţie spune că o formă biliniară este o funcţie de două variabile vectoriale, liniară în raport cu fiecare variabilă.

Exemplu. Produsul scalar definit pe un spaţiu vectorial real este o formă biliniară.

Contraexemplu. Produsul scalar definit pe un spaţiu vectorial complex, nu este o formă biliniară deoarece $(x, ky + lz) = (x, ky) + (x, lz) = \bar{k}(x, y) + \bar{l}(x, z) \neq k(x, y) + l(x, z)$.

Fie $\mathscr{B}(V, \mathbb{K})$ mulţimea tuturor formelor biliniare pe V. Adunarea formelor biliniare şi înmulţirea cu scalari se definesc ca la funcţii; dacă $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2 \in \mathscr{B}(V, \mathbb{K})$, atunci

$$(\mathscr{A}_1 + \mathscr{A}_2)(x, y) = \mathscr{A}_1(x, y) + \mathscr{A}_2(x, y),$$

$$(k\mathscr{A}_1)(x, y) = k\mathscr{A}_1(x, y), \; \forall k \in \mathbb{K}, \; \forall (x, y) \in V \times V.$$

În raport cu aceste operaţii mulţimea $\mathscr{B}(V, K)$ este un spaţiu vectorial peste cîmpul $\mathbb{K}$.

1.2. *Definiţie. Forma biliniară $\mathscr{A}: V \times V \to \mathbb{K}$ se numeşte simetrică dacă $\mathscr{A}(x, y) = \mathscr{A}(y, x)$, $\forall x, y \in V$; dacă $\mathscr{A}(x, y) = -\mathscr{A}(y, x)$, $\mathscr{A}$ se numeşte formă biliniară antisimetrică.*

Fie V_n un spaţiu vectorial n-dimensional peste cîmpul $\mathbb{K}$ şi fie $\{e_1, \ldots, e_n\}$ o bază în acest spaţiu. Pentru $x, y \in V_n$, $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$, $y = \sum_{j=1}^{n} y_j e_j$, şi $\mathscr{A}: V_n \times V_n \to \mathbb{K}$ o formă biliniară pe V_n, avem $\mathscr{A}(x, y) = \mathscr{A}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i, \sum_{j=1}^{n} y_j e_j\right) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i y_j \mathscr{A}(e_i, e_j)$ ceea ce arată că forma biliniară $\mathscr{A}$ pe V_n este unic determinată dacă se cunosc cele n^2 valori ale ei $\mathscr{A}(e_i, e_j)$, $i, j = 1, \ldots, n$, pentru vectorii bazei $\{e_1, \ldots, e_n\}$. Notînd $a_{ij} = \mathscr{A}(e_i, e_j) \in \mathbb{K}$, egalitatea de mai sus devine

$$\mathscr{A}(x, y) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j$$

care se numeşte *expresia analitică* a formei biliniare faţă de baza considerată.

Matricea $A = [a_{ij}] \in \mathscr{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$ de elemente $a_{ij} = \mathscr{A}(e_i, e_j)$ se numeşte *matricea formei biliniare* $\mathscr{A}$ în raport cu baza $\{e_1, \ldots, e_n\}$. Dacă introducem matricele coloană $X = [x_i] \in \mathscr{M}_{n\times 1}(\mathbb{K})$, $Y = [y_i] \in \mathscr{M}_{n\times 1}(\mathbb{K})$, atașate vectorilor x și y, atunci expresia analitică a formei biliniare poate fi scrisă sub forma matriceală

$$\mathscr{A}(x, y) = {}^tX\,A\,Y.$$

Aplicația care asociază fiecărei forme biliniare $\mathscr{A} : V_n \times V_n \to \mathbb{K}$ matricea ei în raport cu o bază dată a spațiului V_n este un izomorfism între spațiul vectorial $\mathscr{B}(V_n, \mathbb{K})$ și spațiul vectorial $\mathscr{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$. În consecință $\dim \mathscr{B}(V_n, \mathbb{K}) = \dim \mathscr{M}_{n\times n}(\mathbb{K}) = n^2$.

Dacă matricea A este nesingulară (singulară), atunci $\mathscr{A}$ se numește *nedegenerată* (*degenerată*). În general, rangul matricei A se numește *rangul* formei biliniare $\mathscr{A}$.

1.3. Teoremă. O formă biliniară $\mathscr{A} : V_n \times V_n \to \mathbb{K}$ este simetrică (antisimetrică) dacă și numai dacă matricea formei într-o bază a spațiului este simetrică (antisimetrică).

Demonstrație. Admitem că $\mathscr{A}$ este o formă simetrică; atunci dacă $A = [a_{ij}]$ este matricea formei într-o bază $\{e_1, \dots, e_n\}$ a spațiului, avem $a_{ij} = \mathscr{A}(e_i, e_j) = \mathscr{A}(e_j, e_i) = a_{ji}$, deci $A = {}^tA$. Reciproc, admitem că există o bază $\{e_1, \dots, e_n\}$ a spațiului astfel încît matricea formei $A = [a_{ij}]$ este simetrică. Atunci $\forall\, x, y \in V$ avem $\mathscr{A}(y, x) = {}^t({}^tYAX) = {}^tX\,{}^tA\,Y = {}^tXAY = \mathscr{A}(x, y)$.

1.4. Teoremă. Dacă $C = [c_{ij}] \in \mathscr{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ este matricea de trecere de la baza $\{e_1, \dots, e_n\}$ la baza $\{e'_1, \dots, e'_n\}$ din V_n, iar $A = [a_{ij}]$, $B = [b_{ij}]$ sînt matricele formei biliniare $\mathscr{A} : V_n \times V_n \to \mathbb{K}$ față de cele două baze, atunci

$$B = {}^tCAC.$$

Demonstrație. În baza $\{e'_1, \dots, e'_n\}$ avem $x = \sum_{i=1}^{n} x'_i e'_i$, $y = \sum_{j=1}^{n} y'_j e'_j$, $x, y \in V_n$. Dacă $X' = [x'_j]$, $Y' = [y'_j]$, iar $B = [b_{ij}]$, $b_{ij} = \mathscr{A}(e'_i, e'_j)$, $i, j = 1, \dots, n$, este matricea lui $\mathscr{A}$ față de această bază, atunci $\mathscr{A}(x, y) = {}^tX'BY'$.

Pe de altă parte matricele coloană X, Y și X', Y' ale lui x și y în cele două baze sînt legate prin egalitățile $X = CX'$, $Y = CY'$ așa încît $\mathscr{A}(x, y) = {}^tXAY = {}^t(CX')A(CY') = {}^tX'({}^tCAC)Y'$. Rezultă ${}^tX'BY' = {}^tX'({}^tCAC)Y'$; deci $B = {}^tCAC$.

1.5. *Definiție. Fie* $\mathscr{A} : V \times V \to \mathbb{K}$ *o formă biliniară simetrică. Mulțimea* $\operatorname{Ker} \mathscr{A} = \{x \in V \mid \mathscr{A}(x, y) = 0,\ \forall\, y \in V\}$ *se numește nucleul formei.*

1.6. Propoziție. $\operatorname{Ker} \mathscr{A} \subset V$ este un subspațiu vectorial al lui V.

Demonstrație. Fie $u, v \in \operatorname{Ker} \mathscr{A}$. Atunci $\mathscr{A}(u, w) = 0$, $\mathscr{A}(v, w) = 0$ $\forall w \in V$ și dacă $k, l \in \mathbb{K}$, avem $k\mathscr{A}(u, w) + l\mathscr{A}(v, w) = 0$ sau $\mathscr{A}(ku + lv, w) = 0$. Deci $ku + lv \in \operatorname{Ker} \mathscr{A}$.

1.7. Teorema rangului. Dacă $\mathscr{A} : V_n \times V_n \to \mathbb{K}$ este o formă biliniară simetrică pe spațiul vectorial n-dimensional V_n, atunci

$$\operatorname{rang} \mathscr{A} = n - \dim(\operatorname{Ker} \mathscr{A}).$$

Demonstrație. Fie $\{e_1, \ldots, e_n\}$ o bază a lui V_n și $A = [a_{ij}]$, $a_{ij} \in \mathbb{K}$ matricea formei biliniare în raport cu această bază. Atunci $\forall x, y \in V_n$, $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$, $y = \sum_{j=1}^{n} y_j e_j$, $\mathscr{A}(x, y) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i \right) y_j$ care arată că $x \in \operatorname{Ker} \mathscr{A}$ dacă și numai dacă x este o soluție a sistemului liniar și omogen $\sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i = 0$, $j = 1, \ldots, n$. Deci $\operatorname{Ker} \mathscr{A}$ coincide cu mulțimea soluțiilor acestui sistem. Pe de altă parte rang $\mathscr{A}$ = rang $[a_{ij}]$, adică rangul lui $\mathscr{A}$ este egal cu diferența dintre numărul necunoscutelor sistemului și dimensiunea spațiului soluțiilor sistemului.

§ 2. Forme pătratice

Fie V un spațiu vectorial peste cîmpul $\mathbb{K}$ și $\mathscr{A} : V \times V \to \mathbb{K}$ o formă biliniară simetrică.

2.1. *Definiție. Funcția $Q : V \to \mathbb{K}$ definită prin egalitatea $Q(x) = \mathscr{A}(x, x)$, se numește forma pătratică asociată formei biliniare simetrice $\mathscr{A}$; $\mathscr{A}$ se zice forma polară sau forma dedublată a lui Q.*

De exemplu forma pătratică corespunzătoare produsului scalar real este pătratul normei euclidiene : $Q(x) = (x, x) = \|x\|^2$, $x \in V$.

Întrucît pentru $x, y \in V$, $Q(x + y) = \mathscr{A}(x + y, x + y) = \mathscr{A}(x, x) + \mathscr{A}(x, y) + \mathscr{A}(y, x) + \mathscr{A}(y, y) = \mathscr{A}(x, x) + 2\mathscr{A}(x, y) + \mathscr{A}(y, y)$ și $\mathscr{A}(x, y) = \mathscr{A}(y, x)$, rezultă,

$$\mathscr{A}(x, y) = 1/2[Q(x + y) - Q(x) - Q(y)].$$

Această egalitate arată că dacă se cunoaște forma pătratică Q, atunci forma biliniară simetrică $\mathscr{A}$ este perfect determinată.

Presupunem $\dim V = n$. Dacă $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ este o bază în spațiul vectorial V_n, atunci pentru orice $x \in V_n$, $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$, avem

$$Q(x) = \mathscr{A}(x, x) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j = {}^tXAX,$$

unde $a_{ij} = \mathscr{A}(e_i, e_j)$, $i, j = 1, \ldots, n$, $X = {}^t[x_1, x_2, \ldots, x_n]$. De aici deducem că matricea și rangul formei pătratice Q coincid respectiv cu matricea și rangul formei biliniare simetrice $\mathscr{A}$ asociate lui Q.

2.2. *Definiție.* Fie $\mathscr{A} : V \times V \to \mathbb{R}$ *o formă biliniară* ***simetrică*** *și Q forma pătratică asociată. Vectorii $x, y \in V$ se numesc ortogonali în raport cu $\mathscr{A}$ (sau Q) dacă $\mathscr{A}(x, y) = 0$.*

2.3. *Definiție. Fie $U \subset V$ un subspațiu vectorial al lui V. Mulțimea $U^{\perp} = \{y \in V \mid \mathscr{A}(x, y) = 0, \ \forall x \in \mathscr{A}\}$ se numește* ***complementul ortogonal*** *al lui U în V față de $\mathscr{A}$.*

2.4. Teoremă. Fie $\mathscr{A} : V \times V \to \mathbb{R}$ o formă biliniară simetrică.

1) $U^{\perp}$ este subspațiu vectorial al lui V;

2) dacă $\{u_1, u_2, \ldots, u_p\}$ este o bază în U, apartenența $y \in U^{\perp}$ este echivalentă cu sistemul

$$\mathscr{A}(u_1, y) = \mathscr{A}(u_2, y) = \ldots = \mathscr{A}(u_p, y) = 0;$$

3) dacă $\dim V = n$ avem $\dim U + \dim U^{\perp} \geq \dim V$; egalitatea are loc dacă $\mathscr{A}$ este nedegenerată;

4) dacă $\mathscr{A}/U$, $\mathscr{A}/U^{\perp}$ sînt restricţiile lui $\mathscr{A}$ la U şi respectiv $U^{\perp}$, $\dim V = n$ rezultă

$$U \oplus U^{\perp} = V \Leftrightarrow \mathscr{A}/U \text{ este nedegenerată.}$$

Demonstraţie. 1) Fie $y_1, y_2 \in U^{\perp}$. Atunci $\mathscr{A}(x_1, y_1) = 0$, $\mathscr{A}(x_2, y_2) = 0$. Pentru $k, l \in \mathbb{R}$ avem $k\mathscr{A}(x, y_1) + l\mathscr{A}(x, y_2) = 0$ sau $\mathscr{A}(x, ky_1 + ly_2) = 0$. Deci $ky_1 + ly_2 \in U^{\perp}$.

2) $y \in U^{\perp}$ implică $\mathscr{A}(x, y) = 0$, $\forall x \in U$; în particular $\mathscr{A}(u_i, y) = 0$, $i = 1, \ldots, p$, deoarece $u_i \in U$. Reciproc, $\mathscr{A}(x, y) = 0$ pentru orice $x \in U$ deoarece dacă $x \in U$ avem $x = \sum_{i=1}^{p} x_i u_i$, $x_i \in \mathbb{R}$ aşa încît $\mathscr{A}(x, y) = \sum_{i=1}^{p} x_i \mathscr{A}(u_i, y) = 0$.

3) a se vedea problema 4.§5, din [48].

4) Admitem că restricţia $\mathscr{A}/U$ este nedegenerată. Aceasta înseamnă că singurul vector din U ortogonal pe toţi vectorii din U este vectorul nul, aşa încît $U \cap U^{\perp} = \{0\}$. Cum $\mathscr{A}$ este nedegenerată avem $\dim U + \dim U^{\perp} = \dim V$; deci $U \oplus U^{\perp} = V$. Reciproc, dacă $U \otimes U^{\perp} = V$, rezultă $U \cap U^{\perp} = \{0\}$ aşa încît $\mathscr{A}/U$ este nedegenerată.

Observaţie. Chiar dacă o formă biliniară $\mathscr{A}$ (sau Q) este nedegenerată pe spaţiul V, se poate întîmpla ca restricţiile ei la anumite subspaţii vectoriale ale lui V să fie degenerate. De exemplu, forma pătratică $Q(x) = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2$ este nedegenerată în $\mathbb{R}^3$ dar restricţia ei la subspaţiul $U = \{x \in \mathbb{R}^3 | x_2 - x_3 = 0\}$ este degenerată avînd rangul egal cu unitatea. Într-adevăr dacă facem schimbarea de coordonate $x_1 = y_1$, $x_2 = y_2$, $x_2 - x_3 = y_3$ forma pătratică devine $Q(y) = y_1^2 + 2y_2y_3 - y_3^2$. Prin schimbarea menţionată, mulţimea U se scrie $U = \{y \in \mathbb{R}^3 | y_3 = 0\}$ şi atunci $(Q/U)(y) = y_1^2$ care evident are rangul unu. Pentru a obţine complementul ortogonal $U^{\perp}$, fie o bază în U formată din vectorii $u_1 = (0, 1, 1)$, $u_2 = (1, 1, 1)$. Vectorii $y \in U^{\perp}$ trebuie să verifice ecuaţiile $\mathscr{A}(u_1, y) = 0$, $\mathscr{A}(u_2, y) = 0$, adică $y_2 - y_3 = 0$, $y_1 + y_2 - y_3 = 0$ cu soluţia generală $y_1 = 0$, $y_2 = y_3 = a$. Deci $y = (0, a, a) \in U^{\perp}$.

2.5. *Definiţie. Un vector $x \in V$ se numeşte izotrop în raport cu o formă biliniară simetrică $\mathscr{A} : V \times V \to \mathbb{C}$ (sau relativ la forma pătratică asociată Q) dacă $Q(x) = \mathscr{A}(x, x) = 0$.*

Exemplu. Pentru forma biliniară $\mathscr{A} : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $\mathscr{A}(x, y) = x_1y_1 + x_2y_2$ forma pătratică asociată este definită prin $Q(x) = x_1^2 + x_2^2$. Din $Q(x) = 0$ rezultă $x_2 = \pm ix_1$ aşa încît vectorii izotropi ai formei sînt (x_1, ix_1) şi $(x_1, -ix_1)$ cu $x_1 \in \mathbb{C}$. Definiţia 2.5 spune că un vector $x \in V$ este izotrop dacă şi numai dacă el este ortogonal lui însuşi; evident vectorul nul al spaţiului este totdeauna izotrop deoarece $Q(0) = 0$.

2.6. *Definiţie. Fie $\mathscr{A} : V_n \times V_n \to \mathbb{R}$ o formă biliniară simetrică. O bază $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\} \subset V_n$ se numeşte bază ortogonală în raport cu forma $\mathscr{A}$ dacă $\mathscr{A}(e_i, e_j) = 0$ pentru $i \neq j$, $i, j = 1, \ldots, n$, adică vectorii ei sînt ortogonali doi cîte doi faţă de forma $\mathscr{A}$.*

În raport cu o bază ortogonală matricea formei este diagonală,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

şi dacă notăm $a_{ii} = a_i$, $i = 1, \ldots, n$, atunci expresiile analitice ale formei biliniare $\mathscr{A}$ şi formei pătratice asociate Q, devin,

$$\mathscr{A}(x, y) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i y_i, \quad Q(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i^2.$$

Aceste expresii se numesc *expresii canonice* corespunzătoare formei biliniare simetrice $\mathscr{A}$ şi respectiv formei pătratice Q. În acest caz se spune că forma pătratică $Q : V_n \to \mathbb{R}$ (respectiv forma biliniară $\mathscr{A}$) a fost redusă la expresia canonică.

§3. Reducerea formelor pătratice la expresia canonică

3.1. Teoremă. Dacă $Q : V_n \to \mathbb{R}$ este o formă pătratică pe spaţiul V_n, atunci există în V_n o bază ortogonală în raport cu Q, adică o bază faţă de care $Q(x)$ să aibă expresia canonică.

Demonstraţie. Admitem cazul cînd forma pătratică Q este nedegenerată. Aceasta înseamnă că şi polara ei $\mathscr{A}$ este nedegenerată. Vom folosi inducţia după n. Pentru $n = 1$, baza este formată dintr-un vector nenul. Fie $n > 1$. Deoarece $\mathscr{A}$ este nedegenerată, Ker $\mathscr{A} = \{0\}$, ceea ce înseamnă că există vectorii $x, y \in V_n$ aşa încît $\mathscr{A}(x, y) \neq 0$. Atunci cel puţin unul dintre scalarii $\mathscr{A}(x + y, x + y)$, $\mathscr{A}(x, x)$, $\mathscr{A}(y, y)$ este nenul. Deci există un vector $e_1 \in V_n$ aşa încît $\mathscr{A}(e_1, e_1) \neq 0$. Fie atunci $U \subset V_n$ subspaţiul vectorial generat de vectorul e_1 şi $U^\perp$ complementul lui ortogonal faţă de $\mathscr{A}$. Deoarece vectorii din U sînt de forma ke_1, $k \in \mathbb{R}$ şi $\mathscr{A}(e_1, ke_1) = k\mathscr{A}(e_1, e_1) \neq 0$ pentru $k \neq 0$ rezultă că şi restricţia $\mathscr{A}/U$ este nedegenerată.

Conform teoremei 2.4 avem $V_n = U \oplus U^\perp$ şi restricţia $\mathscr{A}/U^\perp$ este de asemenea nedegenerată. Aceasta arată că dim $U^\perp = n - 1$, deoarece prin construcţie dim $U = 1$; prin ipoteza de inducţie, în $U^\perp$ există o bază notată $\{e_2, e_3, \ldots, e_n\}$ ortogonală faţă de restricţia $\mathscr{A}/U^\perp$, deci şi faţă de $\mathscr{A}$.

Din felul cum au fost construiţi, vectorii $e_1, e_2, \ldots, e_n$ sînt ortogonali doi cîte doi faţă de $\mathscr{A}$ şi deci liniar independenţi. În adevăr, ecuaţia $k_1e_1 + \ldots + k_ne_n = 0$, $k_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, n$, implică $0 = \mathscr{A}(e_i, k_1e_1 + k_2e_2 + \ldots + k_ie_i + \ldots + k_ne_n) = k_i\mathscr{A}(e_i, e_i)$, $i = 1, \ldots, n$. Relaţia $\mathscr{A}(e_i, e_i) \neq 0$ conduce la $k_i = 0$, $i = 1, \ldots, n$. În concluzie $\{e_1, \ldots, e_n\}$ constituie baza căutată.

Să considerăm cazul cînd $\mathscr{A}$ este degenerată, adică Ker $\mathscr{A} \neq \{0\}$. Notăm $U =$ Ker $\mathscr{A}$ şi fie $W \subset V_n$ subspaţiul suplimentar cu U, adică $U \cap W = \{0\}$ şi $V_n = U \oplus W$. Conform teoremei 1.7 avem dim $U = n -$ rang $\mathscr{A}$ şi atunci dim $W =$ dim $V_n -$ dim $U = n - n +$ rang $\mathscr{A} =$ rang $\mathscr{A}$ ceea ce înseamnă că restricţia $\mathscr{A}/W$ este nedegenerată. Notăm $p =$ dim $W =$ rang $\mathscr{A}$. Conform primului caz există o bază $\{f_1, \ldots, f_p\}$ în W ortogonală faţă de restricţia $\mathscr{A}/W$ şi deci şi faţă de $\mathscr{A}$. Completăm această bază cu baza $\{f_{p+1}, \ldots, f_n\}$ a lui U aşa încît obţinem baza $\{f_1, \ldots, f_p, \ldots, f_n\}$ a lui V_n, ortogonală faţă de $\mathscr{A}$ (vectorii $f_{p+1}, \ldots, f_n$ aparţinînd lui $U =$ Ker $\mathscr{A}$ satisfac egalităţile $\mathscr{A}(f_k, f_h) = 0$, $k \neq h$, $k, h = p + 1, \ldots, n$). Aşadar, în ambele cazuri, s-a putut găsi o bază a lui V_n.

3.2. Teoremă. Dacă rang $\mathscr{A} = p < n$ atunci oricare ar fi baza $\{e_1, \ldots, e_n\}$ a lui V_n ortogonală faţă de forma biliniară simetrică $\mathscr{A}$ (sau Q), exact p dintre scalarii $\mathscr{A}(e_1, e_1) = Q(e_1), \ldots, \mathscr{A}(e_n, e_n) = Q(e_n)$ sînt *nenuli*; adică, oricare ar fi expresia canonică a lui $\mathscr{A}$ (sau Q), numărul coeficienților nenuli este același și anume egal cu rang $\mathscr{A}$ = rang Q.

Demonstrație. Fie $\{e_1, \ldots, e_n\}$ o bază a lui $\boldsymbol{V}_n$ ortogonală față de $\mathscr{A}$ așa încît $\mathscr{A}(e_i, e_i) \neq 0$, $i = 1, \ldots, q$ și $\mathscr{A}(e_j, e_j) = 0$, $j = q+1, \ldots, n$. Atunci $x = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k \in \operatorname{Ker} \mathscr{A} \Rightarrow \mathscr{A}(e_k, x) = 0$, $k = 1, \ldots, n$ sau $x_k \mathscr{A}(e_k, e_k) = 0$ ceea ce implică $x_1 = x_2 = \ldots = x_q = 0$ deoarece $\mathscr{A}(e_k, e_k) \neq 0$, $k = 1, \ldots, q$. Așadar dim Ker $\mathscr{A} = n - q$ și cum dim Ker $\mathscr{A} = n - p$ (deoarece rang $\mathscr{A} = p$) rezultă $q = p$.

Un procedeu practic de a construi o bază ortogonală față de o formă pătratică Q dată, adică baza față de care $Q(x)$ se reduce la expresia canonică, îl constituie metoda lui Gauss.

3.3. Teoremă (metoda Gauss). Fie $Q : \boldsymbol{V}_n \to \mathbb{C}$ o formă pătratică pe spațiul vectorial complex $\boldsymbol{V}_n$. Atunci se poate construi o bază $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ în $\boldsymbol{V}_n$, ortogonală în raport cu Q, față de care $Q(x)$ să se reducă la expresia canonică.

Demonstrație. Fie $\{f_1, \ldots, f_n\}$ o bază a spațiului $\boldsymbol{V}_n$ și $Q(x) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$ expresia analitică a formei în această bază. Dacă $a_{ii} = 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$ și Q nu este identic nulă, există cel puțin un element $a_{ij} \neq 0$ pentru $i \neq j$. Prin transformarea de coordonate $x_i = x'_i + x'_j$, $x_j = x'_i - x'_j$, $x_k = x'_k$, $k \neq i, j$ expresia formei pătratice devine $Q(x) = \sum_{i,j=1}^{n} a'_{ij} x'_i x'_j$ în care cel puțin unul din elementele diagonale a'_{ii}, $i = 1, \ldots, n$ este nenul (deoarece $x_i x_j = x_i'^2 - x_j'^2$).

Notăm cu $\{e'_1, \ldots, e'_n\}$ baza lui $\boldsymbol{V}_n$ față de care coordonatele lui x sînt x'_i, $i = 1, \ldots, n$. Matricea de trecere este

$$C_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 1 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & -1 & \ldots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{bmatrix}$$

Fără a micșora generalitatea, putem admite că $a'_{11} \neq 0$ așa încît putem scrie $Q(x) = a'_{11} x_1'^2 + 2 \sum_{k=2}^{n} a'_{1k} x'_1 x'_k + \sum_{i,j \neq 1}^{n} a'_{ij} x'_i x'_j$. Adăugăm și scădem termenii potriviți pentru a obține pătratul formei liniare $a'_{11} x'_1 + a'_{12} x'_2 + \ldots + a'_{1n} x'_n$, adică

$$Q(x) = \frac{1}{a'_{11}} (a'_{11} x'_1 + a'_{12} x'_2 + \ldots + a'_{1n} x'_n)^2 + \sum_{i,j=2}^{n} a''_{ij} x'_i x'_j,$$

unde $\sum_{i,j=2}^{n} a''_{ij}x_ix_j$ nu conține pe x'_1. Fie $\{e''_1, e''_2, \ldots, e''_n\}$ baza din V_n față de care coordonatele vectorului x să satisfacă egalitățile $x''_1 = a'_{11}x'_1 + a'_{12}x'_2 + \ldots + a'_{1n}x'_n$, $x''_j = x'_j$, $j = 2, \ldots, n$. În raport cu această bază, expresia formei pătratice devine $Q(x) = \dfrac{1}{a'_{11}} x''^2_1 + \sum_{i,j=2}^{n} a''_{ij}x''_ix''_j$. Suma $Q_1(x) = \sum_{i,j=2}^{n} a''_{ij}x''_ix''_j$ este o formă pătratică în $n-1$ variabile așa încît poate fi tratată asemănător.

Matricea de trecere la noua bază este

$$C_2 = \begin{bmatrix} -\dfrac{1}{a'_{11}} & -\dfrac{a'_{12}}{a'_{11}} & \ldots & -\dfrac{a'_{1n}}{a'_{11}} \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{bmatrix}$$

În conluzie, după cel mult $n-1$ pași obținem o bază $\{e_1, \ldots, e_n\}$ în V_n, ortogonală față de Q, forma pătratică reducîndu-se la expresia canonică care reprezintă o sumă de pătrate de $p \leqslant n$ forme liniare independente (p = rang Q).

Exemple. 1) Pentru forma pătratică $Q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definită prin $Q(x) = x_1x_2 - 2x_1x_3 + x_2x_3$, în baza canonică a lui $\mathbb{R}^3$ avem $a_{ii} = 0$, $i = 1, 2, 3$.

Prin schimbarea de coordonate $x_1 = x'_1 + x'_2$, $x_2 = x'_1 - x'_2$, $x_3 = x'_3$ obținem $Q(x) = x'^2_1 - x'^2_2 - x'_1x'_3 - 3x'_2x'_3$. Folosind matricea de trecere

$$C_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

găsim baza nouă $e'_1 = e_1 + e_2$, $e'_2 = e_1 - e_2$, $e'_3 = e_3$.

În $Q(x) = (x'_1 - 1/2x'_3)^2 - x'^2_2 - 3x'_2x'_3 - 1/4x'^2_3$ notăm $x''_1 = x'_1 - 1/2x'_3$, $x''_2 = x'_2$, $x''_3 = x'_3$ și obținem $Q(x) = x''^2_1 - x''^2_2 - 3x''_2x''_3 - 1/4x''^2_3$; baza corespunzătoare este $e''_1 = e'_1$; $e''_2 = e'_2$, $e''_3 = 1/2e'_1 + e'_3$; iar matricea de trecere este

$$C_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Asemănător, $Q(x) = x''^2_1 - (x''_2 + 3/2x''_3)^2 + 2x''^2_3$ așa încît, prin schimbarea de coordonate $x'''_1 = x''_1$, $x'''_2 = x''_2 + 3/2\, x''_3$, $x'''_3 = x''_3$, avem $Q(x) = x'''^2_1 - x'''^2_2 + 2x'''^2_3$ care reprezintă expresia canonică a formei. Baza, ortogonală față de Q, față de care am obținut această expresie este formată din vectorii $e'''_1 = e_1 + e_2$; $e'''_2 = e_1 - e_2$, $e'''_3 = -e_1 + 2e_2 + e_3$

(e_1, e_2, e_3 sînt vectorii bazei canonice). S-a folosit matricea de trecere

$$C_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Matriceal, ${}^t[e_1''', e_2''', e_3'''] = {}^tC_1 \cdot {}^tC_2 \cdot {}^tC_3 \, {}^t[e_1, e_2, e_3]$.

2) Pentru forma pătratică $Q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $Q(x) = 9x_1^2 + 6x_2^2 + 6x_3^2 + 12x_1x_2 - 10x_1x_3 - 2x_2x_3$, în baza canonică a lui $\mathbb{R}^3$, obținem succesiv

$Q(x) = 1/9\,(9x_1 + 6x_2 - 5x_3)^2 - 36/9\,x_2^2 - 25/9\,x_3^2 + 6x_2^2 + 6x_3^2 - 2x_2x_3 = 1/9(9x_1 + 6x_2 - 5x_3)^2 + 2x_2^2 - 2x_2x_3 + 29/9\,x_3^2 = 1/9\,(9x_1 + 6x_2 - 5x_3)^2 + 1/2(2x_2 - x_3)^2 - 1/2\,x_3^2 + 29/9\,x_3^2 = 1/9(9x_1 + 6x_2 - 5x_3)^2 + 1/2(2x_2 - x_3)^2 + 49/18\,x_3^2 = 1/9\,y_1^2 + 1/2\,y_2^2 + 49/18\,y_3^2$, unde, $y_1 = 9x_1 + 6x_2 - 5x_3$, $y_2 = 2x_2 - x_3$, $y_3 = x_3$ sînt coordonatele lui x în baza ortogonală față de Q, formată din vectorii $f_1 = 1/9\,e_1$, $f_2 = -3/9\,e_1 + 1/2\,e_2$, $f_3 = 2/9\,e_1 + 1/2\,e_2 + e_3$.

3.4. Teoremă (metoda Jacobi). Fie $Q : V_n \to \mathbb{R}$ o formă pătratică și $A = [a_{ij}]$ matricea ei în baza $\{e_1, \ldots, e_n\}$ a lui V_n. Dacă determinanții $\Delta_1 = a_{11}$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \ldots, \Delta_n = \det A$ sînt nenuli, există o bază $\{f_1, \ldots, f_n\}$ în V_n față de care expresia formei pătratice Q devine $Q(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\Delta_{i-1}}{\Delta_i} x_i'^2$, unde x_i', $i = 1, \ldots, n$, sînt coordonatele lui x în această bază; $\Delta_0 = 1$.

Demonstrație. Căutăm vectorii $f_1, \ldots, f_n$ de forma $f_1 = c_{11}e_1$, $f_2 = c_{21}e_1 + c_{22}e_2, \ldots, f_n = c_{n1}e_1 + c_{n2}e_2 + \ldots + c_{nn}e_n$ așa încît să avem $\mathscr{A}(f_i, e_j) = 0$, $1 \leqslant j < i \leqslant n$, iar $\mathscr{A}(f_i, e_i) = 1$, unde $\mathscr{A}$ este polara formei pătratice Q. Scrise dezvoltat, aceste condiții devin

$$\mathscr{A}(f_i, e_1) = c_{i1}a_{11} + c_{i2}a_{12} + \ldots + c_{ii}a_{1i} = 0$$

$$\mathscr{A}(f_i, e_2) = c_{i1}a_{21} + c_{i2}a_{22} + \ldots + c_{ii}a_{2i} = 0$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\mathscr{A}(f_i, e_{i-1}) = c_{i1}a_{i-1,1} + c_{i2}a_{i-1,2} + \ldots + c_{ii}a_{i-1,i} = 0$$

$$\mathscr{A}(f_i, e_i) = c_{i1}a_{i1} + c_{i2}a_{i2} + \ldots + c_{ii}a_{ii} = 1.$$

Acest sistem are soluție unică, deoarece prin ipoteză determinantul sistemului este chiar $\Delta_i \neq 0$. Regula lui Crammer dă

$$c_{ii} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1i-1} & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i-1,1} & \ldots & a_{i-1,i-1} & 0 \\ a_{i1} & \ldots & a_{i,i-1} & 1 \end{vmatrix}}{\Delta_i} = \frac{\Delta_{i-1}}{\Delta_i}$$

așa încît baza $\{f_1, \ldots, f_n\}$ este perfect determinată. Să găsim acum expresia formei pătratice în această bază. Matricea lui Q în baza $\{f_1, \ldots, f_n\}$ este matricea B de elemente $b_{ij} = \mathscr{A}(f_i, f_j) = \mathscr{A}(f_i, c_{j1}e_1 + \ldots + c_{jj}e_j) = c_{j1}\mathscr{A}(f_i, e_1) + c_{j2}\mathscr{A}(f_i, e_2) + \ldots + c_{jj}\mathscr{A}(f_i, e_j)$; cum $\mathscr{A}(f_i, e_j) = 0$ pentru $j < i$ (prin construcție) deducem că $b_{ij} = 0$ pentru $j < i$. Din proprietatea *de simetrie* a formei biliniare $\mathscr{A}$ rezultă că $b_{ij} = 0$ și pentru $j > i$. În concluzie $b_{ij} = 0$ pentru $i \neq j$. În plus, dacă $j = i$, atunci $b_{ii} = \mathscr{A}(f_i, f_i) = \mathscr{A}(f_i, c_{i1}e_1 + \ldots + c_{ii}e_i) = c_{i1}\mathscr{A}(f_i, e_1) + \ldots + c_{i,\,i-1}\mathscr{A}(f_i, e_{i-1}) + c_{ii}\mathscr{A}(f_i, e_i) = c_{ii} = \dfrac{\Delta_{i-1}}{\Delta_i}$, $i = 1, \ldots, n$. În baza $\{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$ avem

$$Q(x) = \sum_{i,\,j=1}^{n} b_{ij}x_i'x_j' = \sum_{i=1}^{n} \frac{\Delta_{i-1}}{\Delta_i}\, x_i'^2 .$$

Exemplu. Pentru forma pătratică $x \to Q(x) = 5x_1^2 + 6x_2^2 + 4x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_1x_3$, $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, matricea atașată în baza canonică a lui $\mathbb{R}^3$ este

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -2 & -2 \\ -2 & 6 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

Minorii principali Δ_i sînt $\Delta_1 = a_{11} = 5$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 6 \end{vmatrix} = 26$, $\Delta_3 = \det A = 80$. Cum $\Delta_0 = 1$, rezultă expresia canonică

$$Q(x) = \frac{1}{5} x_1'^2 + \frac{5}{26} x_2'^2 + \frac{13}{40} x_3'^2,$$

în baza formată din vectorii $f_1 = 1/5e_1$, $f_2 = 1/13e_1 + 5/26e_2$, $f_3 = 3/20e_1 + 1/20e_2 + 13/40e_3$.

3.5. Teoremă. Fie V_n un spațiu vectorial real euclidian. Dacă $Q : V_n \to \mathbb{R}$ este o formă pătratică (reală), atunci există o bază $\{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$ a lui V_n față de care expresia canonică a formei este $Q(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i x_i'^2$, unde $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ sînt valorile proprii ale matricei formei, fiecare valoare proprie fiind scrisă de atîtea ori cît este multiplicitatea sa, iar x_i', $i = 1, \ldots, n$, sînt coordonatele lui x în această bază.

Demonstrație. Deoarece matricea formei Q este o matrice simetrică reală, ea admite numai valori proprii reale și se poate diagonaliza. Atunci baza căutată $\{f_1, \ldots, f_n\}$ este formată din vectorii proprii ortonormați ai matricei formei. În această bază obținem expresia canonică a formei. Anume dacă notăm prin C matricea vectorilor proprii ortonormați, prin schimbarea $X = CX'$, $X = {}^t[x_1, \ldots, x_n]$, $X' = {}^t[x_1', \ldots, x_n']$ se obține imediat expresia canonică.

Exemplu. Fie forma pătratică $x \to Q(x) = x_1^2 + 7x_2^2 + x_3^2 - 8x_1x_2 - 16x_1x_3 - 8x_2x_3$, $x \in \mathbb{R}^3$, în baza canonică a lui $\mathbb{R}^3$. În această bază, matricea formei este

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -4 & -8 \\ -4 & 7 & -4 \\ -8 & -4 & 1 \end{bmatrix},$$

care are valorile proprii $\lambda_1 = -9$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 9$. Vectorii proprii ortonormați corespunzători sînt $f_1 = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$, $f_2 = \left(0, -\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$, $f_3 = \left(\frac{-5}{3\sqrt{5}}, \frac{2}{3\sqrt{5}}, \frac{4}{3\sqrt{5}}\right)$ așa încît matricea de trecere la această bază este

$$C = \begin{bmatrix} 2/3 & 0 & -5/3\sqrt{5} \\ 1/3 & -2/\sqrt{5} & 2/3\sqrt{5} \\ 2/3 & 1/\sqrt{5} & 4/3\sqrt{5} \end{bmatrix}$$

Prin transformarea $X = CX'$ obținem $Q(x) = -9x_1'^2 + 9x_2'^2 + 9x_3'^2$.

§4. Signatura unei forme pătratice reale

4.1. *Definiție. O formă pătratică $Q: V \to \mathbb{R}$ se numește pozitiv semidefinită (negativ semidefinită) dacă $Q(x) \geqslant 0$ (respectiv $Q(x) \leqslant 0$) pentru orice $x \in V$. Forma pătratică Q se numește pozitiv definită (negativ definită) dacă $Q(x) > 0$ (respectiv $Q(x) < 0$) pentru orice $x \neq 0$ din V. O formă biliniară simetrică $\mathscr{A}: V \times V \to \mathbb{R}$ se numește pozitiv definită (negativ definită, pozitiv semidefinită, negativ semidefinită) dacă forma pătratică asociată Q are această proprietate.*

Exemplu. Produsul scalar definit pe un spațiu vectorial real este o formă biliniară simetrică și pozitiv definită.

Observație. Dacă există $x_1 \in V$ așa încît $Q(x_1) > 0$ și $x_2 \in V$ așa încît $Q(x_2) < 0$ spunem că forma pătratică Q este *nedefinită*.

Metoda lui Jacobi ne permite să obținem o condiție necesară și suficientă pentru ca o formă pătratică $Q: V_n \to \mathbb{R}$ să fie pozitiv definită (respectiv negativ definită).

4.2. Teoremă (criteriul lui Sylvester). Dacă sînt îndeplinite condițiile teoremei Jacobi, atunci forma pătratică $Q: V_n \to \mathbb{R}$ este pozitiv definită dacă și numai dacă $\Delta_i > 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$ și este negativ definită dacă și numai dacă $(-1)^k \Delta_k > 0$, $k = 1, \ldots, n$.

Demonstrație. Fie Q pozitiv definită. Admitem prin absurd că există un $\Delta_p = 0$, $1 \leqslant p \leqslant n$; aceasta înseamnă că una din liniile lui Δ_p este o combinație liniară de celelalte, adică există numerele $k_1, \ldots, k_p$, nu toate nule, astfel ca $k_1 a_{1i} + k_2 a_{2i} + \ldots + k_p a_{pi} = 0$, $i = 1, \ldots, p$, adică $k_1 \mathscr{A}(e_1, e_i) + k_2 \mathscr{A}(e_2, e_i) + \ldots + k_p \mathscr{A}(e_p, e_i) = 0$. De aici rezultă $\mathscr{A}(k_1 e_1 + \ldots + k_p e_p, e_i) = 0$, $i = 1, \ldots, p$, deoarece $\mathscr{A}$ este o formă biliniară simetrică. Amplificînd prin k_i, $i = 1, \ldots, p$ și adunînd relațiile obținute, găsim $k_1 \mathscr{A}\left(\sum_{i=1}^{p} k_i e_i, e_1\right) + k_2 \mathscr{A}\left(\sum_{i=1}^{p} k_i e_i, e_2\right) + \ldots + k_p \mathscr{A}\left(\sum_{i=1}^{p} k_i e_i, e_p\right) = 0$ sau $\mathscr{A}\left(\sum_{i=1}^{p} k_i e_i, \sum_{i=1}^{p} k_i e_i\right) = 0$. Rezultă $\sum_{i=1}^{p} k_i e_i = 0$, deoarece $\mathscr{A}$ este admisă pozitiv definită. Cum k_i, $i = 1, \ldots, p$ nu sînt toți nuli, rezultă că vectorii $e_1, \ldots, e_p$ sînt liniar dependenți, ceea ce contrazice ipoteza că $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ este bază în V_n. Deci $\Delta_p \neq 0$, $p = 1, \ldots, n$. Mai mult, conform teoremei 3.4, există o bază a lui V_n față de care $Q(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\Delta_{i-1}}{\Delta_i} x_i'^2$ și cum Q este admisă pozitiv definită, rezultă $\frac{\Delta_{i-1}}{\Delta_i} > 0$, adică $\Delta_i > 0$, $i = 1, \ldots, n$.

Reciproc, dacă $\Delta_i > 0$, $i = 1, \ldots, n$ rezultă $\frac{\Delta_{i-1}}{\Delta_i} > 0$, $i = 1, \ldots, n$ și din $Q(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\Delta_{i-1}}{\Delta_i} x_i'^2$ deducem $Q(x) \geqslant 0$; $Q(x) = 0 \Leftrightarrow x_1' = x_2' = \ldots$ $\ldots = x_n' = 0$, deci $x = 0$. În concluzie $Q(x) > 0, \forall x \neq 0$. Dacă Q este negativ definită, rezultă că forma $-Q$ este pozitiv definită și totul se repetă ca mai sus avînd în vedere că matricea lui $-Q$ este $-A = [-a_{ij}]$.

4.3. *Definiție. Fie expresia canonică* $Q(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i^2$ *a unei forme pătratice* $Q : V_n \to \mathbb{R}$ *în care* p *coeficienți sînt strict pozitivi,* q *sînt strict negativi, iar* $d = n - (p + q)$ *sînt nuli. Tripletul* (p, q, d) *se numește signatura formei pătratice* Q.

4.4. Teoremă (*legea de inerție*). Signatura unei forme pătratice este invariantă la schimbarea bazei față de care are o expresie canonică.

Demonstrație. Fie $\{e_1, \ldots, e_n\}$, $\{e_1', \ldots, e_n'\} \subset V_n$ două baze în V_n față de care forma pătratică $Q : V_n \to \mathbb{R}$ are expresiile canonice

$$Q(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i^2, \quad x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \text{ și respectiv } Q(x) = \sum_{j=1}^{n} b_j x_j'^2,$$

$x = \sum_{j=1}^{n} x_j' e_j'$. Putem considera cele două baze astfel încît a_i și b_j $i, j = 1, \ldots$ $\ldots, n$ să fie $1, -1$ sau 0. În plus putem presupune (eventual printr-o renumerotare) că primii p-coeficienți sînt $+1$, următorii q sînt -1 și restul nuli, adică $\forall x \in V_n$ să avem

$$(*) \qquad Q(x) = \sum_{k=1}^{p} x_k^2 - \sum_{k=p+1}^{p+q} x_k^2 \text{ în baza } \{e_1, \ldots, e_n\},$$

și analog

$$(**) \qquad Q(x) = \sum_{r=1}^{p'} x_r'^2 - \sum_{s=p'+1}^{p'+q'} x_s'^2 \text{ în baza } \{e_1', \ldots, e_n'\},$$

signaturile corespunzătoare fiind (p, q, d) și (p', q', d'). Să arătăm că $p = p'$ și $q = q'$. Să presupunem că $p \neq p'$ și anume că $p > p'$. Fie U subspațiul generat de vectorii $e_1, e_2, \ldots, e_p$ și U' subspațiul generat de vectorii $e_{p'+1}', \ldots, e_n'$; deci $\dim U = p$, $\dim U' = n - p'$. Ipoteza $p > p'$ implică $\dim U + \dim U' = p + n - p' > n$, iar aceasta arată că subspațiul $U + U'$ nu este sumă directă de subspații și deci $U \cap U' \neq \{0\}$. Fie $x \in U \cap U'$, $x \neq 0$. Atunci $x = x_1 e_1 + \ldots + x_p e_p = x_{p'+1}' e_{p'+1}' + \ldots$ $\ldots + x_n' e_n'$ sau $x = x_1 e_1 + \ldots + x_p e_p + 0 \cdot e_{p+1} + \ldots + 0 \cdot e_n$ în baza

$\{e_1, \ldots, e_n\}$ și din egalitatea $(_*)$ avem

$Q(x) = x_1^2 + \ldots + x_p^2 \geqslant 0$ și $x = 0 \cdot e'_1 + \ldots + 0 \cdot e'_{p'} + x'_{p'+1}e'_{p'+1} + \ldots + x'_n e'_n$

în baza $\{e'_1, \ldots, e'_n\}$ așa încît din egalitatea $(_{**})$ rezultă $Q(x) = -x'^2_{p'+1} - \ldots - x'^2_n \leqslant 0$.

Din cele două inegalități deducem $Q(x) = 0$, ceea ce implică $x_1 = x_2 = \ldots = x_p = 0$ și $x'_{p'+1} = \ldots = x'_n = 0$ și deci $x = 0$, care contrazice faptul că $x \neq 0$. Rămîne $p \leqslant p'$ și analog se arată că $p' \leqslant p$, așa încît se obține $p = p'$. Analog rezultă $q = q'$; deci și $d = d'$. În concluzie $(p, q, d) = (p', q', d')$.

Forma pătratică $Q : V_n \to \mathbb{R}$ este pozitiv definită dacă și numai dacă una din următoarele condiții este îndeplinită

(i) are signatura $(n, 0, 0)$,

(ii) determinanții Δ_i, $i = 1, \ldots, n$ sînt strict pozitivi,

(iii) valorile proprii ale matricei A sînt strict pozitive.

§5. Probleme

1. Fie P_3 spațiul vectorial al funcțiilor polinomiale reale care au cel mult gradul trei și fie $\mathscr{A} : P_3 \times P_3 \to \mathbb{R}$ funcția definită prin $\mathscr{A}(x, y) = \int_0^1 \int_0^1 x(t)y(s)\,dt\,ds$.

1) Să se arate că $\mathscr{A}$ este o formă biliniară.

2) Să se determine matricea ei în baza canonică a spațiului și apoi matricea ei în baza $\{t^3 - 1, t^3 - t, t^2, t^3 - t^2\}$.

2. Se dă funcția $\mathscr{A} : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ definită prin $\mathscr{A}(x, y) = x_1y_2 - x_2y_1 + x_1y_3 - x_3y_1 + x_1y_4 - x_4y_1 + x_2y_3 - x_3y_2 + x_2y_4 - x_4y_2 + x_3y_4 - x_4y_3$.

1) Să se arate că $\mathscr{A}$ este o formă biliniară.

2) Să se determine matricea corespunzătoare formei în raport cu baza $f_1 = (1, 1, 0, 0)$, $f_2 = (0, 1, 1, 0)$, $f_3 = (0, 1, 0, 1)$, $f_4 = (1, 0, 0, 1)$.

3. Fie V un spațiu euclidian complex și $\mathscr{T} : V \to V$ un endomorfism. Definim forma pătratică $x \to Q(x) = (\mathscr{T}(x), x)$, $x \in V$.

1) Să se arate că dacă $\mathscr{T}$ este hermitian, atunci $Q(x) \in \mathbb{R}$, $\forall x \in V$, iar dacă $\mathscr{T}$ este antihermitian, atunci $Q(x)$ este pur imaginar, $\forall x \in V$.

2) Să se verifice relațiile $Q(tx) = t\bar{t}Q(x)$, $\forall t \in \mathbb{C}$, $Q(x + y) = Q(x) + Q(y) + (\mathscr{T}(x), y) + (\mathscr{T}(y), x)$, $\forall x, y \in V$, și să se scrie formula corespunzătoare pentru $Q(x + ty)$.

3) Să se verifice implicația $Q(x) = 0$, $x \in V \Rightarrow \mathscr{T}(x) = 0$, $x \in V$.

4) Să se arate că dacă $Q(x)$ este real, $\forall x \in V$, atunci $\mathscr{T}$ este hermitian.

4. Fie forma pătratică $Q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $Q(x) = 3x_1^2 + 2x_1x_2 + 5x_2^2$. Să se determine valoarea parametrului $\lambda \in \mathbb{R}$ astfel ca vectorii $x = (1, 2)$ și $y = (\lambda, -1)$ să fie ortogonali în raport cu forma Q.

5. Se dă forma pătratică $x \to Q(x) = 5x_1^2 + 6x_2^2 + 4x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_1x_3$. 1). Utilizînd metoda lui Gauss, metoda lui Jacobi și respectiv metoda valorilor proprii, să se aducă $Q(x)$ la expresia canonică. 2) Să se verifice teorema de inerție.

6. Se dă matricea

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -5 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

1) Să se scrie forma pătratică corespunzătoare şi să se găsească expresia canonică.
2) Să se verifice teorema de inerţie.

7. Să se arate că forma pătratică $x \to Q(x) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{1+|j-i|} x_i x_j$, $x \in \mathbb{R}^n$, este pozitiv definită.

8. Să se reducă forma pătratică $x \to Q(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \sum_{i<j} x_i x_j$, $x \in \mathbb{R}^n$ la expresia canonică.

2

GEOMETRIE ANALITICĂ ÎN $\mathbb{E}_3$

Capitolul 1

VECTORI LIBERI

§ 1. Vectori liberi

Fie $\mathbb{E}_3$ spaţiul punctual tridimensional al geometriei elementare şi $\overline{AB}$ un segment orientat (fig. 1). A se numeşte ***originea***, iar B se numeşte ***extremitatea*** segmentului. În cazul cînd originea şi extremitatea coincid se obţine ***segmentul orientat nul***. Dreapta determinată de punctele A şi B se numeşte ***dreapta suport*** a lui $\overline{AB}$ şi se notează cu AB. Această dreaptă este unic determinată numai dacă $A \neq B$; dreapta suport a segmentului orientat nul este nedeterminată. Două segmente orientate se numesc (1) *coliniare*, (2) *paralele* dacă dreptele suport sînt (1) egale respectiv (2) paralele.

1.1. *Definiţie. Două drepte din $\mathbb{E}_3$ au aceeaşi direcţie dacă sînt paralele sau egale.*

1.2. Teoremă. Relaţia binară „aceeaşi direcţie" este o relaţie de echivalenţă pe mulţimea dreptelor din spaţiu.

Demonstraţie. Relaţia „aceeaşi direcţie" este reflexivă, simetrică şi tranzitivă. Reflexivitatea este totuna cu egalitatea. Simetria rezultă din reflexivitate şi din simetria paralelismului între drepte: $D \parallel D' \Rightarrow D' \parallel D$. Tranzitivitatea decurge din faptul că două drepte paralele cu o a treia sînt sau egale sau paralele.

Pentru relaţia „aceeaşi direcţie" clasa de echivalenţă determinată de o dreaptă se numeşte *direcţia* dreptei respective. Altfel spus o *direcţie* este o familie de drepte paralele (fig. 2), fiecare dreaptă din această familie fiind un *reprezentant* al direcţiei din care face parte.

Un segment orientat nenul determină unic dreapta suport. De aceea direcţia dreptei suport se poate ataşa direct segmentului orientat care determină dreapta.

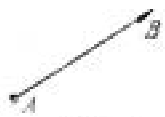


Fig. 1

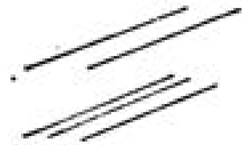


Fig. 2

Fig. 3

Fig. 4

1.3. *Definiție. Două segmente orientate nenule au aceeași direcție dacă dreptele lor suport sînt paralele sau coincid.*

1.4. Teoremă. Relația binară „aceeași direcție" pentru segmente orientate nenule este o relație de echivalență pe mulțimea segmentelor orientate nenule.

Demonstrație. Temă.

Pentru segmentele orientate nenule, *direcțiile* sînt clasele de echivalență ale dreptelor suport relativ la relația „aceeași direcție". Admitem că direcția unui segment orientat nul este nedeterminată.

Pe o dreaptă se pot stabili două și numai două sensuri de parcurs (ordini ale punctelor dreptei, consecințe ale axiomelor de ordine) pe care le notăm prin săgeți (fig. 3). O dreaptă împreună cu o alegere a unui sens de parcurs se numește *dreaptă orientată*.

Indicarea unui sens de parcurs pe una dintre dreptele paralele, ce definesc o direcție, definește un sens pe toate dreptele familiei respective. O direcție pentru care este dat un sens de parcurs pe dreptele familiei care o definește se numește *direcție orientată*.

Un segment orientat nenul $\overline{AB}$ determină unic dreapta AB și un sens de parcurs pe această dreaptă : sensul de la A către B.

1.5. *Definiție. Două segmente orientate nenule coliniare au același sens dacă sensurile determinate pe dreapta suport comună coincid. Două segmente orientate nenule paralele au același sens dacă extremitățile lor se află în același semiplan determinat de dreapta care unește originile segmentelor* (fig. 4) *în planul dreptelor suport paralele.*

1.6. Teoremă. Relația binară „același sens", pentru segmente orientate nenule de aceeași direcție, este o relație de echivalență.

Demonstrație. Temă.

Relația „același sens" implică relația „aceeași direcție". De aceea există numai două clase de echivalență relative la relația „același sens". Convenim să numim aceste clase *sensuri: sensul inițial* impus de un segment orientat nenul fixat și *opusul* său. De asemenea admitem că sensul unui segment orientat nul este nedeterminat. O direcție împreună cu unul dintre cele două sensuri posibile este o *direcție orientată*.

Lungimea (*norma sau modulul*) unui segment orientat $\overline{AB}$ se definește ca fiind lungimea segmentului neorientat [AB], adică distanța de la punctul A la punctul B. Un segment orientat are lungimea zero dacă și numai dacă el este segmentul nul. Două segmente neorientate care au aceeași lungime se numesc *segmente congruente*.

1.7. *Definiție. Două segmente orientate au aceeași lungime dacă segmentele neorientate corespunzătoare sînt congruente.*

1.8. Teoremă. Relația binară „aceeași lungime", pentru segmente orientate, este o relație de echivalență.

Demonstrație. Relația de congruență este o relație de echivalență.

Relațiile „aceeași direcție", „același sens", „aceeași lungime" pentru segmente orientate generează o nouă relație pentru segmente orientate utilizată pentru definirea noțiunii de vector liber.

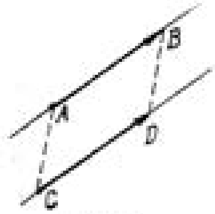


Fig. 5

1.9. *Definiție. Două segmente orientate nenule se numesc echipolente dacă au aceeași direcție, același sens și aceeași lungime.*

Dacă $\overline{AB}$ este echipolent cu $\overline{CD}$, atunci vom scrie $\overline{AB} \sim \overline{CD}$. Se dovedește ușor că $\overline{AB} \sim \overline{CD} \Rightarrow \overline{AC} \sim \overline{BD}$ (fig. 5).

Întrucît relația „același sens" implică relația „aceeași direcție", echipolența este sinonim pentru „același sens și aceeași lungime". Există însă suficiente probleme concrete care impun explicitarea unei direcții fără a interesa sensul. De aceea am preferat definiția clasică pentru echipolență deși conține și elemente superflue.

1.10. Teoremă. Relația de echipolență pentru segmente orientate nenule este o relație de echivalență.

Demonstrație. Temă.

Prelungim relația de echipolență și la segmentele orientate nule: admitem că toate segmentele orientate nule sînt echipolente între ele. Astfel obținem o relație de echipolență pe mulțimea tuturor segmentelor orientate din spațiu care este o relație de echivalență.

1.11. *Definiție. Clasele de echivalență ale segmentelor orientate relativ la relația de echipolență se numesc vectori liberi. Direcția, sensul și lungimea care sînt comune segmentelor orientate ce definesc un vector liber se numesc direcția, sensul și lungimea vectorului liber.*

Vectorii liberi vor fi notați cu litere mici cu bară deasupra $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \ldots$, iar în desen vor fi reprezentați printr-unul dintre segmentele orientate echipolente ce definesc clasa numită vector liber. În acest context vectorii liberi se mai notează și prin $\overline{AB}, \overline{CD}, \ldots$, evident $\overline{AB} \in \overline{AB}$ și fiecare segment orientat din clasa numită vector liber este un *reprezentant* al clasei. Corespunzător, pentru lungimea (norma) unui vector liber $\bar{a}$ sau $\overline{AB}$ vom întrebuința notațiile $\|\bar{a}\|$, $\|\overline{AB}\|$ sau $d(A, B)$.

Un vector liber de lungime unu se numește *versor* sau *vector unitate* și în general se notează cu $\bar{e}$.

Vectorul liber care are lungimea zero se numește *vector nul* și se notează cu $\bar{0}$. Acest vector este reprezentat de segmentul orientat $\overline{AA}$ (în acest caz direcția și sensul sînt nedeterminate).

Vectorii liberi care au aceeași direcție se numesc *vectori coliniari*. Doi vectori coliniari care au aceeași lungime însă au sensuri opuse se numesc *vectori opuși*. Dacă unul dintre ei este notat cu $\bar{a}$, atunci opusul său este notat cu $-\bar{a}$ (fig. 6).

Doi vectori liberi $\bar{a}$ și $\bar{b}$ sînt *egali* și se scrie $\bar{a} = \bar{b}$ dacă reprezentanții lor sînt echipolenți sau, echivalent, dacă au aceeași direcție, același sens și aceeași lungime.

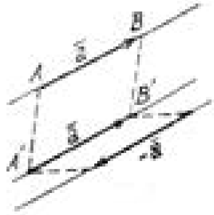


Fig. 6

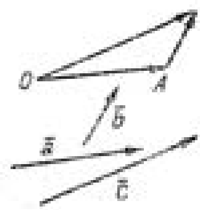


Fig. 7

Fie $\boldsymbol{V}$ mulțimea tuturor vectorilor liberi din spațiul $\mathbb{E}_3$. Alegem în $\mathbb{E}_3$ un punct O numit *origine*. La orice alt punct M din $\mathbb{E}_3$ îi corespunde un vector și numai unul $\bar{r} \in \boldsymbol{V}$ al cărui reprezentat este $\overline{OM}$. Reciproc la orice vector $\bar{r}$ corespunde un punct și numai unul M, astfel încît $\overline{OM}$ să reprezinte pe $\bar{r}$. Rezultă că mulțimile $\mathbb{E}_3$ și $\boldsymbol{V}$ sînt în corespondență biunivocă, bijecția fiind unic determinată prin fixarea originii O. Vectorul liber $\bar{r} = \overline{OM}$ se numește *vectorul de poziție al punctului M față de originea O*.

§ 2. Adunarea

Mulțimea $\boldsymbol{V}$ a vectorilor liberi din spațiu se poate organiza ca un grup aditiv comutativ, definind adunarea prin regula triunghiului (regula paralelogramului).

2.1. *Definiție. Fie $\bar{a}$ și $\bar{b}$ doi vectori liberi. Fie $\overrightarrow{OA}$ un reprezentant al vectorului $\bar{a}$ și $\overline{AB}$ un reprezentant al vectorului $\bar{b}$. Vectorul liber $\bar{c}$ reprezentat de segmentul orientat $\overline{OB}$ se numește suma vectorilor $\bar{a}$ și $\bar{b}$ și se notează $\bar{c} = \bar{a} + \bar{b}$ sau $\overline{OB} = \overline{OA} + \overline{AB}$* (fig. 7).

Evident $\bar{a}$, $\bar{b}$ și $\bar{c} = \bar{a} + \bar{b}$ sînt vectori coplanari. De asemenea menționăm că regula cuprinsă în definiția 2.1 se numește *regula triunghiului*.

Adunarea vectorilor liberi $+ : \boldsymbol{V} \times \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{V}$, $(\bar{a}, \bar{b}) \to \bar{a} + \bar{b}$ este o lege de compoziție internă bine definită deoarece vectorul liber $\bar{c} = \bar{a} + \bar{b}$ nu depinde de alegerea punctului O (Temă).

2.2. Teoremă. Adunarea vectorilor liberi are următoarele proprietăți:

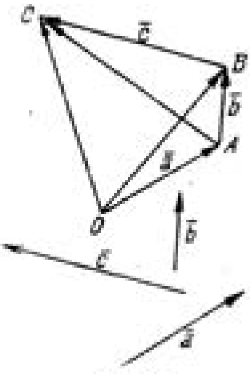


Fig. 8

1) asociativitate: $\forall\, \bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \in \boldsymbol{V}$, $\bar{a} + (\bar{b} + \bar{c}) = (\bar{a} + \bar{b}) + \bar{c}$;

2) $\bar{0}$ este element neutru: $\forall\, \bar{a} \in \boldsymbol{V}$, $\bar{a} + \bar{0} = \bar{0} + \bar{a} = \bar{a}$;

3) opusul lui $\bar{a}$ este simetricul lui $\bar{a}$: $\forall\, \bar{a} \in \boldsymbol{V}$,

$$\bar{a} = (-\bar{a}) = (-\bar{a}) + \bar{a} = \bar{0};$$

4) comutativitate: $\forall\, \bar{a}, \bar{b} \in \boldsymbol{V}$, $\bar{a} + \bar{b} = \bar{b} + \bar{a}$.

Demonstrație. Cazurile specifice coliniarității sînt lăsate drept teme.

1) Ținem seama de definiție și urmărim figura 8: $\overline{OB}$ este segmentul reprezentativ al sumei $\bar{a} + \bar{b}$, iar $\overline{OC}$ este segmentul reprezentativ al sumei $(\bar{a}+\bar{b}) + \bar{c}$; $\overline{AC}$ este segmentul reprezentativ al sumei

$\bar{b} + \bar{c}$, iar $\overline{OC}$ este segmentul reprezentativ al sumei $\bar{a} + (\bar{b} + \bar{c})$. Rezultă $(\bar{a} + \bar{b}) + \bar{c} = \bar{a} + (\bar{b} + \bar{c})$.

2)—4) Temă.

Comutativitatea adunării conduce la o nouă regulă pentru determinarea sumei a doi vectori necoliniari, numită *regula paralelogramului*: se desenează $\overline{AB} \in \bar{a}$, $\overline{AD} \in \bar{b}$ și se fixează punctul C ca intersecția dintre paralela la AB dusă prin D și paralela la AD dusă prin B; segmentul orientat $\overline{AC}$ este reprezentantul lui $\bar{a} + \bar{b}$.

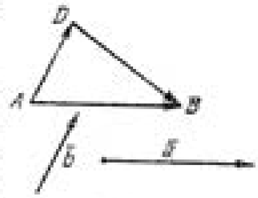


Fig. 9

Asociativitatea adunării permite generalizarea regulii triunghiului la *regula poligonului strîmb*, potrivită adunării a $n \geq 3$ vectori.

Proprietățile 1), 2), 3) arată că adunarea definește pe $\boldsymbol{V}$ o structură de grup, iar proprietatea 4) arată că acest grup este comutativ. În grupul $\boldsymbol{V}$ ecuația $\bar{b} + \bar{x} = \bar{a}$ are o soluție unică $\bar{x} = \bar{a} + (-\bar{b})$ pe care o notăm $\bar{x} = \bar{a} - \bar{b}$ și pe care o numim *diferența dintre vectorul $\bar{a}$ și vectorul $\bar{b}$*. Dacă $\overline{AB}$ este reprezentantul lui $\bar{a}$, iar $\overline{AD}$ este reprezentantul lui $\bar{b}$, atunci reprezentantul lui $\bar{a} - \bar{b}$ este $\overline{DB}$ (fig. 9).

§3. Înmulțirea cu un scalar

Fie $\mathbb{R}$ cîmpul numerelor reale (cîmpul scalarilor) și $\boldsymbol{V}$ grupul aditiv comutativ al vectorilor liberi. Vom introduce o lege de compoziție externă, adică o funcție definită pe $\mathbb{R} \times \boldsymbol{V}$ cu valori în $\boldsymbol{V}$ numită *înmulțirea unui vector liber cu un scalar*.

3.1. *Definiție. Fie $t \in \mathbb{R}$ și $\bar{a} \in \boldsymbol{V}$. Prin $t\bar{a}$ înțelegem un vector liber definit astfel:* 1) *dacă $\bar{a} \neq 0$ și $t \neq 0$, atunci $t\bar{a}$ este vectorul care are aceeași direcție cu $\bar{a}$, același sens cu $\bar{a}$ dacă $t > 0$, sens contrar dacă $t < 0$ și lungimea $|t|\ \|\bar{a}\|$;* 2) *dacă $t = 0$ sau $\bar{a} = 0$, atunci $t\bar{a} = \bar{0}$* (fig. 10).

Evident $t\bar{a}$ este coliniar cu $\bar{a}$.

3.2. Teoremă. Înmulțirea vectorilor liberi cu scalari are următoarele proprietăți:

1) $\forall\, \bar{a} \in \boldsymbol{V}$, $1 \cdot \bar{a} = \bar{a}$;

2) $\forall\, s, t \in \mathbb{R}$, $\forall\, \bar{a} \in \boldsymbol{V}$, $s(t\bar{a}) = (st)\bar{a}$;

3) distributivitate față de adunarea scalarilor: $\forall\, s, t \in \mathbb{R}$, $\forall\, \bar{a} \in \boldsymbol{V}$, $(s + t)\bar{a} = s\bar{a} + t\bar{a}$;

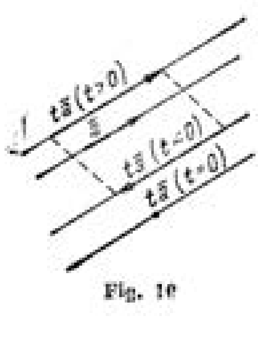


Fig. 10

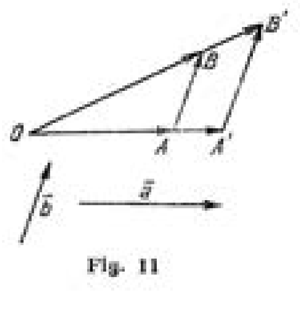


Fig. 11

4) distributivitate față de adunarea vectorilor $\forall t \in \mathbb{R}$, $\forall \bar{a}, \bar{b} \in V$, $t(\bar{a} + \bar{b}) = t\bar{a} + t\bar{b}$.

Demonstrație. 1)—3) temă.

4) Fie $\overline{OA}$ reprezentantul vectorului $\bar{a}$ și $\overline{AB}$ reprezentantul vectorului $\bar{b}$. Atunci $\overline{OB}$ este reprezentantul vectorului $\bar{a} + \bar{b}$ (fig. 11).

Presupunem $t > 0$ și notăm cu $\overline{OA}'$ reprezentantul vectorului $t\bar{a}$ și $\overline{OB}'$ reprezentantul vectorului $t(\bar{a} + \bar{b})$. Se observă că $\Delta OAB \sim \Delta OA'B'$, avînd un unghi comun și laturile (care determină acest unghi) proporționale. Rezultă $\overline{AB} \| \overline{A'B'}$ și $\overline{A'B'} = t\overline{AB}$, adică $\overline{A'B'}$ este reprezentantul vectorului $t\bar{b}$. Deci $\overline{OB}'$ este reprezentantul sumei $t\bar{a} + t\bar{b}$, adică $t(\bar{a} + \bar{b}) = t\bar{a} + t\bar{b}$.

Cazul $t < 0$ se tratează analog.

Ca urmare a teoremelor 2.2 și 3.2 adunarea și scăderea elementelor din V, precum și inmulțirea cu scalari au proprietăți analoage transformărilor echivalente de la expresiile algebrice elementare.

Proprietățile adunării vectorilor liberi și proprietățile inmulțirii vectorilor liberi cu scalari arată că V *este un spațiu vectorial peste cîmpul numerelor reale.*

§4. Coliniaritate și coplanaritate

Fie V spațiul vectorial real al vectorilor liberi. Noțiunile de subspațiu vectorial, dependență și independență liniară, bază și dimensiune, coordonate, izomorfism de spații vectoriale, le presupunem cunoscute de la partea de algebră liniară.

Pentru început observăm că oricărui vector $\bar{a}$ de lungime $\|\bar{a}\| > 0$, i se asociază un vector $\bar{a}_0 = \frac{1}{\|\bar{a}\|}\bar{a}$, numit *versorul* lui $\bar{a}$. Într-adevăr $\|\bar{a}_0\| = \left\|\frac{1}{\|\bar{a}\|}\bar{a}\right\| = \frac{1}{\|\bar{a}\|}\|\bar{a}\| = 1$. Deoarece $\bar{a}_0$ este un vector unitate de același sens ca $\bar{a}$, putem scrie $\bar{a} = \|\bar{a}\|\bar{a}_0$. În plus, remarcăm că, $\forall \bar{a}_0$, avem $0 = 0\bar{a}_0$.

4.1. Teoremă. Fie $\bar{a}, \bar{b} \in V$. Dacă $\bar{a}$ și $\bar{b}$ sînt coliniari și $\bar{a} \neq 0$, atunci există un număr real t unic astfel incît $\bar{b} = t\bar{a}$.

Demonstrație. În baza observației precedente putem scrie $\bar{a} = \|\bar{a}\|\bar{a}_0$, $\bar{b} = \|\bar{b}\|\bar{b}_0$ și evident versorii $\bar{a}_0, \bar{b}_0$ sînt sau egali sau opuși. Pentru $\bar{b}_0 = \bar{a}_0$ găsim $\bar{b} = \|\bar{b}\|\bar{b}_0 = \|\bar{b}\|\bar{a}_0 = \frac{\|\bar{b}\|}{\|\bar{a}\|}\bar{a}$ și deci $t = \frac{\|\bar{b}\|}{\|\bar{a}\|}$.

4.2. Consecință. Mulțimea $V_1 = \{\bar{b} \in V \mid \exists t \in \mathbb{R}, \bar{b} = t\bar{a}, \bar{a} \neq \bar{0}\}$, a tuturor vectorilor coliniari cu un vector nenul $\bar{a}$, este un spațiu vectorial unidimensional.

Demonstrație. V_1 este un subspațiu vectorial al lui V, iar $\bar{a}$ este un vector independent care generează pe V_1.

Se observă că, coliniaritatea a doi vectori liberi este echivalentă cu dependența liniară a acestora. De aceea oricare doi vectori liberi necoliniari sînt liniar independenți.

Fie acum $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ trei vectori diferiți din V. Ei se numesc *coplanari* dacă segmentele orientate reprezentative sînt paralele cu un plan dat.

4.3. Teoremă. Vectorii $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ sînt coplanari dacă și numai dacă ei sînt liniar dependenți.

Demonstrație. Presupunem că $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ sînt liniar dependenți, adică $\exists\, r, s, t \in \mathbb{R}$ cu $r^2 + s^2 + t^2 \neq 0$ așa ca $r\bar{a} + s\bar{b} + t\bar{c} = \bar{0}$. Pentru $t \neq 0$ relația se transcrie $\bar{c} = \alpha\bar{a} + \beta\bar{b}$, unde $\alpha = -\frac{r}{t}$ și $\beta = -\frac{s}{t}$. Rezultă că reprezentanții $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$ ai vectorilor $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ satisfac relația $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OF} = \alpha\overrightarrow{OA} + \beta\overrightarrow{OB}$, adică $\overrightarrow{OC}$ se află în planul determinat de $\overrightarrow{OA}$ și $\overrightarrow{OB}$ (fig. 12).

Raționamentul reciproc este evident.

4.4. Consecință. Mulțimea $V_2 = \{\bar{c} \in V \mid \exists r, s \in \mathbb{R},\ \bar{c} = r\bar{a} + s\bar{b};\ \bar{a}, \bar{b}$ necoliniari$\}$, a tuturor vectorilor coplanari cu doi vectori necoliniari $\bar{a}$ și $\bar{b}$, este un spațiu vectorial bidimensional.

Demonstrație. V_2 este un subspațiu vectorial al lui V, iar $\{\bar{a}, \bar{b}\}$ este o mulțime independentă care generează pe V_2.

Deoarece dependența liniară a trei vectori liberi este echivalentă cu coplanaritatea, rezultă că orice trei vectori liberi necoplanari sînt liniar independenți.

4.5. Teoremă. Spațiul vectorial real al vectorilor liberi din $\mathbb{E}_3$ are dimensiunea 3.

Demonstrație. În V există trei vectori liniar independenți și anume oricare trei vectori necoplanari $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$. Să arătăm că aceștia generează pe V. Pentru aceasta fie $\bar{d}$ un al patrulea vector și $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OD}$ reprezentanții vectorilor $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \bar{d}$ (fig. 13). Se observă că $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OD_1} + \overrightarrow{OD_2} + \overrightarrow{OD_3} = r\overrightarrow{OA} + s\overrightarrow{OB} + t\overrightarrow{OC}$ și deci $\bar{d} = r\bar{a} + s\bar{b} + t\bar{c}$.

Dacă $\{\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}\}$ este o bază fixată în V_3 și r, s, t sînt coordonatele lui $\bar{d}$ în raport cu această bază, atunci se preferă scrierea $\bar{d}(r, s, t)$ sau identificarea $\bar{d} = (r, s, t)$. În acest context pentru $\bar{d}_i = (r_i, s_i, t_i) \in V_3$, $i = 1, 2, 3$, avem

1) $\bar{d}_1 = \bar{d}_2 \Leftrightarrow r_1 = r_2,\ s_1 = s_2,\ t_1 = t_2$;

2) $\bar{d}_1 + \bar{d}_2 = (r_1 + r_2,\ s_1 + s_2,\ t_1 + t_2)$;

3) $k\bar{d}_1 = (kr_1, ks_1, kt_1)$;

4) $\bar{d}_1$ este coliniar cu $\bar{d}_2$ dacă și numai dacă coordonatele lor sînt proporționale;

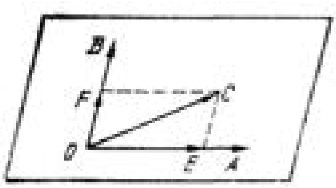


Fig. 12

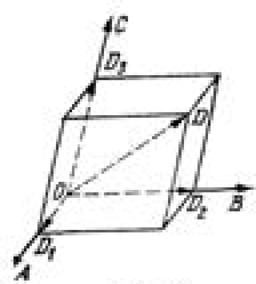


Fig. 13

5) vectorii $\bar{d}_1, \bar{d}_2, \bar{d}_3$ sînt coplanari dacă și numai dacă coordonatele unuia sînt combinații liniare de coordonatele celorlalți doi: $r_3 = \alpha r_1 + \beta r_2$, $s_3 = \alpha s_1 + \beta s_2$, $t_3 = \alpha t_1 + \beta t_2$.

§5. Proiecție ortogonală

Fie D o dreaptă și $\bar{a} \ni \overline{AB}$ un vector liber. Prin A și B ducem planele P și Q respectiv perpendiculare pe D. Notăm $\{A'\} = D \cap P$, $\{B'\} = D \cap Q$.

5.1. Teoremă. Vectorul liber $\overline{A'B'}$ nu depinde de segmentul orientat $\overline{AB}$ ce reprezintă pe $\bar{a}$.

Demonstrație. Fie $\overline{CD}$ un alt reprezentant al lui $\bar{a}$ și $\overline{C'D'}$ construit după procedeul lui $\overline{A'B'}$. Trebuie să arătăm că $\overline{A'B'} \sim \overline{C'D'}$ (fig. 14).

Segmentele $\overline{A'B'}$ și $\overline{C'D'}$ au: (1) aceeași direcție deoarece sînt situate pe D, (2) același sens deoarece punctele B' și D' se găsesc pe aceeași semidreaptă determinată de A' pe D, (3) aceeași lungime deoarece $\triangle A'B'B''$ este congruent cu $\triangle C'D'D''$.

Teorema 5.1 justifică următoarea

5.2. *Definiție. Vectorul liber* $\overline{A'B'}$ *se numește proiecția ortogonală a vectorului* $\bar{a}$ *pe dreapta* D *și se notează* $\pi_D(\bar{a})$.

5.3. Teoremă. Dacă D_1 și D_2 sînt drepte paralele, atunci $\pi_{D_1}(\bar{a}) = \pi_{D_2}(\bar{a})$.

Demonstrație. Temă.

Rezultă că proiecția ortogonală a unui vector liber pe o dreaptă D depinde numai de direcția lui D. De aceea dacă $\bar{u}$ este un vector nenul care dă direcția lui D, atunci putem vorbi de proiecția ortogonală a lui $\bar{a}$ pe $\bar{u}$ pe care o notăm cu $\pi_{\bar{u}}(\bar{a})$. Teorema care urmează arată că π este o transformare liniară.

5.4. Teoremă. Fie $\bar{u} \in V_3 - \{\bar{0}\}$. Pentru orice $\bar{a}, \bar{b} \in V_3$ și orice scalar $t \in \mathbb{R}$ avem

$$\pi_{\bar{u}}(\bar{a} + \bar{b}) = \pi_{\bar{u}}(\bar{a}) + \pi_{\bar{u}}(\bar{b}),$$

$$\pi_{\bar{u}}(t\bar{a}) = t\pi_{\bar{u}}(\bar{a}).$$

Demonstrație. Temă.

Notăm cu $\bar{u}$ un vector liber nenul și $\bar{u}_0$ versorul său, adică $\bar{u} = \|\bar{u}\|\bar{u}_0$, $\|\bar{u}_0\| = 1$. Pentru orice $\bar{a}$ vectorul $\pi_{\bar{u}}(a)$ este coliniar cu $\bar{u}_0$ și deci există un număr real $\text{pr}_{\bar{u}}\bar{a}$ astfel încît (fig. 15):

$$\pi_{\bar{u}}(\bar{a}) = (\text{pr}_{\bar{u}}\bar{a})\bar{u}_0.$$

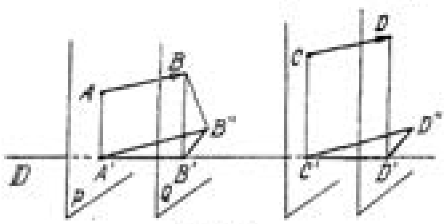


Fig. 14

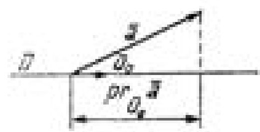


Fig. 15

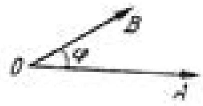


Fig. 16

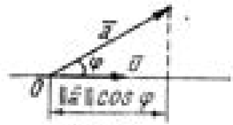


Fig. 17

5.5. *Definiție. Numărul real* $\text{pr}_{\bar{u}}\bar{a}$ *definit prin relația precedentă se numește mărimea algebrică a proiecției ortogonale* $\pi_{\bar{u}}(\bar{a})$.

Proprietățile lui π implică

$$\text{pr}_{\bar{u}}(\bar{a}+\bar{b}) = \text{pr}_{\bar{u}}\bar{a} + \text{pr}_{\bar{u}}\bar{b}$$

$$\text{pr}_{\bar{u}}(t\bar{a}) = t\,\text{pr}_{\bar{u}}\bar{a}.$$

Fie $\bar{a}$ și $\bar{b} \in V_3 - \{\bar{0}\}$ și $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ segmentele orientate reprezentative. Unghiul $\varphi \in [0, \pi]$ determinat de $\overline{OA}$ și $\overline{OB}$ se numește *unghiul* dintre vectorii $\bar{a}$ și $\bar{b}$ (fig. 16). Evident, definiția unghiului nu depinde de punctul O. Dacă cel puțin unul dintre vectorii liberi $\bar{a}$ și $\bar{b}$ este $\bar{0}$, atunci unghiul $\varphi \in [0, \pi]$ dintre $\bar{a}$ și $\bar{b}$ este nedeterminat.

Vectorii $\bar{a}$ și $\bar{b}$ se numesc *ortogonali* dacă unghiul dintre ei este $\frac{\pi}{2}$. Acceptăm că $\bar{0}$ este ortogonal pe orice vector.

Noțiunea de unghi permite să explicităm numărul $\text{pr}_{\bar{u}}\bar{a}$ în funcție de $\|\bar{a}\|$ și de unghiul φ dintre $\bar{a}$ și $\bar{u}$ (fig. 17),

$$\text{pr}_{\bar{u}}\bar{a} = \|\bar{a}\| \cos\varphi.$$

Fie P un plan și $\bar{a} \ni \overline{AB}$ un vector liber. Prin A și B ducem drepte perpendiculare pe planul P și notăm cu A' și B' punctele în care aceste perpendiculare înțeapă planul P. Se arată ușor că vectorul liber $\overline{A'B'}$ nu depinde de segmentul $\overline{AB}$ ci numai de $\bar{a}$. Din acest motiv vectorul liber $\overline{A'B'}$ se numește *proiecție ortogonală a vectorului* $\bar{a}$ *pe planul* P; se notează $\pi_P(\bar{a})$.

Un vector liber are aceeași proiecție pe două plane paralele, adică $\pi_P(\bar{a})$ depinde doar de $\bar{a}$ și de spațiul vectorial bidimensional atașat lui P. Mai mult, se dovedește că proiecția ortogonală a vectorilor liberi pe un plan este o transformare liniară.

§6. Produs scalar

Noțiunea de produs scalar o presupunem cunoscută de la partea de algebră liniară.

Fie V_3 spațiul vectorilor liberi și $\bar{a}, \bar{b} \in V_3$. Pentru $\bar{a} \neq \bar{0}$ și $\bar{b} \neq \bar{0}$, notăm cu $\varphi \in [0, \pi]$ unghiul dintre $\bar{a}$ și $\bar{b}$.

6.1. Teoremă. Funcția $(\ ,\ ): V_3 \times V_3 \to \mathbb{R}$ definită prin

$$(\bar{a}, \bar{b}) = \begin{cases} \|\bar{a}\| \, \|\bar{b}\| \cos \varphi & \text{pentru } \bar{a} \neq \bar{0} \text{ și } \bar{b} \neq \bar{0} \\ 0 & \text{pentru } \bar{a} = \bar{0} \text{ sau/și } \bar{b} = \bar{0} \end{cases}$$

este un produs scalar pe V_3.

Demonstrație. Trebuie să verificăm comutativitatea, omogenitatea, distributivitatea față de adunare și pozitivitatea funcției $(,)$.

Dovedim numai distributivitatea față de adunare $(\bar{a}, \bar{b} + \bar{c}) = (\bar{a}, \bar{b}) + (\bar{a}, \bar{c})$ întrucît celelalte proprietăți sînt aproape evidente. Cazul $\bar{a} = \bar{0}$ este imediat. Pentru a verifica proprietatea în ipoteza $\bar{a} \neq \bar{0}$ ne folosim de noțiunea de mărime algebrică a unei proiecții ortogonale.

Fie $\bar{e}$ un versor și $\bar{b}$ un vector oarecare. Se observă că $\mathrm{pr}_{\bar{e}} \bar{b} = (\bar{e}, \bar{b})$.

Exprimăm pe $\bar{a} \neq \bar{0}$ în forma $\bar{a} = \|\bar{a}\| \ \bar{e}$, $\|\bar{e}\| = 1$. Relația $\mathrm{pr}_{\bar{e}}(\bar{b} + \bar{c}) = \mathrm{pr}_{\bar{e}} \bar{b} + \mathrm{pr}_{\bar{e}} \bar{c}$ este echivalentă cu $(\bar{e}, \bar{b} + \bar{c}) = (\bar{e}, \bar{b}) + (\bar{e}, \bar{c})$. Înmulțind cu $\|\bar{a}\|$ și ținînd seama de omogenitate deducem $(\|\bar{a}\|\bar{e}, \bar{b} + \bar{c}) = (\|\bar{a}\|\bar{e}, \bar{b}) + (\|\bar{a}\|\bar{e}, \bar{c})$, c.c.t.d.

Observații. 1) Teorema 6.1 arată că V_3 este un spațiu vectorial euclidian;

2) relația $(\bar{a}, \bar{a}) = \|\bar{a}\|^2 \geqslant 0$ este echivalentă cu $\|\bar{a}\| = \sqrt{(\bar{a}, \bar{a})}$, ultima permițînd calculul lungimii vectorului liber $\bar{a}$ dacă se cunoaște produsul scalar $(\bar{a}, \bar{a})$;

3) relația $|\cos \varphi| \leqslant 1$ implică inegalitatea Cauchy-Schwarz $|(\bar{a}, \bar{b})| \leqslant \|\bar{a}\| \, \|\bar{b}\|$;

4) doi vectori liberi sînt ortogonali dacă și numai dacă produsul lor scalar este nul.

Fie $\{\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}\}$ o bază în V_3 și $\bar{u} = r_1\bar{a} + s_1\bar{b} + t_1\bar{c}$, $\bar{v} = r_2\bar{a} + s_2\bar{b} + t_2\bar{c}$. Proprietățile produsului scalar implică $(\bar{u}, \bar{v}) = (r_1\bar{a} + s_1\bar{b} + t_1 c, r_2\bar{a} + s_2\bar{b} + t_2\bar{c}) = \ldots = r_1r_2(\bar{a}, \bar{a}) + r_1s_2(\bar{a}, \bar{b}) + r_1t_2(\bar{a}, \bar{c}) + s_1r_2(\bar{b}, \bar{a}) + s_1s_2(\bar{b}, \bar{b}) + s_1t_2(\bar{b}, \bar{c}) + t_1r_2(\bar{c}, \bar{a}) + t_1s_2(\bar{c}, \bar{b}) + t_1t_2(\bar{c}, \bar{c})$. Deci produsul scalar $(\bar{u}, \bar{v})$ este cunoscut dacă se dă tabelul 3.

Tabelul 3

$(,)$	$\bar{a}$	$\bar{b}$	$\bar{c}$
$\bar{a}$	$(\bar{a}, \bar{a})$	$(\bar{a}, \bar{b})$	$(\bar{a}, \bar{c})$
$\bar{b}$	$(\bar{b}, \bar{a})$	$(\bar{b}, \bar{b})$	$(\bar{b}, \bar{c})$
$\bar{c}$	$(\bar{c}, \bar{a})$	$(\bar{c}, \bar{b})$	$(\bar{c}, \bar{c})$

Pentru calcule este avantajos să alegem baze pentru care tabelul 3 să fie cît mai simplu posibil. Un exemplu îl constituie baza ortonormată a cărei existență în V_3 este evidentă.

O bază în V_3 formată din versori ortogonali se numește *bază ortonormată* și se notează cu $\{\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$.

Coordonatele unui vector în raport cu baza ortonormată se numesc *coordonate euclidiene*. Pentru baza ortonormată $\{\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$ obținem tabelul 4 de înmulțire scalară.

Tabelul 4

$(,)$	$\bar{i}$	$\bar{j}$	$\bar{k}$
$\bar{i}$	1	0	0
$\bar{j}$	0	1	0
$\bar{k}$	0	0	1

Acest tabel conduce la

$$(\bar{a}, \bar{b}) = r_1r_2 + s_1s_2 + t_1t_2.$$

În particular $(\bar{a}, \bar{i}) = r_1$, $(\bar{a}, \bar{j}) = s_1$, $(\bar{a}, \bar{k}) = t_1$; astfel coordonatele euclidiene ale unui vector $\bar{a}$ sînt de fapt proiecțiile ortogonale ale lui $\bar{a}$ pe cele trei axe de coordonate.

Dacă se cunosc coordonatele euclidiene ale unui vector $\bar{a}$, atunci norma sa este

$$a = \|\bar{a}\| = \sqrt{(\bar{a}, \bar{a})} = \sqrt{r_1^2 + s_1^2 + t_1^2}.$$

De asemenea unghiul a doi vectori nenuli $\bar{a}$ și $\bar{b}$ este dat de

$$\cos \varphi = \frac{(\bar{a}, \bar{b})}{\|\bar{a}\|\,\|\bar{b}\|} = \frac{r_1r_2 + s_1s_2 + t_1t_2}{\sqrt{r_1^2 + s_1^2 + t_1^2}\sqrt{r_2^2 + s_2^2 + t_2^2}}, \qquad \varphi \in [0, \pi].$$

Astfel avem $\bar{a} \perp \bar{b}$ dacă și numai dacă $r_1r_2 + s_1s_2 + t_1t_2 = 0$.

§7. Produs vectorial

Fie V_3 spațiul vectorilor liberi și $\bar{a}, \bar{b} \in V_3$. Pentru $\bar{a} \neq \bar{0}$ și $\bar{b} \neq \bar{0}$, notăm cu $\varphi \in [0, \pi]$ unghiul dintre $\bar{a}$ și $\bar{b}$.

7.1. *Definiție. Vectorul*

$$\bar{a} \times \bar{b} = \begin{cases} \|\bar{a}\|\,\|\bar{b}\| \sin\varphi\,\bar{e}, & \textit{pentru } \bar{a} \textit{ și } \bar{b} \textit{ necoliniari} \\ \bar{0}, & \textit{pentru } \bar{a}, \bar{b} \textit{ coliniari} \end{cases}$$

unde $\bar{e}$ este un versor perpendicular pe $\bar{a}$ și $\bar{b}$ și cu sensul dat de regula mîinii drepte pentru tripletul $(\bar{a}, \bar{b}, \bar{e})$, se numește produsul vectorial dintre $\bar{a}$ și $\bar{b}$ (fig. 18).

Produsul vectorial este o aplicație biliniară definită pe $V_3 \times V_3$ cu valori în V_3.

Pornind de la definiție se deduc următoarele *proprietăți*:

1) $\bar{a} \times \bar{b} = -\bar{b} \times \bar{a}$ (anticomutativitate),
2) $t(\bar{a} \times \bar{b}) = (t\bar{a}) \times \bar{b} = \bar{a} \times (t\bar{b})$, $t \in \mathbb{R}$,
3) $\bar{a} \times (\bar{b} + \bar{c}) = \bar{a} \times \bar{b} + \bar{a} \times \bar{c}$,
4) $\bar{a} \times \bar{0} = \bar{0}$, $\bar{a} \times \bar{a} = \bar{0}$,
5) $\|\bar{a} \times \bar{b}\|^2 = \|\bar{a}\|^2\|\bar{b}\|^2 - (\bar{a}, \bar{b})^2$ (identitatea Lagrange),
6) produsul vectorial a doi vectori nenuli este nul dacă și numai dacă vectorii sînt coliniari; dacă $\bar{a}$ și $\bar{b}$ nu sînt coliniari, atunci norma $\|\bar{a} \times \bar{b}\|$ reprezintă aria paralelogramului construit pe reprezentanții $\overrightarrow{OA}$ și $\overrightarrow{OB}$ (fig. 18).

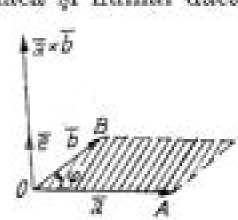


Fig. 18

Demonstrație. Proprietățile 1), 2), 4), 6) se demonstrează fără dificultate. Pentru a demonstra proprietatea 3) ne folosim de 2) și de proprietățile inmulțirii unui vector cu un număr. Fără a restrînge generalitatea, presupunem că $\bar{a}$ este un versor; fie P un

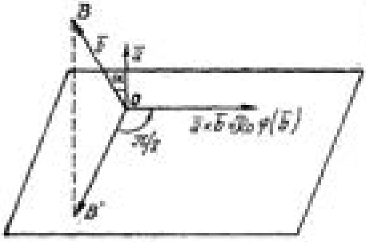


Fig. 19

plan perpendicular pe $\bar a$ (fig. 19) și $\bar b$ un vector reprezentat de segmentul orientat $\overline{OB}$, a cărui direcție face un unghi α cu direcția lui $\bar a$. Fie B' proiecția lui B pe planul P. Vectorul reprezentat de $\overline{OB'}$ îl notăm cu $\varphi(\bar b)$. Evident $\forall\, \bar b, \bar c \in V_3$, avem $\varphi(\bar b+\bar c) = \varphi(\bar b) + \varphi(\bar c)$. Notăm cu $\mathscr{R}$ rotația de unghi $\pi/2$ în jurul axei $\bar a$. Oricare ar fi vectorii $\bar v$, $\bar w$ din planul P, $\mathscr{R}(\bar v+\bar w) = \mathscr{R}(\bar v) + \mathscr{R}(\bar w)$.

Din figura 19 observăm că $\bar a\times\bar b = \mathscr{R}\circ\varphi(\bar b)$. Într-adevăr $\|\bar a\times\bar b\| = \|\mathscr{R}\circ\varphi(\bar b)\| = \|\varphi(\bar b)\| = \|\bar b\|\sin\alpha$, iar tripletul $(\bar a, \bar b, \mathscr{R}\circ\varphi(\bar b))$ este orientat după regula mîinii drepte. Analog găsim $\bar a\times\bar c = \mathscr{R}\circ\varphi(\bar c)$ și $\bar a\times(\bar b+\bar c) = \mathscr{R}\circ\varphi(\bar b+\bar c)$. Dar $\mathscr{R}\circ\varphi(\bar b) + \mathscr{R}\circ\varphi(\bar c) = \mathscr{R}\circ\varphi(\bar b+\bar c)$ și deci proprietatea este demonstrată.

Pentru a obține identitatea Lagrange pornim de la identitatea $\sin^2\varphi = 1-\cos^2\varphi$, pe care o înmulțim cu $\|\bar a\|\,\|\bar b\|$.

În raport cu baza $\{\bar i, \bar j, \bar k\}$ vectorii $\bar a$ și $\bar b$ admit descompunerea $\bar a = r_1\bar i + s_1\bar j + t_1\bar k$, respectiv $\bar b = r_2\bar i + s_2\bar j + t_2\bar k$. Folosind definiția produsului vectorial și proprietățile 1), 2), 3), 6) obținem tabelul 5,

Tabelul 5

$\times$	$\bar i$	$\bar j$	$\bar k$
$\bar i$	0	$\bar k$	$-\bar j$
$\bar j$	$-\bar k$	0	$\bar i$
$\bar k$	$\bar j$	$-\bar i$	0

care ne conduce la

$$\bar a\times\bar b = (s_1t_2 - s_2t_1)\,\bar i + (r_2t_1 - r_1t_2)\bar j + (r_1s_2 - r_2s_1)\bar k$$

sau simbolic

$$\bar a\times\bar b = \begin{vmatrix} \bar i & \bar j & \bar k \\ r_1 & s_1 & t_1 \\ r_2 & s_2 & t_2 \end{vmatrix}.$$

7.2. *Dublu produs vectorial.* Fiind dați vectorii $\bar a, \bar b, \bar c$, vectorul $\bar w = \bar a\times(\bar b\times\bar c)$ este dublul produs vectorial al acestor vectori. Folosind baza ortonormată $\{\bar i, \bar j, \bar k\}$ precum și proprietățile produsului scalar și vectorial, se poate arăta că $\bar a\times(\bar b\times\bar c) = \bar b(\bar a, \bar c) - \bar c(\bar a, \bar b)$. Această relație pune în evidență coplanaritatea vectorilor $\bar w$, $\bar b$, $\bar c$ (fig. 20), unde $\bar d = \bar b\times\bar c$ și $\bar w\perp\bar a$, $\bar w\perp\bar d$.

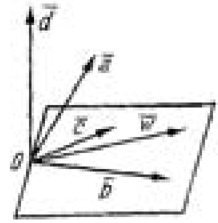


Fig. 20

Observații. 1) $\bar a\times(\bar b\times\bar c) \neq (\bar a\times\bar b)\times\bar c$; 2) expresia dublului produs vectorial se reține mai ușor scrisă sub forma determinantului simbolic

$$\bar a\times(\bar b\times\bar c) = \begin{vmatrix} \bar b & \bar c \\ (\bar a, \bar b) & (\bar a, \bar c) \end{vmatrix}$$

7.3. Aplicații. 1) Dîndu-se punctele $M_i(\bar r_i)$, $i = 1, 2, 3$, să se stabilească condiția ca aceste trei puncte să fie coliniare.

Soluție. Impunem anularea produsului vectorial $\overline{M_1M_2} \times \overline{M_1M_3}$. Folosind vectorii de poziție ai punctelor și proprietățile produsului vectorial obținem $(\bar r_2 - \bar r_1) \times (\bar r_3 - \bar r_1) = \bar 0$ sau $\bar r_2 \times \bar r_3 - \bar r_2 \times \bar r_1 - \bar r_1 \times \bar r_3 + \bar r_1 \times \bar r_1 = \bar 0$ sau $\bar r_1 \times \bar r_2 + \bar r_2 \times \bar r_3 + \bar r_3 \times \bar r_1 = \bar 0$.

2) Fiind dați vectorii $\overline{OA} = \bar j - 3\bar k$, $\overline{AC} = 4\bar i + 7\bar j$, $\overline{BC} = 4\bar i + 8\bar j - 8\bar k$, să se găsească vectorul de poziție al punctului B, respectiv C și să se calculeze lungimea înălțimii $[AA']$ a triunghiului ABC.

Soluție. Se constată că punctele A, B, C nu sînt coliniare, deoarece coordonatele vectorilor $\overline{AC}$ și $\overline{BC}$ nu sînt proporționale. $\overline{OC} = \overline{OA} + \overline{AC}$, $\overline{OC} = 4\bar i + 8\bar j - 3\bar k$; $\overline{OB} = \overline{OC} - \overline{BC} = 5\bar k$.

Înălțimea $[AA']$ a triunghiului ABC coincide cu înălțimea paralelogramului construit pe reprezentanții vectorilor $\overline{BA}$ și $\overline{BC}$.

$$\overline{BA} \times \overline{BC} = \begin{vmatrix} \bar i & \bar j & \bar k \\ 0 & 1 & -3 \\ 4 & 8 & -8 \end{vmatrix} = 4(14\bar i - 3\bar j - \bar k)\,;\ \|\overline{BA} \times \overline{BC}\| = 4\sqrt{261}$$

$$AA' = \frac{\|\overline{BA} \times \overline{BC}\|}{\|\overline{BC}\|} = \sqrt{29}.$$

§8. Produs mixt

Fiind dați vectorii liberi $\bar a, \bar b, \bar c$, numărul $(\bar a, \bar b \times \bar c)$ se numește *produsul mixt* al acestor vectori. Dacă $\bar a, \bar b, \bar c$ sînt necoplanari, atunci modulul produsului mixt reprezintă volumul paralelipipedului ce se poate construi pe reprezentanții cu originea comună ai celor trei vectori (fig. 21). Într-adevăr, fie θ unghiul dintre direcțiile vectorilor $\bar b$ și $\bar c$ și fie φ unghiul dintre direcțiile vectorilor $\bar a$ și $\bar b \times \bar c$; atunci $(\bar a, \bar b \times \bar c) = (\bar a, \bar d) = \|\bar a\|\,\|\bar d\| \cos\varphi = \|\bar b \times \bar c\|\ \mathrm{pr}_{\bar d}\bar a = \pm\mathcal{V}$.

Pornind de la definiție se deduc următoarele *proprietăți*:

1) $(\bar a, \bar b \times \bar c) = (\bar c, \bar a \times \bar b) = (\bar b, \bar c \times \bar a)$

2) $(\bar a, \bar b \times \bar c) = -(\bar a, \bar c \times \bar b)$

3) $(t\bar a, \bar b \times \bar c) = (\bar a, t\bar b \times \bar c) = (\bar a, \bar b \times t\bar c)$, $t \in \mathbb{R}$

4) $(\bar a_1 + \bar a_2, \bar b \times \bar c) = (\bar a_1, \bar b \times \bar c) + (\bar a_2, \bar b \times \bar c)$

5) $(\bar a \times \bar b, \bar c \times \bar d) = \begin{vmatrix} (\bar a, \bar c) & (\bar a, \bar d) \\ (\bar b, \bar c) & (\bar b, \bar d) \end{vmatrix}$ (identitatea Lagrange)

6) $(\bar a, \bar b \times \bar c) = 0$ dacă și numai dacă:

(i) cel puțin unul dintre vectorii $\bar a, \bar b, \bar c$ este nul;

(ii) doi dintre vectori sînt coliniari;

(iii) vectorii $\bar a, \bar b, \bar c$ sînt coplanari.

Demonstrăm proprietatea 5) restul le lăsăm ca exercițiu pentru cititor. Notînd $\bar m = \bar c \times \bar d$, obținem $(\bar a \times \bar b, \bar c \times \bar d) = (\bar a \times \bar b, \bar m) = (\bar m, \bar a \times \bar b) = (\bar b, \bar m \times \bar a) = (\bar a, \bar b \times \bar m) = (\bar a, \bar b \times (\bar c \times \bar d)) = [\bar a, \bar c(\bar b, \bar d) - \bar d(\bar b, \bar c)] = (\bar a, \bar c)(\bar b, \bar d) - (\bar a, \bar d)(\bar b, \bar c) = \begin{vmatrix} (\bar a, \bar c) & (\bar a, \bar d) \\ (\bar b, \bar c) & (\bar b, \bar d) \end{vmatrix}$.

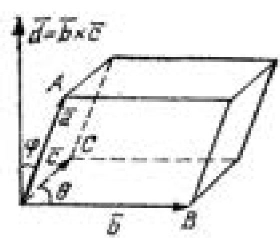


Fig. 21

Dacă $\bar{a} = r_1\bar{i} + s_1\bar{j} + t_1\bar{k}$, $\bar{b} = r_2\bar{i} + s_2\bar{j} + t_2\bar{k}$, $\bar{c} = r_3\bar{i} + s_3\bar{j} + t_3\bar{k}$, în coordonate produsul mixt se scrie

$$(\bar{a}, \bar{b} \times \bar{c}) = \begin{vmatrix} r_1 & s_1 & t_1 \\ r_2 & s_2 & t_2 \\ r_3 & s_3 & t_3 \end{vmatrix}.$$

Proprietățile produsului mixt se justifică cu ajutorul proprietăților determinanților.

Baza vectorială $\{\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}\}$ se numește *orientată pozitiv (negativ)* dacă produsul $(\bar{a}, \bar{b} \times \bar{c})$ este pozitiv (negativ). Prin urmare baza ortonormată $\{\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$ este orientată pozitiv întrucît $(\bar{i}, \bar{j} \times \bar{k}) = 1$, unde $\bar{i} = (1, 0, 0)$, $\bar{j} = (0, 1, 0)$, $\bar{k} = (0, 0, 1)$.

Aplicație. Să se arate că vectorii $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ sînt coplanari dacă și numai dacă determinantul lor Gram este nul.

Soluție. Prin determinant Gram al vectorilor $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ înțelegem numărul

$$G = \begin{vmatrix} (\bar{a}, \bar{a}) & (\bar{a}, \bar{b}) & (\bar{a}, \bar{c}) \\ (\bar{b}, \bar{a}) & (\bar{b}, \bar{b}) & (\bar{b}, \bar{c}) \\ (\bar{c}, \bar{a}) & (\bar{c}, \bar{b}) & (\bar{c}, \bar{c}) \end{vmatrix}.$$

Dacă vectorii $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ sînt coplanari, atunci $\mathscr{V} = \pm (\bar{a}, \bar{b} \times \bar{c}) = 0$ sau echivalent $\mathscr{V}^2 = (\bar{a}, \bar{b} \times \bar{c})^2 = 0$. Scriem ultima relație folosind coordonatele vectorilor și proprietatea $\det A = \det {}^tA$. Atunci

$$\mathscr{V}^2 = \begin{vmatrix} r_1 & s_1 & t_1 \\ r_2 & s_2 & t_2 \\ r_3 & s_3 & t_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} r_1 & r_2 & r_3 \\ s_1 & s_2 & s_3 \\ t_1 & t_2 & t_3 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} r_1^2 + s_1^2 + t_1^2 & r_1r_2 + s_1s_2 + t_1t_2 & r_1r_3 + s_1s_3 + t_1t_3 \\ r_2r_1 + s_2s_1 + t_2t_1 & r_2^2 + s_2^2 + t_2^2 & r_2r_3 + s_2s_3 + t_2t_3 \\ r_3r_1 + s_3s_1 + t_3t_1 & r_3r_2 + s_3s_2 + t_3t_2 & r_3^2 + s_3^2 + t_3^2 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} (\bar{a}, \bar{a}) & (\bar{a}, \bar{b}) & (\bar{a}, \bar{c}) \\ (\bar{b}, \bar{a}) & (\bar{b}, \bar{b}) & (\bar{b}, \bar{c}) \\ (\bar{c}, \bar{a}) & (\bar{c}, \bar{b}) & (\bar{c}, \bar{c}) \end{vmatrix} = G.$$

Reciproca este evidentă deoarece $G = \mathscr{V}^2$.

§9. Probleme

1. Fie trapezul dreptunghic $ABCD$ în care $AD \parallel BC$, $\overline{AD} = \bar{a}$, $\overline{AB} = \bar{b}$, măs $\widehat{ABC} = \dfrac{5\pi}{6}$. Să se descompună $\overline{BC}$, $\overline{DC}$, $\overline{AC}$, $\overline{BD}$, după vectorii $\bar{a}$ și $\bar{b}$.

2. Se dau vectorii $\bar{d}_1 = \bar{a} - \alpha\bar{b} + 3\bar{c}$, $\bar{d}_2 = \alpha\bar{a} - \bar{b} + \bar{c}$, $\bar{d}_3 = 3\bar{a} + \bar{b} - \bar{c}$, unde $\{\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}\}$ este o bază din V_3. Să se determine $\alpha \in \mathbb{R}$, astfel încît vectorii $\bar{d}_i$, $i = 1, 2, 3$ să fie coplanari.

Pentru α astfel găsit, să se descompună vectorul $\bar{d}_2$ după vectorii $\bar{d}$ și $\bar{d}_3$.

3. Se dau punctele A, B, C prin vectorii lor de poziție $\overrightarrow{OA} = 14\vec{i} - 7\vec{j} + 2\vec{k}$, $\overrightarrow{OB} = 2\vec{i} + 2\vec{j} - 7\vec{k}$, $\overrightarrow{OC} = -2\vec{i} + 7\vec{j} + 2\vec{k}$. Să se arate că triunghiul AOB este dreptunghic și triunghiul BOC este isoscel. Să se calculeze perimetrul triunghiului ABC și măsura unghiului BAC; să se scrie expresia analitică a versorului bisectoarei unghiului BAC.

4. Se dau vectorii $\bar{a} = \bar{i} + 2\lambda\bar{j} - (\lambda - 1)\bar{k}$, $\bar{b} = (3 - \lambda)\bar{i} + \bar{j} + 3\bar{k}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ și se cere valoarea lui λ pentru care $\bar{a}$ și $\bar{b}$ sînt ortogonali. Pentru λ astfel găsit, să se calculeze mărimea algebrică a proiecției vectorului $\bar{a}$ pe vectorul $\bar{a} + \bar{b}$.

5. Să se calculeze aria paralelogramului construit pe reprezentanții cu originea comună ai vectorilor $\bar{r}_1 = \dfrac{1 + \cos v}{\cos^2 u}\bar{j} + \dfrac{\sin u \sin v}{\cos^2 u}\bar{k}$, $\bar{r}_2 = -\sin v\bar{i} - \sin v \operatorname{tg} u\bar{j} + \dfrac{\cos v}{\cos u}\bar{k}$, folosind indentitatea Lagrange.

6. Fiind dați vectorii $\bar{a} = \bar{i} - 5\bar{j} - 7\bar{k}$, $\bar{b} = 2\bar{i} - 3\bar{j} + 6\bar{k}$, $\bar{c} = -\bar{i} + 2\bar{j} - 2\bar{k}$, să se calculeze $\bar{w} = \bar{a} \times (\bar{b} \times \bar{c})$ și să se verifice liniar dependența vectorilor $\bar{w}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$.

7. Fie triedrul $\{O; \bar{a}, \bar{b}, \bar{c}\}$. Vectorii definiți prin

$$\bar{a}' = \frac{\bar{b} \times \bar{c}}{(\bar{a}, \bar{b} \times \bar{c})}, \quad \bar{b}' = \frac{\bar{c} \times \bar{a}}{(\bar{a}, \bar{b} \times \bar{c})}, \quad \bar{c}' = \frac{\bar{a} \times \bar{b}}{(\bar{a}, \bar{b} \times \bar{c})}$$

se numesc reciprocii vectorilor $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$, iar triedrul $\{O; \bar{a}', \bar{b}', \bar{c}'\}$ se numește *triedrul reciproc*. Ce relații se pot stabili între $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ și $\bar{a}'$, $\bar{b}'$, $\bar{c}'$?

8. Se dau vectorii $\bar{a} = \bar{i} - \alpha\bar{j} + 3\bar{k}$, $\bar{b} = \alpha\bar{i} - \bar{j} + \bar{k}$, $\bar{c} = 3\bar{i} + \bar{j} - \bar{k}$. Să se găsească valoarea lui α astfel încît vectorii $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ să fie coplanari. Pentru $\alpha = 2$, să se afle înălțimea paralelipipedului construit pe reprezentanții vectorilor $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$, înălțime corespunzătoare bazei formate de reprezentanții vectorilor $\bar{a}$ și $\bar{b}$.

9. Să se arate că punctele $A(1, 1, 1)$, $B(3, -1, 4)$, $C(0, 7, -3)$, $D(5, 7, 2)$ sînt coplanare.

Capitolul 2

DREAPTA ȘI PLANUL ÎN SPAȚIU

§1. Reper cartezian

Este cunoscut faptul că spațiile $\mathbb{E}_3$ și $\boldsymbol{V}_3$ sînt în corespondență biunivocă, bijecția fiind unic determinată prin fixarea originii, iar spațiile vectoriale $\boldsymbol{V}_3$ și $\mathbb{R}^3$ sînt izomorfe, izomorfismul fiind unic determinat prin fixarea bazelor în cele două spații. Într-adevăr, în ipoteza că am fixat un punct O numit *origine* în $\mathbb{E}_3$ și o bază ortonormată $\{\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$ în $\boldsymbol{V}_3$, fiecărui punct M din $\mathbb{E}_3$ îi corespunde în mod unic un vector $\bar{r} = \overline{OM}$ numit *vector de poziție* al punctului M; acestui vector îi corespunde în mod unic tripletul ordonat de numere reale $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ numite *coordonatele euclidiene* ale vectorului $\overline{OM}$ în raport cu baza $\{\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$; se scrie $\overline{OM} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$.

Ansamblul $\{O;\bar{i},\bar{j},\bar{k}\}$ se numește *reper cartezian* în $\mathbb{E}_3$. Punctul O se numește *originea reperului*, iar $\{\bar{i},\bar{j},\bar{k}\}$ se numește *baza reperului*. Coordonatele euclidiene (x, y, z) ale vectorului de poziție $\bar{r}=\overline{OM}$ se numesc *coordonatele carteziene ale punctului* M față de reperul ortonormat $\{O;\bar{i},\bar{j},\bar{k}\}$; $x=(\bar{i},\bar{r})=\mathrm{pr}_{\bar{i}}\bar{r}=$ abscisa, $y=(\bar{j},\bar{r})=\mathrm{pr}_{\bar{j}}\bar{r}=$ordonata, $z=(\bar{k},\bar{r})=\mathrm{pr}_{\bar{k}}\bar{r}=$ cota. Bijecția dintre $\mathbb{E}_3$ și $\mathbb{R}^3$ determinată prin fixarea reperului cartezian se numește *sistem de coordonate cartezian* și se notează prin $M(x, y, z)$.

Bijecțiile menționate mai sus permit deseori identificarea spațiilor $\mathbb{E}_3$, V_3 și $\mathbb{R}^3$.

Versorilor $\bar{i},\bar{j},\bar{k}$ le atașăm *axele de coordonate* Ox, Oy, Oz care au același sens cu sensul pozitiv al acestor versori. Coordonatele carteziene ale punctului M reprezintă mărimile algebrice ale proiecțiilor ortogonale ale vectorului $\overline{OM}$ pe cele trei axe de coordonate (fig. 22). Axele sînt caracterizate respectiv prin ecuațiile

$$Ox:\begin{cases}y=0\\z=0\end{cases},\qquad Oy:\begin{cases}z=0\\x=0\end{cases},\qquad Oz:\begin{cases}x=0\\y=0\end{cases}$$

Cele trei axe determină trei plane xOy, yOz, zOx numite *plane de coordonate*. Ele sînt caracterizate respectiv prin

$$xOy:z=0,\quad yOz:x=0,\quad zOx:y=0$$

Cele trei plane de coordonate împart spațiul în opt regiuni numite *octante*.

Uneori reperul cartezian este indicat prin notația $Oxyz$, prin aceasta înțelegîndu-se că s-a fixat originea O și axele reciproc ortogonale Ox, Oy, Oz. Evident versorii reciproc ortogonali $\bar{i},\bar{j},\bar{k}$ rezultă din context.

În cele ce urmează presupunem cunoscute din geometria euclidiană noțiunile elementare ca punct, dreaptă, plan, perpendiculară etc...; de asemenea presupunem că V_3 este raportat la baza ortonormată $\{\bar{i},\bar{j},\bar{k}\}$, iar $\mathbb{E}_3$ la reperul cartezian $\{O;\bar{i},\bar{j},\bar{k}\}$.

§2. Dreapta în spațiu

O dreaptă în spațiu poate fi determinată de:

(i) un punct și un vector nenul;

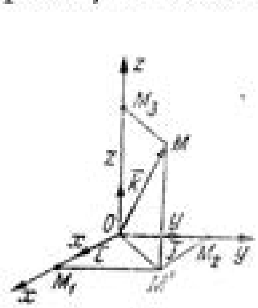


Fig. 22

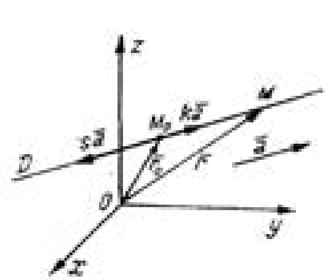


Fig. 23

(ii) două puncte;
(iii) intersecția a două plane.

2.1. *Dreapta determinată de un punct și un vector nenul.* Fie punctul fixat $M_0(x_0, y_0, z_0)$, $\bar{r}_0 = x_0\bar{i} + y_0\bar{j} + z_0\bar{k}$. Fie $\bar{a}(l, m, n)$ un vector nenul din V_3 și D o dreaptă care trece prin M_0 și are direcția lui $\bar{a}$ (fig. 23). Punctul $M(x, y, z)$ aparține dreptei D determinată de M_0 și de $\bar{a}$ dacă și numai dacă vectorii $\overline{M_0M}$ și $\bar{a}$ sînt coliniari, adică

$$(\bar{r} - \bar{r}_0) \times \bar{a} = 0.$$

Această ecuație în V_3 se numește *ecuația vectorială* a dreptei definită de un punct și o direcție. Vectorul $\bar{a}(l, m, n) \neq 0$, care dă direcția dreptei D, se numește *vector director*, iar coordonatele sale l, m, n se numesc *parametrii directori ai dreptei*. Evident orice vector $k\bar{a}$, $k \neq 0$ joacă același rol ca $\bar{a}$.

Coliniaritatea vectorilor $\bar{r} - \bar{r}_0$ și $\bar{a}$ se pune în evidență și prin relația $\bar{r} - \bar{r}_0 = t\bar{a}$, $t \in \mathbb{R}$ sau

$$\bar{r} = \bar{r}_0 + t\bar{a}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Această ecuație vectorială este echivalentă cu trei ecuații în $\mathbb{R}^3$,

$$x = x_0 + tl, \; y = y_0 + tm, \; z = z_0 + tn, \quad t \in \mathbb{R}$$

numite *ecuațiile parametrice ale dreptei D*. Aceste ecuații se pot înlocui cu două *ecuații carteziene* în $\mathbb{R}^3$,

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n},$$

cu convenția că dacă un numitor este nul, atunci numărătorul respectiv trebuie egalat cu zero.

Observație. Deoarece $\bar{a}(l, m, n) \neq \bar{0}(0, 0, 0)$, cel mult două dintre numerele l, m, n se pot anula.

1) Dacă $l = 0$, $mn \neq 0$, atunci ecuațiile carteziene sînt echivalente cu

$$x = x_0, \quad \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}$$

și reprezintă o dreaptă paralelă cu planul yOz.

2) Dacă $l = m = 0$, $n \neq 0$, atunci ecuațiile carteziene se reduc la

$$x = x_0, \; y = y_0$$

și reprezintă o dreaptă paralelă cu Oz.

2.2. *Dreapta determinată de două puncte.* Două puncte distincte $M_1(x_1, y_1, z_1)$ și $M_2(x_2, y_2, z_2)$ determină o dreaptă D și numai una. Pentru a scrie ecuațiile acestei drepte ne folosim de cazul precedent; anume vom considera

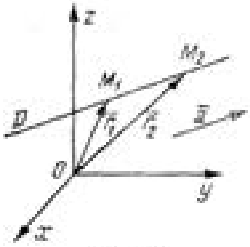


Fig. 24

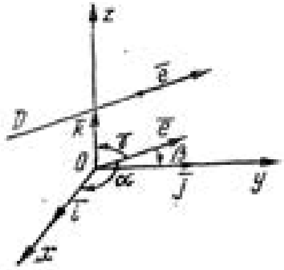


Fig. 25

dreapta ca fiind determinată de punctul M_1 şi de vectorul director $\bar{a}$ reprezentat de $\overrightarrow{M_1M_2}$ (fig. 24). Astfel *ecuaţiile carteziene* ale dreptei D sint

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}.$$

2.3. *Dreapta orientată.* Fie D o dreaptă in spaţiu. Pe D se pot stabili două sensuri de parcurs, corespondente relaţiilor de ordine pe mulţimea punctelor dreptei, pe care convenim să le notăm cu $(+)$ şi $(-)$. O dreaptă D impreună cu o alegere a unui sens de parcurs se numeşte *dreaptă orientată*.

Dacă $\bar{a}$ este vectorul director al unei drepte D, atunci se acceptă ca sens pozitiv pe D sensul vectorului director $\bar{a}$ şi vom nota acest sens cu $+$. Acest lucru va fi admis in continuare.

Fie $M_0 \in D$, in ipotezele făcute mulţimea

$$D' = \{M \mid \overline{M_0M} = k\bar{a},\ k \geqslant 0\}$$

se numeşte *partea pozitivă* a lui D, iar mulţimea

$$D'' = \{M \mid \overline{M_0M} = s\bar{a},\ s \leqslant 0\}$$

se numeşte *partea negativă* a lui D.

Axele de coordonate Ox, Oy, Oz sint exemple de drepte orientate. Dacă O este originea, atunci $\{M \mid \overline{OM} = t\bar{i},\ t \geqslant 0\}$ este semiaxa pozitivă Ox, iar $\{M \mid \overline{OM} = t\bar{i},\ t \leqslant 0\}$ este semiaxa negativă Ox.

Vectorului director $\bar{a} \neq \bar{0}$ al dreptei D i se poate ataşa versorul $\bar{e} = \dfrac{\bar{a}}{\|\bar{a}\|}$ numit *versor director* sau *direcţie orientată*. Prin urmare dreapta D poate fi exprimată in forma

$$D = \{M \mid \overline{M_0M} = t\bar{e},\ t \in \mathbb{R}\}$$

Versorul director $\bar{e}$ formează cu axele de coordonate unghiurile α, β, γ, numite *unghiuri directoare* ale dreptei D (fig. 25).

Coordonatele lui $\bar{e}$ se numesc *cosinusurile directoare* ale dreptei D. Putem scrie $\bar{e} = (\bar{e}, \bar{i})\bar{i} + (\bar{e}, \bar{j})\bar{j} + (\bar{e}, \bar{k})\bar{k}$ sau

$$\bar{e} = \cos\alpha\bar{i} + \cos\beta\bar{j} + \cos\gamma\bar{k}$$

Întrucît $\|\bar{e}\| = 1$, rezultă $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$.

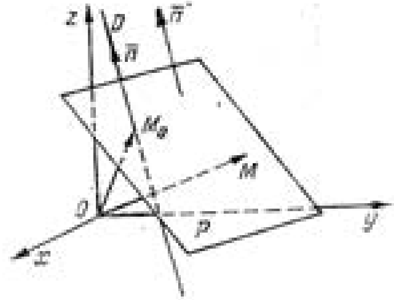


Fig. 26

2.4. *Unghiul dintre două drepte orientate.* Fie D_1 şi D_2 două drepte orientate prin vectorii directori $\bar{a}$ şi $\bar{b}$. Prin unghiul dintre dreptele orientate D_1 şi D_2 vom înţelege unghiul dintre $\bar{a}$ şi $\bar{b}$, adică unghiul definit prin

$$\cos\varphi = \frac{(\bar{a}, \bar{b})}{\|\bar{a}\| \; \|\bar{b}\|} \quad \text{sau}$$

$$\sin\varphi = \frac{\|\bar{a} \times \bar{b}\|}{\|\bar{a}\| \; \|\bar{b}\|}, \quad \varphi \in [0, \pi].$$

Constatăm echivalenţele:

(i) $D_1 \perp D_2$ dacă şi numai dacă $(\bar{a}, \bar{b}) = 0$;
(ii) $D_1 \| D_2$ dacă şi numai dacă $\bar{a} \times \bar{b} = \bar{0}$.

§ 3. Planul în spaţiu

Un plan în spaţiu este determinat de condiţii geometrice ca: trei puncte necoliniare, două drepte concurente, două drepte paralele, o dreaptă şi un punct exterior dreptei, un punct şi un vector normal la plan.

Ne propunem să stabilim ecuaţia planului sub formă vectorială sau carteziană, impunînd anumite condiţii geometrice care-l determină.

3.1. *Planul determinat de un punct şi un vector normal nenul.* Fiind dată o dreaptă $D = \{N \mid \overline{M_0N} = t\bar{n},\ t \in \mathbb{R}\}$ care trece prin punctul M_0 şi care are direcţia vectorului $\bar{n}$, există un singur plan P perpendicular pe D în M_0 (fig. 26).

$M \in P$ dacă şi numai dacă $\overline{M_0M} \perp \bar{n}$. De aceea planul P este mulţimea

$$P = \{M \mid (\overline{M_0M}, \bar{n}) = 0\}.$$

Dreapta D se numeşte *normala* la plan, vectorul nenul $\bar{n}$ se numeşte *vectorul normal* al planului, punctul M care poate genera planul îl vom numi *punct curent.*

Dacă $M_0(x_0, y_0, z_0)$, $M(x, y, z)$ şi $\bar{n} = (a, b, c)$, atunci $\overline{M_0M} = (x - x_0)\bar{i} + (y - y_0)\bar{j} + (z - z_0)\bar{k}$; condiţia de ortogonalitate a vectorilor $\overline{M_0M}$ şi $\bar{n}$ scrisă în coordonate este

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0,$$

numită ecuaţia *carteziană a planului* ce trece prin M_0 şi este perpendicular pe $\bar{n}$.

Dacă prelucrăm membrul stîng al ecuaţiei de mai sus şi notăm $ax_0 + by_0 + cz_0 = -d$, obţinem $ax + by + cz + d = 0$.

Reciproc, să arătăm că orice ecuaţie de forma $ax + by + cz + d = 0$ reprezintă un plan, dacă prin ipoteză a, b, c nu se anulează simultan. Într-adevăr dacă (x_0, y_0, z_0) este o soluţie a ecuaţiei anterioare, atunci

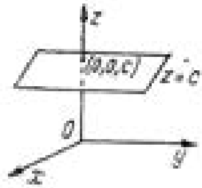


Fig. 27

$ax_0 + by_0 + cz_0 + d = 0$ ne dă $d = -ax_0 - by_0 - cz_0$ şi reînlocuind obţinem $a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$, care reprezintă ecuaţia unui plan ce conţine punctul $M_0(x_0, y_0, z_0)$ şi este perpendicular pe vectorul nenul (a, b, c).

Ecuaţia

$$ax + by + cz + d = 0 \text{ în } \mathbb{R}^3, \text{ pentru care } a^2 + b^2 + c^2 \neq 0,$$

se numeşte *ecuaţia carteziană generală a unui plan.*

Prin urmare un plan în spaţiu este nucleul unei funcţii liniar afine $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x, y, z) = ax + by + cz + d$.

3.2. *Plane particulare.* 1) Planul xOy are ecuaţia $z = 0$ şi vectorul normal $\bar{k} = (0, 0, 1)$. Orice plan paralel cu xOy are ecuaţia $z = c$ (fig. 27).

Analog $x = 0$ reprezintă ecuaţia planului yOz al cărui vector normal este $\bar{i} = (1, 0, 0)$. Un plan paralel cu yOz are ecuaţia $x = a$. Ecuaţia planului xOz este $y = 0$; normala acestui plan are direcţia $\bar{j} = (0, 1, 0)$; un plan paralel cu yOz are ecuaţia $y = b$.

2) Ecuaţiile planelor perpendiculare pe planele de coordonate xOy, yOz, zOx sînt respectiv $ax + by + d = 0$, $by + cz + d = 0$, $ax + cz + d = 0$.

3) Ecuaţiile planelor care trec prin axele de coordonate Ox, Oy, Oz sînt respectiv $by + cz = 0$, $ax + cz = 0$, $ax + by = 0$.

4) Ecuaţia planului care trece prin origine este $ax + by + cz = 0$.

3.3. *Planul determinat de trei puncte necoliniare.* Pentru a stabili ecuaţia planului determinat de punctele necoliniare $M_i(x_i, y_i, z_i)$, $i = 1, 2, 3$ (fig. 28) procedăm în felul următor:

1) Folosim ecuaţia generală a planului şi ecuaţiile obţinute prin înlocuirea coordonatelor punctelor M_i în această ecuaţie

$$ax + by + cz + d = 0$$

$$ax_i + by_i + cz_i + d = 0, \quad i = 1, 2, 3.$$

S-a obţinut un sistem liniar omogen în necunoscutele a, b, c, d, cu soluţii nebanale deoarece a, b, c nu se pot anula simultan. Condiţia care asigură acest lucru,

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

Fig. 28

este ecuaţia carteziană a planului. Într-adevăr ecuaţia de mai sus este o ecuaţie de gradul întîi în x, y, z şi oricare dintre punctele (x_i, y_i, z_i), $i=1, 2, 3$ o satisface.

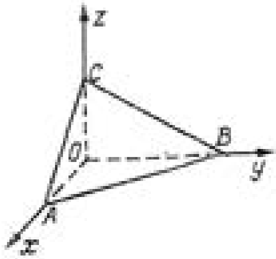


Fig. 29

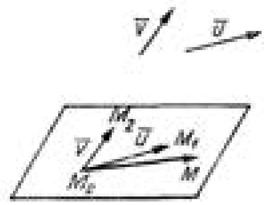


Fig. 30

Ca un caz particular putem găsi *ecuaţia planului prin tăieturi* (fig. 29). Înlocuind coordonatele punctelor $A(a, 0, 0)$, $B(0, b, 0)$, $C(0, 0, c)$ în ecuaţia de mai sus, găsim $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} - 1 = 0$.

De asemenea ecuaţia carteziană a planului determinat de punctele M_i, $i = 1, 2, 3$ ne ajută să stabilim *condiţia de coplanaritate* a patru puncte din spaţiu.

2) Fie M un punct care poate genera planul, al cărui vector de poziţie este $\overline{OM} = \bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$. Obţinem ecuaţia vectorială a planului P impunind condiţia de coplanaritate a vectorilor $\overline{M_1M}$, $\overline{M_1M_2}$, $\overline{M_1M_3}$, adică $(\overline{M_1M}, \overline{M_1M_2} \times \overline{M_1M_3}) = 0$. Dacă $M_i(\bar{r}_i)$, $\bar{r}_i = x_i\bar{i} + y_i\bar{j} + z_i\bar{k}$, relaţia de mai sus este echivalentă cu ecuaţia vectorială

$$(\bar{r} - \bar{r}_1, (\bar{r}_2 - \bar{r}_1) \times (\bar{r}_3 - \bar{r}_1)) = 0$$

sau

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Am obţinut ecuaţia carteziană a planului determinat de trei puncte necoliniare, ecuaţie echivalentă cu cea de la 1).

3.4. *Planul determinat de un punct şi doi vectori necoliniari.* Fie $\bar{u} = (l_1, m_1, n_1)$ şi $\bar{v} = (l_2, m_2, n_2)$ doi vectori necoliniari, adică $\bar{u} \times \bar{v} \neq \bar{0}$ şi un punct cunoscut M_0. Cele trei elemente $M_0, \bar{u}, \bar{v}$ determină un plan unic P (fig. 30).

Construim reprezentanţii vectorilor $\bar{u}$ şi $\bar{v}$ ca fiind $\overrightarrow{M_0M_1}$, respectiv $\overrightarrow{M_0M_2}$. Un punct $M \in \mathbb{E}_3$ aparţine planului dacă şi numai dacă vectorii $\overline{M_0M}$, $\overline{M_0M_1}$, $\overline{M_0M_2}$ sînt coplanari. Coplanaritatea acestor vectori o exprimăm astfel:

1) $\overline{M_0M} = r\bar{u} + s\bar{v}$; scrisă în coordonate, această relaţie vectorială este echivalentă cu:

$$\begin{aligned} x &= x_0 + rl_1 + sl_2 \\ y &= y_0 + rm_1 + sm_2 \quad r, s \in \mathbb{R} \\ z &= z_0 + rn_1 + sn_2 \end{aligned}$$

numite *ecuaţiile parametrice* ale planului P, iar r şi s se numesc *parametri*.

2) $(\overline{M_0M}, \bar{u} \times \bar{v}) = 0$; scrisă în coordonate această ecuație vectorială conduce la ecuația carteziană

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Precizăm că toate ecuațiile carteziene obținute pentru plan sînt echivalente cu ecuația generală a planului $ax + by + cz + d = 0$. Se observă că un plan depinde de patru parametri neesențiali a, b, c, d și trei parametri esențiali. Dacă $a \neq 0$, atunci cei trei parametri esențiali sînt $\frac{b}{a}, \frac{c}{a}, \frac{d}{a}$.

De asemenea precizăm că indiferent de forma ecuației carteziene a planului, coeficienții lui x, y, z reprezintă coordonatele vectorului normal $\bar{n}$. Vectorul normal este unic pentru un plan dat, abstracție făcînd de un factor scalar nenul.

Ecuațiile normalei la plan care trece prin M_0 sînt (fig. 26)

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}.$$

3.5. *Plan orientat.* Referitor la un plan în spațiu sînt evidente următoarele afirmații:

1) planul are două fețe;

2) elementul de bază în studiul planului în raport cu spațiul este normala;

3) alegerea unui sens pe normală este echivalentă cu alegerea unei fețe a planului;

4) alegerea unui sens de rotație în plan este echivalentă cu alegerea unui sens pe normală.

Un plan P împreună cu o alegere a sensului pe normală se numește *plan orientat* (fig. 31).

Evident este natural să alegem acel sens pe normală care să ne conducă la o orientare a planului coerentă cu orientarea spațiului. În continuare vom subînțelege o asemenea orientare.

În aplicații, fața care corespunde sensului ales pe normală se notează cu (+), iar fața opusă cu (−).

Evident planele de coordonate xOy, yOz, zOx sînt plane orientate.

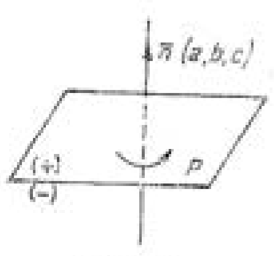


Fig. 31

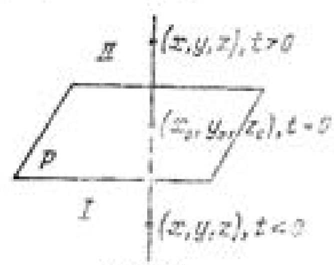


Fig. 32

3.6. *Semispaţii.* Fie în spaţiu planul de ecuaţie

$$P: f(x, y, z) = ax + by + cz + d = 0.$$

Acest plan separă spaţiul în două submulţimi convexe (fig. 32)

$$\mathrm{I} = \{(x, y, z) \mid f(x, y, z) \leqslant 0\}, \ \mathrm{II} = \{(x, y, z) \mid f(x, y, z) \geqslant 0\},$$

$$\mathrm{I} \cap \mathrm{II} = P, \quad \mathrm{I} \cup \mathrm{II} = \mathbb{R}^3.$$

Pentru a dovedi această afirmaţie, fie $(x_0, y_0, z_0) \in P$ şi

$$D: x = x_0 + at, \ y = y_0 + bt, \ z = z_0 + ct, \ t \in \mathbb{R}$$

normala la P în punctul considerat. Punctele lui D pot fi împărţite în trei submulţimi caracterizate respectiv prin $t < 0$, $t = 0$ şi $t > 0$. Să ne închipuim că (x_0, y_0, z_0) descrie pe P. Regiunea din spaţiu măturată de semidreapta $t \leqslant 0$ este caracterizată prin $f(x, y, z) = (a^2 + b^2 + c^2)t \leqslant 0$ şi o notăm cu I. Regiunea descrisă de semidreapta $t \geqslant 0$ o notăm prin II şi este caracterizată prin $f(x, y, z) = (a^2 + b^2 + c^2)t \geqslant 0$. Problema convexităţii o lăsăm drept temă pentru cititor.

Submulţimile I şi II se numesc *semispaţii închise.*

Avînd în vedere că funcţia f păstrează semn constant pentru punctele unui semispaţiu, pentru aflarea acestui semn este suficient să alegem un punct particular (x_1, y_1, z_1) şi să vedem ce semn are numărul $f(x_1, y_1, z_1)$.

3.7. *Reuniunea şi intersecţia a două plane.* Fie P_1 şi P_2 două plane de ecuaţii $a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$, respectiv $a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$.

Atunci *reuniunea* celor două plane este mulţimea

$$L = \{(x, y, z) \mid (a_1x + b_1y + c_1z + d_1)(a_2x + b_2y + c_2z + d_2) = 0\}.$$

Va trebui să arătăm că $P_1 \cup P_2 = L$. Fie un punct $(p, q, r) \in P_1 \cup P_2$, adică $(p, q, r) \in P_1$ sau $(p, q, r) \in P_2$, ceea ce este echivalent cu $a_1p + b_1q + c_1r + d_1 = 0$ sau $a_2p + b_2q + c_2r + d_2 = 0$. În ambele cazuri $(a_1p + b_1q + c_1r + d_1)(a_2p + b_2q + c_2r + d_2) = 0$, deci $(p, q, r) \in L$. De fapt am arătat că $P_1 \cup P_2 \subseteq L$.

Invers, fie $(p, q, r) \in L$, ceea ce este echivalent cu $(a_1p + b_1q + c_1r + d_1)(a_2p + b_2q + c_2r + d_2) = 0$ şi deci cel puţin un factor este zero, fie acesta $a_1p + b_1q + c_1r + d_1 = 0$; rezultă $(p, q, r) \in P_1 \subseteq P_1 \cup P_2$. Deci $L \subseteq P_1 \cup P_2$.

În final, din cele două incluziuni rezultă egalitatea $L = P_1 \cup P_2$.

Anticipăm (vezi cap. 5 § 3) că reuniunea a două plane reprezintă o cuadrică degenerată.

Presupunem că planele P_1 şi P_2 nu sînt paralele sau confundate. *Intersecţia* $P_1 \cap P_2$ este o *dreaptă* (fig. 33) pe care o notăm cu D, ale cărei ecuaţii sînt

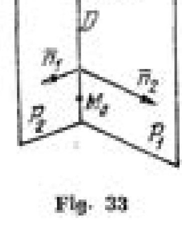


Fig. 33

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0, \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \end{cases}, \text{rang} \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{bmatrix} = 2.$$

Sistemul de ecuaţii liniare prin care este reprezentată dreapta D este simplu nedeterminat; sistemul admite o infinitate simplă de soluţii care sînt tocmai punctele dreptei.

Un punct M_0 al dreptei D se obţine ca intersecţie a planelor P_1 şi P_2 cu unul din planele de coordonate sau cu un plan paralel cu unul din planele de coordonate.

Direcţia dreptei D este dată de vectorul $\bar{n}_1 \times \bar{n}_2$, unde $\bar{n}_1(a_1, b_1, c_1)$, $\bar{n}_2(a_2, b_2, c_2)$. Astfel parametrii directori l, m, n, ai dreptei D sînt

$$l = \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}, \quad m = \begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix}, \quad n = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}.$$

Dacă presupunem că $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$, atunci sistemul care dă ecuaţiile dreptei ca intersecţie a două plane se reduce la

$$\begin{cases} x = az + p \\ y = bz + q \end{cases}$$

care sînt *ecuaţii canonice ale dreptei D.*

Din aceste ecuaţii constatăm că o dreaptă în spaţiu este exprimată cu ajutorul a două ecuaţii care depind de patru parametri esenţiali a, b, p, q. Prin urmare pentru determinarea unei drepte sînt suficiente două condiţii.

Pentru a determina poziţia relativă a unor drepte sau plane se alcătuieşte sistemul format de ecuaţiile lor, se rezolvă algebric acest sistem şi se interpretează geometric rezultatul. De asemenea precizăm că din punct de vedere topologic, dreptele şi planele sînt respectiv submulţimi închise în spaţiu.

3.8. *Unghiul dintre două plane orientate.* Fie planele P_1 şi P_2 avînd ecuaţiile $a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$, respectiv $a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$.

Planele sînt paralele dacă şi numai dacă vectorii normali $\bar{n}_1(a_1, b_1, c_1)$, $\bar{n}_2(a_2, b_2, c_2)$ sînt coliniari, adică $\bar{n}_1 \times \bar{n}_2 = 0$ sau $(a_1, b_1, c_1) = k(a_2, b_2, c_2)$, $k \in \mathbb{R} - \{0\}$ şi $d_1 \neq d_2$. Cele două ecuaţii reprezintă acelaşi plan dacă şi numai dacă $(a_1, b_1, c_1) = k(a_2, b_2, c_2)$, $k \in \mathbb{R} - \{0\}$ şi $d_1 = kd_2$.

Două plane neparalele şi neconfundate se intersectează după o dreaptă D şi determină un unghi diedru (fig. 34).

Unghiul diedru format de cele două plane este măsurat prin unghiul plan φ, care se obţine secţionînd planele P_1 şi P_2 cu un plan P_3 perpendicular pe D. Prin definiţie *unghiul diedru* dintre cele două plane este unghiul dintre cei doi vectori normali $\bar{n}_1$ şi $\bar{n}_2$, determinat prin

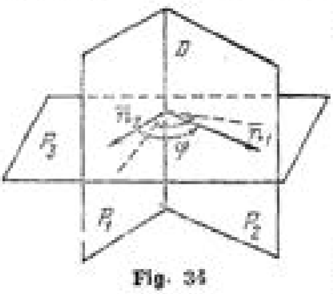


Fig. 34

$$\cos\varphi = \frac{(\bar{n}_1, \bar{n}_2)}{\|\bar{n}_1\| \; \|\bar{n}_2\|} = \frac{a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2} \; \sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}},$$

$$\varphi \in [0, \pi].$$

În particular planele P_1 şi P_2 sînt perpendiculare dacă şi numai dacă $(\bar{n}_1, \bar{n}_2) = 0$ sau în coordonate $a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0$.

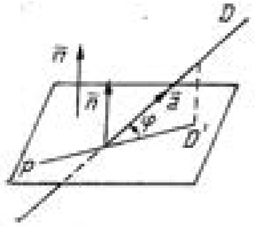


Fig. 37

Folosind produsul scalar al vectorilor $\bar{n}$ și $\overline{M_1M_0}$ găsim

$$a(x_0-x_1)+b(y_0-y_1)+c(z_0-z_1)=$$
$$=\pm\sqrt{a^2+b^2+c^2}\ \mathrm{d}(M_0;P).$$

Deoarece $M_1\in P$ rezultă $ax_1+by_1+cz_1+d=0$. Înlocuim în relația de sus și obținem

$$\mathrm{d}(M_0;P)=\frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

4.3. *Unghiul dintre o dreaptă orientată și un plan orientat.* Presupunem că dreapta D intersectează planul P (fig. 37). Fie D' proiecția dreptei D pe planul P. Unghiul căutat este unghiul dintre dreapta D și D'. Întrucît vectorul director al dreptei D' este mai greu de găsit, vom calcula unghiul complementar $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)=\frac{(\bar{n},\bar{a})}{\|\bar{n}\|\,\|\bar{a}\|}$ sau

$$\sin\varphi=\frac{al+bm+cn}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}\ \sqrt{l^2+m^2+n^2}}.$$

Dreapta este paralelă cu planul sau $D\subset P$ dacă și numai dacă $(\bar{n},\bar{a})=0$ sau $al+bm+cn=0$.

Dreapta este perpendiculară pe plan dacă și numai dacă $\bar{n}\times\bar{a}=\bar{0}$ sau $(a,b,c)=k(l,m,n)$, $k\in\mathbb{R}-\{0\}$.

4.4. *Perpendiculara comună a două drepte oarecare din spațiu.* Două drepte din spațiu pot fi confundate, paralele, concurente sau oarecare. Pentru două drepte D_1 și D_2 care admit pe $\bar{a}_1$, respectiv $\bar{a}_2$ ca vectori directori, există o *direcție normală comună unică* dacă și numai dacă dreptele D_1 și D_2 sînt oarecare sau concurente. În acest caz există o dreaptă și numai una care se sprijină simultan pe cele două drepte avînd direcția $\bar{n}=\bar{a}_1\times\bar{a}_2$ (fig. 38) numită *perpendiculara comună* a dreptelor D_1 și D_2.

Pentru a stabili ecuațiile perpendicularei comune D, observăm că această dreaptă apare ca intersecția a două plane: planul P_1, care conține pe D_1 și $\bar{n}$ și planul P_2 care conține pe D_2 și $\bar{n}$. Presupunînd că dreptele D_1 și D_2 trec respectiv prin punctele M_1 și M_2 și că N este punctul curent în P_1, iar M este punctul curent în P_2, ecuațiile perpendicularei comune sînt

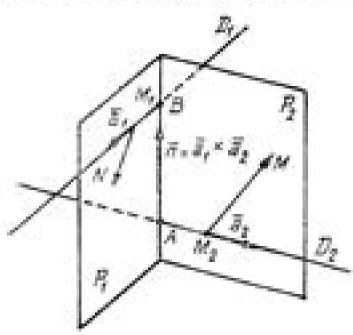


Fig. 38

$$D:\begin{cases}(\overline{M_1N},\ \bar{a}_1\times\bar{n})=0\\(\overline{M_2M},\ \bar{a}_2\times\bar{n})=0.\end{cases}$$

4.5. *Distanța dintre două drepte.* Fie două drepte D_1 și D_2 descrise respectiv de punctele M și N. Numărul $\inf \mathrm{d}(M,N)$ se numește

3.9. *Fascicule de plane.* În 3.7 am văzut cum se poate cerceta o dreaptă determinată de intersecția a două plane. Reciproc, dacă se dă o dreaptă, atunci prin ea trec o infinitate de plane.

Mulțimea tuturor planelor care trec printr-o dreaptă dată D se numește *fascicul de plane.* Dreapta D se numește *axa* fasciculului.

Considerăm planele de ecuații $P_1 : a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ și $P_2 : a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$ care determină dreapta D (fig. 33). Deoarece orice vector nenul $\bar{n}$ perpendicular pe D se scrie în forma $\bar{n} = r\bar{n}_1 + s\bar{n}_2$, $r^2 + s^2 \neq 0$, rezultă că ecuația unui plan oarecare din fasciculul de axă D are ecuația

$$r(a_1x + b_1y + c_1z + d_1) + s(a_2x + b_2y + c_2z + d_2) = 0, \quad r^2 + s^2 \neq 0.$$

Mulțimea planelor de forma

$$a_1x + b_1y + c_1z + \lambda = 0$$

se numește *fascicul de plane paralele.*

Folosind fasciculele de plane putem justifica și pe această cale ecuațiile planelor particulare din 3.2. Astfel știind că axa absciselor este $Ox : \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$, ecuația unui plan care trece prin Ox este $by + cz = 0$, iar ecuația unui plan paralel cu acesta este $by + cz + d = 0$ etc. ...

§4. Probleme asupra dreptei și planului

4.1. *Distanța de la un punct la o dreaptă.* Fie dreapta D de ecuații $\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}$; această dreaptă conține punctul $M_0(x_0, y_0, z_0)$ și are vectorul director $\bar{a}(l, m, n)$. Fie A un punct din $\mathbb{E}_3$ și A' proiecția sa pe dreapta D (fig. 35). Lungimea segmentului $[AA']$ este *distanța de la punctul A la dreapta D* și se notează $\mathrm{d}(A\,;D)$. Din formula care dă aria paralelogramului construit pe reprezentanții vectorilor $\bar{a}$ și $\overline{M_0A}$ obținem

$$\mathrm{d}(A\,;D) = \frac{\|\bar{a} \times \overline{M_0A}\|}{\|\bar{a}\|}$$

4.2. *Distanța de la un punct la un plan.* Fie planul P de ecuație $ax + by + cz + d = 0$, al cărui vector normal este $\bar{n}(a, b, c)$. Fie $M_0(x_0, y_0, z_0)$ un punct din $\mathbb{E}_3$ exterior planului și fie $M_1(x_1, y_1, z_1)$ proiecția lui M_0 pe planul P (fig. 36). Lungimea $\|\overline{M_1M_0}\|$ este *distanța de la punctul M_0 la planul P* și se notează cu $\mathrm{d}(M_0\,; P)$.

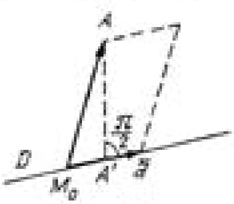


Fig. 35

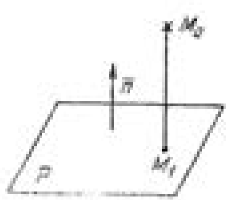


Fig. 36

distanța dintre dreptele D_1 *și* D_2 și se notează cu $d(D_1; D_2)$. Din considerente geometrice rezultă că $d(D_1; D_2)$ se află astfel:

1) dacă dreptele D_1 și D_2 sînt concurente, atunci $d(D_1, D_2) = 0$;

2) dacă $D_1 \| D_2$, atunci prin $M_0 \in D_1$ se duce un plan perpendicular pe D_1 care taie pe D_2 în N_0 și avem $d(D_1; D_2) = d(M_0, N_0)$;

3) dacă D_1 și D_2 sînt oarecare, $d(D_1; D_2) = \|\overline{AB}\|$, punctele A și B fiind pe perpendiculara comună D (fig. 38).

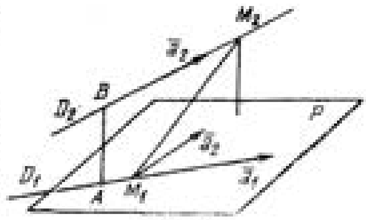


Fig. 39

Această distanță se mai poate afla astfel: prin dreapta D_1 ducem un plan P paralel cu dreapta D_2. Atunci $d(D_1; D_2) = d(M_2; P)$, unde M_2 este un punct cunoscut al dreptei D_2. Figura 39 arată că această distanță este lungimea înălțimii paralelipipedului construit pe vectorii $\overline{M_1M_2}, \bar{a}_1, \bar{a}_2$. Din semnificația produsului mixt rezultă

$$d(D_1; D_2) = \frac{|(\overline{M_1M_2}, \bar{a}_1 \times \bar{a}_2)|}{\|\bar{a}_1 \times \bar{a}_2\|}.$$

§5. Probleme

1. Să se figureze punctele $A(5, 0, 0)$, $B(0, -2, 0)$, $C(0, 0, 3)$, $D(-3, 2, 0)$, $E(0, -1, -4)$, $F(2, 0, 4)$, $G(3, -5, 8)$ și să se scrie expresia vectorului de poziție al punctului G față de reperul cartezian $\{O; \bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$.

2. Fie D_1 și D_2 două drepte paralele respectiv cu vectorii $(1, 0, 1)$ și $(-1, 1, 2)$. Să se scrie ecuațiile parametrice ale unei drepte perpendiculare simultan pe D_1, D_2 și care trece prin punctul $(2, 3, 0)$.

3. Se consideră punctele $A(1, 3, 0)$, $B(3, -2, 1)$, $C(\alpha, 1, -3)$, $D(7, -2, 3)$. Să se determine α astfel încît punctele să fie coplanare; pentru α astfel găsit, să se scrie ecuația carteziană a planului determinat de ele.

4. Să se scrie ecuația planului care trece prin punctul $M_0(-1, 3, 3)$ și conține dreapta D, unde (1) $D: \begin{cases} x + 2y + 3z - 1 = 0 \\ 2x - y - z - 3 = 0 \end{cases}$, (2) $D: \dfrac{x-4}{1} = \dfrac{y+2}{0} = \dfrac{z+1}{2}$, (3) $D: x = 1 + 2t$, $y = -1 + t$, $z = 1 + 3t$, $t \in \mathbb{R}$.

5. Să se calculeze unghiul dintre dreptele $D_1: \dfrac{x-1}{-1} = \dfrac{y+2}{4} = \dfrac{z}{1}$, $D_2: \dfrac{x}{-1} = \dfrac{y}{4} = \dfrac{z}{1}$ și să se scrie ecuația planului determinat de aceste drepte.

6. Se dau punctele $A(1, 3, 2)$, $B(-1, 2, 1)$, $C(0, 1, -1)$, $D(2, 0, -1)$ și planul $P: 2x + y - z - 1 = 0$. Să se stabilească care dintre ele se găsesc de aceeași parte cu originea axelor de coordonate față de planul dat.

7. Să se scrie ecuațiile perpendicularei comune dreptelor $D_1: \dfrac{x-1}{-1} = \dfrac{y+2}{4} = \dfrac{z}{1}$, $D_2: \dfrac{x}{3} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z-1}{2}$ și să se calculeze distanța dintre ele.

8. Fie dreptele $D_1 : \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+1}{3} = \dfrac{z}{1}$, $D_2 : \dfrac{x-2}{2} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z+1}{\alpha}$.

1) să se determine α astfel încît dreptele D_1 și D_2 să fie concurente;

2) să se scrie ecuația planului P determinat de aceste drepte;

3) să se calculeze $d(M_0 ; P)$, unde $M_0(5, -4, 1)$.

Capitolul 3

SCHIMBĂRI DE REPERE CARTEZIENE

Mulțimea izometriilor formează un grup, cu ajutorul căruia introducem în spațiul punctual $\mathbb{E}_3$ noțiunea de congruență a figurilor. Izometriile de bază sînt rotația, simetria în raport cu un plan, simetria în raport cu un punct și translația.

Rotația și simetriile se mai numesc transformări ortogonale; ele sînt aplicații liniare date prin matrice ortogonale.

Orice izometrie este de forma $\mathcal{I} = \mathcal{T} \circ \mathcal{O}$, unde $\mathcal{T}$ este o translație, iar $\mathcal{O}$ este o transformare ortogonală.

Fie $\mathcal{I} = \mathcal{T} \circ \mathcal{O}$ o izometrie determinată de reperele $R = \{O ; \bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$ și $R' = \{O ; \bar{i}', \bar{j}', \bar{k}'\}$. Izometria $\mathcal{I}$ se numește *pozitivă (deplasare)* dacă baza $\{\bar{i}', \bar{j}', \bar{k}'\}$ este orientată pozitiv și *negativă (antideplasare)* în caz contrar.

Principalele izometrii pozitive sînt *translațiile și rotațiile*, iar principalele izometrii negative sînt simetria în raport cu un plan și simetria în raport cu un punct.

§1. Translația

Translația unui sistem de axe de coordonate $Oxyz$ este deplasarea sistemului astfel ca axele noului sistem $O'x'y'z'$ să rămînă paralele cu axele vechi și de același sens (fig. 40).

Prin urmare reperul $\{O ; \bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$ supus translației $\mathcal{T}$ devine $\{O' ; \bar{i}', \bar{j}', \bar{k}'\}$, unde $O'(a, b, c)$ și $O' = \mathcal{T}(O)$, $\bar{i}' = \mathcal{T}(\bar{i}) = \bar{i}$, $\bar{j}' = \mathcal{T}(\bar{j}) = \bar{j}$, $\bar{k}' = \mathcal{T}(\bar{k}) = \bar{k}$.

Ne propunem să stabilim relațiile între coordonatele x, y, z ale punctului M raportat la sistemul $Oxyz$ și coordonatele x', y', z' ale aceluiași punct raportat la sistemul translatat $O'x'y'z'$.

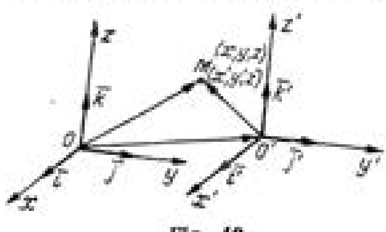


Fig. 40

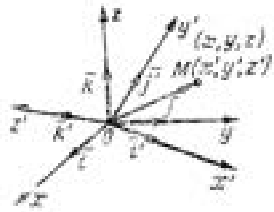
Se observă că $\overline{OM} = \overline{OO'} + \overline{O'M}$. Scrisă în coordonate, această relație vectorială devine

$$x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k} = a\bar{i} + b\bar{j} + c\bar{k} + \\ + x'\bar{i} + y'\bar{j} + z'\bar{k},$$

de unde

$$x' = x - a, \; y' = y - a, \; z' = z - a.$$

Scrierea matriceală a acestor relații este



$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

Fig. 41

Evident, translația este o izometrie pozitivă.

Caz particular. Translația în planul xOy este dată de relațiile

$$x' = x - a, \ y' = y - a.$$

§2. Rotația

Fie în $\mathbb{E}_3$ două repere carteziene $\{O\,;\bar{i},\bar{j},\bar{k}\}$, $\{O\,;\bar{i}',\bar{j}',\bar{k}'\}$ care au originea comună O (fig. 41). Cunoscînd coordonatele versorilor $\bar{i}',\bar{j}',\bar{k}'$ față de baza $\{\bar{i},\bar{j},\bar{k}\}$ și coordonatele (x, y, z) ale punctului M în raport cu primul reper, ne propunem să găsim coordonatele x', y', z' ale lui M în raport cu al doilea reper.

Observăm că o asemenea schimbare de repere în $\mathbb{E}_3$ este echivalentă cu trecerea de la baza ortonormată $\{\bar{i},\bar{j},\bar{k}\}$ la baza ortonormată $\{\bar{i}',\bar{j}',\bar{k}'\}$ din V_3.

În baza rezultatelor anterioare avem

$$\bar{i}' = \mathscr{O}(\bar{i}) = (\bar{i}',\bar{i})\bar{i} + (\bar{i}',\bar{j})\bar{j} + (\bar{i}',\bar{k})\bar{k}$$

$$\bar{j}' = \mathscr{O}(\bar{j}) = (\bar{j}',\bar{i})\bar{i} + (\bar{j}',\bar{j})\bar{j} + (\bar{j}',\bar{k})\bar{k}$$

$$\bar{k}' = \mathscr{O}(\bar{k}) = (\bar{k}',\bar{i})\bar{i} + (\bar{k}',\bar{j})\bar{j} + (\bar{k}',\bar{k})\bar{k}.$$

Notăm $a_{11} = (\bar{i}',\bar{i})$, $a_{21} = (\bar{i}',\bar{j})$, $a_{31} = (\bar{i}',\bar{k})$, $a_{12} = (\bar{j}',\bar{i})$, $a_{22} = (\bar{j}',\bar{j})$, $a_{32} = (\bar{j}',\bar{k})$, $a_{13} = (\bar{k}',\bar{i})$, $a_{23} = (\bar{k}',\bar{j})$, $a_{33} = (\bar{k}',\bar{k})$ și

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}.$$

Matricea A este matricea de trecere de la baza $\{\bar{i},\bar{j},\bar{k}\}$ la baza $\{\bar{i}',\bar{j}',\bar{k}'\}$ și este o matrice ortogonală. Într-adevăr $\bar{i}',\bar{j}',\bar{k}'$ fiind versori (coordonatele lor sînt cosinusuri directoare) reciproc ortogonali, deducem ${}^tAA = I$. Ultima relație implică $(\det A)(\det {}^tA) = 1$, deci $(\det A)^2 = 1$, adică $\det A = \pm 1$. De aceea relația ${}^tAA = I$ este echivalentă cu ${}^tA = A^{-1}$.

Rezultă că trecerea de la baza ortonormată $\{\bar{i},\bar{j},\bar{k}\}$ la baza ortonormată $\{\bar{i}',\bar{j}',\bar{k}'\}$ se face cu ajutorul matricei ortogonale A, iar trecerea inversă se face cu

Pentru a stabili relaţia de legătură între coordonatele x, y, z ale punctului M raportat la sistemul $Oxyz$ şi coordonatele x', y', z' ale aceluiaşi punct raportat la sistemul rotit $Ox'y'z'$, observăm că $\overline{OM} = \overline{OM}$ sau echivalent $x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k} = x'\bar{i}' + y'\bar{j}' + z'\bar{k}'$. De aceea

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} \text{ sau } \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}.$$

Invers, avem

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = {}^tA \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}.$$

Aceste relaţii caracterizează o izometrie care păstrează originea. O astfel de izometrie dată de relaţiile de mai sus se mai numeşte *transformare ortogonală* şi se notează cu $\mathcal{O}$. Deoarece $(\bar{i}', \bar{j}' \times \bar{k}') = \det A$, rezultă că o asemenea izometrie este pozitivă dacă $\det A = +1$ *(rotaţie)* şi negativă dacă $\det A = -1$ *(rotaţie şi simetrie)*.

Exemple. 1) *Rotaţia în jurul lui Oz.* În reperul cartezian $\{O; \bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$ considerăm rotaţia $\mathcal{R}$ de axă Oz şi de unghi θ (fig. 42).

Din figură rezultă

$$\bar{i}' = \mathcal{R}(\bar{i}) = \bar{i}\cos\theta + \bar{j}\sin\theta$$

$$\bar{j}' = \mathcal{R}(\bar{j}) = -\bar{i}\sin\theta + \bar{j}\cos\theta$$

$$\bar{k}' = \mathcal{R}(\bar{k}) = \bar{k}.$$

Astfel din relaţia $x'\bar{i}' + y'\bar{j}' + z'\bar{k}' = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$, găsim

$$\mathcal{R}: \begin{cases} x = x'\cos\theta - y'\sin\theta \\ y = x'\sin\theta + y'\cos\theta \\ z = z'. \end{cases}$$

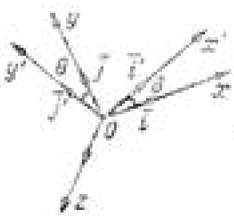


Fig. 42

Evident determinantul matricei lui $\mathcal{R}$ este $+1$ şi deci $\mathcal{R}$ este o izometrie pozitivă.

În particular o rotaţie în planul xOy, de unghi θ, în jurul originii este caracterizată prin

$$\begin{cases} x = x'\cos\theta - y'\sin\theta \\ y = x'\sin\theta + y'\cos\theta. \end{cases}$$

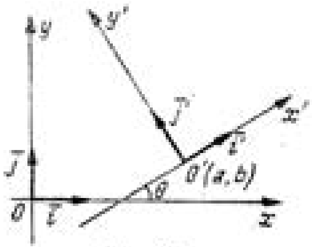


Fig. 43

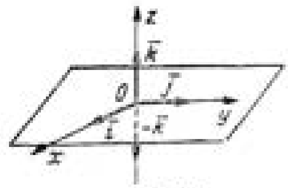


Fig. 44

Dintre izometriile în plan reținem *roto-translația* (fig. 43) caracterizată prin

$$\begin{cases} x = x'\cos\theta - y'\sin\theta + a \\ y = x'\sin\theta + y'\cos\theta + b. \end{cases}$$

2) ***Simetria față de un plan.*** Fie reperul ortonormat $\{O; \bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$ și $\mathscr{S}$ simetria (fig. 44) în raport cu planul $(O; \bar{i}, \bar{j})$.

$$\bar{i}' = \mathscr{S}(\bar{i}) = \bar{i}$$

$$\bar{j}' = \mathscr{S}(\bar{j}) = \bar{j}$$

$$\bar{k}' = \mathscr{S}(\bar{k}) = -\bar{k}.$$

Astfel, din $x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k} = x'\bar{i}' + y'\bar{j}' + z'\bar{k}'$, găsim

$$\mathscr{S}: x = x',\ y = y',\ z = -z'$$

sau scris matriceal

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}$$

Determinantul matricei lui $\mathscr{S}$ este -1 și deci $\mathscr{S}$ este o izometrie negativă.

§3. Probleme

1. Fie reperul cartezian $Oxyz$ față de care considerăm punctele $A(3, 0, 0)$, $B(0, 2, 0)$, $C(0, 0, 6)$. Construim sistemul rotit $Ox'y'z'$ astfel : Oz' are direcția și sensul înălțimii OO' a tetraedrului $OABC$: Oy' este paralelă cu $O'A'$, unde A' este piciorul înălțimii dusă din A' în triunghiul ABC, iar axa Ox' este astfel aleasă încît sistemul $Ox'y'z'$ să fie orientat pozitiv.

Să se scrie matricea rotației și să se determine direcția invariantă (subspațiul propriu real unidimensional) față de această rotație.

2. Se consideră dreapta $D: \dfrac{x}{1} = \dfrac{y}{-2} = \dfrac{z}{2}$. Fie $\bar{i}'$ versorul director al dreptei D. Fie $\bar{j}'$ un versor perpendicular pe D care aparține planului yOz, iar $\bar{k}'$ versorul ales astfel încît $\{\bar{i}', \bar{j}', \bar{k}'\}$ să fie o bază ortonormată.

Să se stabilească formulele de schimbare a bazei și să se compare orientările celor două baze.

CONICE

§1. Noțiuni generale

Fie $\mathbb{E}_2$ spațiul punctual euclidian real bidimensional raportat la un reper cartezian $\{O; \bar{i}, \bar{j}\}$ şi fie $g: \mathbb{E}_2 \to \mathbb{R}$ forma pătratică afină definită prin

$$g(x, y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{10}x + 2a_{20}y + a_{00},$$

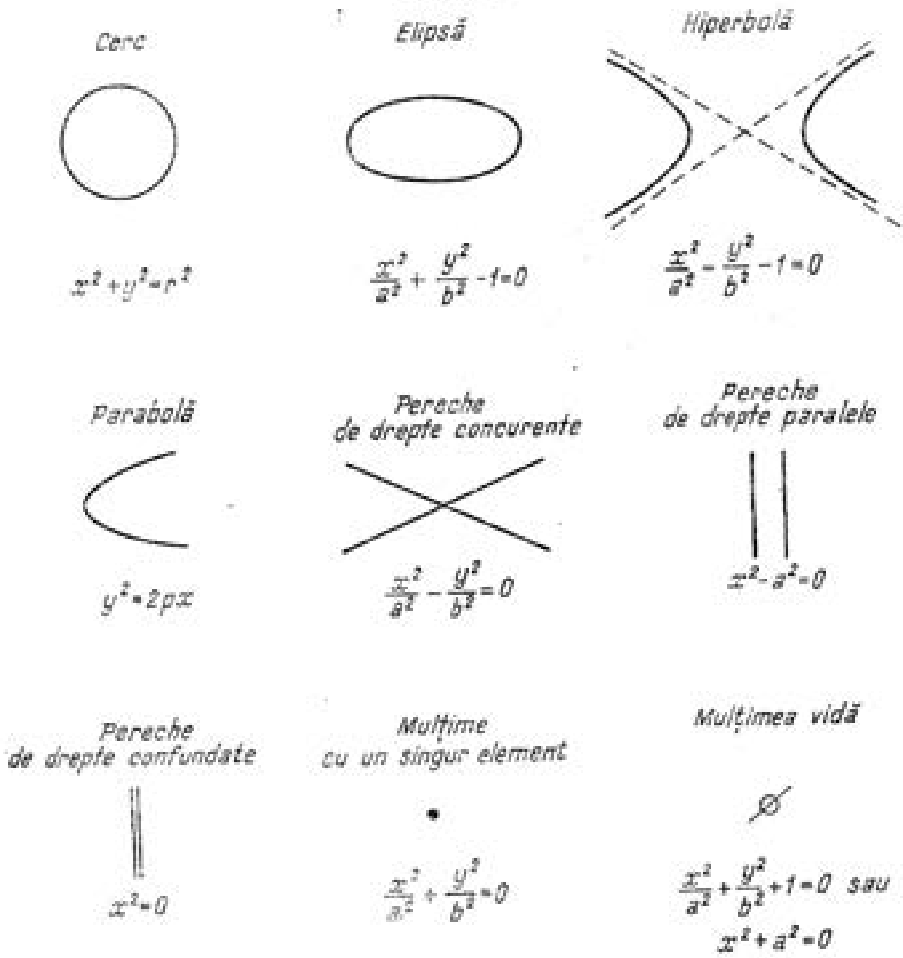
$$a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{22}^2 \neq 0.$$

1.1. *Definiție. **Mulțimea de nivel constant zero***

$$\Gamma = g^{-1}(0) = \{M(x, y) \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ g(x, y) = 0\}$$

se numeşte conică sau curbă algebrică de ordinul al doilea. **Se notează** $\Gamma: g(x, y) = 0$.

Tabelul 1



Din punct de vedere topologic, conicele sînt mulţimi închise în plan deoarece $\{0\}$ este o mulţime închisă în $\mathbb{R}$, $\Gamma = g^{-1}(0)$ şi g este o funcţie continuă.

Una dintre problemele importante ale geometriei analitice este de a dovedi că orice conică este congruentă cu una dintre următoarele mulţimi: cerc, elipsă, hiperbolă, parabolă, pereche de drepte, mulţime care conţine un singur punct sau mulţimea vidă (tabelul 1).

Rezolvarea problemei menţionate o vom face în două variante: fie folosind schimbarea axelor de coordonate, fie folosind elemente din teoria formelor pătratice.

Utilizînd rototranslaţia, realizăm trecerea de la reperul cartezian $\{O; \bar{i}, \bar{j}\}$ la un reper adecvat orientat pozitiv (numit *reper canonic* sau *natural*) faţă de care ecuaţia $g(x, y) = 0$ să aibă forma cea mai simplă posibilă, numită *ecuaţia canonică* sau *redusă*.

După cum vom vedea ulterior, în discuţie intervin următoarele numere ataşate polinomului $g(x, y)$,

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{10} \\ a_{21} & a_{22} & a_{20} \\ a_{01} & a_{02} & a_{00} \end{vmatrix} \qquad \delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \qquad I = a_{11} + a_{22}$$

$$a_{12} = a_{21},\ a_{10} = a_{01},\ a_{20} = a_{02}.$$

Prin trecerea de la reperul $\{O; \bar{i}, \bar{j}\}$ la reperul canonic, polinomul $g(x, y)$ se schimbă în $g'(x', y')$. Se poate arăta că numerele Δ', δ', I' ataşate polinomului g' sînt respectiv egale cu numerele Δ, δ, I. De aceea Δ, δ, I se numesc *invarianţii metrici* ai conicei.

§2. Centrul unei conice

Există conice $\Gamma: g(x,y) = 0$ care admit un centru de simetrie. Acesta este de fapt originea reperului canonic. Pentru a găsi relaţiile ce conduc direct la centrul unei conice, efectuăm translaţia

$$x = x_0 + x', \quad y = y_0 + y'.$$

Ecuaţia conicei faţă de sistemul translatat în $C(x_0, y_0)$ va fi $g(x_0 + x', y_0 + y') = 0$. Aplicînd formula Taylor, această ecuaţie se transcrie

$$g(x_0, y_0) + \frac{1}{1!}\left(x'\frac{\partial g}{\partial x_0} + y'\frac{\partial g}{\partial y_0}\right) + \frac{1}{2!}\left(x'^2\frac{\partial^2 g}{\partial x_0^2} + \right.$$

$$\left. + 2x'y'\frac{\partial^2 g}{\partial x_0 \partial y_0} + y'^2\frac{\partial^2 g}{\partial y_0^2}\right) = 0,$$

unde

$$\frac{\partial g}{\partial x} = 2a_{11}x + 2a_{12}y + 2a_{10}, \quad \frac{\partial g}{\partial y} = 2a_{21}x + 2a_{22}y + 2a_{20},$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = 2a_{11}, \quad \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} = 2a_{12}, \quad \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = 2a_{22}.$$

Punctele (x', y') şi $(-x', -y')$ sînt simultan pe curba Γ dacă şi numai dacă punctul (x_0, y_0) satisface relaţiile

$$\frac{\partial g}{\partial x_0} = \frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0) = 0, \qquad \frac{\partial g}{\partial y_0} = \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0) = 0.$$

De aceea dacă conica Γ are centru, atunci coordonatele sale sînt în mod necesar soluţia sistemului

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial g}{\partial x} = a_{11}x + a_{12}y + a_{10} = 0 \\ \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial g}{\partial y} = a_{21}x + a_{22}y + a_{20} = 0. \end{cases}$$

Determinantul sistemului este

$$\delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad a_{12} = a_{21}.$$

Dacă $\delta \neq 0$, atunci sistemul are soluţie unică şi deci Γ admite centru de simetrie (cerc, elipsă, hiperbolă, pereche de drepte concurente, punct). În acest caz, *ecuaţia conicei redusă* la centru este $a_{11}x'^2 + 2a_{12}x'y' + a_{22}y'^2 + g(x_0, y_0) = 0$.

Semnificaţia invariantului Δ. Ne propunem să determinăm constanta $g(x_0, y_0)$ pentru $\delta \neq 0$. Putem scrie $g(x_0, y_0) = x_0(a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{10}) + y_0(a_{21}x_0 + a_{22}y_0 + a_{20}) + a_{10}x_0 + a_{20}y_0 + a_{00} = 0$. Rezultă $g(x_0, y_0) = a_{10}x_0 + a_{20}y_0 + a_{00}$.

Sistemul

$$\begin{cases} a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{10} = 0 \\ a_{21}x_0 + a_{22}y_0 + a_{20} = 0 \\ a_{10}x_0 + a_{20}y_0 + a_{00} - g(x_0, y_0) = 0, \end{cases}$$

de trei ecuaţii cu două necunoscute este compatibil dacă determinantul caracteristic este nul, adică

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & -a_{10} \\ a_{21} & a_{22} & -a_{20} \\ a_{01} & a_{02} & -(a_{00} - g(x_0, y_0)) \end{vmatrix} = 0.$$

Acesta se mai poate scrie

$$-\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{10} \\ a_{21} & a_{22} & a_{20} \\ a_{01} & a_{02} & a_{00} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{01} & a_{02} & g(x_0, y_0) \end{vmatrix} = 0,$$

de unde $g(x_0, y_0) = \dfrac{\Delta}{\delta}$.

Astfel ecuaţia redusă la centru este

$$a_{11}x'^2 + 2a_{12}x'y' + a_{22}y'^2 + \frac{\Delta}{\delta} = 0.$$

Dacă $\Delta = 0$, ecuaţia redusă devine

$$a_{11}x'^2 + 2a_{12}x'y' + a_{22}y'^2 = 0.$$

În cazul $\delta < 0$, această ecuaţie reprezintă două drepte care trec prin centrul conicei. În cazul $\delta > 0$, ecuaţia reprezintă mulţimea $\{(0, 0)\}$. Prin urmare, dacă $\delta \neq 0$, $\Delta = 0$, conica este *degenerată* în două drepte sau într-un punct: dacă $\Delta \neq 0$, conica este nedegenerată (cerc, elipsă, hiperbolă, parabolă, mulţime vidă).

Observaţii. 1) Conica pentru care $\delta > 0$ (elipsă, mulţime vidă) se numeşte de *gen eliptic*. Conica pentru care $\delta < 0$ (hiperbolă, pereche de drepte concurente) se numeşte de *gen hiperbolic*. Conica pentru care $\delta = 0$ (parabola, drepte paralele sau confundate, mulţimea vidă) se numeşte de *gen parabolic*.

2) Ecuaţia generală a unei conice, $g(x, y) = 0$, conţine şase coeficienţi $a_{11}, a_{12}, a_{22}, a_{10}, a_{20}, a_{00}$ care se numesc *parametri neesenţiali*. Prin împărţire cu unul (diferit de zero) se obţin cinci coeficienţi care se numesc parametri esenţiali. De aceea pentru determinarea unei conice sînt suficiente cinci condiţii (de exemplu conica să treacă prin cinci puncte).

3) Dacă $a_{12} = 0$ şi $a_{11} = a_{22} = a \neq 0$ şi dacă $\left(\dfrac{a_{10}}{a}\right)^2 + \left(\dfrac{a_{20}}{a}\right)^2 - \dfrac{a_{00}}{a} < 0$, atunci $\Gamma = \Phi$. Dacă $\left(\dfrac{a_{10}}{a}\right)^2 + \left(\dfrac{a_{20}}{a}\right)^2 - \dfrac{a_{00}}{a} \geqslant 0$, atunci Γ este un cerc cu centrul în $C\left(-\dfrac{a_{10}}{a}, -\dfrac{a_{20}}{a}\right)$ şi de rază $r = \sqrt{\left(\dfrac{a_{10}}{a}\right)^2 + \left(\dfrac{a_{20}}{a}\right)^2 - \dfrac{a_{00}}{a}}$.

§3. Reducerea la forma canonică

Fie conica

$$\Gamma : a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{10}x + 2a_{20}y + a_{00} = 0.$$

Pentru stabilirea ecuaţiei canonice avem în vedere următoarele situaţii

(i) Dacă $a_{12} = 0$, atunci se face o translaţie.

(ii) Dacă $a_{12} \neq 0$, atunci se face mai intii o rotație. În acest caz se poate proceda fie ca in 3.1, fie ca in 3.2.

3.1. *Metoda valorilor proprii.* Tipul conicei de ecuație generală $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{10}x + 2a_{20}y + a_{00} = 0$ este determinat de expresia termenilor de gradul doi, adică de forma pătratică $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2$. Matriceal această formă pătratică se scrie

$$[x \quad y]\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad a_{12} = a_{21}.$$

Matricei simetrice $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ îi atașăm ecuația caracteristică

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \text{ sau } \lambda^2 - I\lambda + \delta = 0$$

ale cărei rădăcini λ_1 și λ_2 sint reale și distincte. Dacă

1) λ_1 și λ_2 au semne contrare, adică $\delta < 0$, conica este gen hiperbolic;
2) λ_1 și λ_2 au același semn, adică $\delta > 0$, conica este gen eliptic;
3) una din rădăcini este zero, adică $\delta = 0$, conica este gen parabolic.

Sistemele

$$\begin{cases}(a_{11} - \lambda_i)u_i + a_{12}v_i = 0 \\ a_{21}u_i + (a_{22} - \lambda_i)v_i = 0,\end{cases} \quad i = 1, 2$$

dau coordonatele vectorilor proprii (u_1, v_1), respectiv (u_2, v_2) care sint ortogonali. Vectorii proprii astfel găsiți îi normăm și-i notăm cu $\bar{e}_1$, respectiv $\bar{e}_2$.

Fie R matricea formată cu coordonatele versorilor $\bar{e}_1, \bar{e}_2$ așezate pe coloane; avind in vedere posibilitatea inlocuirii unuia dintre versorii $\bar{e}_1, \bar{e}_2$ prin opusul său sau posibilitatea renumerotării valorilor proprii, putem presupune $\det R = +1$. Rotația

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = R\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$

reduce forma pătratică la forma diagonală $\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2$. Versorii proprii $\bar{e}_1, \bar{e}_2$ dau direcțiile noilor axe Ox', respectiv Oy'.

Prin rotația efectuată, ecuația conicei devine

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + 2a'_{10}x' + 2a'_{20}y' + a'_{00} = 0.$$

Restringem pătratele și efectuăm o translație

$$\lambda_1(x' + \ldots)^2 + \lambda_2(y' + \ldots)^2 + a = 0.$$

Dacă notăm $x'' = x' + \ldots, y'' = y' + \ldots$ obținem ecuația canonică

$$\lambda_1 x''^2 + \lambda_2 y''^2 + a = 0.$$

Exemplu. Să se reducă ecuația

$$3x^2 - 4xy - 2x + 4y - 3 = 0$$

la forma canonică și să se construiască conica corespunzătoare.

Soluție. Matricea formei pătratice $3x^2 - 4xy$ este

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ecuația caracteristică a acestei matrice este

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & -2 \\ -2 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \text{sau} \quad \lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0.$$

Rădăcinile ecuației caracteristice sînt valorile proprii $\lambda_1 = -1$ și $\lambda_2 = 4$.

Coordonatele (u_1, v_1), ale vectorului propriu corespunzător lui $\lambda_1 = -1$, constituie soluția sistemului $4u_1 - 2v_1 = 0$, $-2u_1 + v_1 = 0$ adică $(k, 2k)$, $k \in \mathbb{R} - \{0\}$. Prin normalizare obținem versorul propriu $\bar{e}_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$. Analog pentru $\lambda_2 = 4$ găsim $\bar{e}_2 = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$.

Deoarece

$$\det R = \det \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} = -1 \text{ (rotație și simetrie)},$$

pentru a avea numai rotație folosim unul din următoarele procedee.

1) Renumerotăm $\lambda_1' = \lambda_2$, $\lambda_2' = \lambda_1$, de unde rezultă $\bar{e}_1' = \bar{e}_2$, $\bar{e}_2' = \bar{e}_1$. Rotația

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} \quad \text{sau} \quad \begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{5}}(2x' + y') \\ y = \frac{1}{\sqrt{5}}(-x' + 2y') \end{cases}$$

conduce la $4x'^2 - y'^2 - \frac{8}{\sqrt{5}}x' + \frac{6}{\sqrt{5}}y' - 3 = 0$. Completăm pătratele în x' și y' și găsim $4\left(x' - \frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 - \left(y' - \frac{3}{\sqrt{5}}\right)^2 - 2 = 0$.

Efectuăm o translație a sistemului $x'Oy'$ în punctul $C_1\left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{3}{\sqrt{5}}\right)$ dată de $x' = x'' + \frac{1}{\sqrt{5}}$, $y' = y'' + \frac{3}{\sqrt{5}}$. Obținem ecuația canonică a hiperbolei

$$\frac{x''^2}{\frac{1}{2}} - \frac{y''^2}{2} - 1 = 0$$

care are vîrfurile pe axa C_1x''.

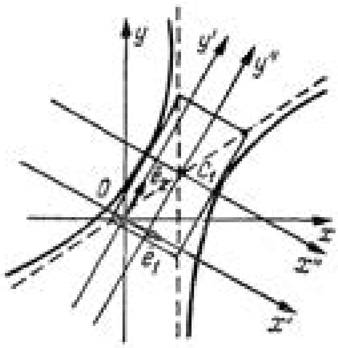


Fig. 45

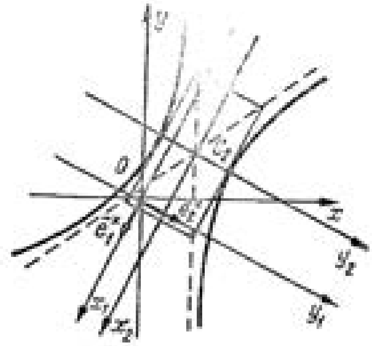


Fig. 46

Pentru construcție efectuăm o rotație a sistemului de axe xOy. Noile axe de coordonate Ox', Oy' au direcțiile versorilor $\bar{e}_1'$, respectiv $\bar{e}_2'$ (fig. 45).

2) Întrucît orice direcție în plan este caracterizată de perechi de numere reale proporționale, convenim să luăm versorii $\bar{e}_1^* = -\bar{e}_1$, $\bar{e}_2^* = \bar{e}_2$. Rotația

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$$

conduce la ecuația $-x_1^2 + 4y_1^2 + \frac{6}{\sqrt{5}}x_1 + \frac{8}{\sqrt{5}}y_1 - 3 = 0$. Direcțiile axelor de coordonate Ox_1, Oy_1 sînt determinate de versorii $\bar{e}_1^*$, respectiv $\bar{e}_2^*$. Sistemul rotit este translatat în $C_2\left(-\frac{3}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$, folosind formulele $x_1 = x_2 + \frac{3}{\sqrt{5}}$, $y_1 = y_2 - \frac{1}{\sqrt{5}}$. Obținem forma canonică a hiperbolei

$$\frac{x_2^2}{2} - \frac{y_2^2}{\frac{1}{2}} + 1 = 0$$

raportată la sistemul canonic $x_2C_2y_2$ (fig. 46). Hiperbola are vîrfurile pe C_2y_2.

3.2. *Metoda roto-translației.* Matricea de trecere, R fiind o matrice ortogonală, este matricea atașată unei rototranslații în raport cu o bază ortonormată.

Teoremă. Dacă $a_{12} \neq 0$, atunci unghiul θ dat de ecuația $(a_{11} - a_{22}) \cdot \sin 2\theta = 2a_{12}\cos 2\theta$ determină o rotație în plan

$$\begin{cases} x = x'\cos\theta - y'\sin\theta \\ y = x'\sin\theta + y'\cos\theta \end{cases}$$

astfel încît în ecuația $g'(x', y') = 0$ coeficientul produsului $x'y'$ se anulează.

Demonstrație. Observăm că după efectuarea rotației ecuația $g(x, y) = 0$ trece în $g'(x', y') = 0$. Coeficientul lui $x'y'$ din ultima ecuație este

$$2a'_{12} = (a_{22} - a_{11}) \sin 2\theta + 2a_{12}\cos 2\theta.$$

Astfel teorema devine evidentă.

Întrucît ecuația conicei obținută prin rotație nu conține termenul în $x'y'$, urmează să completăm pătratele dacă este cazul și în urma unei translații să obținem ecuația canonică.

Teoremele care se pot formula relativ la reducerea la forma canonică se rezumă prin tabelul 2.

Tabelul 2

<table>
<tr><th colspan="3">Condiții</th><th>Curba</th><th>Ce transformare se face pentru a găsi ecuația canonică</th></tr>
<tr><td rowspan="3">$\Delta = 0$</td><td colspan="2">$\delta > 0$</td><td>$\Gamma = \{(x_0, y_0)\}$</td><td rowspan="7">Dacă $a_{12} = 0$, atunci se face o translație.

Dacă $a_{12} \neq 0$, atunci se face mai întîi rotația
$\begin{cases} x = x' \cos\theta - y' \sin\theta \\ y = x' \sin\theta + y' \cos\theta \end{cases}$
unde θ este unghiul determinat de ecuația $(a_{11} - a_{22}) \sin 2\theta = 2a_{12} \cos 2\theta$
După aceea, dacă este cazul, se face o translație</td></tr>
<tr><td colspan="2">$\delta = 0$</td><td>$\Gamma = D_1 \cup D_2$, unde D_1 și D_2 sînt drepte paralele sau confundate, sau $\Gamma = \Phi$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$\delta < 0$</td><td>$\Gamma = D_1 \cup D_2$, unde D_1 și D_2 sînt drepte concurente. $I = 0 \Rightarrow D_1 \perp D_2$.</td></tr>
<tr><td rowspan="4">$\Delta \neq 0$</td><td rowspan="2">$\delta > 0$</td><td>$I\Delta < 0$</td><td>elipsă</td></tr>
<tr><td>$I\Delta > 0$</td><td>$\Gamma = \Phi$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$\delta = 0$</td><td>parabolă</td></tr>
<tr><td colspan="2">$\delta < 0$</td><td>hiperbolă
$I = 0 \Rightarrow$ hiperbolă echilateră</td></tr>
</table>

Exemplu. Să se stabilească natura și genul conicei

$$\Gamma : 9x^2 - 6xy + y^2 + 20x = 0.$$

Să se reducă ecuația la forma canonică folosind metoda roto-translației și să se construiască conica Γ.

Soluție. Calculăm invarianții

$$\Delta = \begin{vmatrix} 9 & -3 & 10 \\ -3 & 1 & 0 \\ 10 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -100, \quad \delta = \begin{vmatrix} 9 & -3 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Astfel Γ este o parabolă.

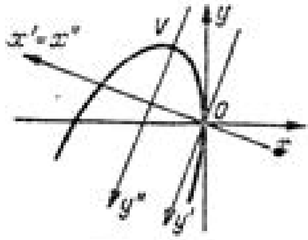


Fig. 47

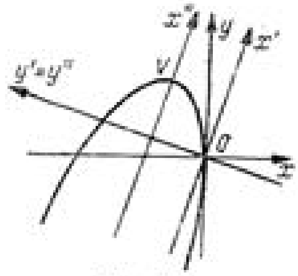


Fig. 48

Întrucît $a_{12} \neq 0$, efectuăm o rotație al cărei unghi θ este soluția ecuației $(a_{11} - a_{22}) \sin 2\theta - 2a_{12} \cos 2\theta = 0$. Pentru conica dată, ecuația devine $3\operatorname{tg}^2 \theta - 8\operatorname{tg} \theta - 3 = 0$, cu soluțiile $\operatorname{tg} \theta_1 = 3$, $\operatorname{tg} \theta_2 = -\dfrac{1}{3}$.

Pentru $\operatorname{tg} \theta_1 = 3$ obținem $\sin \theta = \dfrac{3}{\sqrt{10}}$ și $\cos \theta = \dfrac{1}{\sqrt{10}}$; formulele care dau rotația sistemului xOy sînt $x = \dfrac{1}{\sqrt{10}}(x' - 3y')$, $y = \dfrac{1}{\sqrt{10}}(3x' + y')$.

Față de sistemul rotit $x'Oy'$, ecuația conicei devine

$$y'^2 + \frac{2}{\sqrt{10}}x' - \frac{6}{\sqrt{10}}y' = 0.$$

Completăm pătratele și obținem $\left(y' - \dfrac{3}{\sqrt{10}}\right)^2 = \dfrac{9}{10} - \dfrac{2}{\sqrt{10}}x'$. Efectuăm translația, $x' = x''$, $y' = y'' + \dfrac{3}{\sqrt{10}}$ și găsim ecuația canonică a parabolei $y''^2 = -\dfrac{2}{\sqrt{10}}x'' + \dfrac{9}{10}$ (fig. 47).

Pentru $\operatorname{tg} \theta_2 = -\dfrac{1}{3}$ obținem $\sin \theta = \dfrac{1}{\sqrt{10}}$ și $\cos \theta = -\dfrac{3}{\sqrt{10}}$. Ecuația conicei devine $x'^2 - \dfrac{6}{\sqrt{10}}x' + \dfrac{2}{\sqrt{10}}y' = 0$ prin rotația $x = \dfrac{1}{\sqrt{10}}(-3x' - y')$, $y = \dfrac{1}{\sqrt{10}}(x' - 3y')$.

Completăm pătratele, efectuăm translația

$$x' = x'' + \frac{3}{\sqrt{10}}$$

$$y' = y''$$

și găsim ecuația canonică $x''^2 = \dfrac{2}{\sqrt{10}}y'' + \dfrac{9}{10}$ a parabolei (fig. 48) raportată la sistemul canonic obținut prin roto-translație.

§4. Intersecția dintre o dreaptă și o conică

Fie D o dreaptă de ecuații parametrice

$$x = x_0 + lt,\ y = y_0 + mt,\ t \in \mathbb{R},$$

și Γ o conică de ecuație carteziană implicită $g(x, y) = 0$. Intersecția $D \cap \Gamma$ corespunde rădăcinilor t_1 și t_2 în $\mathbb{R}$ ale ecuației

$$(1) \qquad t^2\varphi(l, m) + t\left(l\frac{\partial g}{\partial x_0} + m\frac{\partial g}{\partial y_0}\right) + g(x_0, y_0) = 0,$$

unde $\varphi(l, m) = a_{11}l^2 + 2a_{12}lm + a_{22}m^2$. În cele ce urmează notăm $\frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0) = g_{x_0}, \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0) = g_{y_0}$.

Discuție. 1) Fie $\varphi(l, m) \neq 0$. Atunci ecuația (1) este de gradul doi. Dacă $q = (lg_{x_0} + mg_{y_0})^2 - 4\varphi(l, m)\, g(x_0, y_0) > 0$, atunci ecuația are două rădăcini reale și distincte t_1 și t_2. În acest caz D taie pe Γ în două puncte distincte P_1 și P_2. Dacă $q = 0$, atunci ecuația are două rădăcini reale confundate $t_1 = t_2$. În acest caz D taie pe Γ în două puncte confundate $P_1 = P_2$ și se numește *tangentă* la Γ în punctul P_1. Evident, din orice punct $P_0 \notin \Gamma$ se pot duce cel mult două tangente la Γ.

În particular, cînd $P_0 \in \Gamma$ și g_{x_0}, g_{y_0} nu se anulează simultan, observăm că tangenta la Γ în punctul P_0 are ecuația

$$(x - x_0)g_{x_0} + (y - y_0)g_{y_0} = 0.$$

Dreapta care trece prin $P_0(x_0, y_0) \in \Gamma$ și este perpendiculară pe tangentă se numește *normală*. Ea are ecuația

$$-(x - x_0)g_{y_0} + (y - y_0)g_{x_0} = 0.$$

Dacă $q < 0$, atunci ecuația (1) nu are soluții în $\mathbb{R}$ și deci D nu taie pe Γ.

2) Fie $\varphi(l, m) = 0$. Ecuația (1) este de gradul întîi. Dacă $lg_{x_0} + mg_{y_0} \neq 0$, atunci avem o soluție unică t_1 și deci D taie pe Γ într-un singur punct P_1. Dacă $lg_{x_0} + mg_{y_0} = 0$ și $g(x_0, y_0) \neq 0$, atunci ecuația (1) este o imposibilitate și deci D nu taie pe Γ. Dacă $lg_{x_0} + mg_{y_0} = 0$ și $g(x_0, y_0) = 0$, ecuația este identic satisfăcută și deci $D \subseteq \Gamma$.

Fie Γ o conică nedegenerată și $\bar{d}(l, m)$ o direcție în planul conicei.

4.1. *Definiție. Direcția $\bar{d}(l, m)$ se numește direcție asimptotică pentru Γ dacă*

$$\varphi(l, m) = a_{11}l^2 + 2a_{12}lm + a_{22}m^2 = 0.$$

Evident o dreaptă care are o asemenea direcție taie conica nedegenerată într-un singur punct sau nu taie pe Γ.

Discuție. 1) Dacă $\delta < 0$, $\Delta \neq 0$ (hiperbolă), atunci ecuația $\varphi(l, m) = 0$ dă două direcții asimptotice distincte.

2) Dacă $\delta > 0$, $\Delta \neq 0$ (elipsă), atunci ecuația $\varphi(l, m) = 0$ nu admite soluții reale nebanale. De aceea elipsa nu admite direcții asimptotice.

3) Dacă $\delta = 0$, $\Delta \neq 0$ (parabolă), atunci ecuația $\varphi(l, m) = 0$ are o direcție asimptotică dublă care este de fapt direcția axei conicei.

4.2. *Definiție. O dreaptă D se numește asimptotă a unei conice nedegenerate Γ, dacă direcția ei este asimptotică și $D \cap \Gamma = \Phi$.*

Din ceea ce am prezentat mai sus, rezultă că este adevărată următoarea teoremă.

4.3. Teoremă. O asimptotă a conicei nedegenerate Γ este caracterizată analitic prin ecuația $lg_x + mg_y = 0$, unde (l, m) este o direcție asimptotică.

Discuție. 1) Hiperbola are două asimptote care trec prin centrul conicei.

2) Elipsa nu are direcție asimptotică și în consecință nu are asimptotă.

3) Parabola admite o direcție asimptotică pentru care ecuația $lg_x + mg_y = 0$ devine o imposibilitate. Deci parabola nu are asimptotă.

§5. Pol și polară

Fie $D: x = x_0 + lt,\ y = y_0 + mt,\ t \in \mathbb{R}$, o dreaptă orientată prin vectorul director $\bar{a} = l\bar{i} + m\bar{j}$ și P, Q două puncte ale acestei drepte.

5.1. *Definiție. Numărul* ρ_{PQ} *definit prin* $\overline{PQ} = \rho_{PQ}\dfrac{\bar{a}}{\|\bar{a}\|}$ *se numește mărimea relativă a segmentului* $[PQ]$.

Considerăm că pe dreapta D au fost fixate punctele $P_0(x_0, y_0)$, $P_1(x_1, y_1)$, $P(x, y)$, $P_2(x_2, y_2)$, corespunzătoare valorilor t_0, t_1, t, t_2 ale lui t (fig. 49, a).

5.2. *Definiție. Numărul*

$$[P_0, P; P_1, P_2] = \frac{\rho_{P_0P_1}}{\rho_{P_1P}} : \frac{\rho_{P_0P_2}}{\rho_{P_2P}} = \frac{t_1 - t_0}{t - t_1} : \frac{t_2 - t_0}{t - t_2},$$

se numește biraport al cuaternei ordonate de puncte (P_0, P_1, P, P_2).

Dacă $[P_0, P; P_1, P_2] = -1$, atunci biraportul se numește *armonic* și se spune că perechea de puncte P_0, P divide armonic perechea P_1, P_2 (sau invers). Diviziunea armonică este caracterizată prin

$$\frac{t_1 - t_0}{t - t_1} + \frac{t_2 - t_0}{t - t_2} = 0.$$

Dacă presupunem că punctul P_0 este luat drept origine pe D, adică $t_0 = 0$, atunci diviziunea armonică este caracterizată prin

$$\frac{2}{t} = \frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2}.$$

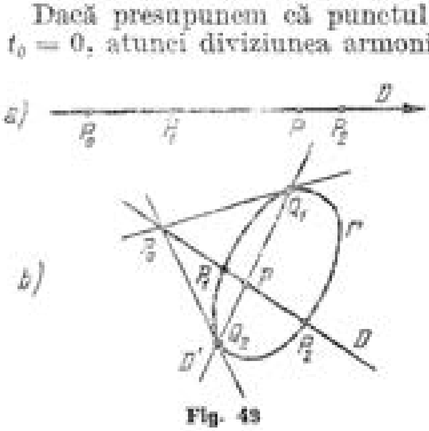


Fig. 49

Fie Γ o elipsă, hiperbolă sau parabolă. Dacă $P_0(x_0, y_0)$ este un punct dat, atunci fie $D: x = x_0 + lt,\ y = y_0 + mt$, $t \in \mathbb{R}$, o dreaptă care trece prin P_0 și care taie pe Γ în două puncte $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$ (fig. 49, b).

5.3. Teoremă. Locul geometric al punctului P conjugatul armonic al lui P_0 în raport cu P_1, P_2, atunci cînd direcţia (l, m) a lui D variază, este o parte din dreapta D' de ecuaţie

$$a_{11}xx_0 + a_{12}(xy_0 + x_0y) + a_{22}yy_0 + a_{10}(x + x_0) + a_{20}(y + y_0) + a_{00} = 0.$$

Dreapta D' se numeşte *polara* punctului P_0 în raport cu conica Γ, iar punctul P_0 se numeşte *polul* dreptei D' în raport cu conica Γ.

Demonstraţie. Prin ipoteză, intersectînd dreapta D cu conica Γ se obţin punctele P_1 şi P_2 corespunzătoare valorilor t_1 şi t_2 care sînt rădăcinile ecuaţiei $t^2\varphi(l, m) + t(lg_{x_0} + mg_{y_0}) + g(x_0, y_0) = 0$. Pentru scurtarea demonstraţiei presupunem că $P_0 \notin \Gamma$. Din ecuaţia de mai sus, rezultă

$$\frac{t_1 + t_2}{t_1t_2} = -\frac{lg_{x_0} + mg_{y_0}}{g(x_0, y_0)}.$$

Pe de altă parte observăm că diviziunea armonică este caracterizată prin

$$\frac{2}{t} = \frac{t_1 + t_2}{t_1t_2}$$

şi deci

$$\frac{2}{t} = \frac{lg_{x_0} + mg_{y_0}}{g(x_0, y_0)}.$$

Pentru a se obţine ecuaţia carteziană a mulţimii care conţine locul geometric căutat se elimină parametrii t, l, m între relaţia precedentă şi ecuaţiile dreptei D. Rezultă ecuaţia

$$(x - x_0)g_{x_0} + (y - y_0)g_{y_0} = -2g(x_0, y_0),$$

care este de fapt ecuaţia din teoremă.

Observăm că atunci cînd $P_0 \in \Gamma$, raţionamentul anterior trebuie modificat. Din ecuaţia de mai sus se vede că în acest caz polara se confundă cu tangenta în P_0.

5.4. Observaţii. 1) Poziţia polarei D' faţă de conica Γ depinde de poziţia punctului P_0 faţă de Γ (sau invers). P_0 nu poate fi în centrul conicei deoarece în acest caz ecuaţia $(x - x_0)g_{x_0} + (y - y_0)g_{y_0} = -2g(x_0, y_0)$ este o imposibilitate.

2) Substituirile $x^2 \to xx_0$, $y^2 \to yy_0$, $xy \to \frac{1}{2}(xy_0 + x_0y)$, $x \to \frac{1}{2}(x + x_0)$, $y \to \frac{1}{2}(y + y_0)$ se numesc *dedublări*. Prin *dedublata ecuaţiei de gradul doi* $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{10}x + 2a_{20}y + a_{00} = 0$ în punctul $P_0(x_0, y_0)$ înţelegem ecuaţia de gradul întîi $a_{11}xx_0 + a_{12}(xy_0 + x_0y) + a_{22}yy_0 + a_{10}(x + x_0) + a_{20}(y + y_0) + a_{00} = 0$. Ecuaţia polarei punctului P_0 (în particular ecuaţia tangentei în $P_0 \in \Gamma$) se obţine prin dedublarea ecuaţiei lui Γ.

3) Noţiunea de focar o presupunem cunoscută de la studiul conicelor pe ecuaţia redusă. Directoarea este polara focarului.

§6. Diametru conjugat cu o direcţie dată

Fie conica Γ şi o direcţie $\mathring{d}(l, m)$.

6.1. Teoremă. Locul geometric al mijloacelor corzilor conicei Γ paralele cu direcţia $\mathring{d}(l, m)$ este o parte din dreapta D'' de ecuaţie

$$lg_x + mg_y = 0.$$

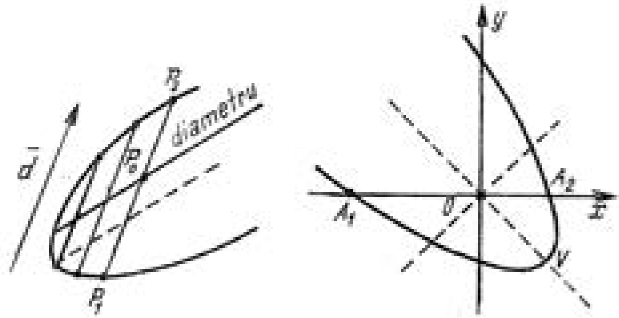


Fig. 50

Dreapta D'' se numește *diametrul lui* Γ *conjugat direcției* $\bar{d}(l, m)$.

Demonstrație. Dreapta care trece printr-un punct $P_0(x_0, y_0)$ și este paralelă cu $\bar{d}$ are ecuațiile $x = x_0 + lt$, $y = y_0 + mt$, $t \in \mathbb{R}$. Prin ipoteză această dreaptă taie conica Γ în două puncte $P_1(x_1 = x_0 + lt_1, y_1 = y_0 + mt_1)$ și $P_2(x_2 = x_0 + lt_2, y_2 = y_0 + mt_2)$, unde t_1 și t_2 sînt soluțiile ecuației $t^2\varphi(l, m) + t(lg_{x_0} + mg_{y_0}) + g(x_0, y_0) = 0$. Mijlocul segmentului $[P_1, P_2]$ (fig. 50) are coordonatele

$$\frac{x_1 + x_2}{2} = x_0 + l\,\frac{t_1 + t_2}{2}, \quad \frac{y_1 + y_2}{2} = y_0 + m\,\frac{t_1 + t_2}{2}$$

și acest punct coincide cu P_0 dacă și numai dacă $t_1 + t_2 = 0$, adică $lg_{x_0} + mg_{y_0} = 0$. Deoarece P_0 este un mijloc arbitrar rezultă că teorema este adevărată.

Consecințe. 1) În ipoteza că $\delta \neq 0$ se observă că diametrii conjugați cu direcții arbitrare din plan formează un fascicul de drepte cu vîrful în centrul conicei.

2) Dacă $\delta = 0$ și $\Delta \neq 0$ (parabolă) atunci observăm că $g_x + \alpha = \beta g_y$ și ecuația diametrilor conjugați se reduce la ecuația unui fascicul de drepte paralele

$$g_x + \mu = 0.$$

Direcția acestui fascicul este $(a_{12}, -a_{11})$ sau $(a_{22}, -a_{12})$. Evident *axa de simetrie a parabolei* este un diametru și deci are direcția anterioară.

Observăm că direcției $(a_{12}, -a_{11})$ nu-i corespunde nici un diametru conjugat deoarece $a_{12}g_x - a_{11}g_y = 0$ este o imposibilitate.

3) Cazul conicelor cu dreaptă de centre se cercetează analog.

Să considerăm acum că Γ este o conică cu centru ($\delta \neq 0$) și să notăm cu (l_0, m_0) direcția diametrului de ecuație $lg_x + mg_y = 0$. Direcția (l_0, m_0) satisface relația

$$\frac{l_0}{la_{12} + ma_{22}} = \frac{m_0}{-(la_{11} + ma_{12})}$$

sau

$$a_{11}ll_0 + a_{12}(lm_0 + l_0m) + a_{22}mm_0 = 0 \tag{2}$$

care de fapt este dedublata relației $\varphi(l, m) = 0$. Reciproc, se poate arăta că direcția diametrului conjugat cu (l_0, m_0) este (l, m).

6.2. *Definiție. O pereche de diametri ale căror direcții sînt în relația (2) se numesc diametri conjugați unul altuia.*

§7. Direcții principale. Axele unei conice

Considerăm o conică Γ, o direcție $\bar{a}(l, m)$ și diametrul conjugat aceste direcții $lg_x + mg_y = 0$.

7.1. *Definiție. Direcția $\bar{a}(l, m)$ se numește direcție principală pentru conica Γ dacă este perpendiculară pe direcția diametrului $lg_x + mg_y = 0$.*

7.2. Teoremă. Diametrul conjugat unei direcții principale este o axă (de simetrie) a conicei. Invers, o direcție perpendiculară pe o axă este o irecție principală.

Demonstrație. Diametrul conjugat cu o direcție principală conține mijloacele corzilor conicei Γ, care sint perpendiculare pe diametru. Astfel acest diametru este o axă de simetrie. Reciproca este evidentă.

În această problemă distingem două cazuri:

1) Dacă $\delta \neq 0$, atunci Γ poate să fie cerc, elipsă, hiperbolă sau pereche de drepte concurente. Axele reperului canonic sint axe de simetrie. Notăm cu (l, m) și (l_0, m_0) direcțiile acestor axe și observăm că aceste direcții sint perpendiculare, adică

$$ll_0 + mm_0 = 0.$$

Întrucît axele conțin doi diametri conjugați unul altuia, prin eliminarea lui (l_0, m_0) între ecuația precedentă și ecuația $a_{11}ll_0 + a_{12}(lm_0 + l_0m) + a_{22}mm_0 = 0$ deducem

$$(a_{11} - a_{22})ml + a_{12}(m^2 - l^2) = 0. \tag{3}$$

Ecuația (3) dă direcțiile axelor. Scriind ecuațiile diametrilor conjugați cu aceste direcții sau scriind ecuațiile dreptelor care trec prin centrul conicei Γ și au aceste direcții, obținem unul și același lucru și anume ecuațiile axelor.

Intersecțiile dintre Γ și axe se numesc *vîrfuri*.

2) Fie $\delta = 0$ și $\Delta \neq 0$ (parabolă). Anterior am văzut că direcția axei parabolei este $(a_{12}, -a_{11})$ sau $(a_{22}, -a_{21})$. Direcția perpendiculară pe axă

este (a_{11}, a_{12}) sau (a_{21}, a_{22}). De aici rezultă că ecuația axei parabolei este

$$a_{11}g_x + a_{12}g_y = 0 \text{ sau } a_{21}g_x + a_{22}g_y = 0$$

(diametru conjugat cu direcția (a_{11}, a_{12}) sau (a_{21}, a_{22})).

Intersecția dintre axă și parabolă se numește vîrf.

7.3. Observație. În ecuațiile anterioare, cel puțin unul dintre numerele l și m este diferit de zero. De aceea în exerciții, ecuațiile (2) și (3) se simplifică prin împărțire cu l sau cu m.

§8. Probleme

1. Sub influența unei forțe, punctul material M se mișcă pe cercul $x^2 + y^2 - 6x + 4y + 9 = 0$. Acțiunea forței se întrerupe în momentul în care M a ajuns în poziția $(1, -2)$. Să se determine traiectoria pe care o va urma mai departe punctul material.

2. Se dau conicele $\Gamma_1 : x^2 - 2xy + 2y^2 - 4x - 6y + 3 = 0$, $\Gamma_2 : x^2 - 2xy - y^2 - 4x - 6y + 3 = 0$, $\Gamma_3 : x^2 + 2xy + y^2 + 2x + 2y - 4 = 0$. Să se calculeze invarianții, coordonatele centrului și dacă este cazul, să se scrie ecuația conicei redusă la centru sau ecuațiile dreptelor în care degenerează.

3. Să se reducă ecuațiile

$$5x^2 - 4xy + 2y^2 - 16x + 4y - 22 = 0,$$

$$11x^2 - 24xy + 4y^2 + 2x + 16y + 11 = 0,$$

$$x^2 - 2xy + y^2 - 4y + 6 = 0$$

la forma canonică și să se construiască conicele corespunzătoare.

4. Să se stabilească poziția dreptei D față de conica Γ:

$$1)\ 5x - y - 5 = 0,\ \ x^2 - 2xy - 3y^2 - 4x - 6y + 3 = 0$$

$$2)\ x = 3 + t,\ y = -1 + 2t,\ x^2 - 2xy - 2y^2 + 7x + 6y + 132 = 0$$

$$3)\ x = 1 + 8t,\ \ y = 1 + 7t,\ \ x^2 + 2xy - 4y^2 + 3x - 2y = 0.$$

5. Să se scrie coordonatele polului axei Ox față de conica $\Gamma : x^2 - 2y^2 - 3x - 7y + 1 = 0$.

6. Să se scrie ecuația diametrului conjugat : (1) axei Ox, (2) axei Oy, (3) direcției $\vec{d}(1, -3$ pentru conica $9x^2 + 6xy + y^2 - 5x - 7y - 4 = 0$. Să se scrie ecuația axei de simetrie a acestei conice.

7. Să se determine centrul, axele și vîrfurile conicei

$$\Gamma : 16x^2 + 4xy + 19y^2 + 4x - 22y - 5 = 0.$$

Capitolul 5

CUADRICE

§1. Sfera

Fie $\mathbb{E}_3$ un spaţiu punctual euclidian real tridimensional raportat la un reper cartezian $\{O; \bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$ şi punctele $M_i(x_i, y_i, z_i)$, $i = 1, 2$. Reamintim expresia distanţei

$$d(M_1, M_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Fie $C(x_0, y_0, z_0)$ un punct fixat şi r un număr real strict pozitiv fixat. *Sfera S de centru C şi rază r* este mulţimea punctelor $M(x, y, z)$ cu proprietatea $d(C, M) = r$ (fig. 51).

1.1. Teoremă. Punctul $M(x, y, z)$ aparţine sferei S de centru $C(x_0, y_0, z_0)$ şi raza r dacă şi numai dacă

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2.$$

Demonstraţie. $M \in S \Leftrightarrow d(C, M) = r \Leftrightarrow \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2} = r \Leftrightarrow (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2$.

Astfel $S = \{M(x, y, z) \mid (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2\}$ sau mai scurt $S : (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2$. Ecuaţia $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2$, $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ se numeşte *ecuaţia carteziană implicită a sferei S de centru (x_0, y_0, z_0) şi rază r*. Această ecuaţie este echivalentă cu trei *ecuaţii parametrice* în $\mathbb{R}^3$ (fig. 52)

$$\begin{cases} x = x_0 + r \cos u \sin v \\ y = y_0 + r \sin u \sin v \\ z = z_0 + r \cos v, \quad u \in [0, 2\pi], \ v \in [0, \pi], \ u, v = \text{parametrii} \end{cases}$$

sau cu ecuaţia $\bar{r} = \bar{r}_0 + r(\cos u \sin v \bar{i} + \sin u \sin v \bar{j} + \cos v \bar{k})$ în V_3.

Se observă că $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2$ este un polinom de gradul doi în x, y, z, termenul de gradul doi fiind $x^2 + y^2 + z^2$. Aceasta sugerează să cercetăm mulţimea

$$\Sigma : x^2 + y^2 + z^2 + 2ax + 2by + 2cz + d = 0.$$

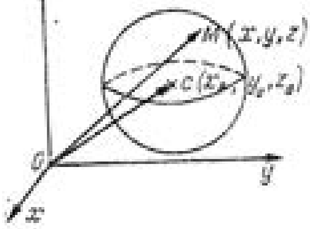


Fig. 51

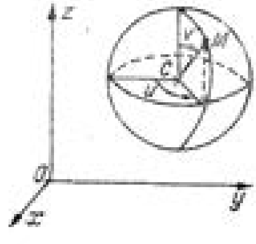


Fig. 52

Deoarece ecuaţia lui Σ se transcrie

$$(x+a)^2+(y+b)^2+(z+c)^2=a^2+b^2+c^2-d$$

rezultă:

1) dacă $a^2+b^2+c^2-d>0$, atunci Σ este o sferă cu centrul în $x_0 = -a$, $y_0=-b$, $z_0=-c$ şi de rază $r=\sqrt{a^2+b^2+c^2-d}$;

2) dacă $a^2+b^2+c^2-d=0$, atunci $\Sigma=\{(-a,-b,-c)\}$;

3) dacă $a^2+b^2+c^2-d<0$, atunci $\Sigma=\Phi$.

Ecuaţia

$$x^2+y^2+z^2+2ax+2by+2cz+d=0,\ a^2+b^2+c^2-d>0,$$

$$(x,y,z)\in\mathbb{R}^3,$$

se numeşte *ecuaţia carteziană generală a sferei*. Evident această ecuaţie este echivalentă cu

$$\bar{d}(x^2+y^2+z^2)+2a_1x+2b_1y+2c_1z+d_1=0,\ \bar{d}\neq 0,$$

$$a_1^2+b_1^2+c_1^2-\bar{d}d_1>0.$$

O sferă din spaţiu este o mulţime mărginită şi închisă, deci compactă. Ea are proprietatea că separă spaţiul în două submulţimi disjuncte: *interiorul* lui S notat $\mathrm{int}(S)$ şi *exteriorul* lui S notat $\mathrm{ext}(S)$. Acestea pot fi descrise cu ajutorul funcţiei

$$f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R},\ f(x,y,z)=(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2-r^2,$$

unde (x_0,y_0,z_0) este un punct fixat, iar $r>0$ este fixat. Într-adevăr (fig. 53) $\mathrm{int}(S)=\{(x,y,z)\,|\,f(x,y,z)<0\}$, $\mathrm{ext}(S)=\{(x,y,z)\,|\,f(x,y,z)>0\}$.

1.2. Teoremă. 1) Mulţimea $\mathrm{int}(S)$ este convexă; 2) $\forall M_1\in\mathrm{int}(S)$, $\forall M_2\in\mathrm{ext}(S)$, segmentul $[M_1M_2]$ taie pe S.

Demonstraţie. Fără a scădea generalitatea putem presupune $x_0=y_0=z_0=0$. Fie $M_i(x_i,\ y_i,\ z_i)$, $i=1,2$, două puncte din spaţiu. Segmentul $[M_1M_2]$ este caracterizat prin ecuaţiile parametrice $x=(1-t)x_1+tx_2$, $y=(1-t)y_1+ty_2$, $z=(1-t)z_1+tz_2$, $t\in[0,1]$.

1) Dacă M_1, $M_2\in\mathrm{int}(S)$, adică $f(x_i,y_i,z_i)=x_i^2+y_i^2+z_i^2-r^2<0$, $i=1,2$, atunci

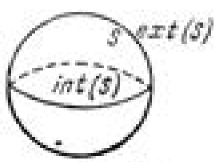


Fig. 53

$$f(x,y,z)=f[(1-t)x_1+tx_2,\ (1-t)y_1+ty_2,\ (1-t)z_1+tz_2]=[(1-t)\,x_1+tx_2]^2+[(1-t)y_1+ty_2]^2+$$
$$+[(1-t)z_1+tz_2]^2-r^2\leqslant(1-t)f(x_1,y_1,z_1)+$$
$$+tf(x_2,y_2,z_2)<0,\ \ \forall t\in[0,1].$$

Cu alte cuvinte $[M_1M_2] \subset \text{int}(S)$.

2) Fie $M_1 \in \text{int}(S)$, adică $f(x_1, y_1, z_1) < 0$ şi $M_2 \in \text{ext}(S)$, adică $f(x_2, y_2, z_2) > 0$. Rezultă funcţia continuă definită prin

$$\varphi(t) = f[(1-t)x_1 + tx_2, (1-t)y_1 + ty_2, (1-t)z_1 + tz_2] =$$

$$= [(1-t)x_1 + tx_2]^2 + [(1-t)y_1 + ty_2]^2 + [(1-t)z_1 + tz_2]^2 - r^2,$$

$t \in [0, 1]$ cu proprietăţile $\varphi(0) = f(x_1, y_1, z_1) < 0$ şi $\varphi(1) = f(x_2, y_2, z_2) > 0$.

De aceea există o valoare $t_0 \in [0,1]$ astfel incit $0 = \varphi(0) = [(1-t_0)x_1 + t_0x_2]^2 + [(1-t_0)y_1 + t_0y_2]^2 + [(1-t_0)z_1 + t_0z_2]^2$ şi deci $((1-t_0)x_1 + t_0x_2, (1-t_0)y_1 + t_0y_2, (1-t_0)z_1 + t_0z_2) \in \Sigma$.

Numim *plan tangent* la sferă în punctul $M_1(x_1, y_1, z_1)$ locul geometric al tuturor tangentelor la sferă în punctul M_1 (fig. 54). Ecuaţia planului tangent in punctul $M_1 \in \Sigma$ se obţine prin dedublarea ecuaţiei sferei, adică

$$(x - x_0)(x_1 - x_0) + (y - y_0)(y_1 - y_0) + (z - z_0)(z_1 - z_0) - r^2 = 0$$

sau

$$xx_1 + yy_1 + zz_1 + a(x + x_1) + b(y + y_1) + c(z + z_1) + d = 0.$$

§2. Elipsoid, hiperboloid, paraboloid

2.1. *Definiţie. Cuadrica de ecuaţie*

$$\Sigma: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0, \ a, b, c > 0$$

se numeşte elipsoid.

Această suprafaţă este simetrică faţă de planele de coordonate, numite din acest motiv *plane principale* ale elipsoidului. Suprafaţa este simetrică şi faţă de axele de coordonate care se numesc *axele* suprafeţei. Rezultă că originea este centru de simetrie. Originea se numeşte *centrul* elipsoidului. Punctele in care axele înţeapă suprafaţa se numesc *vîrfuri*. Numerele a, b, c se numesc *semiaxe*. Intersecţiile dintre planele de coordonate şi elipsoid sint respectiv următoarele elipse (fig. 55):

$$(1)\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - 1 = 0\\ z = 0\end{cases} \quad (2)\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{z^2}{c^2} - 1 = 0\\ y = 0\end{cases} \quad (3)\begin{cases}\dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} - 1 = 0.\\ x = 0\end{cases}$$

Fig. 54

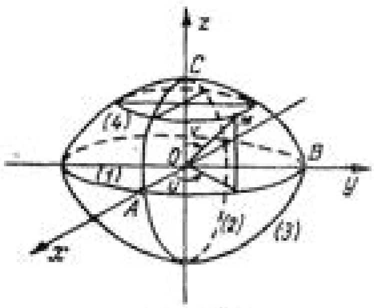


Fig. 55

Intersectînd elipsoidul cu plane paralele cu xOy, obţinem elipsele

$$(4)\begin{cases}\dfrac{x^2}{\dfrac{a^2}{c^2}(c^2-k^2)}+\dfrac{y^2}{\dfrac{b^2}{c^2}(c^2-k^2)}-1=0, \\ z=k \qquad\qquad k\in[-c,c]\end{cases}$$

care sînt asemenea cu elipsa (1).

2.2. Teoremă. Elipsoidul este o mulţime mărginită şi închisă (deci compactă) în spaţiu.

Demonstraţie. Din ecuaţia elipsoidului rezultă $\dfrac{x^2}{a^2}\leqslant 1$, $\dfrac{y^2}{b^2}\leqslant 1$, $\dfrac{z^2}{c^2}\leqslant 1$ sau $-a\leqslant x\leqslant a$, $-b\leqslant y\leqslant b$, $-c\leqslant z\leqslant c$. Astfel toate punctele elipsoidului sînt cuprinse în interiorul unui paralelipiped cu laturile de lungimi finite.

Elipsoidul Σ este o mulţime închisă în spaţiu deoarece $\{1\}$ este o mulţime închisă în $\mathbb{R}$, $\Sigma=g^{-1}(1)$, iar $g:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$, $g(x,y,z)=\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}$ este o funcţie continuă.

Ecuaţia carteziană implicită a elipsoidului $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}-1=0$ este echivalentă cu ecuaţiile parametrice

$$\begin{cases}x=a\cos u\,\sin v \\ y=b\sin u\sin v \\ z=c\cos v,\ u\in[0,2\pi],\ v\in[0,\pi],\ u,v=\text{parametrii (fig. 55).}\end{cases}$$

2.3. *Definiţie. Cuadrica de ecuaţie*

$$\Sigma:\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}-1=0,\ a,b,c>0$$

se numeşte hiperboloid cu o pînză.

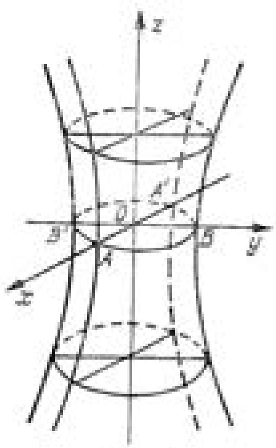


Fig. 56

Această suprafaţă are aceleaşi simetrii cu elipsoidul. Are patru vîrfuri. Intersecţiile lui Σ respectiv cu $x=0$ şi $y=0$ sînt hiperbolele

$$\begin{cases}\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}-1=0, \\ x=0\end{cases}\qquad\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}-1=0. \\ y=0\end{cases}$$

Intersecţiile acestei suprafeţe cu planele $z=k$ sînt elipsele asemenea, reale oricare ar fi $k\in\mathbb{R}$ (fig. 56):

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{\dfrac{a^2}{c^2}(k^2+c^2)}+\dfrac{y^2}{\dfrac{b^2}{c^2}(k^2+c^2)}-1=0. \\ z=k\end{cases}$$

Se observă că hiperboloidul cu o pînză este o mulțime nemărginită și închisă în spațiu.

Cuadrica $\Sigma: \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$ se numește *conul asimptot* al hiperboloidului cu o pînză.

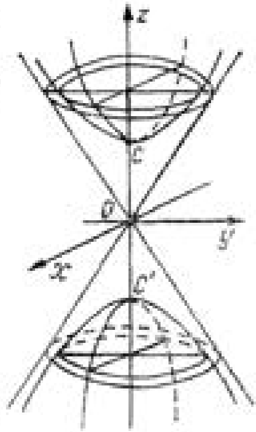


Fig. 57

2.4. *Definiție. Cuadrica de ecuație*

$$\Sigma: \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}+1=0,\ a, b, c>0$$

se numește hiperboloid cu două pînze.

Această suprafață are aceleași simetrii ca și hiperboloidul cu o pînză. Are numai două vîrfuri situate pe axa Oz (fig. 57). Intersecțiile lui Σ cu planele $x=0$ și $y=0$ sînt respectiv hiperbolele

$$\begin{cases}\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}+1=0,\\ x=0\end{cases}\quad \begin{cases}\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}+1=0\\ y=0.\end{cases}$$

Observăm că în regiunea $-c<z<c$ nu avem puncte ale lui Σ. Intersecția suprafeței cu planele $z=k$, $|k|\geqslant c$, ne dă elipsele asemenea

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{\frac{a^2}{c^2}(k^2-c^2)}+\dfrac{y^2}{\frac{b^2}{c^2}(k^2-c^2)}-1=0\\ z=k.\end{cases}$$

Hiperboloidul cu două pînze este o mulțime nemărginită și închisă în spațiu.

Cuadrica $\Sigma: \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$ se numește *conul asimptot al hiperboloidului.*

2.5. *Definiție. Cuadrica de ecuație*

$$\Sigma: z=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2},\quad a, b>0$$

se numește paraboloid eliptic.

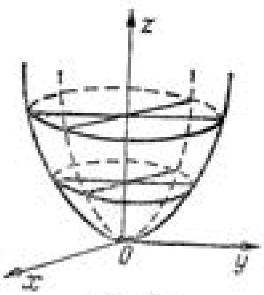


Fig. 58

Planele de simetrie $x=0$ și $y=0$ se numesc plane principale. Oz este axă de simetrie (axă principală) și înțeapă suprafața în origine. Acest punct se numește *vîrf* (fig. 58). Intersecțiile suprafeței cu planele $x=0$ și $y=0$ sînt respectiv parabolele

$$\begin{cases}z=\frac{y^2}{b^2},\\ x=0\end{cases}\quad \begin{cases}z=\frac{x^2}{a^2}\\ y=0\end{cases}$$

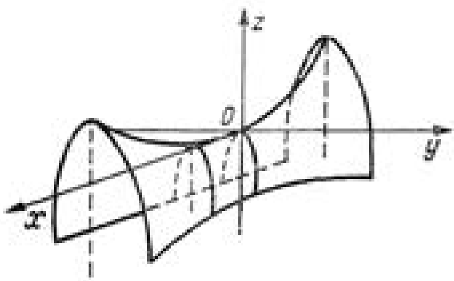


Fig. 59

şi de aceea Σ este nemărginită. Evident suprafaţa există numai pentru $z \geqslant 0$. Dacă tăiem suprafaţa Σ cu planele $z = k(k > 0)$, atunci se obţin elipsele

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = k \\ z = k. \end{cases}$$

Paraboloidul eliptic este o mulţime închisă în spaţiu.

2.6. *Definiţie. Cuadrica de ecuaţie*

$$\Sigma : z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$$

se numeşte paraboloid hiperbolic sau şa.

Această suprafaţă are aceleaşi simetrii ca şi suprafaţa anterioară. Originea este vîrf al suprafeţei (fig. 59). Intersecţia suprafeţei cu planul $x = 0$ dă parabola

$$\begin{cases} z = -\dfrac{y^2}{b^2} \\ x = 0 \end{cases}$$

care are concavitatea înspre sensul negativ al axei Oz. Intersecţia suprafeţei cu planul $y = 0$ dă parabola

$$\begin{cases} z = \dfrac{x^2}{a^2} \\ y = 0 \end{cases}$$

care are axa de simetrie Oz şi este dirijată în sensul pozitiv al acestei axe.

Intersectăm suprafaţa cu planele $z = k(k > 0)$ şi obţinem hiperbolele

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = k \\ z = k \end{cases}$$

care au axa transversă paralelă cu Ox.

Intersectăm suprafaţa cu planele $z = k(k < 0)$ şi obţinem hiperbolele

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = k \\ z = k \end{cases}$$

care au axa netransversă paralelă cu Ox.

Ca mulţime, şaua este nemărginită şi închisă.

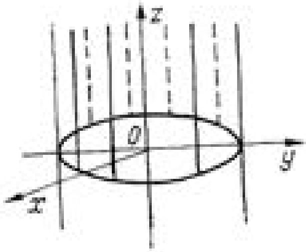


Fig. 60

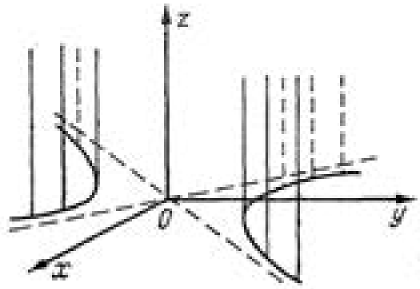


Fig. 61

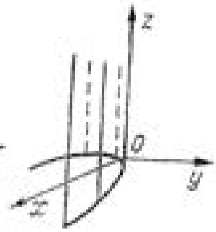


Fig. 62

Cuadrica de ecuație $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0$ se numește *cilindru eliptic* (fig. 60).

Cuadrica de ecuație $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-1=0$ se numește *cilindru hiperbolic* (fig. 61).

Cuadrica de ecuație $y^2=2px$ se numește *cilindru parabolic* (fig. 62).

Pereche de plane concurente $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$; *pereche de plane paralele* $x^2-a^2=0$; *pereche de plane confundate* $x^2=0$.

Dreaptă $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$; *punct* $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0$; *mulțimea vidă* $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}+1=0$ sau $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+1=0$ sau $x^2+a^2=0$.

Elipsoizii, hiperboloizii și paraboloizii se numesc *cuadrice nedegenerate*.

Hiperboloidul cu o pînză și paraboloidul hiperbolic sînt *suprafețe riglate* deoarece pot fi generate prin mișcarea unei drepte. Această dreaptă face parte dintr-o familie de *generatoare rectilinii*, fiecare dintre suprafețele menționate admițind două familii de generatoare rectilinii, de ecuații

$$D_\lambda:\begin{cases}\frac{x}{a}+\frac{z}{c}=\lambda\left(1+\frac{y}{b}\right) & \text{pentru } \frac{x}{a}-\frac{z}{c}\neq 0,\ 1+\frac{y}{b}\neq 0\\ \lambda\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)=1-\frac{y}{b}\end{cases} \quad \text{și } D_\infty:\begin{cases}\frac{x}{a}-\frac{z}{c}=0\\ 1+\frac{y}{b}=0\end{cases}$$

$$D_\mu:\begin{cases}\frac{x}{a}+\frac{z}{c}=\mu\left(1-\frac{y}{b}\right) & \text{pentru } \frac{x}{a}-\frac{z}{c}\neq 0,\ 1-\frac{y}{b}\neq 0\\ \mu\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)=1+\frac{y}{b}\end{cases} \quad \text{și } D_\infty:\begin{cases}\frac{x}{a}-\frac{z}{c}=0\\ 1-\frac{y}{b}=0\end{cases}$$

respectiv

$$D_\lambda : \begin{cases} \dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = \lambda z \\ \lambda\left(\dfrac{x}{a} - \dfrac{y}{b}\right) = 1 \end{cases} \quad \text{pentru } z \neq 0,\ \frac{x}{a} - \frac{y}{b} \neq 0 \text{ și } D_\infty : \begin{cases} z = 0 \\ \dfrac{x}{a} - \dfrac{y}{b} = 0 \end{cases}$$

$$D_\mu : \begin{cases} \dfrac{x}{a} - \dfrac{y}{b} = \mu z \\ \mu\left(\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b}\right) = 1 \end{cases} \quad \text{pentru } z \neq 0\ \frac{x}{a} + \frac{y}{b} \neq 0 \text{ și } D_\infty : \begin{cases} z = 0 \\ \dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 0. \end{cases}$$

§3. Cuadrice

În $\mathbb{E}_3$ considerăm reperul cartezian $\{O; \bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$ și forma pătratică afină $g : \mathbb{E}_3 \to \mathbb{R}$ definită prin

$$g(x, y, z) = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_{10}x +$$

$$+ 2a_{20}y + 2a_{30}z + a_{00},$$

$$a_{11}^2 + a_{22}^2 + a_{33}^2 + a_{12}^2 + a_{13}^2 + a_{23}^2 \neq 0.$$

3.1. *Definiție. Mulțimea de nivel constant zero*

$$\Sigma = g^{-1}(0) = \{M(x, y, z) \mid (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ g(x, y, z) = 0\},$$

se numește cuadrică sau suprafață algebrică de ordinul al doilea. Se notează $\Sigma : g(x, y, z) = 0$.

Din punct de vedere topologic, cuadricele sînt mulțimi închise în spațiu deoarece $\{0\}$ este o mulțime închisă în $\mathbb{R}$, $\Sigma = g^{-1}(0)$ și g este o funcție continuă.

Prin trecerea de la reperul cartezian $\{O; \bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$ la un reper cartezian adecvat orientat pozitiv (numit *reper canonic* sau *natural*) față de care ecuația $g(x, y, z) = 0$ să aibă forma cea mai simplă posibilă (numită *ecuație redusă* sau *canonică*), se dovedește că Σ este congruentă cu una din mulțimile: sferă, elipsoid, hiperboloid cu o pînză, hiperboloid cu două pînze, paraboloid eliptic, paraboloid hiperbolic, con, cilindru circular, cilindru eliptic, cilindru hiperbolic, cilindru parabolic, pereche de drepte secante, pereche de plane paralele, pereche de plane confundate, dreaptă, mulțime care conține un singur punct, mulțime vidă.

Față de roto-translații, ecuația $g(x, y, z) = 0$ are următorii invarianți

$$\Delta = \det \tilde{A},\ \delta = \det A,\ J = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$I = \operatorname{tr} A$,

unde

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{10} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{20} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{30} \\ a_{01} & a_{02} & a_{03} & a_{00} \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, \quad \begin{matrix} a_{ij} = a_{ji}, \ i \neq j \\ i, j = 0, 1, 2, 3. \end{matrix}$$

Felul cuadricei se poate stabili cu ajutorul invarianţilor.

De exemplu

Δ	Natura cuadricei
$\Delta = 0$	degenerată
$\Delta \neq 0$	nedegenerată

Dintre cuadricele nevide, sfera, elipsoidul, hiperboloizii şi paraboloizii sînt cuadrice nedegenerate; conul, cilindrii şi perechile de plane se numesc cuadrice degenerate.

Sfera este o cuadrică în care $a_{11} = a_{22} = a_{33} = m \neq 0$, $a_{12} = a_{13} = a_{23} = 0$ şi $\left(\frac{a_{10}}{m}\right)^2 + \left(\frac{a_{20}}{m}\right)^2 + \left(\frac{a_{30}}{m}\right)^2 - \frac{a_{00}}{m} \geqslant 0$. Centrul sferei este $\left(-\frac{a_{10}}{m}, -\frac{a_{20}}{m}, -\frac{a_{30}}{m}\right)$ şi raza sferei $r = \sqrt{\left(\frac{a_{10}}{m}\right)^2 + \left(\frac{a_{20}}{m}\right)^2 + \left(\frac{a_{30}}{m}\right)^2 - \frac{a_{00}}{m}}$.

3.2. *Centrul cuadricei.* Analog cu conicele, coordonatele centrului unei cuadrice constituie soluţia sistemului liniar

$$\frac{1}{2}\frac{\partial g}{\partial x} = a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{10} = 0$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial g}{\partial y} = a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + a_{20} = 0$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial g}{\partial z} = a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + a_{30} = 0.$$

Pot interveni următoarele situaţii:

1) Dacă $\det A = \delta \neq 0$, sistemul liniar este compatibil unic determinat, deci cele trei plane $a_{i1}x + a_{i2}y + a_{i3}z + a_{i0} = 0$, $i = 1, 2, 3$ se intersectează într-un punct unic; prin urmare cuadrica admite un singur centru la distanţă finită. Este cazul sferei, elipsoidului, hiperboloidului cu o pînză, hiperboloidului cu două pînze şi conului.

2) Dacă $\delta = 0$, $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$ şi unicul determinant caracteristic al sistemului este nenul, sistemul este incompatibil. Cele trei plane formează o prismă triunghiulară. Este cazul paraboloidului eliptic şi paraboloidului hiperbolic.

3) Dacă $\delta = 0$, $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$ şi unicul determinant caracteristic este nul, sistemul liniar este compatibil simplu nedeterminat.

Cele trei plane se intersectează după o dreaptă numită *dreaptă de centre*. Este cazul cilindrilor circulari, eliptici şi hiperbolici.

4) Dacă $\delta = 0$ şi rangul sistemului este unu şi cei doi determinanţi caracteristici nu sînt nuli, sistemul este incompatibil. Planele sînt paralele. Este cazul cilindrului parabolic.

5) Dacă $\delta = 0$, rangul sistemului este unu şi cei doi determinanţi caracteristici sînt nuli, atunci sistemul este compatibil dublu nedeterminat. Cele trei plane sînt confundate. Cuadrica are un plan de centre. Este cazul planelor paralele distincte sau confundate.

Exemplu. Cuadrica Σ conţine punctele $A(-1, 2, 3)$, $B(1, 1, -1)$, trece prin axa Oy şi prin cercul Γ care are centrul în $\omega\ (0, 0, 3)$ şi este tangent axei Ox în origine.

Să se scrie ecuaţia cuadricei Σ, să se calculeze invarianţii ei şi coordonatele centrului.

Soluţie. Cercul Γ se află în planul xOz şi are ecuaţiile $x^2 + z^2 - 6z = 0$, $y = 0$.

Ecuaţia cuadricei Σ este de forma

$$x^2 + z^2 - 6z + y(\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta) = 0$$

întrucît intersecţia acestei suprafeţe cu planul xOz este cercul Γ.

Deoarece cuadrica Σ conţine axa Oy, ecuaţia ei devine identitate pentru $x = 0$, $z = 0$. Rezultă $\beta = \delta = 0$.

Din condiţiile $A \in \Sigma$, $B \in \Sigma$, rezultă sistemul $\alpha - 3\gamma = 4$, $\alpha + \gamma = 8$, cu soluţia $\alpha = 7$, $\gamma = 1$.

Deci $\Sigma : x^2 + z^2 + 7xy + yz - 6z = 0$.

Invarianţii cuadricei sînt

$$\Delta = \det \begin{bmatrix} 1 & \frac{7}{2} & 0 & 0 \\ \frac{7}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \end{bmatrix} = \frac{441}{4} \text{ (cuadrică nedegenerată)},$$

$$\delta = -\frac{25}{2} \text{ (cuadrică cu centru)}, \quad J = -\frac{23}{2}, \quad I = 2.$$

Coordonatele centrului sînt $\left(-\frac{21}{50}, \frac{3}{25}, \frac{147}{50}\right)$, ca soluţie a sistemului $x + \frac{7}{2}y = 0$, $\frac{7}{2}x + \frac{1}{2}z = 0$, $\frac{1}{2}y + z - 3 = 0$.

§4. Reducerea la forma canonică

Pentru stabilirea ecuaţiei canonice a unei cuadrice se poate proceda astfel

(i) Dacă $a_{12} = a_{13} = a_{23} = 0$, se face o translaţie.

(ii) Dacă cel puţin unul din numerele a_{12}, a_{13}, a_{23} este nenul,atunci tipul cuadricei de ecuaţie

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_{10}x +$$

$$+ 2a_{20}y + 2a_{30}z + a_{00} = 0$$

este determinat de expresia termenilor de gradul doi, adică de forma pătratică

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz.$$

Matriceal această formă pătratică se scrie

$$[x \ \ y \ \ z] \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \quad a_{12} = a_{21}, \ a_{13} = a_{31}, \ a_{23} = a_{32}$$

sau $[x\, y\, z]\, A \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$, A fiind o matrice simetrică.

Pentru matricea A se determină valorile proprii $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ şi vectorii proprii corespunzători care sînt ortogonali. Prin normare obţinem versorii $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$. Se notează cu R matricea formată cu coordonatele versorilor $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ aşezate pe coloane; avînd în vedere posibilitatea înlocuirii unuia dintre versorii $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ prin opusul său sau posibilitatea renumerotării valorilor proprii, putem presupune $\det R = +1$.

Rotaţia

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = R \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}$$

reduce forma pătratică la forma diagonală $\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + \lambda_3 z'^2$.

Direcţiile noilor axe de coordonate sînt date de direcţiile versorilor proprii $\bar{e}_1, \bar{e}_2$, respectiv $\bar{e}_3$.

În final, dacă este cazul, se face o translaţie.

Exemplu. Să se reducă ecuaţia

$$x^2 + y^2 + 5z^2 - 6xy + 2xz - 2yz - 4x + 8y - 12z + 14 = 0$$

la forma canonică şi să se construiască cuadrica corespunzătoare.

Soluţie. Matricea formei pătratice $x^2 + y^2 + 5z^2 - 6xy + 2xz - 2yz$ este

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 \\ -3 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 5 \end{bmatrix}.$$

Valorile proprii ale matricei sînt soluțiile ecuației

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -3 & 1 \\ -3 & 1-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Obținem valorile proprii reale și distincte $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 3$, $\lambda_3 = 6$.

Coordonatele (u, v, w), ale vectorului propriu corespunzător valorii proprii λ_i sînt soluțiile sistemului

$$\begin{cases} (1-\lambda)u - 3v + w = 0 \\ -3u + (1-\lambda)v - w = 0 \\ u - v + (5-\lambda)w = 0. \end{cases}$$

Pentru $\lambda = -2$, sistemul are soluția $u = k$, $v = k$, $w = 0$; normalizăm și obținem versorul propriu $\bar{e}_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$.

Pentru $\lambda_2 = 3$, sistemul are soluția $(-k, k, k)$; prin normalizare obținem versorul $\bar{e}_2 = \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$; procedăm analog pentru $\lambda_3 = 6$ și obținem $\bar{e}_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right)$.

Matricea ortogonală ale cărei coloane sînt coordonatele versorilor proprii

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$$

are determinantul 1.

Prin rotația

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} \quad \text{sau} \quad \begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}}x' - \frac{1}{\sqrt{3}}y' + \frac{1}{\sqrt{6}}z' \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}}x' + \frac{1}{\sqrt{3}}y' - \frac{1}{\sqrt{6}}z' \\ z = \frac{1}{\sqrt{3}}y' + \frac{2}{\sqrt{6}}z' \end{cases}$$

ecuația carteziană devine

$$-2x'^2 + 3y'^2 + 6z'^2 + \frac{4}{\sqrt{2}}x' - \frac{36}{\sqrt{6}}z' + 14 = 0.$$

Completăm pătratele în x', y', z' şi obţinem

$$-2\left(x'-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+3y'^2+6\left(z'-\frac{3}{\sqrt{6}}\right)^2+6=0.$$

Efectuăm translaţia $x'=\frac{1}{\sqrt{2}}+x''$, $y'=y''$, $z'=\frac{3}{\sqrt{6}}+z''$ şi obţinem ecuaţia canonică a hiperboloidului cu două pînze

$$-\frac{x''^2}{3}+\frac{y''^2}{2}+\frac{z''^2}{1}+1=0$$

ale cărui vîrfuri se află pe axa absciselor Cx'' (fig. 63).

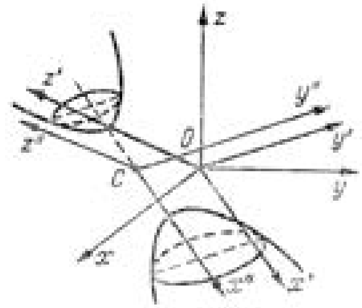


Fig. 63

§5. Intersecţia dintre o dreaptă şi o cuadrică

Fie D o dreaptă de ecuaţii

$$x=x_0+lt,\ y=y_0+mt,\ z=z_0+nt,\ t\in\mathbb{R}$$

şi Σ o cuadrică de ecuaţie $g(x,y,z)=0$. Intersecţia $D\cap\Sigma$ corespunde rădăcinilor t_1 şi t_2 ale ecuaţiei în $\mathbb{R}$,

(1) $t^2\varphi(l,m,n)+t(lg_{x_0}+mg_{y_0}+ng_{z_0})+g(x_0,y_0,z_0)=0$,

unde $\varphi(l,m,n)=a_{11}l^2+a_{22}m^2+a_{33}n^2+2a_{12}lm+2a_{13}ln+2a_{23}mn$,

iar $g_{x_0}=g_x(x_0,y_0,z_0)$ etc. ...

Discuţie. 1) Fie $\varphi(l,m,n)\neq 0$. În acest caz ecuaţia (1) este o ecuaţie de gradul doi. Dacă $q=(lg_{x_0}+mg_{y_0}+ng_{z_0})^2-\varphi(l,m,n)g(x_0,y_0,z_0)>0$, atunci ecuaţia are două rădăcini reale distincte t_1 şi t_2. Astfel dreapta D intersectează cuadrica Σ în două puncte M_1, M_2. Dacă $q=0$, atunci $t_1=t_2$; corespunzător, D va intersecta pe Σ în două puncte confundate. În acest caz dreapta D se numeşte tangentă la Σ. Dacă $q<0$, atunci ecuaţia (1) nu are rădăcini şi deci D nu intersectează pe Σ.

2) Fie $\varphi(l,m,n)=0$. Atunci ecuaţia (1) devine o ecuaţie de gradul întîi. Dacă $lg_{x_0}+mg_{y_0}+ng_{z_0}\neq 0$, atunci există o soluţie unică şi deci D intersectează cuadrica Σ într-un singur punct. Dacă $lg_{x_0}+mg_{y_0}+ng_{z_0}=0$ şi $g(x_0,y_0,z_0)\neq 0$, atunci relaţia (1) este o imposibilitate. În aceste condiţii D nu intersectează cuadrica Σ. Dacă $lg_{x_0}+mg_{y_0}+ng_{z_0}=0$ şi $g(x_0,y_0,z_0)=0$, atunci (1) este o identitate şi astfel $D\subset\Sigma$.

Fie Σ o cuadrică dată prin ecuaţia $g(x,y,z)=0$ şi $M_0(x_0,y_0,z_0)\in\Sigma$ un punct în care cel puţin unul dintre numerele g_{x_0}, g_{y_0}, g_{z_0} este diferit de zero.

5.1. Teoremă. O dreaptă D de parametrii directori (l,m,n) este tangentă la o cuadrică Σ în punctul $M_0(x_0,y_0,z_0)\in\Sigma$ dacă şi numai dacă

$$lg_{x_0}+mg_{y_0}+ng_{z_0}=0.$$

Demonstraţie. Intersecţia dintre dreapta $D: x=x_0+lt,\ y=y_0+mt,\ z=z_0+nt,\ t\in\mathbb{R}$ şi cuadrica Σ corespunde la rădăcinile t_1 şi t_2 ale ecuaţiei (1).

Deoarece $M_0 \in \Sigma$, avem $g(x_0, y_0, z_0) = 0$. Ecuația (1) va avea rădăcina dublă $t = 0$ dacă și numai dacă $lg_{x_0} + mg_{y_0} + ng_{z_0} = 0$.

5.2. Teoremă. Locul geometric al tuturor tangentelor la cuadrica Σ în punctul M_0 este planul de ecuație

$$(x - x_0)g_{x_0} + (y - y_0)g_{y_0} + (z - z_0)g_{z_0} = 0.$$

Acest plan se numește ***planul tangent*** la cuadrica Σ în punctul $M_0 \in \Sigma$.

Demonstrație. Dreapta D este tangentă în M_0 la Σ dacă și numai dacă $lg_{x_0} + mg_{y_0} + ng_{z_0} = 0$. Eliminînd parametrii l, m, n, t, găsim

$$(x - x_0)g_{x_0} + (y - y_0)g_{y_0} + (z - z_0)g_{z_0} = 0.$$

Menționăm că ecuația planului tangent într-un punct $M_0 \in \Sigma$ se poate obține și prin dedublarea ecuației $g(x, y, z) = 0$ în punctul M_0.

Dreapta care trece prin M_0 și este perpendiculară pe planul tangent se numește *normală* și are ecuațiile:

$$\frac{x - x_0}{g_{x_0}} = \frac{y - y_0}{g_{y_0}} = \frac{z - z_0}{g_{z_0}}.$$

§6. Intersecția dintre un plan și o cuadrică

Intersecția dintre un plan P și o cuadrică Σ se obține rezolvind sistemul

$$\begin{cases} ax + by + cz + d = 0, \ a^2 + b^2 + c^2 \neq 0, \\ g(x, y, z) = 0. \end{cases}$$

În ipoteza că $c \neq 0$, din ecuația planului obținem pe z și înlocuim în $g(x, y, z) = 0$. Astfel găsim că intersecția $P \cap \Sigma$ este o ***mulțime de puncte din planul P caracterizată printr-o ecuație de forma***

$$a'_{11}x^2 + 2a'_{12}xy + a'_{22}y^2 + 2a'_{10}x + 2a'_{20}y + a'_{00} = 0.$$

Deci $P \cap \Sigma$ este o conică.

§7. Probleme

1. Să se scrie ecuația sferei care

1) are centrul în $C(2, 0, 3)$ și este tangentă planului $3x + \sqrt{2}y + 4z - 45 = 0$;

2) trece prin punctele $A(-1, 0, 0)$, $B(0, 2, 1)$, $C(0, -1, -1)$, $D(3, 1, -1)$;

3) are centrul în $C(1, -2, 1)$ și este tangentă interior sferei $\Sigma_1: x^2 + y^2 + z^2 - x - 3y + 3z - 2 = 0$.

2. Să se determine coordonatele centrului cuadricei $x^2 + y^2 + 5z^2 - 6xy + 2xz - 2yz - 4x + 8y - 12z + 14 = 0$; să se efectueze o translație în centrul cuadricei și să se scrie ecuația cuadricei raportată la noul sistem translatat $Ox'y'z'$.

3. Să se reducă la forma canonică.

$$2y^2 + 4xy - 8xz - 4yz + 6x - 5 = 0;$$

$$2y^2 - 7z^2 + 112x - 16y - 14z - 87 = 0;$$

$$xy + z^2 - 2 = 0.$$

4. Să se calculeze distanța dintre punctele de intersecție ale dreptei $D: x = t,\ y = 2 - t,\ z = -3 + 2t$ cu cuadrica $x^2 - y^2 + z^2 - 4y + 6z + 9 = 0$.

5. Fiind dat hiperboloidul cu o pînză $\Sigma: \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} - z^2 - 1 = 0$ și planul $P: 4x - 3y - 12z - 6 = 0$, se cere să se studieze curba $P \cap \Sigma$ folosind proiecțiile acestei curbe pe planele de coordonate.

6. Fiind dat paraboloidul hiperbolic $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = z$ și punctul $M_0(0, 2, -1)$, să se scrie ecuațiile generatoarelor rectilinii care trec prin M_0 și să se calculeze măsura unghiului dintre aceste generatoare.

7. Să se arate că planul $6x + 3y - 2z + 6 = 0$ intersectează hiperboloidul cu o pînză $x^2 - \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} - 1 = 0$ după două generatoare ale căror ecuații se cer.

Capitolul 6

COORDONATE POLARE ȘI SEMIPOLARE

§1. Coordonate polare

Presupunem că spațiul $\mathbb{E}_2$ este raportat la un reper cartezian xOy. Orice punct $M \in \mathbb{E}_2$ este unic determinat de coordonatele sale carteziene (x, y).

Poziția unui punct $M \in \mathbb{E}_2 - \{O\}$ mai poate fi caracterizată și prin coordonatele polare (ρ, θ). Un sistem de coordonate polare în plan se definește printr-un punct O, numit *pol* și printr-o axă Ox, numită *axă polară* (fig. 64). Coordonata ρ este distanța de la pol la punctul considerat M; coordonata θ este unghiul pe care-l face direcția pozitivă a axei polare cu semidreapta OM.

Între coordonatele polare (ρ, θ) și coordonatele carteziene (x, y) ale punctului M există relațiile

$$x = \rho \cos \theta$$
$$x = \rho \sin \theta.$$

Dacă impunem $\rho > 0$, $\theta \in [0, 2\pi)$, atunci relațiile anterioare asigură corespondența biunivocă între mulțimea $\mathbb{R}^2 - \{O\}$ și mulțimea $(0, \infty) \times [0, 2\pi)$.

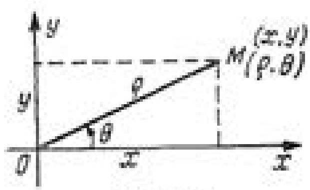


Fig. 64

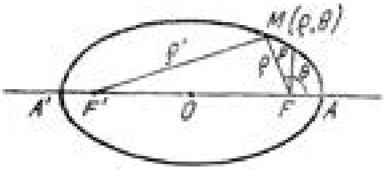


Fig. 65

Aplicație. Ecuația conicelor în coordonate polare. Raportăm elipsa la un reper polar, al cărui pol coincide cu focarul F, axa polară coincide cu axa mare a elipsei și are sensul pozitiv de la F la cel mai apropiat vîrf, adică A.

Un punct oarecare M al elipsei (fig. 65) are coordonatele polare (ρ, θ).

Stabilim ecuația elipsei în coordonate polare, aplicînd teorema cosinusului în triunghiul MFF', ținînd seama de relația ce definește elipsa ca loc geometric și avînd în vedere că excentricitatea e are valoarea $e = \frac{c}{a}$, unde $e \in (0,1)$:

$$\rho'^2 = \rho^2 + 4c^2 - 4c\rho \cos(\pi - \theta)$$

sau

$$(2a - \rho)^2 = \rho^2 + 4c^2 + 4c\rho \cos \theta.$$

Luăm $c = ea$, $p = a(1 - e^2)$ și obținem

$$\rho = p(1 + e\cos\theta)^{-1}.$$

Pentru hiperbolă luăm ca pol focarul corespunzător ramurii de hiperbolă a cărei ecuație vrem să o scriem în coordonate polare (fig. 66).

Ținînd seama că parametrul p este $p = a(e^2 - 1)$ și $e = \frac{c}{a}$, $e > 1$, obținem aceeași ecuație în coordonate polare.

Pentru $e = 1$, obținem ecuația parabolei.

§2. Coordonate cilindrice

Presupunem că spațiul $\mathbb{E}_3$ este raportat la un reper cartezian $Oxyz$. Orice punct $M \in \mathbb{E}_3$ este unic determinat de coordonatele sale carteziene (x, y, z).

Fie $\mathbb{E}_3^* = \mathbb{E}_3 -$ axa Oz. Poziția unui punct $M \in \mathbb{E}_3^*$ poate fi caracterizată și prin tripletul ordonat (ρ, θ, z), unde ρ este distanța de la origine la proiecția M' a punctului M în planul xOy, iar θ este unghiul dintre semidreptele Ox și OM' (fig. 67).

Numerele ρ, θ, z se numesc *coordonatele cilindrice* ale punctului M sau coordonate semipolare în spațiu. Între coordonatele cilindrice și coordona-

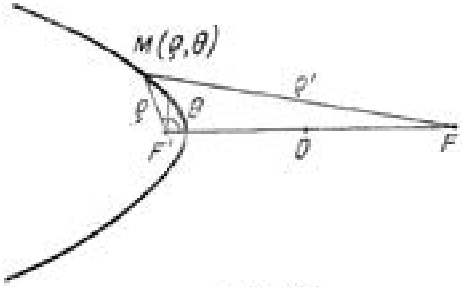


Fig. 66

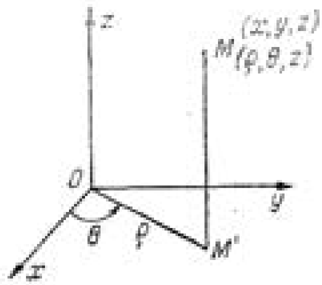


Fig. 67

tele carteziene există relațiile

$$x = \rho\cos\theta$$
$$y = \rho\sin\theta$$
$$z = z.$$

Dacă impunem $\rho > 0$, $\theta \in [0, 2\pi)$, $z \in \mathbb{R}$, atunci relațiile precedente asigură corespondența biunivocă între mulțimea $\mathbb{R}^3 - Oz$ și $(0, \infty) \times [0, 2\pi) \times \mathbb{R}$.

Evident, următoarele ecuații caracterizează respectiv figurile menționate.

$\rho = \rho_0$: cilindru circular cu generatoarele paralele cu Oz.

$\theta = \theta_0$: semiplan a cărui prelungire trece prin Oz.

$z = z_0$: plan paralel cu xOy din care s-a scos punctul $(0, 0, z_0)$.

$\theta = \theta_0$, $z = z_0$: semidreaptă paralelă cu xOy a cărei prelungire trece prin Oz.

$z = z_0$, $\rho = \rho_0$: cerc cu centrul pe Oz și situat într-un plan paralel cu xOy.

$\rho = \rho_0$, $\theta = \theta_0$: dreaptă perpendiculară pe planul xOy.

§3. Coordonate sferice

Uneori poziția unui punct $M \in \mathbb{E}_3^*$ este caracterizată cu ajutorul unui alt triplet ordonat de numere (r, θ, φ), unde r reprezintă distanța $d(O, M)$, θ este unghiul dintre semidreptele Ox și OM', iar φ este unghiul dintre semidreptele Oz și OM (fig. 68).

Numerele r, φ, θ se numesc *coordonatele sferice* ale lui M sau coordonate polare în spațiu. Între coordonatele sferice și cele carteziene ale punctului M, există relațiile

$$x = r\sin\varphi\cos\theta$$
$$y = r\sin\varphi\sin\theta$$
$$z = r\cos\varphi.$$

Dacă impunem restricțiile $r > 0$, $\varphi \in (0, \pi)$, $\theta \in [0,2\pi)$, atunci formulele anterioare asigură corespondența biunivocă între mulțimile $\mathbb{R}^3 - Oz$ și $(0, \infty) \times (0, \pi) \times [0,2\pi)$.

Evident, următoarele ecuații caracterizează respectiv figurile menționate.

$r = r_0$: sfera cu centrul în origine din care au fost scoși polii ;

$\theta = \theta_0$: semiplan a cărui prelungire trece prin Oz.

$\varphi = \varphi_0$: semicon fără vîrf (origine).

$\theta = \theta_0$, $\varphi = \varphi_0$ semidreaptă a cărei prelungire trece prin origine.

$\varphi = \varphi_0$, $r = r_0$: cerc cu centrul pe Oz, situat într-un plan paralel cu xOy.

$r = r_0$, $\theta = \theta_0$: semicerc (mare, deschis).

Probleme. **1.** Față de reperul polar se dau punctele $M_1(\rho_1, \theta_1)$, $M_2(\rho_2, \theta_2)$; să se calculeze lungimea segmentului $[M_1M_2]$.

2. Se dau punctele $A\left(5, \frac{\pi}{3}, 4\right)$, $B\left(7, \frac{4\pi}{3}, -2\right)$, $C\left(2, \frac{5\pi}{6}, -1\right)$ în coordonate cilindrice. Să se arate că A și B aparțin unui plan care trece prin Oz și să se afle coordonatele carteziene ale punctelor A și C, precum și distanța dintre ele.

3 Să se scrie ecuațiile suprafețelor $(x^2+y^2+z^2)^2 = a^2(x^2+y^2)$, $(x^2 + y^2 + z^2)^2(x^2 + y^2) = 4a^2x^2y^2$ în coordonate sferice.

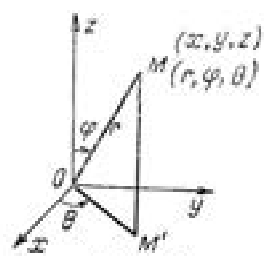


Fig. 68

3

GEOMETRIE DIFERENȚIALĂ

Capitolul 1

NOȚIUNI INTRODUCTIVE

§1. Funcții diferențiabile

1.1. În această parte, prin *funcție diferențiabilă* vom înțelege o funcție de clasă C^{∞}. Clasa de indice minim impusă de context poate fi ușor recunoscută.

1.2. Să considerăm o funcție de tipul $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Funcțiile $f_i = y_i \circ f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, unde y_i sînt funcțiile coordonate ale lui $\mathbb{R}^m$, se numesc *coordonatele euclidiene* ale lui f și se scrie $f = (f_1, \ldots, f_m)$.

Mulțimea

$G(f) = \{(x_1, \ldots, x_n, \ f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_m(x_1, \ldots, x_n)) \mid (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n\} \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \equiv \mathbb{R}^{n+m}$ se numește *graficul* funcției $f = (f_1, \ldots, f_m)$. Evident $G(f)$ coincide cu mulțimea valorilor funcției $(x_1, \ldots, x_n) \to (x_1, \ldots, x_n, \ f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_m(x_1, \ldots, x_n))$.

Funcția $f = (f_1, \ldots, f_m)$ este diferențiabilă dacă și numai dacă f_i sînt funcții diferențiabile. Unei funcții diferențiabile f i se asociază *matricea jacobian*

$$J(f) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} & \ldots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \ldots & \ldots & & \ldots \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_2} & \ldots & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}.$$

Dacă $n = m$, atunci determinantul $\det J(f)$ se numește *jacobianul* lui f și se notează cu $\dfrac{D(f_1, \ldots, f_n)}{D(x_1, \ldots, x_n)}$.

1.3. Funcția $f = (f_1, \ldots, f_m)$ se numește:

1) *injectivă* dacă relațiile $P, Q \in \mathbb{R}^n$, $f(P) = f(Q) \in \mathbb{R}^m$ implică $P = Q$;

2) *surjectivă* dacă $\forall\, Q \in \mathbb{R}^m$, $\exists\, P \in \mathbb{R}^n$ astfel încît $f(P) = Q$;

3) *bijectivă* dacă este injectivă și surjectivă;

4) *imersie* dacă $J(f)$ are rangul n, $\forall\, P \in \mathbb{R}^n$ $(n \leqslant m)$;

5) *submersie* dacă $J(f)$ are rangul m, $\forall\, P \in \mathbb{R}^n (m \leqslant n)$;

6) *regulată* dacă este imersie sau submersie;

7) *difeomorfism* dacă $n = m$, dacă este diferențiabilă și dacă posedă inversă diferențiabilă.

1.4. Dacă funcţia $f = (f_1, \ldots, f_m)$ nu este regulată într-un punct P, atunci P se numeşte *punct singular* sau *punct critic*, iar $f(P)$ se numeşte *valoare singulară* sau *valoare critică*.

1.5. Fie $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ o funcţie diferenţiabilă şi

$$d^2f(P)(dx) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \, \partial x_j}(P) dx_i \, dx_j$$

hessiana sa (*diferenţiala de ordinul doi*). Fie P un punct critic al lui f. Dacă forma pătratică $d^2f(P)$ este nedegenerată, adică $\det\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \, \partial x_j}(P)\right] \neq 0$, atunci P se numeşte *punct critic nedegenerat*. În caz contrar P se numeşte *punct critic degenerat*.

Punctele critice nedegenerate ale unei funcţii diferenţiabile $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *sînt izolate*.

1.6. Teorema funcţiei inverse. Fie $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ o funcţie diferenţiabilă. Dacă $P \in \mathbb{R}^n$ este un punct în care $\det J(f) \neq 0$, atunci există o vecinătate $\mathbb{D}$ a lui P astfel încît restricţia lui f la $\mathbb{D}$ să fie un difeomorfism.

1.7. Teorema funcţiei implicite. Fie $f = (f_1, \ldots, f_m): \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}^m$ o funcţie diferenţiabilă. Dacă în $(A, B) \in \mathbb{R}^{n+m}$ avem $f(A, B) = 0$ şi $\frac{D(f_1, \ldots, f_m)}{D(y_1, \ldots, y_m)}(A, B) \neq 0$, atunci există o vecinătate $\mathbb{D}$ a lui A şi o funcţie diferenţiabilă (unică) $g: \mathbb{D} \to \mathbb{R}^m$ astfel încît $g(A) = B$ şi $f(P, g(P)) = 0$, $\forall P \in \mathbb{D}$.

1.8. Pentru definiţia diferenţiabilităţii nu este necesar ca domeniul de definiţie al funcţiei să fie toată mulţimea $\mathbb{R}^n$, dar este necesar ca acest domeniu să fie o mulţime deschisă în $\mathbb{R}^n$.

Fie S o mulţime oarecare din $\mathbb{R}^n$. O funcţie $f: S \to \mathbb{R}^m$ se numeşte diferenţiabilă pe S dacă poate fi extinsă diferenţiabil la un interval deschis din $\mathbb{R}^n$ care conţine pe S.

1.9. Fie I un interval din $\mathbb{R}$ şi $f: I \to \mathbb{R}^m$. În acest caz noţiunea de derivată parţială se reduce la noţiunea de derivată de la funcţiile de o singură variabilă. De asemenea, au sens şi noţiunile de derivată la stînga şi derivată la dreapta.

Exemplu. Fie funcţia $F: \mathbb{D} \to \mathbb{R}^3$, unde $F(u, v) = (u^2, uv, v^2)$, iar $\mathbb{D}: u > 0, v > 0$. Deoarece, $\forall (u, v) \in \mathbb{D}$, matricea

$$J(F) = \begin{bmatrix} 2u & 0 \\ v & u \\ 0 & 2v \end{bmatrix}$$

are rangul doi, aplicaţia F este o imersie.

Din $(u_1^2, u_1v_1, v_1^2) = (u_2^2, u_2v_2, v_2^2)$ rezultă $u_1 = u_2$ şi $v_1 = v_2$, adică $(u_1, v_1) = (u_2, v_2)$. Deci F este injectivă.

Notînd $x = u^2, y = uv, z = v^2$, observăm că $F(\mathbb{D})$ este porţiunea din cuadrica $y^2 = xz$ cuprinsă în primul octant. Rotaţia

$$\begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{2}(z' - x') \\ y = y' \\ z = \frac{\sqrt{2}}{2}(x' + z') \end{cases}$$

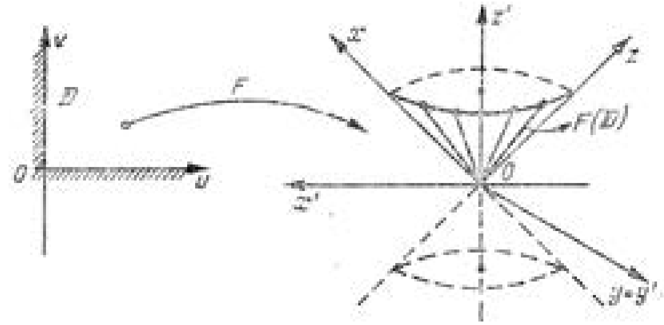


Fig. 1

ne conduce la ecuația canonică

$$\frac{x'^2}{2} + y'^2 - \frac{z'^2}{2} = 0$$

și deci cuadrica $y^2 = xz$ este un con (fig. 1).

Dacă ne restringem la $F(\mathbb{D}) \subset \mathbb{R}^3$, atunci $F : \mathbb{D} \to F(\mathbb{D})$ este o bijecție. Expresia inversei $F^{-1} : F(\mathbb{D}) \to \mathbb{D}$ se obține din

$$u^2 = x,\ uv = y,\ v^2 = z.$$

Găsim $u = \sqrt{x}$, $v = \sqrt{z}$ și deci

$$F^{-1} : F(\mathbb{D}) \to \mathbb{D},\ F^{-1}(x, y, z) = (\sqrt{x}, \sqrt{z}),$$

care este o funcție continuă.

§2. Vectori tangenți. Cîmpuri vectoriale

Fie $\mathbb{R}^n$ spațiul vectorial (real) euclidian canonic cu dimensiunea n. Ca orice spațiu vectorial euclidian, $\mathbb{R}^n$ este implicit un spațiu punctual euclidian.

Fie P și Q două puncte oarecare din $\mathbb{R}^n$ și $\overrightarrow{PQ}$ *vectorul tangent* la $\mathbb{R}^n$ în punctul P. În spațiile $\mathbb{R}, \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$ acesta se reprezintă grafic printr-o ***săgeată*** care începe din punctul P și se termină în punctul Q (fig. 2).

Punctul $\vec{v} = Q - P$ se numește *partea vectorială* a vectorului tangent și în loc de (P, Q) putem nota $\vec{v}_P$ sau chiar $\vec{v}$ dacă punctul de aplicație se subînțelege.

Doi vectori tangenți $\vec{v}_P$ și $\vec{w}_Q$ se numesc *egali* dacă au aceeași parte vectorială, $\vec{v} = \vec{w}$, și același punct de aplicație, $P = Q$. Doi vectori $\vec{v}_P$ și $\vec{w}_Q$ care au aceeași parte vectorială, $\vec{v} = \vec{w}$, dar care au puncte de aplicație diferite se numesc *paraleli* (fig. 3).

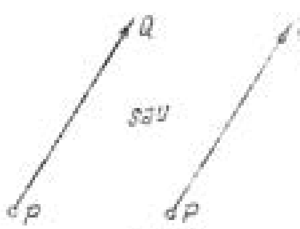


Fig. 2

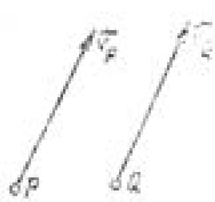


Fig. 3

Fixăm un punct $P \in \mathbb{R}^n$ și considerăm toți vectorii tangenți la $\mathbb{R}^n$ în P. Mulțimea tuturor vectorilor tangenți la $\mathbb{R}^n$ în P se numește *spa-*

țiul tangent la $\mathbb{R}^n$ în P și se notează cu $T_P\mathbb{R}^n$ (fig. 4). Spațiul tangent se organizează ca *spațiu vectorial* cu operațiile

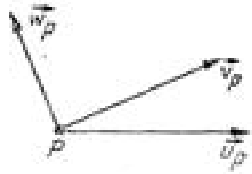


Fig. 4

$$\vec{v}_P + \vec{w}_P = (\vec{v} + \vec{w})_P$$

$$r\vec{v}_P = (r\vec{v})_P.$$

Astfel, ca spațiu vectorial, $T_P\mathbb{R}^n$ este izomorf cu $\mathbb{R}^n$, izomorfismul fiind dat de corespondența $\vec{v} \leftrightarrow \vec{v}_P$.

Produsul scalar în $T_P\mathbb{R}^n$ se definește astfel

$$(\vec{v}_P, \vec{w}_P) = (\vec{v}, \vec{w}).$$

În particular, *norma (lungimea)* vectorului $\vec{v}_P$ este numărul $\|\vec{v}_P\| = \|\vec{v}\|$. Un vector de lungime unu se numește *vector unitate* sau *versor*. Dacă $(\vec{v}, \vec{w}) = 0$, atunci vectorii tangenți $\vec{v}_P, \vec{w}_P$ se numesc *ortogonali*.

Din inegalitatea Cauchy-Schwarz rezultă

$$-1 \leqslant \frac{(\vec{v}, \vec{w})}{\|\vec{v}\|\,\|\vec{w}\|} \leqslant 1.$$

De aceea putem defini *unghiul* φ dintre doi vectori tangenți nenuli $\vec{v}_P$ și $\vec{w}_P$ prin (fig. 5)

$$\cos\varphi = \frac{(\vec{v}, \vec{w})}{\|\vec{v}\|\,\|\vec{w}\|},\ \varphi \in [0, \pi].$$

Un sistem ordonat de n vectori unitate, reciproc ortogonali, tangenți la $\mathbb{R}^n$ în P, se numește *reper* în punctul P. Dacă $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n\}$ este un reper în punctul $P \in \mathbb{R}^n$, atunci $\forall\, \vec{v} \in T_P\mathbb{R}^n$ putem scrie

$$\vec{v} = (\vec{v}, \vec{e}_1)\vec{e}_1 + (\vec{v}, \vec{e}_2)\vec{e}_2 + \ldots + (\vec{v}, \vec{e}_n)\vec{e}_n.$$

Numerele reale $v_i = (\vec{v}, \vec{e}_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, se numesc *coordonatele* lui $\vec{v}$ în raport cu reperul fixat și sînt mărimi algebrice ale unor proiecții.

Reperul $(1, 0, \ldots, 0)_P, (0, 1, \ldots, 0)_P, \ldots, (0, 0, \ldots, 1)_P$ se numește *reper natural*, iar coordonatele unui vector în raport cu acest reper se numesc *coordonate euclidiene*.

Fie
$$\begin{aligned} \vec{v}_2 &= v_{21}\vec{e}_1 + v_{22}\vec{e}_2 + \ldots + v_{2n}\vec{e}_n, \\ &\vdots \\ \vec{v}_n &= v_{n1}\vec{e}_1 + v_{n2}\vec{e}_2 + \ldots + v_{nn}\vec{e}_n, \end{aligned}$$
$n - 1$ vectori din $T_P\mathbb{R}^n$.

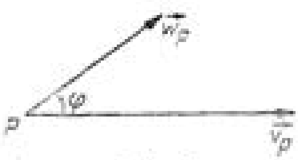


Fig. 5

2.1. *Definiție.* Vectorul

$$\vec{v}_2 \times \ldots \times \vec{v}_n = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \ldots & \vec{e}_n \\ v_{21} & v_{22} & \ldots & v_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ v_{n1} & v_{n2} & \ldots & v_{nn} \end{vmatrix} \in T_P\mathbb{R}^n,$$

unde membrul doi este un determinant simbolic ce se dezvoltă după prima linie, se numește produsul vectorial dintre $\vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$.

Evident, $\vec{v}_2 \times \ldots \times \vec{v}_n$ este perpendicular pe fiecare dintre vectorii $\vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$.

Considerăm acum n vectori $\vec{v}_i \in T_P\mathbb{R}^n$.

2.2. *Definiție. Numărul*

$$(\vec{v}_1, \vec{v}_2 \times \ldots \times \vec{v}_n)$$

se numește produsul mixt al celor n vectori.

Dacă

$\vec{v}_1 = (r_{11}, r_{12}, \ldots, r_{1n}),\ \vec{v}_2 = (r_{21}, r_{22}, \ldots, r_{2n}), \ldots, \vec{v}_n = (r_{n1}, r_{n2}, \ldots, r_{nn})$, atunci

$$(\vec{v}_1, \vec{v}_2 \times \ldots \times \vec{v}_n) = \begin{vmatrix} r_{11} & r_{12} & \ldots & r_{1n} \\ r_{21} & r_{22} & \ldots & r_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ r_{n1} & r_{n2} & & r_{nn} \end{vmatrix}.$$

Modulul acestui număr reprezintă volumul n-paralelipipedului construit pe vectorii de mai sus.

În $\mathbb{R}^3$ reperul natural este $\vec{i}_P = (1, 0, 0)_P$, $\vec{j}_P = (0, 1, 0)_P$, $\vec{k}_P = (0, 0, 1)_P$. În acest caz se poate vorbi despre produsul vectorial a doi vectori tangenți

$\vec{v}_P = v_1\vec{i}_P + v_2\vec{j}_P + v_3\vec{k}_P$ și $\vec{w}_P = w_1\vec{i}_P + w_2\vec{j}_P + w_3\vec{k}_P$,

$$\vec{v}_P \times \vec{w}_P = \begin{vmatrix} \vec{i}_P & \vec{j}_P & \vec{k}_P \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}, \text{ (fig. 6).}$$

2.3. *Definiție. O funcție $\vec{V}$ care asociază fiecărui punct P al lui $\mathbb{R}^n$ un vector $\vec{V}(P)$ tangent la $\mathbb{R}^n$ în P se numește cîmp vectorial.*

Dacă funcția $\vec{V}$ este constantă, atunci cîmpul se numește *paralel*. Mulțimea valorilor unui cîmp paralel se identifică cu un vector liber.

Cîmpurile paralele $\vec{U}_1, \vec{U}_2, \ldots, \vec{U}_n$ definite prin $\vec{U}_1(P) = (1, 0, \ldots, 0)_P$, $\vec{U}_2(P) = (0, 1, \ldots, 0)_P, \ldots, \vec{U}_n(P) = (0, 0, \ldots, 1)_P$, se numesc *cîmpuri fundamentale*, iar ansamblul lor se numește *cîmpul reperului natural*.

2.4. Teoremă. Dacă $\vec{V}$ este un cîmp vectorial pe $\mathbb{R}^n$, atunci există n funcții reale $v_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, astfel incît

$$\vec{V} = v_1\vec{U}_1 + v_2\vec{U}_2 + \ldots + v_n\vec{U}_n.$$

Funcțiile v_i se numesc *coordonatele euclidiene* ale cîmpului $\vec{V}$.

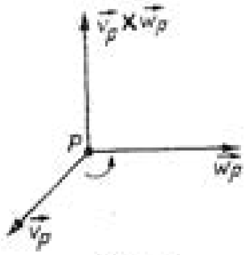


Fig. 6

Demonstrație. Prin definiție $\vec{V}$ asociază lui P un vector $\vec{V}(P)$ tangent la $\mathbb{R}^n$ în P. Deoarece partea vectorială a lui $\vec{V}(P)$ depinde de P, ea poate fi scrisă în forma $(v_1(P), v_2(P), \ldots, v_n(P))$ și astfel obținem funcțiile $v_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \ldots, n$. În plus, $\forall\, P$, avem

$$\vec{V}(P) = (v_1(P), v_2(P), \ldots, v_n(P))_P = v_1(P)(1, 0, \ldots, 0)_P +$$

$$+ v_2(P)(0, 1, \ldots, 0)_P + \ldots + v_n(P)(0, 0, \ldots, 1)_P = v_1(P)\vec{U}_1(P) +$$

$$+ v_2(P)\vec{U}_2(P) + \ldots + v_n(P)\vec{U}_n(P).$$

Aceasta înseamnă că, $\forall\, P$, cîmpurile vectoriale $\vec{V}$ și $\sum_{i=1}^{n} v_i \vec{U}_i$ sînt egale. Deci $\vec{V} = \sum_{i=1}^{n} v_i \vec{U}_i$. Evident funcțiile v_i sînt unic determinate.

În particular, orice vector tangent $\vec{v}_P$ se reprezintă în forma $\vec{v}_P = \sum_{i=1}^{n} v_i \vec{U}_i(P)$.

Algebra cîmpurilor vectoriale se construiește pe baza următoarelor operații definite punctual:

$$(\vec{V} + \vec{W})(P) = \vec{V}(P) + \vec{W}(P),$$

$$(f\vec{V})(P) = f(P)\vec{V}(P).$$

De asemenea *produsul scalar* al cîmpurilor vectoriale $\vec{V}$ și $\vec{W}$ se definește prin

$$(\vec{V}, \vec{W})(P) = (\vec{V}(P), \vec{W}(P)).$$

Produsul vectorial al cîmpurilor $\vec{V}_2, \ldots, \vec{V}_n$ se definește prin $(\vec{V}_2 \times \ldots \times \vec{V}_n)(P) = \vec{V}_2(P) \times \ldots \times \vec{V}_n(P)$. Produsul mixt al cîmpurilor $\vec{V}_1, \vec{V}_2, \ldots, \vec{V}_n$ de definește prin $(\vec{V}_1, \vec{V}_2 \times \ldots \times \vec{V}_n)(P) = (\vec{V}_1(P), \vec{V}_2(P) \times \ldots \times \vec{V}_n(P))$.

Operațiile definite anterior punctual se pot exprima prin operații asupra funcțiilor coordonate ale cîmpurilor respective. De asemenea facem observația că în baza teoremei 2.4, orice cîmp vectorial $\vec{V}$ din $\mathbb{R}^n$ este echivalent cu o aplicație de tipul $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. De aceea apare naturală definiția: $\vec{V}$ se numește *diferențiabil* dacă coordonatele sale sînt diferențiabile. În continuare presupunem că folosim numai cîmpuri vectoriale diferențiabile.

Să presupunem că ne situăm în $\mathbb{R}^3$. În acest caz cîmpul reperului natural $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ este definit prin (fig. 7):

$$\vec{i}(P) = \vec{i}_P = (1, 0, 0)_P, \ \vec{j}(P) = \vec{j}_P = (0, 1, 0)_P, \ \vec{k}(P) = \vec{k}_P = (0, 0, 1)_P.$$

Orice cîmp vectorial din spațiu se scrie în forma (fig. 8)

$$\vec{V} = v_1(x, y, z)\vec{i} + v_2(x, y, z)\vec{j} + v_3(x, y, z)\vec{k}.$$

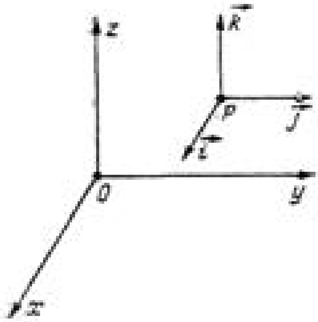


Fig. 7

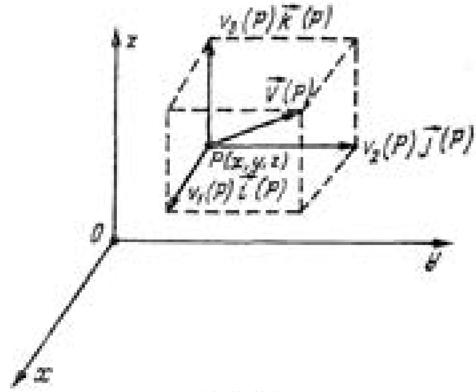


Fig. 8

În spaţiul $\mathbb{R}^3$ se poate defini produsul vectorial a două cîmpuri $\vec{V}$ şi $\vec{W}$ şi anume

$$(\vec{V} \times \vec{W})(P) = \vec{V}(P) \times \vec{W}(P).$$

2.5. Exemplu (fig. 9). Fie q_0 o sarcină electrică situată în punctul O. Forţa $\vec{E}$ cu care sarcina q_0 acţionează asupra sarcinii $q = +1$ (unitate de sarcină electrică în SI, 1 coulomb = 1A·s) situată în punctul arbitrar P este (vezi legea Coulomb)

$$\vec{E}(P) = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \frac{q_0}{\|\vec{r}\|^3} \vec{r},$$

unde $\vec{r}$ este vectorul de poziţie al punctului P în raport cu O, iar ε este permitivitatea mediului în care sînt plasate sarcinile.

Funcţia $P \to \vec{E}(P)$ se numeşte *cîmp electrostatic* produs de sarcina q_0. Domeniul pe care este definit acest cîmp este $\mathbb{R}^3 - \{O\}$.

§ 3. Derivata covariantă

Presupunem că toate funcţiile utilizate sînt diferenţiabile (de clasă C^∞).

I. Fie $\mathbb{D}$ o mulţime deschisă din $\mathbb{R}^n$ şi $f : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$ o funcţie reală. Fie $P \in \mathbb{D}$ şi $\vec{v}$ un vector tangent la $\mathbb{D}$ în punctul P. Fixăm intervalul $I \ni t$ astfel încît $P + tV \in \mathbb{D}$, unde V este punctul corespunzător vectorului $\vec{v}$. Evident $t \to P + tV$ reprezintă restricţia unei drepte şi dacă f este diferenţiabilă, atunci funcţia compusă $t \to f(P + tV)$ este tot diferenţiabilă.

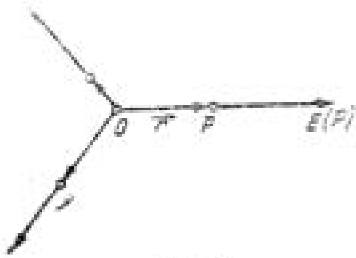


Fig. 9

3.1. *Definiţie. Numărul*

$$D_{\vec{v}} f(P) = \frac{d}{dt} f(P + tV)\Big|_{t=0}$$

se numeşte derivata lui f în raport cu $\vec{v}$.

Numărul $D_{\vec{v}} f(P)$ indică cantitativ schimbarea lui $f(P)$ cînd P se mişcă în sensul lui $\vec{v}$. Dacă $\vec{v}$ este un versor, atunci $D_{\vec{v}} f$ poartă numele de *derivata lui f după direcţia* $\vec{v}$.

3.2. Lemă. Dacă $\vec{v}_P = (v_1, \ldots, v_n)_P$, atunci

$$D_{\vec{v}} f(P) = v_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(P) + \ldots + v_n \frac{\partial f}{\partial x_n}(P) = (\vec{v}, \nabla f(P)) = df(P)(\vec{v}),$$

unde ∇f este gradientul lui f, iar df este diferențiala lui f.

Demonstrația este imediată ca urmare a teoremei de derivare a unei funcții compuse.

Utilizînd inegalitatea Schwarz

$$|D_{\vec{v}} f(P)| = |(\vec{v}, \nabla f(P)| \leqslant \|\vec{v}\| \|\nabla f(P)\|$$

în care egalitatea are loc dacă și numai dacă $\vec{v}$ și $\nabla f(P)$ sînt coliniari, rezultă că $\vec{v} \to D_{\vec{v}} f(P)$ are un minim (maxim) egal cu $-\|\vec{v}\| \|\nabla f(P)\|$ (respectiv $\|\vec{v}\| \|\nabla f(P)\|$) dacă $\vec{v}$ are sensul și direcția lui $-\nabla f(P)$ (respectiv $\nabla f(P)$). Astfel, $-\nabla f(P)$ (respectiv $\nabla f(P)$) indică local direcția și sensul în care f descrește (crește) cel mai repede.

3.3. Teoremă. Fie $f, g : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$, $\vec{v}, \vec{w} \in T_P\mathbb{D}$ și $a, b \in \mathbb{R}$. Avem

$$D_{a\vec{v}+b\vec{w}} f(P) = aD_{\vec{v}} f(P) + bD_{\vec{w}} f(P)$$

$$D_{\vec{v}}(af + bg)(P) = aD_{\vec{v}} f(P) + bD_{\vec{v}} g(P)$$

$$D_{\vec{v}}(fg)(P) = g(P)D_{\vec{v}} f(P) + f(P)D_{\vec{v}} g(P).$$

Demonstrația se bazează pe lema 3.2 și pe proprietățile gradienților.

Folosind noțiunea precedentă putem defini acțiunea unui cîmp vectorial $\vec{V}$ asupra unei funcții f (ambele definite pe $\mathbb{D}$) ca fiind funcția cu valori reale notată cu $D_{\vec{V}} f$ și a cărei valoare în fiecare punct $P \in \mathbb{D}$ este numărul $D_{\vec{V}(P)} f(P)$. Funcția $D_{\vec{V}} f$ se numește *derivata funcției f în raport cu cîmpul* $\vec{V}$. În particular, pentru cazul $n = 3$, avem

$$D_{\vec{i}} f = \frac{\partial f}{\partial x}, \ D_{\vec{j}} f = \frac{\partial f}{\partial y}, \ D_{\vec{k}} f = \frac{\partial f}{\partial z}.$$

În baza teoremei 3.3 deducem că derivata $D_{\vec{V}} f$ are următoarele proprietăți

$$D_{f\vec{V}+g\vec{W}} h = fD_{\vec{V}} h + gD_{\vec{W}} h$$

$$D_{\vec{V}}(af + bg) = aD_{\vec{V}} f + bD_{\vec{V}} g$$

$$D_{\vec{V}}(fg) = fD_{\vec{V}} g + gD_{\vec{V}} f.$$

II. Noțiunea pe care o introducem acum generalizează derivata $D_{\vec{v}} f(P)$ și reprezintă o operație asupra cîmpurilor vectoriale. Fie $\vec{W}$ un cîmp

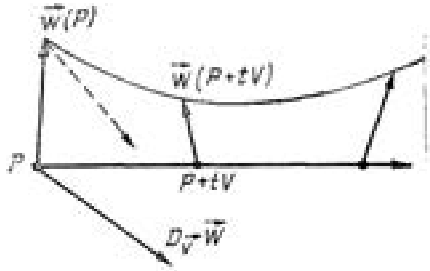


Fig. 10

vectorial definit pe mulțimea deschisă $\mathbb{D}$ din $\mathbb{R}^n$ și $\vec{v}$ un vector tangent la $\mathbb{D}$ în punctul x. Considerăm funcția compusă $t \to \overline{W}(P+tV)$ unde $I \ni t$ este determinat de condiția $P + tV \in \mathbb{D}$.

3.4. *Definiție. Vectorul*

$$D_{\vec{v}}\overline{W}(P) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\overline{W}(P+tV)\Big|_{t=0}$$

tangent la $\mathbb{D}$ în punctul P se numește derivata covariantă a lui $\overline{W}$ în raport cu $\vec{v}$.

Derivata covariantă $D_{\vec{v}}\overline{W}(P)$ măsoară rata inițială a schimbării lui $\overline{W}(P)$ cînd P se mișcă în sensul lui $\vec{v}$(fig. 10).

3.5. Lemă. Dacă $\overline{W} = w_1\vec{U}_1 + \ldots + w_n\vec{U}_n$ și $\vec{v}$ este un vector tangent la $\mathbb{D}$ în punctul P, atunci

$$D_{\vec{v}}\overline{W}(P) = D_{\vec{v}}\, w_1(P)\vec{U}_1(P) + \ldots + D_{\vec{v}}\, w_n(P)\vec{U}_n(P).$$

Demonstrație. Se observă că $\overline{W}(P + tV) = w_1(P + tV)\ \vec{U}_1(P + tV) + \ldots + w_n(P + tV)\ \vec{U}_n(P + tV)$. Pentru a deriva un astfel de cîmp in $t = 0$, se derivează coordonatele sale în $t = 0$. Ținînd seama de definiția 3.1 lema devine evidentă.

Proprietățile derivatei covariante rezultă din lema 3.5 și din proprietățile derivatei $D_{\vec{v}}\, f(P)$ date în teorema 3.3.

3.6. Teoremă. Fie $\overline{V}$ și $\overline{W}$ două cîmpuri vectoriale pe $\mathbb{D}$, fie $\vec{v}$, $\vec{w} \in T_P\mathbb{D}$ și $a, b \in \mathbb{R}$. Avem

$$D_{a\vec{v}+b\vec{w}}\overline{W} = aD_{\vec{v}}\overline{W} + b\, D_{\vec{w}}\overline{W}.$$

$$D_{\vec{v}}(a\overline{V} + b\overline{W}) = aD_{\vec{v}}\overline{V} + bD_{\vec{v}}\overline{W}$$

$$D_{\vec{v}}(f\overline{W}) = (D_{\vec{v}}\, f)\overline{W} + fD_{\vec{v}}\overline{W}$$

$$D_{\vec{v}}(\overline{V}, \overline{W}) = (D_{\vec{v}}\overline{V}, \overline{W}) + (\overline{V}, D_{\vec{v}}\overline{W}).$$

Noțiunea de mai sus se poate extinde considerînd derivata covariantă a unui cîmp vectorial $\overline{W}$ în raport cu cîmpul vectorial $\overline{V}$. Rezultatul este un cîmp vectorial care se notează cu $D_{\overline{V}}\overline{W}$ și a cărui valoare în P este $D_{\overline{V}(P)}\overline{W}(P)$. Dacă $\overline{W} = w_1\vec{U}_1 + \ldots + w_n\vec{U}_n$, atunci $D_{\overline{V}}\overline{W} = (D_{\overline{V}}w_1)\vec{U}_1 + \ldots + (D_{\overline{V}}w_n)\vec{U}_n$. În baza celor precedente rezultă că $D_{\overline{V}}\overline{W}$ are următoarele proprietăți

$$D_{f\vec{V}+g\vec{W}}\vec{Y} = fD_{\vec{V}}\vec{Y} + gD_{\vec{W}}\vec{Y}$$

$$D_{\vec{V}}(a\vec{Y} + b\vec{Z}) = aD_{\vec{V}}\vec{Y} + bD_{\vec{V}}\vec{Z}$$

$$D_{\vec{V}}(f\vec{Y}) = (D_{\vec{V}}f)\vec{Y} + fD_{\vec{V}}\vec{Y}$$

$$D_{\vec{V}}(\vec{Y}, \vec{Z}) = (D_{\vec{V}}\vec{Y}, \vec{Z}) + (\vec{Y}, D_{\vec{V}}\vec{Z}).$$

Observații. 1) Fie derivata covariantă $D_{\vec{V}}\vec{W}$. Rolul lui $\vec{V}$ este algebric, iar $\vec{W}$ se derivează.

2) Derivatele covariante ale cîmpurilor fundamentale $\vec{U}_i$, $i = 1, \ldots, n$ sînt nule.

§ 4. Probleme

1. Fie $P = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Să se arate că

$$\max\{|x_i|, i = 1, \ldots, n\} \leqslant \|P\| \leqslant \sqrt{n}\max\{|x_i|, i = 1, \ldots, n\}.$$

2. Să se arate că pe $\mathbb{R}^n$ nu există nici o distanță diferențiabilă.

3. Fie $P = (x_1, \ldots, x_n)$, $f(P) = a_1x_1^{\alpha_1} + \ldots + a_nx_n^{\alpha_n}$, unde $\alpha_i > 0$, iar $a_1, \ldots, a_n$ este o progresie geometrică cu rația r. Să se calculeze $D_{\vec{v}}f(Q)$ pentru $\vec{v} = \left(\frac{1}{\alpha_1}, \ldots, \frac{1}{\alpha_n}\right)$ și $Q = (1, \ldots, 1)$.

4. Fie cîmpurile vectoriale $X = x_1U_1 + \ldots + x_n\vec{U}_n$ și $\vec{Y} = \frac{\vec{X}}{\|\vec{X}\|}$. Să se determine $D_{\vec{X}}\vec{Y}$.

Capitolul 2

CURBE

CURBE ÎN $\mathbb{R}^n$

§ 1. Definiții și exemple

Fie $\mathbb{R}^n$ spațiul euclidian canonic cu n dimensiuni, $T_P\mathbb{R}^n$ spațiul tangent în punctul P la $\mathbb{R}^n$ și $\mathcal{T}_P : \mathbb{R}^n \to T_P\mathbb{R}^n$ izomorfismul canonic. Notăm cu I

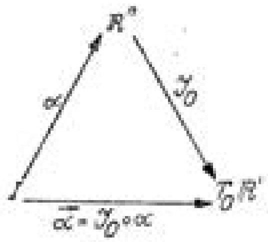


Fig. 11

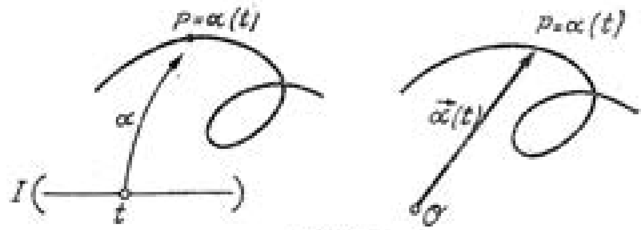


Fig. 12

un interval deschis (alteori închis, semiînchis sau reuniune de intervale) din $\mathbb{R}$.

1.1. *Definiție. O funcție diferențiabilă* $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$ *se numește curbă și se notează cu* α.

Uneori numai imaginea $\alpha(I)$ este numită *curbă*. În acest caz α se numește *parametrizare*, iar $t \in I$ se numește *parametru*. Noi vom folosi ambele accepțiuni ale cuvîntului „*curbă*", semnificația decurgînd din context. De asemenea menționăm că deși considerațiile teoretice se fac în $\mathbb{R}^n$ imaginile grafice aparțin lui $\mathbb{R}^2$ sau $\mathbb{R}^3$.

Observăm compunerea marcată prin figura 11. Rezultă că lui α putem să-i atașăm o funcție și numai una de tipul $\vec{\alpha} : I \to T_O\mathbb{R}^n$, ceea ce permite să privim mulțimea $\alpha(I)$ ca fiind descrisă de extremitatea unui vector variabil $\vec{\alpha}$ cu originea fixată în originea O a lui $\mathbb{R}^n$(fig. 12).

Din definiția lui $\alpha(I)$ rezultă echivalența:

$$P \in \alpha(I) \Leftrightarrow \exists\ t \in I,\ P = \alpha(t).$$

Dacă raportăm pe $\mathbb{R}^n$ la baza canonică, atunci funcțiile α și $\vec{\alpha}$ sînt caracterizate prin coordonatele lor euclidiene:

$$\alpha(t) = (x_1(t),\ x_2(t),\ \ldots,\ x_n(t)),\ t \in I$$

$$\vec{\alpha}(t) = x_1(t)\vec{e}_1 + x_2(t)\vec{e}_2 + \ldots + x_n(t)\vec{e}_n,\ t \in I.$$

Într-un context în care numai imaginea $\alpha(I)$ este numită curbă, relațiile $x_1 = x_1(t),\ x_2 = x_2(t),\ \ldots,\ x_n = x_n(t)$ se numesc *ecuațiile parametrice* ale curbei, iar $\vec{\alpha} = \vec{\alpha}(t)$ se numește *ecuația vectorială* a curbei.

1.2. *Definiție. Un punct P al lui* $\alpha(I)$ *se numește simplu dacă există o singură valoare* $t \in I$ *așa ca* $\alpha(t) = P$. *Dacă există mai multe valori distincte t astfel încît* $\alpha(t) = P$, *atunci punctul P se numește multiplu.*

De exemplu, dacă există numerele $t_1 \neq t_2$ și numai acestea (din I) pentru care $\alpha(t_1) = \alpha(t_2) = Q$, atunci punctul Q se numește *dublu* (fig. 13). Dacă există trei numere distincte t_1, t_2, t_3 și numai acestea (din I) pentru care $\alpha(t_1) = \alpha(t_2) = \alpha(t_3) = Q$, atunci punctul Q se numește triplu (fig. 14).

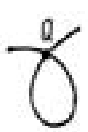


Fig. 13

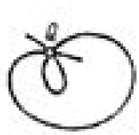


Fig. 14

În general, cardinalul mulțimii $\alpha^{-1}(P)$ se numește *multiplicitatea* punctului P.

Dacă toate punctele unei curbe $\alpha(I)$ sînt simple, atunci după definițiile anterioare, aplicația α este injectivă. De aceea admitem

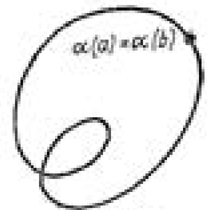


Fig. 15

1.3. *Definiție. O funcție diferențiabilă și injectivă $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$ se numește curbă simplă.*

Să presupunem acum că avem o funcție de tipul $\alpha : [a, b] \to \mathbb{R}^n$. Această funcție se numește diferențiabilă dacă poate fi extinsă diferențiabil la un interval deschis ce conține pe $[a, b]$.

1.4. *Definiție. O funcție diferențiabilă $\alpha : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ pentru care $\alpha(a) = \alpha(b)$ se numește curbă închisă* (fig. 15).

Această definiție nu are același conținut cu definiția topologică a unei mulțimi închise. Într-adevăr, pentru orice curbă $\alpha : [a, b] \to \mathbb{R}^n$, imaginea $\alpha([a, b])$ este închisă în $\mathbb{R}^n$ în sens topologic, deoarece α este implicit o funcție continuă, dar aceasta n-are nici o legătură cu condiția $\alpha(a) = \alpha(b)$.

O curbă închisă pentru care restricția la $[a, b)$ este injectivă se numește *curbă simplă și închisă*.

O curbă $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$ se numește *periodică* dacă există un număr $T > 0$ astfel încît $t + T \in I$, $\alpha(t + T) = \alpha(t)$, $\forall t \in I$. Cel mai mic număr T care se bucură de această proprietate se numește *perioada* lui α. Se poate demonstra că imaginea unei curbe închise admite o reprezentare parametrică periodică.

1.5. Exemple.

1) Fie $P = (p_1, \ldots, p_n)$ și $Q = (q_1, \ldots, q_n) \neq O(0, \ldots, 0)$ două elemente fixate în $\mathbb{R}^n$. Curba $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$,

$$\alpha(t) = P + tQ = (p_1 + tq_1, \ldots, p_n + tq_n),$$

se numește *dreaptă determinată de punctul $P = \alpha(0)$ și direcția Q.*

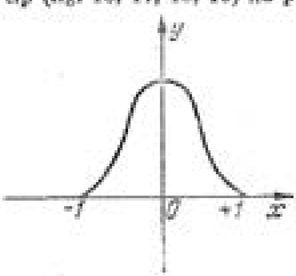
Cele n ecuații parametrice $x_i = p_i + tq_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, sînt echivalente cu $n - 1$ *ecuații carteziene* în $\mathbb{R}^n$,

$$\frac{x_1 - p_1}{q_1} = \ldots = \frac{x_n - p_n}{q_n},$$

cu convenția că dacă un numitor este nul, atunci numărătorul respectiv trebuie egalat cu zero.

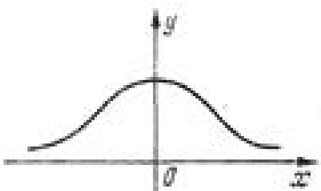
Submulțimea lui $\mathbb{R}^n$ caracterizată prin ecuația carteziană implicită $\sum_{i=1}^{n} q_i(x_i - p_i) = 0$ este *hiperplanul* ce trece prin punctul P și pentru care Q este o direcție normală.

2) Graficul unei funcții diferențiabile de tipul $f : I \to \mathbb{R}$ este o curbă în plan deoarece acest grafic poate fi privit ca imaginea funcției $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$, $\alpha(t) = (t, f(t))$. O curbă de acest tip (fig. 16, 17, 18, 19) nu poate avea puncte multiple, nu poate fi periodică și nici închisă,



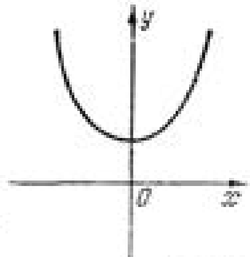
$$y = \begin{cases} 0 & |x| \geq 1 \\ e^{-\frac{1}{1-x^2}} & |x| \leq 1 \end{cases}$$

Fig. 16



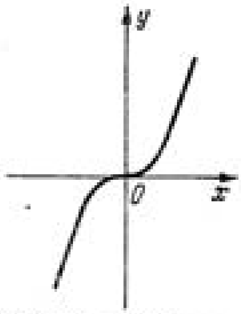
Curba lui Gauss: $y = e^{-x^2}$

Fig. 17



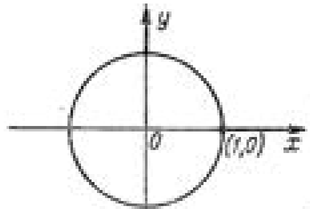
Lănțișor: $y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$

Fig. 18



Parabola cubică : $y = ax^3$

Fig. 19



Cercul: $\alpha(t) = (\cos t, \sin t)$

Fig. 20

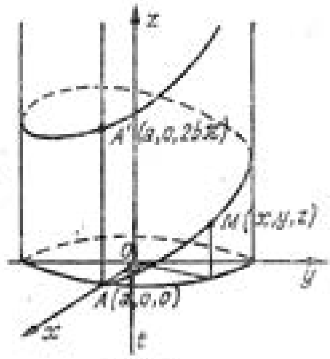


Fig. 21

deoarece $t_1 \neq t_2$ implică existenţa punctelor $(t_1, f(t_1))$ şi $(t_2, f(t_2))$ care nu pot fi identice (au abscise diferite).

$y = f(x)$ se numeşte *ecuaţia carteziană explicită* a curbei $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$, $\alpha(t) = (t, f(t))$, $t \in I$.

În practică se întîlnesc şi curbe de tipul $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$, $\alpha(t) = (g(t), t)$, $t \in I$, cărora le corespund ecuaţii carteziene explicite de forma $x = g(y)$ (vezi § 8).

3) Fie curba $\alpha : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $\alpha(t) = (\cos t, \sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$.

Deoarece $\alpha(0) = \alpha(2\pi) = (1, 0)$, curba este închisă.

Imaginea $\alpha([0, 2\pi])$ este cercul cu centrul în origine şi de rază unu (fig. 20). Restricţia lui α la $[0, 2\pi)$ este injectivă şi deci cercul este o curbă simplă şi închisă.

Să considerăm acum funcţia $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $\alpha(t) = (\cos t, \sin t)$. Evident, imaginea $\alpha(\mathbb{R})$ este tot cercul de rază unu şi cu centrul în origine. Observăm însă că în acest caz, $\alpha(t) = \alpha(t + 2\pi)$ şi de aceea, cercul poate fi privit ca o curbă periodică cu perioada $T = 2\pi$. În acest sens toate punctele cercului sînt puncte multiple.

4) Ne situăm în spaţiul cu trei dimensiuni şi considerăm curbe pentru care cel puţin una dintre coordonate este funcţia identitate (grafice ale funcţiilor de tipul $f : I \to \mathbb{R}^2$) sau funcţia liniară. Ne oprim la cazul $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$, $\alpha(t) = (x(t), y(t), bt)$ deoarece celelalte situaţii sînt analoage. O curbă de acest tip nu poate avea puncte multiple, nu poate fi periodică şi nici închisă deoarece $t_1 \neq t_2$ implică $\alpha(t_1) \neq \alpha(t_2)$ — puncte cu cote diferite.

Pentru concretizare să considerăm curba descrisă de un punct situat pe o suprafaţă cilindrică de rotaţie şi avînd o mişcare compusă dintr-o rotaţie în jurul axei cilindrului şi o translaţie de-a lungul acestei axe, cele două mişcări fiind proporţionale între ele, curbă ce se numeşte *elice circulară* (fig. 21).

Presupunînd că mobilul pleacă din $A(a, 0, 0)$ găsim ecuaţiile parametrice ale curbei, $x = a \cos t$, $y = a \sin t$, $z = bt$, $t \in \mathbb{R}$, unde z reprezintă translaţia, t rotaţia, iar $b =$ const. Curba întîlneşte fiecare generatoare a suprafeţei cilindrice $x^2 + y^2 = a^2$ într-o infinitate de puncte. De exemplu, generatoarea ce trece prin punctul A este întîlnită în punctele de cotă $z = 2nb\pi$, unde n este întreg.

Arcul de curbă cuprins între două puncte consecutive $A(a, 0, 0)$ şi $A'(a, 0, 2b\pi)$ se numeşte *spiră* a elicei, iar lungimea AA' se numeşte *pasul elicei*.

§ 2. Tangenta

Fie $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$ o curbă. Notăm cu t variabila din I şi $\alpha(t) = P$, $\alpha(t + h) = Q$, $t + h \in I$. Construim derivata

$$\overline{\alpha}'(t) = \lim_{h \to 0} \frac{\overline{\alpha}(t + h) - \overline{\alpha}(t)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\overline{PQ}}{h}.$$

Vectorul $\vec{\alpha}'(t)$ cu originea în $\alpha(t) = P$ apare ca poziție limită a vectorului $\overrightarrow{PQ}$, cînd $Q \in \alpha(I)$ se apropie de P și se numește *vector viteză* (fig. 22). Evident $\vec{\alpha}'(t) \in T_{\alpha(t)}\mathbb{R}^n$.

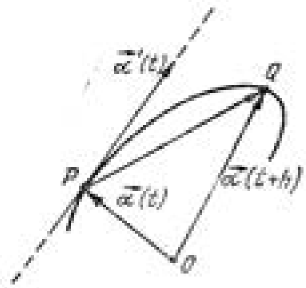


Fig. 22

Dacă raportăm pe $\mathbb{R}^n$ la baza canonică, atunci:

$$\vec{\alpha}'(t) = x_1'(t)\vec{e}_1 + x_2'(t)\vec{e}_2 + \ldots + x_n'(t)\vec{e}_n.$$

2.1. *Definiție. Un punct $P = \alpha(t)$ al curbei α în care $\vec{\alpha}'(t) \neq \vec{0}$ se numește punct regulat. Dacă $\vec{\alpha}'(t) \neq \vec{0}$, $\forall\, t \in I$, atunci curba α se numește regulată.*

Dacă P este un punct regulat, atunci punctul P și vectorul $\vec{\alpha}'(t)$ determină o dreaptă care apare ca limita dreptei PQ cînd $P = \alpha(t)$ este fix, iar Q tinde către P de-a lungul curbei.

2.2. *Definiție. Fie P un punct regulat al curbei α. Dreapta care trece prin P și are ca vector director pe $\vec{\alpha}'(t)$ se numește* ***tangenta la curba α în P.***

Hiperplanul care trece prin P și are drept vector normal pe $\vec{\alpha}'(t)$ se numește ***hiperplan normal la curba α în P*** (fig. 23 și 24).

Pentru elementele descrise anterior avem următoarele ecuații

Tangenta: $\dfrac{x_1 - x_1(t)}{x_1'(t)} = \dfrac{x_2 - x_2(t)}{x_2'(t)} = \ldots = \dfrac{x_n - x_n(t)}{x_n'(t)}$,

Hiperplanul normal: $(x_1 - x_1(t))x_1'(t) + (x_2 - x_2(t))x_2'(t) + \ldots + (x_n - x_n(t))x_n'(t) = 0.$

Un punct al unei curbe poate să nu fie regulat. De aceea admitem

2.3. *Definiție. Un punct $\alpha(t) = P \in \alpha(I)$ corespunzător unei valori a lui t pentru care $\vec{\alpha}'(t) = \vec{0}$ se numește* ***punct singular.***

Observăm că dacă $\vec{\alpha}'(t) = \vec{0}$, $\forall\, t \in J \subset I$, atunci $\vec{\alpha} = \vec{c}$, $\forall\, t \in J$, și astfel restricția lui α la J se reduce la un punct. În consecință, dacă α admite puncte singulare și nu se reduce la constante pe porțiuni, atunci aceste puncte sînt în general izolate. Dacă $\exists\, m > 1$ așa ca $\vec{\alpha}'(t) = \vec{\alpha}''(t) = \ldots = \vec{\alpha}^{(m-1)}(t) = \vec{0}$ și $\vec{\alpha}^{(m)}(t) \neq \vec{0}$, atunci punctul P corespunzător se numește *punct singular de ordinul m*. În vecinătatea unui punct singular de ordinul m formula Taylor dă:

$$\vec{\alpha}(t + h) = \vec{\alpha}(t) + \frac{h^m}{m!}\left[\vec{\alpha}^{(m)}(t) + \vec{\varepsilon}(h)\right],\ t + h \in I \text{ cu } \lim_{h\to 0}\vec{\varepsilon}(h) = \vec{0}.$$

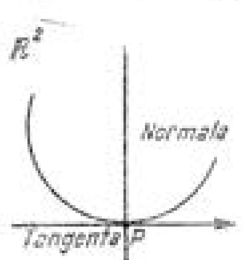


Fig. 23

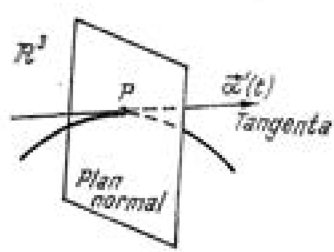


Fig. 24

Notind $P = \alpha(t)$ şi $Q = \alpha(t + h)$ avem

$$\lim_{h\to 0} m\,!\,\frac{\overline{\alpha}(t+h)-\overline{\alpha}(t)}{h^m} = \lim_{h\to 0} m\,!\,\frac{\overline{PQ}}{h^m} = \overline{\alpha}^{(m)}(t).$$

Vectorii $\vec{\alpha}(t)$, $\overline{\alpha}(t+h)$ au originea fixată în O, iar vectorii $\vec{\alpha}'(t)$, $\vec{\alpha}''(t)$ etc. au originea fixată în extremitatea lui $\vec{\alpha}(t)$. Formula Taylor are sens pentru vectorii liberi corespunzători celor legaţi.

Vectorul $\vec{\alpha}^{(m)}(t)$ se numeşte *vector tangent* la curba α în punctul singular P. Punctul P şi vectorul $\vec{\alpha}^{(m)}(t)$ definesc o dreaptă care este limita dreptei PQ cînd $P = \alpha(t)$ este fix, iar Q tinde către P de-a lungul curbei.

2.4. *Definiţie. Fie P un punct singular de ordinul m. Dreapta determinată de punctul P şi vectorul $\vec{\alpha}^{(m)}(t)$ se numeşte tangenta curbei în punctul P.*

Hiperplanul care trece prin P şi are drept vector normal pe $\vec{\alpha}^{(m)}(t)$ se numeşte hiperplan normal la curba α în P.

Sumarul definiţiei 2.4 este următorul

$$\text{Tangenta}: \frac{x_1 - x_1(t)}{x_1^{(m)}(t)} = \frac{x_2 - x_2(t)}{x_2^{(m)}(t)} = \ldots = \frac{x_n - x_n(t)}{x_n^{(m)}(t)},$$

$$\text{Hiperplanul normal}: (x_1 - x_1(t))\, x_1^{(m)}(t) + (x_2 - x_2(t))\, x_2^{(m)}(t) + \ldots$$
$$\ldots + (x_n - x_n(t))x_n^{(m)}(t) = 0.$$

2.5. Observaţii

1) Dacă $\alpha(t) = P$ este un punct regulat, rezultă că într-o vecinătate a lui P, α este injectivă. Dacă $\alpha(t) = P$ este punct singular de ordinul m rezultă că α nu este injectivă într-o vecinătate a lui P.

2) Un punct al unei curbe poate fi simplu şi regulat sau simplu şi singular sau multiplu şi regulat sau multiplu şi singular.

3) Fie $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$, $\beta : J \to \mathbb{R}^n$ două curbe astfel încît $\alpha(I) \cap \beta(J) \neq \emptyset$ şi fie $P \in \alpha(I) \cap \beta(J)$ un punct regulat sau singular de ordinul m. Unghiul dintre vectorii tangenţi la cele două curbe în P se numeşte *unghiul celor două curbe*. Dacă cei doi vectori sînt perpendiculari curbele se numesc *ortogonale*. Dacă unghiul dintre cei doi vectori este zero sau π, atunci curbele se numesc *tangente*.

4) În cinematică o curbă este privită ca fiind traiectoria unui punct material în mişcare. În acest caz variabila t se numeşte *timp*, $\alpha(I)$ se numeşte *traiectorie*, $\vec{\alpha}'(t)$ se numeşte *viteza curbei* la momentul t, iar $\vec{\alpha}''(t)$ se numeşte *acceleraţia curbei* la momentul t.

2.6. Orientare

Pe o curbă dată $\alpha(I)$, presupusă mulţime conexă, se pot stabili două şi numai două sensuri de parcurs (ordine a punctelor curbei care corespunde ordinei din I) pe care convenim să le notăm cu $+$ şi $-$. O curbă α împreună cu o alegere a unui **sens de parcurs** pe $\alpha(I)$ se numeşte *curbă orientată*.

Fie α o curbă **regulată. Dacă** $\vec{\alpha}'(t)$ este vectorul tangent la α în $\alpha(t)$, atunci este natural să **considerăm** drept pozitiv acel sens de parcurs pe $\alpha(I)$ care să fie coerent cu sensul lui $\vec{\alpha}'(t)$ şi deci cu sensul pozitiv pe tangentă (vezi orientarea unei drepte).

Convenim să precizăm orientarea unei curbe şi a tangentei sale prin săgeţi (fig. 25).

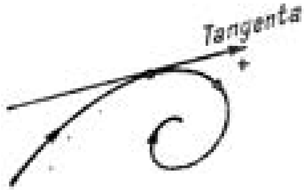


Fig. 25

Fig. 26

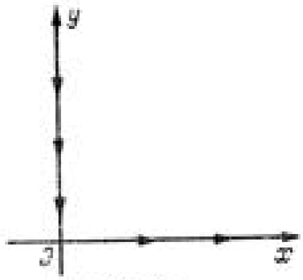


Fig. 27

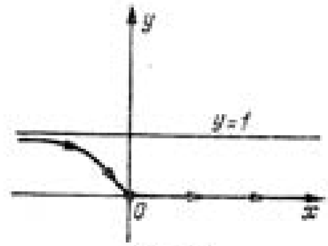


Fig. 28

Dacă α posedă puncte singulare, atunci există situaţii cînd nu este posibil să alegem pe curbă un sens de parcurs coerent cu cel de pe tangentă (fig. 26).

2.7. Exemple

1) Curbele din $\mathbb{R}^2$ care se pot reprezenta printr-o **ecuaţie carteziană explicită** $y = f(x)$ sînt regulate. Într-adevăr din $\alpha(t) = (t, f(t))$ construim $\vec{\alpha} = t\vec{i} + f(t)\vec{j}$ şi deci $\vec{\alpha}' = \vec{i} + f'(t)\vec{j}$ nu se anulează, $\forall\, t \in I$ (fig. 16, 17, 18, 19).

2) Fie curba plană (fig. 27)

$$\alpha(t) = \begin{cases} (0,\ e^{1/t}) & t < 0 \\ (0,\ 0) & t = 0 \\ (e^{-1/t},\ 0) & t > 0. \end{cases}$$

Observăm că în $t = 0$, aplicaţia $\alpha(t)$ nu este o **imersie. De** aceea punctul $O\ (0, 0)$ este un punct singular. Mai mult, observăm că în acest punct singular avem $\vec{\alpha}'(0) = \vec{\alpha}''(0) = \ldots \vec{\alpha}^{(m)}(0) = \ldots = (0, 0)$.

Pentru fiecare m întreg, putem considera curba (fig. 28 pentru $m = 1$)

$$\alpha_m(t) = \begin{cases} (t^m,\ e^{1/t}) & t < 0 \\ (0,\ 0) & t = 0 \\ (t^m + e^{-1/t},\ 0) & t > 0. \end{cases}$$

Observăm că în acest caz avem:

$$\vec{\alpha}_m'(0) = \vec{\alpha}_m''(0) = \ldots = \vec{\alpha}_m^{(m-1)}(0) = \vec{\alpha}_m^{(m+1)}(0) = \ldots = (0, 0) \text{ şi } \vec{\alpha}_m^{(m)}(0) = (m\,!,\ 0).$$

Pentru $m = 1$, originea este un punct regulat (fig. 28). Pentru $m > 1$, originea este un punct singular de ordinul m.

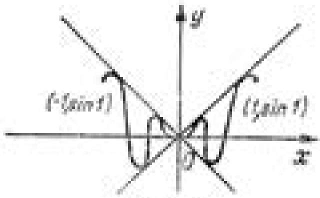


Fig. 29

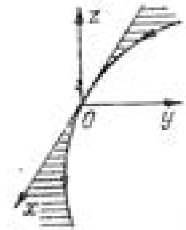


Fig. 30

3) Aplicaţia $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ definită prin

$$\alpha(t) = \begin{cases} (e^{-1/t},\ e^{-1/t} \sin e^{1/t}) & t > 0 \\ (0, 0) & t = 0 \\ (-e^{-1/t}, e^{1/t} \sin e^{-1/t}) & t < 0 \end{cases}$$

are o imagine cuprinsă între dreptele $y = \pm x$, avînd o infinitate de tangente în $(0, 0)$. De asemenea, observăm că α este diferenţiabilă şi $\vec{\alpha}'(0) = \vec{\alpha}''(0) = \ldots = \vec{\alpha}^{(m)}(0) = \ldots = (0, 0)$. De aceea originea este un punct singular (fig. 29). Punctele $(-1, \sin 1)$, $(1, \sin 1)$ sînt puncte asimptotice (vezi § 4).

4) În $\mathbb{R}^3$ considerăm curbe de tipul $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$, $\alpha(t) = (x(t), y(t), t)$. Ele sînt regulate. Într-adevăr avem $\vec{\alpha} = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + t\vec{k}$ şi deci $\vec{\alpha}'(t) = x'(t)\vec{i} + y'(t)\vec{j} + \vec{k}$, care nu se anulează, $\forall t \in I$ (vezi fig. 21).

Aceeaşi proprietate o au şi curbele $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$, $\alpha(t) = (x(t),\ t,\ z(t))$ sau $\alpha(t) = (t, y(t), z(t))$. Pentru exemplificare fie curba dată prin

$$\alpha(t) = \begin{cases} (t,\ 0,\ e^{1/t}) & t < 0 \\ (0, 0, 0) & t = 0 \\ (t,\ e^{-1/t},\ 0) & t > 0. \end{cases}$$

Observăm că arcul $t \leqslant 0$ este situat în planul xOz, iar arcul $t \geqslant 0$ este situat în planul xOy (fig. 30). Observăm că α este o curbă regulată pentru care

$$\vec{\alpha}'(0) = (1, 0, 0),\quad \vec{\alpha}''(0) = \ldots = \vec{\alpha}^{(m)}(0) = \ldots = (0, 0, 0).$$

§ 3. Cîmpuri vectoriale pe o curbă

Noţiunea de cîmp vectorial pe o curbă este o variantă a noţiunii generale de cîmp vectorial.

Fie $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$ o curbă şi $P = \alpha(t)$, $t \in I$, un punct arbitrar al său.

3.1. *Definiţie. O funcţie* Y *care asociază fiecărui* $t \in I$ *un vector* $\vec{Y}(t)$ *tangent la* $\mathbb{R}^n$ *în punctul* $\alpha(t)$ se numeşte *cîmp vectorial* pe curba α (fig. 31).

Evident, viteza $\vec{\alpha}'$ este un cîmp vectorial pe curba α. Acest cîmp se mai numeşte şi *cîmp tangent* la curba α (fig. 32).

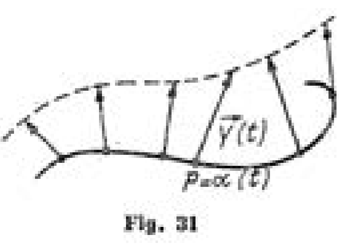


Fig. 31

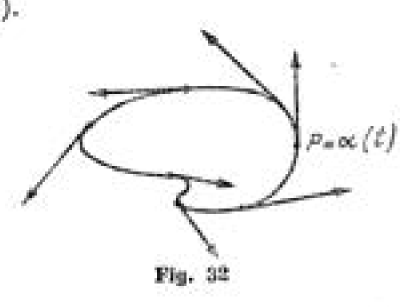


Fig. 32

Precizăm însă că spre deosebire de $\vec{\alpha}'$, cîmpurile vectoriale arbitrare pe α pot să conţină sau nu vectori al căror suport să fie tangent la curbă (fig. 31).

Proprietăţile cîmpurilor vectoriale pe curbe sînt analoage cu cele ale cîmpurilor vectoriale pe $\mathbb{R}^n$. Astfel avem

$$\vec{Y}(t) = y_1(t)\vec{e}_1(\alpha(t)) + y_2(t)\vec{e}_2(\alpha(t)) + \ldots + y_n(t)\vec{e}_n(\alpha(t)),$$

funcţiile $y_i : I \to \mathbb{R}$ numindu-se *coordonatele euclidiene* ale lui $\vec{Y}$.

Funcţiile compuse $\vec{e}_1(\alpha(t)), \ldots, \vec{e}_n(\alpha(t))$ sînt cîmpuri vectoriale pe α. Aceste cîmpuri vor fi notate pe scurt cu $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$.

Pentru cîmpurile $\vec{Y}(t)$ admitem definiţiile:

$$(\vec{Y} + \vec{Z})(t) = \vec{Y}(t) + \vec{Z}(t)$$

$$(f\vec{Y})(t) = f(t)\,\vec{Y}(t)$$

$$(\vec{Y}, \vec{Z})(t) = (\vec{Y}(t), \vec{Z}(t))$$

$$(\vec{Y} \times \vec{Z})(t) = \vec{Y}(t) \times \vec{Z}(t).$$

Evident aceste operaţii se traduc prin operaţii asupra coordonatelor cîmpurilor.

3.2. *Definiţie. Fie α o curbă regulată şi $\vec{Y}$ un cîmp vectorial pe α. Dacă $(\vec{Y}, \vec{\alpha}') = 0$, atunci $\vec{Y}$ se numeşte cîmp normal la α.*

Deoarece $\vec{Y}(t) = y_1(t)\vec{e}_1 + y_2(t)\vec{e}_2 + \ldots + y_n(t)\vec{e}_n$, deducem că orice cîmp Y este echivalent cu o aplicaţie de tipul $F : I \to \mathbb{R}^n$. De aceea apare naturală definiţia: $\vec{Y}$ se numeşte *diferenţiabil* dacă coordonatele sale sînt diferenţiabile. De asemenea precizăm că derivata unui cîmp $\vec{Y}$,

$$\vec{Y}' = \frac{dy_1}{dt}\vec{e}_1 + \frac{dy_2}{dt}\vec{e}_2 + \ldots + \frac{dy_n}{dt}\vec{e}_n,$$

este tot un cîmp pe curba α. În particular, derivata $\vec{\alpha}''$ a cîmpului viteză $\vec{\alpha}'$ asociat lui α dă *cîmpul acceleraţie*. În general acceleraţia nu este dirijată după tangenta la curbă. Avem

$$(a\vec{Y} + b\vec{Z})' = a\vec{Y}' + b\vec{Z}', \; a, b \in \mathbb{R}$$

$$(f\vec{Y})' = f'\vec{Y} + f\vec{Y}'$$

$$(\vec{Y}, \vec{Z})' = (\vec{Y}', \vec{Z}) + (\vec{Y}, \vec{Z}')$$

$$(\vec{Y} \times \vec{Z})' = \vec{Y}' \times \vec{Z} + \vec{Y} \times \vec{Z}'.$$

Penultima formulă arată că dacă $(\vec{Y}, \vec{Z}) = \text{const.}$, atunci $(\vec{Y}', \vec{Z}) + (\vec{Y}, \vec{Z}') = 0$. În particular, dacă $\vec{Y}$ are lungimea constantă, atunci $\vec{Y}$ şi $\vec{Y}'$ sînt ortogonali în orice punct (fig. 33). Într-adevăr relaţia $\|\vec{Y}\|^2 = (\vec{Y}, \vec{Y}) = \text{const.}$, implică $(\vec{Y}, \vec{Y}') = 0$.

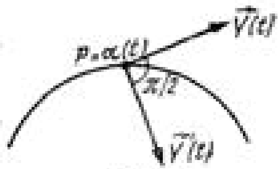


Fig. 33

De aceea dacă ne imaginăm că α este traiectoria

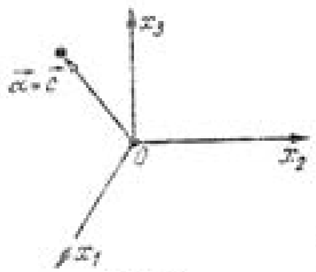


Fig. 34

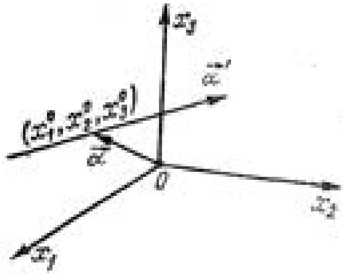


Fig. 35

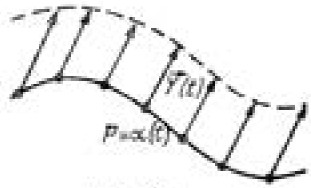


Fig. 36

unui punct material ce se deplasează cu o viteză de modul constant, atunci accelerația este un cîmp normal la α (dirijată după normala la curbă).

3.3. *Definiție. Un cîmp $\vec{Y}$ se numește paralel dacă coordonatele sale sînt constante.*

3.4. Teoremă. Fie curba $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$, unde I este un interval deschis din $\mathbb{R}$.

1) Curba α este constantă (se reduce la un punct) dacă și numai dacă cîmpul viteză $\vec{\alpha}'$ este identic nul.

2) Curba neconstantă α este o dreaptă dacă și numai dacă cîmpul accelerație este identic nul (cîmpul viteză este paralel).

3) Un cîmp $\vec{Y}$ pe α este paralel dacă și numai dacă $\vec{Y}' = \vec{0}$.

Demonstrație. 1) Fie curba $\vec{\alpha}(t) = x_1(t)\vec{e}_1 + x_2(t)\vec{e}_2 + \ldots + x_n(t)\vec{e}_n$. Dacă $x_1(t) = a_1,\ x_2(t) = a_2, \ldots, x_n(t) = a_n,\ \forall t \in I$, atunci $\vec{\alpha}(t) = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + \ldots + a_n\vec{e}_n$ și $\vec{\alpha}'(t) = (0, 0, \ldots, 0)$, $\forall t$. Reciproc, din $\vec{\alpha}'(t) = \vec{0}$, $\forall t \in I$, rezultă $x_1'(t) = 0,\ x_2'(t) = 0, \ldots, x_n'(t) = 0, \forall t \in I$ și deci $x_1(t) = a_1,\ x_2(t) = a_2, \ldots, x_n(t) = a_n$ (fig. 34).

2) Fie $\vec{\alpha}(t) = (x_1^0 + l_1t)\vec{e}_1 + (x_2^0 + l_2t)\vec{e}_2 + \ldots + (x_n^0 + l_nt)\vec{e}_n$. Găsim $\vec{\alpha}'(t) = l_1\vec{e}_1 + l_2\vec{e}_2 + \ldots + l_n\vec{e}_n$ și $\vec{\alpha}''(t) = (0, 0, \ldots, 0)$. Reciproc, din $x_1''(t) = 0,\ x_2''(t) = 0, \ldots, x_n''(t) = 0, \forall t \in I$, obținem $x_1 = x_1^0 + l_1t,\ x_2 = x_2^0 + l_2t, \ldots, x_n = x_n^0 + l_nt$ (fig. 35).

3) Fie $\vec{Y} = b_1\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2 + \ldots + b_n\vec{e}_n$. Rezultă $\vec{Y}' = (0, 0, \ldots, 0)$. Reciproc, din $Y' = \vec{0}$, rezultă $\frac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}t} = 0,\ \frac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}t} = 0, \ldots, \frac{\mathrm{d}y_n}{\mathrm{d}t} = 0,\ \forall t \in I$, sau $y_1 = b_1,\ y_2 = b_2, \ldots, y_n = b_n$ (fig. 36).

§ 4. Ramuri infinite

Fie I un interval deschis (a, b), a poate fi și $-\infty$, iar b poate fi și $+\infty$ și $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$ o curbă.

4.1. *Definiție. Dacă într-o extremitate t_0 a intervalului deschis I avem $\lim\limits_{t \to t_0} \|\vec{\alpha}(t)\| = \infty$, atunci spunem că α posedă o ramură infinită.*

Este evident că α posedă o ramură infinită în extremitatea t_0 dacă și numai dacă cel puțin una dintre coordonatele lui α tinde către $\pm\infty$ pentru $t \to t_0$ (adică mulțimea $\alpha(I)$ nu este mărginită în $\mathbb{R}^n$).

4.2. *Definiție. Dacă există versorul*

$$\overline{u} = \lim_{t \to t_0} \frac{\overline{\alpha}(t)}{\|\overline{\alpha}(t)\|}$$

atunci direcția sa se numește direcția asimptotică a ramurii infinite.

4.3. *Definiție. Fie α o curbă care posedă o ramură infinită pentru o extremitate t_0 a lui I și $P = \alpha(t)$. Dreapta D se numește asimptotă la ramura infinită dacă* (fig. 37)

$$\lim_{t \to t_0} \mathrm{d}(P\,;D) = 0,$$

unde $\mathrm{d}(P\,;D)$ *este distanța de la punctul P la dreapta D.*

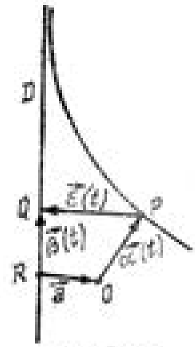


Fig. 37

Uneori se spune că ramura infinită se apropie asimptotic de D. De asemenea, observăm că proprietatea $\lim_{t \to t_0} \mathrm{d}(P\,;D) = 0$ care definește asimptota D este echivalentă cu a spune că paralela dusă prin $P = \alpha(t)$ la D tinde către D pentru $t \to t_0$ (fig. 37).

4.4. Teoremă. Dacă D este o asimptotă a unei ramuri infinite, atunci direcția lui D este o direcție asimptotică a ramurii respective.

Demonstrație. Fie α o curbă care posedă o ramură infinită într-o extremitate t_0 a lui I. Presupunem că această ramură posedă o asimptotă D (fig. 37). Notăm cu Q proiecția lui P pe D și punem $\overrightarrow{PQ} = \overline{\varepsilon}(t)$. Prin ipoteză avem

$$\lim_{t \to t_0} \|\overline{\varepsilon}(t)\| = 0 \Rightarrow \lim_{t \to t_0} \overline{\varepsilon}(t) = \overline{0}.$$

De asemenea notăm cu R proiecția originii O a spațiului $\mathbb{R}^n$ pe D și punem $\overline{RO} = \overline{a}$. Segmentul orientat $\overline{RQ}$ reprezintă pe $\overline{\beta}(t) = \overline{a} + \overline{\alpha}(t) + \overline{\varepsilon}(t)$ și deci versorul asimptotei D este

$$\lim_{t \to t_0} \frac{\overline{\beta}(t)}{\|\overline{\beta}(t)\|}.$$

Pe de altă parte, $\forall\, t \in I$, avem

$$\|\overline{\beta}(t)\| - \|\overline{a} + \overline{\varepsilon}(t)\| \leqslant \|\overline{\alpha}(t)\| \leqslant \|\overline{\beta}(t)\| + \|\overline{a} + \overline{\varepsilon}(t)\|.$$

Astfel din $\lim_{t \to t_0} \|\overline{\alpha}(t)\| = \infty$ rezultă $\lim_{t \to t_0} \|\overline{\beta}(t)\| = \infty$. Aceasta înseamnă că în vecinătatea lui t_0 avem $\|\overline{\beta}(t)\| > 0$. Dacă în inegalitățile anterioare împărțim cu $\|\overline{\beta}(t)\|$ și trecem la limită, atunci găsim:

$$\lim_{t \to t_0} \frac{\|\overline{\alpha}(t)\|}{\|\overline{\beta}(t)\|} = 1.$$

Prin urmare

$$\lim_{t \to t_0} \frac{\overline{\beta}(t)}{\|\overline{\beta}(t)\|} = \lim_{t \to t_0} \frac{\overline{\beta}(t)}{\|\overline{\alpha}(t)\|} = \lim_{t \to t_0} \frac{\overline{\alpha}(t) + \overline{a} + \overline{\varepsilon}(t)}{\|\overline{\alpha}(t)\|} = \overline{u} + \lim_{t \to t_0} \frac{\overline{a} + \overline{\varepsilon}(t)}{\|\overline{\alpha}(t)\|} = \overline{u}.$$

De aici rezultă că dacă asimptota există, atunci ea este unică.

4.5. Observații

1) Studiul anterior arată că pentru a decide dacă o ramură infinită posedă o asimptotă trebuie mai întîi să vedem dacă ea admite o direcție asimptotică.

Dacă ramura nu admite o direcție asimptotică, atunci ea nu admite nici asimptotă.

Dacă ramura admite o direcție asimptotică $\vec{u}$, atunci prin $P = \alpha(t)$, se duce o dreaptă D_P care are direcția $\vec{u}$. Dacă D_P are o limită D pentru $t \to t_0$, atunci dreapta D este asimptota ramurii considerate. Dacă D_P nu are o limită pentru $t \to t_0$, atunci ramura infinită studiată nu are asimptotă.

2) Pentru studiul ramurilor infinite ale curbelor plane $C : f(x, y) = a$ recomandăm lucrarea [18].

3) Fie $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$ o curbă și t_0 o extremitate a intervalului deschis I. Dacă $\lim\limits_{t \to t_0} \alpha(t) = A$, atunci A se numește *punct asimptotic* al curbei α.

4.6. Exemple

1) Să cercetăm ramurile infinite ale *foliului lui Descartes*, curba $\alpha = (x, y) : ((-\infty, -1) \cup (-1, \infty)) \to \mathbb{R}^2$, $x = \dfrac{3at}{1 + t^3}$, $y = \dfrac{3at^2}{1 + t^3}$. Pentru aceasta calculăm limitele:

$$\lim_{t \to \pm\infty} x(t) = 0 \quad \lim_{t \nearrow -1} x(t) = \infty \quad \lim_{t \searrow -1} x(t) = -\infty.$$

$$\lim_{t \to \pm\infty} y(t) = 0 \quad \lim_{t \nearrow -1} y(t) = -\infty \quad \lim_{t \searrow -1} y(t) = \infty.$$

De aici rezultă că $O(0, 0)$ este un punct asimptotic al curbei care se suprapune peste punctul obișnuit $t = 0$. De asemenea pentru $t \to -1$ se obțin două ramuri infinite. Deoarece

$$\lim_{t \to -1} \frac{y(t)}{x(t)} = -1,$$

deducem că ambele ramuri infinite admit aceeași direcție asimptotică $(1, -1)$. Pe de altă parte

$$\lim_{t \to -1} (y(t) + x(t)) = \lim_{t \to -1} \frac{3at}{1 + t^2 - t} = -a$$

și astfel avem asimptota oblică $y + x + a = 0$ (fig. 38).

2) Să cercetăm ramurile infinite ale elicei (fig. 21), $\alpha = (x, y, z) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $x = a\cos t$, $y = a \sin t$, $z = bt$. Deoarece $\lim\limits_{t \to \pm\infty} z(t) = \pm\infty$, rezultă că elicea admite două ramuri infinite. Ambele ramuri au direcția asimptotică $(0, 0, 1)$, direcția axei Oz, întrucît

$$\lim_{t \to \pm\infty} \frac{x(t)}{z(t)} = \lim_{t \to \pm\infty} \frac{y(t)}{z(t)} = 0.$$

Evident, dreapta ce trece prin punctul $(a \cos t, a \sin t, bt)$ și este paralelă cu Oz nu admite o poziție limită pentru $t \to \pm\infty$. De aceea cele două ramuri infinite ale elicei nu admit asimptote.

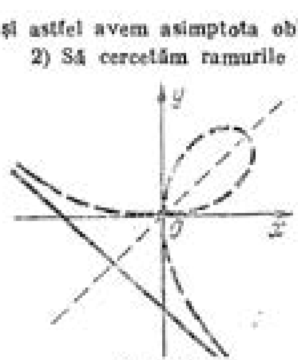


Fig. 38

§ 5. Reprezentarea normală a unei curbe

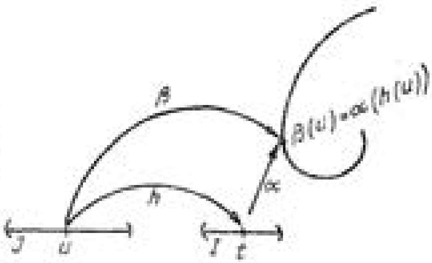


Fig. 39

Fiind dată o curbă $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$ putem construi alte curbe care au aceeaşi imagine cu α dar care parcurg această imagine cu viteze diferite.

5.1. *Definiţie. Fie I, J două intervale deschise ale dreptei reale, $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$ o curbă şi $h : J \to I$ o funcţie diferenţiabilă. Funcţia compusă $\beta = \alpha \circ h : J \to \mathbb{R}^n$ este o curbă care se numeşte reparametrizarea lui α prin h* (fig. 39).

În orice moment u din intervalul J, curba β este localizată în punctul $\beta(u) = \alpha(h(u))$, care este atins de curba α la momentul $h(u)$ din intervalul I. Astfel β şi α urmează aceeaşi traiectorie dar, în general, cu viteze diferite. Practic, pentru a obţine coordonatele lui β se substituie $t = h(u)$ în coordonatele lui α.

Observăm că trecerea de la α la β păstrează multiplicitatea punctelor lui $\alpha(I)$ dacă şi numai dacă h este o bijecţie.

5.2. Exemple

1) Fie arcul de cerc $\alpha(t) = (r \cos t,\ r \sin t)$, $t \in (0, 2\pi)$. Punînd $u = \operatorname{ctg} \dfrac{t}{2}$ găsim reparametrizarea

$$\beta(u) = \left(r\frac{u^2-1}{u^2+1},\ r\frac{2u}{u^2+1} \right),\ u \in \mathbb{R}.$$

2) Fie curba $\alpha(t) = (2\cos^2 t,\ \sin 2t,\ 2\sin t)$, $t \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$. Observăm că α se obţine intersectînd cilindrul $(x-1)^2 + y^2 = 1$ cu sfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ (fig. 40).

Punem $u = \sin t$. Reparametrizarea lui α prin u este

$$\beta(u) = (2(1-u^2),\ 2u\sqrt{1-u^2},\ 2u),\ u \in (0, 1).$$

5.3. Lemă. Dacă β este reparametrizarea lui α prin h, atunci

$$\frac{d\vec{\beta}}{du}(u) = \frac{d\vec{\alpha}}{dh}(h(u))\frac{dh}{du}(u).$$

Pe scurt, $\vec{\beta}' = (\vec{\alpha}' \circ h)h'$. Astfel observăm că dacă h' nu se anulează, atunci punctele regulate ale lui α sînt puncte regulate pentru β, iar punctele singulare ale lui α sînt puncte singulare de acelaşi fel pentru β. De asemenea rezultă că definiţia tangentei într-un punct regulat ca şi într-un punct singular de ordinul n nu depinde de parametrul ales (direcţia ei rămîne invariantă, iar punctul prin care trece este fix).

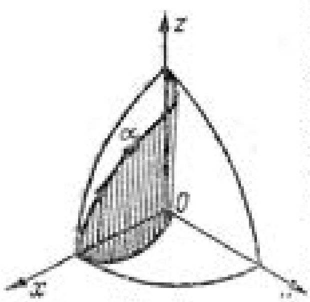


Fig. 40

Pentru ca bijecţia $h : J \to I$ să fie un difeomorfism este necesar şi suficient ca derivata h' să nu se anuleze; acest lucru rezultă din proprietăţile de existenţă şi de diferenţiabilitate ale funcţiilor inverse $\left(\text{se ştie}: (h^{-1})' = \dfrac{1}{h' \circ h^{-1}}\right)$. Dacă h este un difeomorfism, atunci curbele α şi β se numesc *echivalente*.

Precizăm că dacă $h' > 0$, atunci h păstrează orientarea.

Fie $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$ o curbă regulată dată prin ecuaţia vectorială $\vec{\alpha} = \vec{\alpha}(t)$, $t \in I$ şi $\vec{\alpha}'(t)$ vectorul viteză la momentul t. Lungimea $v(t) = \|\vec{\alpha}'(t)\|$ se numeşte viteza curbei la momentul t.

În fizică, distanţa parcursă de un mobil este determinată prin integrarea vitezei sale în raport cu timpul. Geometric, definim *lungimea arcului curbei regulate* α de la $t = a$ la $t = b$ ca fiind numărul

$$l = \int_a^b v(t)\, \mathrm{d}t, \quad a < b,$$

iar *elementul de arc* prin $\mathrm{d}s = v(t)\, \mathrm{d}t$.

Există probleme în care ne interesează numai imaginea curbei şi nu ne interesează viteza cu care punctul curent parcurge această imagine. Cu alte cuvinte ne interesează imaginea din spaţiul $\mathbb{R}^n$ şi nu parametrizarea particulară $t \to \alpha(t)$ care reprezintă această imagine. În asemenea probleme se obişnuieşte ca α să se înlocuiască printr-o reparametrizare echivalentă β pentru care viteza să fie egală cu unitatea.

5.4. Teoremă. Dacă $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$ este o curbă regulată, atunci există o reparametrizare β echivalentă cu α astfel încît β să aibă viteza unu. β se numeşte *reprezentarea normală* a lui α.

Demonstraţie. Fie $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$ o curbă regulată, adică $\vec{\alpha}'(t) \neq \vec{0}$, $\forall t \in I$. Fixăm $a \in I$ şi considerăm funcţia care dă lungimea arcului $s : I \to J = s(I)$, $s(t) = \int_a^t \|\vec{\alpha}'(t)\| \mathrm{d}t$. Această funcţie se numeşte *abscisa curbilinie* (fig. 41).

Observăm că $\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \|\vec{\alpha}'(t)\| > 0$, adică s este strict crescătoare şi deci bijectivă; teorema funcţiei inverse asigură că funcţia inversă $s^{-1} : J \to I$ definită prin $t = t(s)$ are derivata

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}(s) = \frac{1}{\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}(t(s))} > 0.$$

Mai mult, inversa $t = t(s)$ este un difeomorfism. De aceea funcţia compusă $\beta = \alpha \circ s^{-1} : J \to \mathbb{R}^n$ sau $\beta(s) = \alpha(t(s))$ este o reparametrizare a lui α, prin funcţia $t = t(s)$, echivalentă cu α (vezi fig. 39 pentru $u = s$). Să arătăm că viteza lui β este unu. Avem

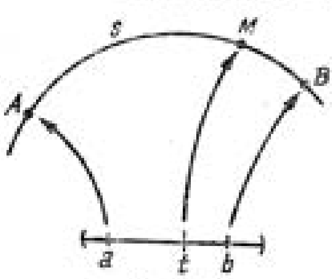


Fig. 41

$$\left\| \frac{\mathrm{d}\vec{\beta}}{\mathrm{d}s} \right\| = \left\| \frac{\mathrm{d}\vec{\alpha}}{\mathrm{d}t} \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s} \right\| = \|\vec{\alpha}'(s)\| \frac{1}{\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}} = 1.$$

Astfel abscisa curbilinie a unei curbe regu-

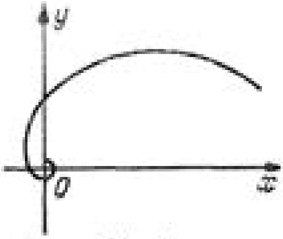


Fig. 42

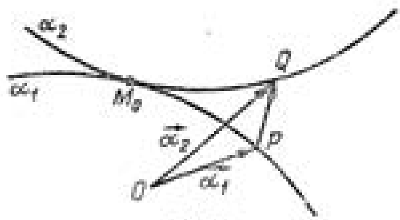


Fig. 43

late se utilizează pentru obținerea unei reparametrizări de viteză unu. Precizăm că dacă α este o curbă orientată, atunci prin trecerea la reprezentarea normală orientarea nu se schimbă deoarece $\frac{dt}{ds} > 0$.

5.5 Exemple

1) Fie spirala logaritmică (fig. 42) $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $\alpha(t) = (ae^{-t}(\cos t - \sin t), ae^{-t}(\cos t + \sin t))$, $a > 0$. Din $\vec{\alpha}'(t) = -2ae^{-t}\cos t\,\vec{i} - 2ae^{-t}\sin t\,\vec{j}$ rezultă că α este o curbă regulată cu viteza $v(t) = 2ae^{-t}$. Dacă fixăm $t = 0$, atunci abscisa curbilinie este dată de

$$s = \int_0^t v(t)\,dt = -2ae^{-t}\Big|_0^t = 2a(1 - e^{-t}).$$

De aici găsim $t = \ln\frac{2a}{2a-s}$, $s \in (-\infty, 2a)$ și astfel reprezentarea normală a lui α este $\beta : (-\infty, 2a) \to \mathbb{R}^2$,

$$\beta(s) = \left(\frac{2a-s}{2}\left(\cos\ln\frac{2a}{2a-s} - \sin\ln\frac{2a}{2a-s}\right), \frac{2a-s}{2}\left(\cos\ln\frac{2a}{2a-s} + \sin\ln\frac{2a}{2a-s}\right)\right).$$

2) Să considerăm acum elicea $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $\alpha(t) = (a\cos t, a\sin t, bt)$. Deoarece ecuația vectorială a curbei este $\vec{\alpha}(t) = a\cos t\,\vec{i} + a\sin t\,\vec{j} + bt\,\vec{k}$, găsim $\vec{\alpha}'(t) = -a\sin t\,\vec{i} + a\cos t\,\vec{j} + b\vec{k}$ și deci $\|\vec{\alpha}'(t)\| = \sqrt{a^2 + b^2} = c$. Dacă măsurăm lungimea arcului de la $t = 0$ atunci

$$s = \int_0^t c\,dt = ct.$$

Astfel $t = \frac{s}{c}$ și reprezentarea normală a elicei este

$$\beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3,\ \beta(s) = \alpha\left(\frac{s}{c}\right) = \left(a\cos\frac{s}{c},\ a\sin\frac{s}{c},\ \frac{bs}{c}\right).$$

§ 6. Contactul a două curbe

Fie $\alpha_1, \alpha_2 : I \to \mathbb{R}^n$ două curbe care au un punct regulat comun M_0 corespunzător unei valori t_0 din interiorul lui I. Fie $P = \alpha_1(t)$ și $Q = \alpha_2(t)$, pentru t dintr-o vecinătate a lui t_0. Formăm vectorul $\overline{PQ} = \bar{\alpha}_2 - \bar{\alpha}_1$ (fig. 43).

6.1. *Definiție. Dacă*

$$\lim_{t\to t_0} \frac{\overline{PQ}}{(t-t_0)^i} = \begin{cases} \vec{0} & \text{pentru } i = 1, \ldots, n-1, n, \\ \neq \vec{0} & \text{pentru } i = n+1 \end{cases}$$

atunci se spune că $\alpha_1(I)$ și $\alpha_2(I)$ au în M_0 un contact de ordinul n.

Dacă limita precedentă este zero, $\forall i \in \mathbb{N}$, atunci vom spune că α_1 și α_2 au în M_0 un contact de ordin infinit.

Formulele lui Taylor

$$\overline{\alpha}_i(t) = \overline{\alpha}_i(t_0) + \frac{t-t_0}{1!}\overline{\alpha}_i'(t_0) + \ldots + \frac{(t-t_0)^n}{n!}\overline{\alpha}_i^{(n)}(t_0) +$$

$$+ \frac{(t-t_0)^{n+1}}{(n+1)!}[\overline{\alpha}_i^{(n+1)}(t_0) + \overline{\varepsilon}_i(t-t_0)], \; i = 1, 2,$$

unde $\lim\limits_{t\to t_0}\overline{\varepsilon}_i(t-t_0) = \overline{0}$, arată că α_1 și α_2 au în M_0 un contact de ordinul n dacă și numai dacă curba $\alpha_2 - \alpha_1$ admite pe M_0 drept punct singular de ordinul $n+1$ sau dacă și numai dacă

$$\alpha_1^{(k)}(t_0) = \alpha_2^{(k)}(t_0) \qquad k = 0, 1, \ldots, n,$$

$$\alpha_1^{(n+1)}(t_0) \neq \alpha_2^{(n+1)}(t_0).$$

6.2. *Observații*

1) Contactul de ordinul n corespunde la ideea intuitivă că în M_0 curbele α_1 și α_2 au $n+1$ puncte confundate comune.

2) Curbele α_1 și α_2 au în punctul regulat comun M_0 un contact de ordinul unu dacă și numai dacă au aceeași tangentă.

CURBE ÎN $\mathbb{R}^2$

§ 7. Tangenta și normala

Raportăm planul la reperul natural și considerăm curba $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$, $\alpha(t) = (x(t), y(t))$.

Fie $P = \alpha(t)$ un punct regulat al curbei. Se știe (§2) că dreapta care trece prin P și are ca vector director pe $\overline{\alpha}'(t)$ se numește *tangenta* la curba α în P. Deoarece sîntem în plan, hiperplanul normal se reduce la o dreaptă, numită *normala* curbei.

7.1. *Definiție. Dreapta care trece prin punctul regulat $P = \alpha(t)$ și este perpendiculară pe $\overline{\alpha}'(t)$ se numește normala curbei în punctul P* (fig. 23).

Într-un punct regulat fixat, $P = \alpha(t)$, tangenta și normala la curbă au respectiv ecuațiile:

$$\frac{x - x(t)}{x'(t)} = \frac{y - y(t)}{y'(t)} \text{ și } (x - x(t))x'(t) + (y - y(t))y'(t) = 0.$$

Dacă $P = \alpha(t)$ este un punct singular de ordinul m, se știe că dreapta care trece prin P și are ca vector director pe $\vec{\alpha}^{(m)}(t)$ se numește tangenta curbei în punctul P (vezi definiția 2.4), figura 44.

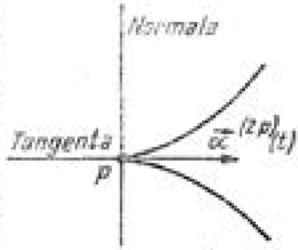


Fig. 44

7.2. *Definiție. Fie $P = \alpha(t)$ un punct singular de ordinul m pentru curba α. Dreapta care trece prin punctul P și este perpendiculară pe $\vec{\alpha}^{(m)}(t)$ se numește normala curbei în punctul P* (fig. 44).

Într-un punct singular de ordinul m, $P = \alpha(t)$, tangenta și normala la curbă au respectiv ecuațiile

$$\frac{x - x(t)}{x^{(m)}(t)} = \frac{y - y(t)}{y^{(m)}(t)} \text{ și } (x - x(t))x^{(m)}(t) + (y - y(t))y^{(m)}(t) = 0.$$

7.3. *Observație.* Segmentul de pe tangentă (normală) determinat de punctul de pe curbă și de intersecția acestei tangente (normale) cu Ox, se numește *segment tangentă (normală)*. Proiecția acestui segment pe Ox se numește *subtangentă (subnormală)* (fig. 45).

§ 8. Curbe definite prin ecuații carteziene implicite

Curbele plane pot fi introduse pornind de la funcții diferențiabile de tipul $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \to f(x, y)$. Deoarece

$$J(f) = \left[\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right],$$

punctele critice ale funcției f (dacă există !) se află rezolvînd sistemul :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0.$$

Punctele în care cel puțin una dintre aceste derivate nu se anulează sînt puncte regulate.

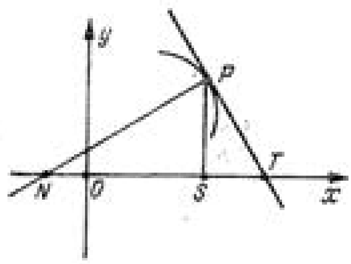
Mulțimea

$$C = f^{-1}(c) = \{(x, y) \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2, \ f(x, y) = c, \ c = \text{fixat}\}$$

se numește *mulțime de nivel constant* c sau *mulțime de ecuație carteziană implicită* $f(x, y) = c$. Pe scurt se scrie $C : f(x, y) = c$.

Precizăm că în general C conține atît puncte regulate cît și puncte critice ale lui f.

Fie $(x_0, y_0) \in C$. Mulțimea tuturor punctelor din C a căror distanță față de (x_0, y_0) este mai mică decît un număr $\varepsilon > 0$ se numește *vecinătate* a lui (x_0, y_0) în C.



PT - segment tangentă
PN - segment normală
ST - subtangentă
SN - subnormală

Fig. 45

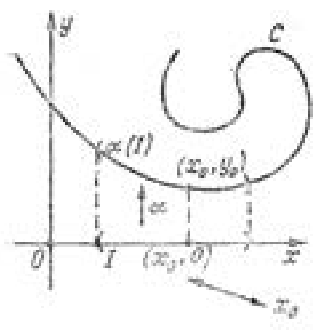


Fig. 46

8.1. Teoremă. Dacă o soluție (x_0, y_0) a ecuației $f(x, y) = c$ este un punct regulat al aplicației f, atunci există o vecinătate a acestui punct în care ecuația $f(x, y) = c$ definește o curbă simplă și regulată (fig. 46).

Demonstrație. Ipoteza că $P(x_0, y_0)$ este un punct regulat asigură că, în P, cel puțin una dintre derivatele $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ nu se anulează. Fie $\frac{\partial f}{\partial y}(P) \neq 0$. Teorema funcției implicite definită de o ecuație de forma $f(x, y) = c$ arată că există o vecinătate I a lui x_0 în $\mathbb{R}$ și o funcție diferențiabilă $x \to y(x)$ astfel încît pentru orice $x \in I$ să avem

$$f(x, y(x)) = c, \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}}.$$

Rezultă că porțiunea din C din vecinătatea punctului P este reprezentată de graficul funcției $x \to y(x)$ sau de aplicația $\alpha : I \to C$, $\alpha(t) = (t, y(t))$, și deci această porțiune este o curbă simplă și regulată.

În ipotezele teoremei 8.1 (funcția f este regulată în punctele lui C), C este o reuniune de arce simple și regulate în sensul definițiilor 1.2 și 2.1.

Dacă $f(x, y)$ este un polinom de gradul n, atunci curba C se numește *curbă algebrică de ordinul n*. În particular avem următoarele denumiri: curbe algebrice de ordinul unu (*drepte*), curbe algebrice de ordinul doi (*conice*), curbe algebrice de ordinul trei (*cubice*), curbe algebrice de ordinul patru (*cuartice*) etc.

8.2. *Tangenta.* Fie $P(x_0, y_0)$ un punct regulat al lui C. În baza definiției din §2 și a teoremei 8.1, observăm că tangenta la C în P are ecuația

$$(x - x_0)\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_c) + (y - y_0)\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0,$$

iar normala are ecuația

$$\frac{x - x_0}{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)}.$$

8.3. *Observații*

1) În situații concrete curba C poate fi dată printr-o ecuație și prin mai multe inecuații în x, y (inecuațiile precizează o anumită porțiune din plan).

2) Reprezentarea curbei C (sau a unei porțiuni din C) în forma $\alpha(t) = (x(t), y(t))$, se poate face prin intermediul teoremei 8.1 sau prin artificii de calcul.

3) Fie curba $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$, $\alpha(t) = (x(t), y(t))$. În general trecerea de la reprezentarea parametrică la reprezentarea carteziană explicită se poate face numai local. Într-adevăr, dacă $x'(t_0) \neq 0$ atunci teorema funcției inverse arată că în vecinătatea lui $x_0 = x(t_0)$ restricția lui $x = x(t)$ admite inversa $t = t(x)$.

Astfel restricția lui $y = y(t)$ apare ca o funcție compusă de tipul $y = y(t(x))$.

4) În general dacă există o funcție f astfel încît

$$f(x(t), y(t)) = c, \ \forall\, t \in I,$$

atunci $f(x, y) = c$ este ecuația carteziană implicită a curbei $\alpha(t) = (x(t), y(t))$, $t \in I$.

5) Fie $C : f(x, y) = c$ o curbă regulată. Gradientul $\nabla f = \dfrac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \dfrac{\partial f}{\partial y}\vec{j}$, definit pe C, este un cîmp vectorial normal la C.

8.4. Exemple.

1) *Dreapta.* Ecuația carteziană implicită a unei drepte din plan este $ax + by + c = 0$, iar ecuațiile sale parametrice sînt $x = x_0 + lt$, $y = y_0 + mt$, $t \in \mathbb{R}$.

2) *Cercul.* Cercul de rază r și cu centrul în (x_0, y_0) are ecuația carteziană implicită $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$. Obișnuit cercul se reprezintă prin ecuațiile parametrice $y = x_0 + r \cos t$, $y = y_0 + r \sin t$, $t \in [0, 2\pi)$.

3) *Elipsa* are ecuația carteziană implicită (canonică) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - 1 = 0$. Ea se poate parametriza în forma $x = a \cos t$, $y = b \sin t$, $t \in [0, 2\pi)$.

Hiperbola are ecuația carteziană implicită (canonică) $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} - 1 = 0$. Ramura din dreapta a hiperbolei se poate reprezenta prin $x = a \operatorname{ch} t$, $y = b \operatorname{sh} t$, $t \in \mathbb{R}$.

Parabola are ecuația carteziană explicită (canonică) $x = \dfrac{y^2}{2p}$. De aceea ea se poate parametriza în forma $x = \dfrac{t^2}{2p}$, $y = t$, $t \in \mathbb{R}$.

§ 9. Forma unei curbe în vecinătatea unui punct al său

Fie curba $\alpha : I \to \mathbb{R}^n$ și P un punct din $\alpha(I)$. Mulțimea tuturor punctelor din $\alpha(I)$ a căror distanță față de P este mai mică decît un număr $\varepsilon > 0$ se numește *vecinătate* a lui P în $\alpha(I)$.

Fie $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ o curbă din plan, ipoteză care va fi subînțeleasă în cele ce urmează. Considerăm un punct particular $P \in \alpha(I)$ așa ca $\alpha(t) = P$ și cercetăm care este aspectul curbei în vecinătatea lui P. În particular cercetăm care este poziția curbei în raport cu tangenta în acest punct.

Pentru un h din vecinătatea lui zero, punctul $Q = \alpha(t + h)$, $t + h \in I$, este în vecinătatea punctului P. De aceea putem folosi formula Taylor

$$\bar{\alpha}(t + h) = \bar{\alpha}(t) + \frac{h}{1\,!}\bar{\alpha}'(t) + \frac{h^2}{2\,!}\bar{\alpha}''(t) + \ldots + \frac{h^n}{n\,!}[\bar{\alpha}^{(n)}(t) + \bar{\varepsilon}(h)]$$

cu $\lim\limits_{h \to 0} \bar{\varepsilon}(h) = \bar{0}$. Evident, avem $\overline{PQ} = \bar{\alpha}(t + h) - \bar{\alpha}(t)$.

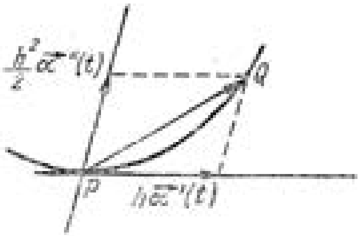


Fig. 47

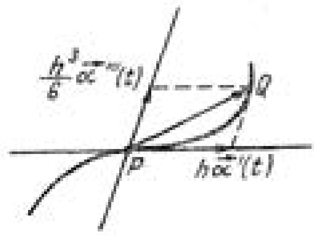


Fig. 48

Vom face studiul urmărind două cazuri: cazul în care P este un punct *regulat* şi cazul în care P este *singular*.

a) *P este un punct regulat.*

Prin ipoteză în P avem $\vec{\alpha}'(t) \neq \vec{0}$ şi tangenta în P este definită de punctul P şi de vectorul $\vec{\alpha}'(t)$.

9.1. Presupunem că $\vec{\alpha}'(t)$ şi $\vec{\alpha}''(t)$ determină o bază în $T_P\mathbb{R}^2$. Formula Taylor de ordinul doi dă

$$\overline{PQ} = h\vec{\alpha}'(t) + \frac{h^2}{2}\vec{\alpha}''(t) + \frac{h^2}{2}\vec{\varepsilon}(h),\ \lim_{h\to 0}\vec{\varepsilon}(h) = \vec{0}.$$

Astfel pentru $|h|$ suficient de mic, $\left(h, \dfrac{h^2}{2}\right)$ constituie cu aproximaţie coordonatele vectorului $\overline{PQ}$ faţă de baza $\vec{\alpha}'(t)$, $\vec{\alpha}''(t)$. Dacă h trece prin zero, atunci prima coordonată îşi schimbă semnul, iar a doua şi-l păstrează.

De aceea arcul se află în semiplanul ce conţine pe $\vec{\alpha}''(t)$ şi traversează în P) dreapta determinată de P şi de $\vec{\alpha}''(t)$. Ţinind cont că dreapta determinată de P şi $\alpha''(t)$ este tangenta la α în P, deducem că arcul are aspectul din figura 47.

9.2. Presupunem că $\vec{\alpha}''(t)$ este coliniar cu $\vec{\alpha}'(t)$ şi că $\vec{\alpha}'(t)$ împreună cu $\vec{\alpha}'''(t$ constituie o bază în $T_P\mathbb{R}^2$. Prin ipoteză $\exists\, r \in \mathbb{R}$ aşa ca $\vec{\alpha}''(t) = r\vec{\alpha}'(t)$. Astfe formula Taylor de ordinul trei dă

$$\overline{PQ} = \left(h + r\frac{h^2}{2}\right)\vec{\alpha}'(t) + \frac{h^3}{6}\vec{\alpha}'''(t) + \frac{h^3}{6}\vec{\varepsilon}(h),\ \lim_{h\to 0}\vec{\varepsilon}(h) = \vec{0}.$$

Pentru $|h|$ suficient de mic $h + r\dfrac{h^2}{2} \sim h$, iar $\left(h, \dfrac{h^3}{6}\right)$ constituie cu aproximaţie coordonatele lui $\overline{PQ}$ în baza $\vec{\alpha}'(t)$, $\vec{\alpha}'''(t)$. Dacă h trece prin zero, atunci ambele coordonate îşi schimbă semnul. De aceea, la trecerea prin P, punctul Q traversează şi tangenta şi dreapta definită de P şi $\vec{\alpha}'''(t)$. Astfel, în vecinătatea lui P, curba are aspectul din figura 48, iar P se numeşte *punct de inflexiune*.

9.3. Să generalizăm situaţiile anterioare. Presupunem că derivatele de ordinele 2,3, ... n − 1, sînt coliniare cu $\vec{\alpha}'(t)$ iar $\vec{\alpha}'(t)$ şi $\vec{\alpha}^{(n)}(t)$ determină o bază în $T_P\mathbb{R}^2$.

Deoarece $\forall\, k, 1 < k < n, \exists\, r_k \in \mathbb{R}$ aşa ca $\vec{\alpha}^{(k)}(t) = r_k \vec{\alpha}'(t)$, formula Taylor de ordinul n dă

$$\overrightarrow{PQ} = \left(h + r_2 \frac{h^2}{2} + \ldots + r_{n-1} \frac{h^{n-1}}{(n-1)!}\right) \vec{\alpha}'(t) + \frac{h^n}{n!} \vec{\alpha}^{(n)}(t) + \frac{h^n}{n!} \vec{\varepsilon}(h),$$

$$\lim_{h \to 0} \vec{\varepsilon}(h) = \vec{0}.$$

De aceea pentru $|h|$ suficient de mic, perechea $\left(h, \frac{h^n}{n!}\right)$ realizează cu aproximaţie coordonatele lui $\overrightarrow{PQ}$ în raport cu baza $\vec{\alpha}'(t)$, $\vec{\alpha}^{(n)}(t)$.

Rezultă că în vecinătatea lui P avem: dacă n este par, atunci curba are aspectul din figura 47; dacă n este impar, atunci curba are aspectul din figura 48.

9.4. Observaţii

1) Fie P un punct regulat al unei curbe α. Dacă, în P, toate derivatele de ordinele $2, 3, \ldots, n$ sînt coliniare cu $\vec{\alpha}'(t)$, în particular dacă toate sînt nule, atunci nu putem preciza poziţia curbei în raport cu tangenta cu ajutorul acestor derivate. Tot ce putem spune este că în vecinătatea lui P abaterea curbei de la tangentă este mică (fig. 28).

2) Forma unei curbe $C: f(x, y) = c$ în vecinătatea unui punct regulat (x_0, y_0) este dată de forma graficului funcţiei $x \to g(x)$ în vecinătatea lui x_0.

b) *P este un punct singular*

Prin ipoteză, în P avem $\vec{\alpha}'(t) = \vec{0}$.

9.5. Presupunem că $\vec{\alpha}''(t)$ şi $\vec{\alpha}'''(t)$ determină o bază în $T_P\mathbb{R}^2$. În acest caz tangenta este determinată de P şi de $\vec{\alpha}''(t)$. Formula Taylor de ordinul trei arată că

$$\overrightarrow{PQ} = \frac{h^2}{2} \vec{\alpha}''(t) + \frac{h^3}{6} \vec{\alpha}'''(t) + \frac{h^3}{6} \vec{\varepsilon}(h), \ \lim_{h \to 0} \vec{\varepsilon}(h) = \vec{0}.$$

În vecinătatea lui $h = 0$, cuplul $\left(\frac{h^2}{2}, \frac{h^3}{6}\right)$ constituie cu aproximaţie coordonatele vectorului $\overrightarrow{PQ}$. Prima coordonată $\frac{h^2}{2}$ fiind pozitivă, arcul aparţine semiplanului mărginit de dreapta definită de P şi $\vec{\alpha}'''(t)$ şi care conţine pe $\vec{\alpha}''(t)$. A doua coordonată $\frac{h^3}{6}$ işi schimbă semnul cînd h trece prin zero. Astfel, în P, arcul traversează tangenta. Se zice că P este un *punct de întoarcere de prima speţă* (fig. 49).

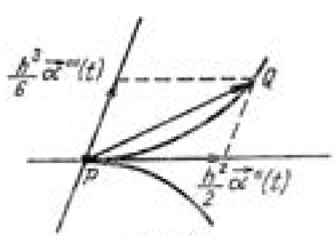


Fig. 49

9.6. Presupunem că $\vec{\alpha}'''(t)$ este coliniar cu $\vec{\alpha}''(t)$ şi că $\vec{\alpha}''(t)$ şi $\vec{\alpha}^{(4)}(t)$ formează o bază în $T_P\mathbb{R}^2$. În acest caz tangenta în P este definită de P şi de $\vec{\alpha}''(t)$. Deoarece prin ipoteză $\exists\, r \in \mathbb{R}$ aşa ca $\vec{\alpha}'''(t) = r\vec{\alpha}''(t)$, formula Taylor de ordinul patru dă

$$\overrightarrow{PQ} = \left(\frac{h^2}{2} + r\frac{h^3}{6}\right)\vec{\alpha}''(t) + \frac{h^4}{24}\vec{\alpha}^{(4)}(t) + \frac{h^4}{24}\vec{\varepsilon}(h),\ \lim_{h\to 0}\vec{\varepsilon}(h) = \vec{0}.$$

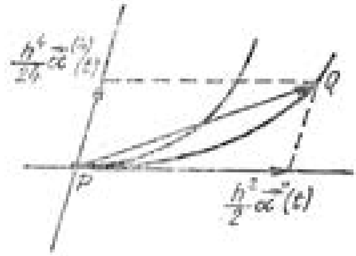


Fig. 50

Astfel pentru $|h|$ suficient de mic, perechea $\left(\frac{h^2}{2}, \frac{h^4}{24}\right)$ reprezintă cu aproximație coordonatele lui $\overrightarrow{PQ}$ în raport cu baza $\vec{\alpha}''(t)$, $\vec{\alpha}^{(4)}(t)$. Deoarece, ambele coordonate sînt pozitive, curba trebuie să arate ca în figura 50 (o ramură pentru h negativ, o ramură pentru h pozitiv). În acest caz se spune că P este un *punct de întoarcere de speța a doua*.

9.7. Generalizînd situațiile anterioare presupunem că:

$$\vec{\alpha}'(t) = \ldots = \vec{\alpha}^{(m-1)}(t) = \vec{0},\ \vec{\alpha}^{(m)}(t) \neq \vec{0}.$$

De asemenea presupunem că, în P, derivatele de ordinul $m+1, m+2 \ldots \ldots, n-1$ sînt coliniare cu $\vec{\alpha}^{(m)}(t)$ iar $\vec{\alpha}^{(m)}(t)$ împreună cu $\vec{\alpha}^{(n)}(t)$ determină o bază în $T_P\mathbb{R}^2$. Deoarece prin ipoteză, $\forall k, m < k < n, \exists r_k \in \mathbb{R}$ așa ca $\vec{\alpha}^{(k)}(t) = r_{k-m}\vec{\alpha}^{(m)}(t)$, formula Taylor de ordinul n dă

$$\overrightarrow{PQ} = \left(\frac{h^m}{m!} + r_1\frac{h^{m+1}}{(m+1)!} + \ldots + r_{n-1}\frac{h^{n-1}}{(n-1)!}\right)\vec{\alpha}^{(m)}(t) + \frac{h^n}{n!}\left[\vec{\alpha}^{(n)}(t) + \vec{\varepsilon}(h)\right],$$

$$\lim_{h\to 0}\vec{\varepsilon}(h) = \vec{0}.$$

Pentru $|h|$ suficient de mic, $\left(\frac{h^m}{m!}, \frac{h^n}{n!}\right)$ constituie cu aproximație coordonatele lui $\overrightarrow{PQ}$ în baza aleasă de noi. De aceea situațiile din punctul singular P se pot rezuma în tabelul

m	n	Forma curbei
impar	par	figura 47
	impar	figura 48
par	impar	figura 49
	par	figura 50

9.8. Observații

1) Dacă în punctul singular P nu sînt îndeplinite condițiile din 9.7, atunci nu putem preciza care este forma curbei în vecinătatea acestui punct cu ajutorul derivatelor (fig. 27, 28, 29).

2) Fie curba $C: f(x, y) = c$ și $(x_0, y_0) \in C$ un punct critic al lui f în care hessiana lui f nu este identic nulă. Dacă $\det d^2f(x_0, y_0) > 0$, atunci (x_0, y_0) este un punct izolat al curbei (fig. 51, a); dacă $\det d^2f(x_0, y_0) < 0$, atunci (x_0, y_0) este un *punct dublu* pentru C (fig. 51, b);

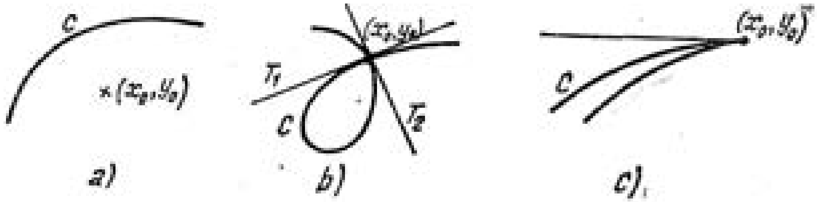


Fig. 51

dacă $\det d^2f(x_0, y_0) = 0$ atunci (x_0, y_0) este un *punct de întoarcere* pentru C (fig. 51, c). Într-un punct dublu sau de întoarcere direcțiile (l, m) ale tangentelor la C sînt date de

$$l^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) + 2lm \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) + m^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) = 0.$$

§ 10. Trasarea curbelor plane

Fie $\alpha : I \to \mathbb{R}^2, \alpha(t) = (x(t), y(t))$ o curbă plană. Pentru a desena imaginea $\alpha(I) \subset \mathbb{R}^2$ în raport cu axele de coordonate este necesar să se urmărească următoarele probleme:

10.1. Stabilirea domeniului de definiție I, precizarea punctelor de acumulare ce nu aparțin lui I și calculul limitelor lui $t \to x(t)$, $t \to y(t)$ în aceste puncte. Precizarea punctelor critice (dacă există!).

10.2. Intersecții cu axele.

10.3. Se cercetează dacă α este o curbă periodică, adică $\exists\, T > 0$, $\alpha(t + T) = \alpha(t)$, $\forall t \in I$. Dacă α este periodică, de perioadă T, atunci este suficient să considerăm restricția $\alpha : [0, T] \to \mathbb{R}^2$.

Din faptul că α este o curbă periodică rezultă că $t \to x(t)$, $t \to y(t)$ sînt periodice avînd eventual alte perioade decît α. Dacă $t \to x(t)$ este periodică și are perioada T_1, $t \to y(t)$ este periodică și are perioada T_2, iar $\dfrac{T_1}{T_2} = \dfrac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, atunci α este periodică și are perioada $T = qT_1 = pT_2$.

Curbele date cartezian explicit prin $y = f(x)$ nu sînt periodice deoarece $x = t$ nu este periodică fiind funcția identitate. Dacă f este periodică, atunci curba se deduce prin translație de-a lungul lui Ox din porțiunea ei construită pentru o perioadă a lui f.

10.4. Se cercetează simetriile lui $\alpha(I)$. Dacă $\forall t \in I$, $\exists\, t' \in I$ astfel încît (1) $x(t') = x(t)$, $y(t') = -y(t)$, (2) $x(t') = -x(t)$, $y(t') = y(t)$, (3) $x(t') = -x(t)$, $y(t') = -y(t)$, (4) $x(t') = y(t)$, $y(t') = x(t)$ etc. atunci curba este respectiv simetrică față de (1) axa Ox, (2) axa Oy, (3) origine, (4) prima bisectoare etc. Se observă că sistemele (1), (2) și (3) conțin ca un caz particular studiul parității și imparității funcțiilor $t \to x(t)$, $t \to y(t)$.

Dacă $\exists\, r \in \mathbb{R}$ astfel încît, $\forall t \in I$, punctul $\alpha(r - t)$ se deduce din $\alpha(t)$ printr-o simetrie (în raport cu un punct sau o dreaptă), atunci rezultă $t' = r - t$ ceea ce este echivalent cu $\dfrac{t + t'}{2} = \dfrac{r}{2}$. Astfel t și t' sînt simetrice în $\mathbb{R}$ față de $\frac{r}{2}$. În acest caz trasăm porțiunea din $\alpha(I)$ corespunzătoare lui $I \cap [r/2, \infty)$ iar restul se completează prin simetrie.

Dacă $\alpha\left(\frac{1}{t}\right)$ se deduce din $\alpha(t)$ printr-o simetrie, atunci rezultă $t' = \frac{1}{t}$ sau $tt' = 1$. În acest caz trasăm porțiunea din $\alpha(I)$ corespunzătoare lui $I \cap ([-1, 0) \cup (0, 1])$, iar restul se completează prin simetrie.

10.5. Stabilirea punctelor regulate. Dintre punctele regulate trebuie precizate punctele de inflexiune și punctele în care $\vec{\alpha}^{(n)}$, $n = 2, 3, \ldots$ sînt coliniari cu $\vec{\alpha}'$.

Stabilirea punctelor singulare și a tangentelor în aceste puncte (cînd există !). Dintre acestea trebuie precizate punctele de inflexiune, punctele de întoarcere, punctele singulare de ordinul n în care $\vec{\alpha}^{(m)}$, $m = n + 1, n + 2, \ldots$ sînt coliniari cu $\vec{\alpha}^{(n)} \neq \vec{0}$ și punctele singulare în care $\vec{\alpha}^{(k)} = \vec{0}$, $k = 1, 2 \ldots$

10.6. Determinarea punctelor multiple și a tangentelor în aceste puncte. Dacă sistemul $t_1 \neq t_2$, $x(t_1) = x(t_2)$, $y(t_1) = y(t_2)$ este compatibil (determinat sau nedeterminat), atunci soluțiile sale dau punctele multiple. Dacă sistemul este incompatibil, atunci curba are numai puncte simple.

10.7. Alcătuirea tabelului de variație pentru funcțiile $t \to x(t)$, $t \to y(t)$.

10.8. Stabilirea ramurilor infinite și a asimptotelor (dacă există !). Putem întîlni situațiile:

1) $\lim\limits_{t\to t_0} x(t) = \pm\infty$, $\lim\limits_{t\to t_0} y(t) = b$. În acest caz asimptota are ecuația $y = b$. Pentru a decide poziția ramurii față de asimptotă, din tabel se citește semnul lui $y(t) - b$ în vecinătatea lui t_0.

2) $\lim\limits_{t\to t_0} x(t) = a$, $\lim\limits_{t\to t_0} y(t) = \pm\infty$. În acest caz asimptota are ecuația $x = a$.

3) $\lim\limits_{t\to t_0} x(t) = \pm\infty$, $\lim\limits_{t\to t_0} y(t) = \pm\infty$.

Dacă $\lim\limits_{t\to t_0} \frac{y(t)}{x(t)} = 0$, atunci $(1, 0)$ este direcție asimptotică. Curba nu admite asimptotă (ramură parabolică).

Dacă $\lim\limits_{t\to t_0} \frac{x(t)}{y(t)} = 0$, atunci $(0, 1)$ este direcție asimptotică. Curba nu admite asimptotă (ramură parabolică).

Dacă $\lim\limits_{t\to t_0} \frac{y(t)}{x(t)} = m$, atunci $(1, m)$ este direcție asimptotică. Dacă $\lim\limits_{t\to t_0} (y(t) - mx(t)) = n$, atunci curba admite asimptota $y = mx + n$. Dacă $\lim\limits_{t\to t_0} (y(t) - mx(t)) = \pm\infty$, atunci curba nu admite asimptotă (ramură parabolică).

10.9 Exemplu

Curba de ecuație $x^3 + y^3 - 3axy = 0$, $a > 0$, se numește *foliul lui Descartes*.

a) Să se găsească o reprezentare parametrică a curbei.

b) Să se construiască această curbă.

Soluție

a) Intersectăm cu dreapta $y = tx$. Înlocuind în ecuația curbei obținem $x^2(x + t^3x - 3at) = 0$. Mai întîi avem $x^2 = 0$, ceea ce corespunde punctului dublu $(0, 0)$. Apoi, pentru $t \neq -1$, găsim

$$x = \frac{3at}{1 + t^3}, \quad y = \frac{3at^2}{1 + t^3}.$$

b) Pentru a construi curba avem de rezolvat mai multe probleme:

1) *Domeniul de definiție. Simetrii.* Se vede că $t \in (-\infty, -1) \cup (-1, \infty)$. În punctele de acumulare care nu fac parte din domeniul de definiție trebuie să calculăm limite. Astfel avem:

$$\lim_{t \to \pm\infty} x(t) = 0 \qquad \lim_{t \nearrow -1} x(t) = \infty \qquad \lim_{t \searrow -1} x(t) = -\infty$$

$$\lim_{t \to \pm\infty} y(t) = 0 \qquad \lim_{t \nearrow -1} y(t) = -\infty \qquad \lim_{t \searrow -1} y(t) = \infty.$$

Observăm că $O(0, 0)$ este punct asimptotic atît pentru $t \to \infty$ cît și pentru $t \to -\infty$. Acest punct se confundă cu punctul obișnuit $t = 0$.

Sistemul

$$\begin{cases} \dfrac{3at'}{1 + t'^3} = \dfrac{3at^2}{1 + t^3} \\[2ex] \dfrac{3at'^2}{1 + t'^3} = \dfrac{3at}{1 + t^3} \end{cases}$$

este compatibil nedeterminat deoarece este satisfăcut pentru orice t și t' din relația $tt' = 1$. Astfel curba este simetrică față de prima bisectoare. De aceea este suficient să construim porțiunea $t \in (-1, 0) \cup (0, 1]$, iar restul să completăm prin simetrie.

2) *Puncte regulate. Puncte singulare.* Avem

$$x' = \frac{3a - 6at^3}{(1 + t^3)^2}, \quad y' = \frac{6at - 3at^4}{(1 + t^3)^2}.$$

Din $x' = 0 \Rightarrow t = \dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$. Din $y' = 0 \Rightarrow t_1 = 0$, $t_2 = \sqrt[3]{2}$. Aceasta înseamnă că foliul lui Descartes este o curbă regulată.

3) *Puncte multiple.*

Avînd în vedere semnificația lui t (panta unei drepte), $t \to -\infty$ și $t \to \infty$ dau același punct $(0, 0)$ pe curbă (punct asimptotic) care corespunde intersecției curbei cu axa $Oy (x = 0)$. Pe de altă parte $t = 0$ dă punctul $(0, 0)$. Astfel originea este punct dublu.

Sistemul

$$\begin{cases} t_1 \neq t_2 \\[1ex] \dfrac{3at_1}{1 + t_1^3} = \dfrac{3at_2}{1 + t_2^3} \\[2ex] \dfrac{3at_1^2}{1 + t_1^3} = \dfrac{3at_2^2}{1 + t_2^3} \end{cases}$$

arată că nu mai avem și alte puncte multiple.

Tangentele în $O(0, 0)$ sînt axele Ox și Oy.

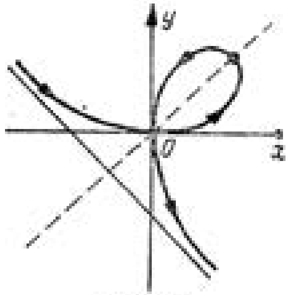


Fig. 52

4) Tabelul de variație pentru $x(t)$ și $y(t)$

t	$-\infty$		-1			0		$1/\sqrt[3]{2}$		$\sqrt[3]{2}$		$+\infty$
x'		$+$				$+$		0	$-$		$-$	
x	0	$\nearrow$	∞	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$2a\sqrt[3]{4}$	$\searrow$	$a\sqrt[3]{2}$	$\searrow$	0
y'		$-$			$-$	0		$+$	$+$	0	$-$	
y	0	$\searrow$	$-\infty$	∞	$\searrow$	0	$\nearrow$	$a\sqrt[3]{2}$	$\nearrow$	$2a\sqrt[3]{4}$	$\searrow$	0

5) *Ramuri infinite. Asimptote.*

Pentru $t \nearrow -1$ și $t \searrow -1$ avem ramuri infinite. Deoarece $\lim\limits_{t\to -1} \dfrac{y(t)}{x(t)} = -1$, rezultă că ambele ramuri infinite admit direcția asimptotică $(1, -1)$. Pe de altă parte

$$\lim_{t\to-1} (y(t) + x(t)) = \lim_{t\to -1} \frac{3at}{1 + t^2 - t} = -a$$

și astfel avem asimptota oblică $y + x + a = 0$.

6) *Trasarea curbei* (Fig. 52).

§ 11. Formule Frenet și elemente de teoria contactului

Fie $\beta : J \to \mathbb{R}^2$, $\beta(s) = (x(s), y(s))$ o curbă cu viteza unu. *Versorul tangent* este $\vec{T}(s) = \vec{\beta}'(s) = (x'(s), y'(s))$, iar *versorul normal* $\vec{N}(s)$ este definit prin rotirea lui $\vec{T}(s)$ cu $\pi/2$ (fig. 53). Astfel, $\vec{N}(s) = (-y'(s), x'(s))$.

Deoarece $(\vec{T}, \vec{T}) = 1$, rezultă $(\vec{T}', \vec{T}) = 0$ și deci $\vec{T}' = (x'', y'')$ este perpendicular pe $\vec{T}$. Cum avem și $\vec{N} \perp \vec{T}$ rezultă că $\vec{T}'$ și $\vec{N}$ sînt coliniari. Funcția $s \to k(s)$ definită prin ecuația Frenet

$$\vec{T}' = k\vec{N}$$

se numește *curbura* lui β. Pentru curbele din plan, $k(s) \in \mathbb{R}$ și semnul său arată cum se încovoaie $\beta(J)$.

11.1. Teoremă. Dacă $\beta : J \to \mathbb{R}^2$ este o curbă cu viteza unu care are curbura k, atunci avem:

a) Formulele Frenet: $\vec{T}' = k\vec{N}$, $\vec{N}' = -k\vec{T}$.

b) $k = \dfrac{d\varphi}{ds}$, unde φ este unghiul care dă panta tangentei lui β în punctul curent.

Demonstrație. a) Scriem pe $\vec{N}'$ în forma

$$\vec{N}' = (\vec{N}', \vec{T})\vec{T} + (\vec{N}', \vec{N})\vec{N}.$$

Găsim $(\vec{N}', \vec{N}) = 0$ și $(\vec{N}', \vec{T}) = -(\vec{N}, \vec{T}') = -k$.

b) Folosim figura 54 și observația că $\vec{T} = \vec{i}\cos\varphi + \vec{j}\sin\varphi$.

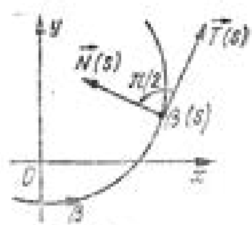


Fig. 53

Deci $\vec{T}' = \frac{d\varphi}{ds}\,\vec{N}$, adică $k = \frac{d\varphi}{ds}$.

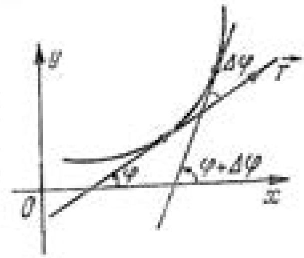


Fig. 54

11.2. Teoremă. Curbura k determină pe β abstracție făcînd de poziția sa în plan (de o izometrie).

Demonstrație. Ținînd cont de teorema 11.1 avem

$$\frac{d\varphi}{ds} = k(s) \text{ și deci } \varphi = \varphi_0 + \int_{s_0}^{s} k(s)ds,$$

unde φ_0 este unghiul pe care-l face tangenta la curba căutată în punctul $s = s_0$ cu axa Ox. Pe de altă parte

$$\frac{dx}{ds} = \cos\varphi, \; \frac{dy}{ds} = \sin\varphi$$

și astfel

$$x = x_0 + \int_{s_0}^{s} \cos\varphi\, ds, \; y = y_0 + \int_{s_0}^{s} \sin\varphi\, ds,$$

unde (x_0, y_0) este punctul corespunzător lui $s = s_0$.

Constantele φ_0, x_0, y_0 nu sînt esențiale. Ele depind de alegerea axelor de coordonate. Notînd

$$x' = \int_{s_0}^{s} \cos\psi\, ds, \; y' = \int_{s_0}^{s} \sin\psi\, ds, \; \psi = \int_{s_0}^{s} k(s)ds$$

observăm că

$$\begin{cases} x = x_0 + x'\cos\varphi_0 - y'\sin\varphi_0 \\ y = y_0 + x'\sin\varphi_0 + y'\cos\varphi_0 \end{cases}$$

și deci φ_0 determină o rotație, iar (x_0, y_0) determină o translație.

Dacă $\varphi_0 = 0$, $x_0 = y_0 = 0$, atunci punctul de la care se măsoară abscisele curbilinii coincide cu originea coordonatelor, iar sensul tangentei în acest punct coincide cu sensul lui Ox.

11.3. Teoremă. Dacă $\vec{\alpha}(t) = (x(t), y(t))$, $t \in I$ este o curbă regulată din plan, atunci

$$k = \frac{(\vec{\alpha}'', \mathcal{R}(\vec{\alpha}'))}{\|\vec{\alpha}'\|^3} = \frac{x'y'' - x''y'}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}},$$

unde $\mathcal{R}$ este operatorul rotației de unghi $\frac{\pi}{2}$, adică $\mathcal{R}(t_1, t_2) = (-t_2, t_1)$ iar „$'$" înseamnă derivata în raport cu t. Funcția $\frac{1}{|k|} : I - \{t \mid t \in I,\, k(t) = 0\} \to (0, \infty)$ se numește *rază de curbură*.

Demonstrație. Avem $\vec{\alpha}' = v\vec{T}$, $\mathscr{R}(\vec{\alpha}') = v\mathscr{R}(\vec{T}) = v\vec{N}$, $\vec{\alpha}'' = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\vec{T} + kv^2\vec{N}$ și deci $(\vec{\alpha}'', \mathscr{R}(\vec{\alpha}')) = kv^3$.

În § 6 a fost definită noțiunea de „contact de ordinul n" a două curbe.

11.4. Teoremă. Curbele $\alpha_1 : y = f_1(x)$, $\alpha_2 : y = f_2(x)$ au în punctul comun $M_0(x_0, y_0)$ un contact de ordinul n dacă și numai dacă

$$f_1^{(k)}(x_0) = f_2^{(k)}(x_0), \quad k = 0, 1, \ldots, n,$$

$$f_1^{(n+1)}(x_0) \neq f_2^{(n+1)}(x_0).$$

Demonstrație. Curbele α_1 și α_2 au în M_0 un contact de ordinul n dacă și numai dacă ecuația $f_1(x) - f_2(x) = 0$ admite pe x_0 drept rădăcină multiplă de ordinul $n + 1$, adică dacă și numai dacă

$$f_1^{(k)}(x_0) - f_2^{(k)}(x_0) = 0, \quad k = 0, 1, \ldots, n,$$

$$f_1^{(n+1)}(x_0) - f_2^{(n+1)}(x_0) \neq 0.$$

11.5. Teoremă. Curbele $\alpha_1 : x = x(t)$, $y = y(t)$, $C : f(x, y) = 0$ au în punctul comun regulat $t_0 \leftrightarrow M_0(x_0, y_0)$ un contact de ordinul n dacă și numai dacă funcția compusă $t \to \Phi(t) = f(x(t), y(t))$ satisface

$$\Phi^{(k)}(t_0) = 0, \ k = 0, 1, \ldots, n, \quad \Phi^{(n+1)}(t_0) \neq 0.$$

Demonstrație. Fie $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$. Atunci C este reprezentată într-o vecinătate a lui (x_0, y_0) de arcul simplu și regulat $\alpha : x = x$, $y = y(x)$, $x \in I$. Restringînd eventual pe I reparametrizăm pe α prin $x = x(t)$ și găsim $\alpha_2 : x = x(t)$, $y = y(x(t)) = u(t)$.

Deoarece $f(x(t), u(t)) = 0$ este o identitate într-o vecinătate a lui t_0, prin derivare deducem identitățile:

$$(*) \qquad \left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial}{\partial u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\right)^{(k)} f(x(t), u(t)) = 0.$$

În particular acestea sînt adevărate pentru $t = t_0$.

Presupunem că α_1 și α_2 au în $t_0 \leftrightarrow M_0(x_0, y_0)$ un contact de ordinul n, adică

$$(**) \qquad \left.\frac{\mathrm{d}^k y(t)}{\mathrm{d}t^k}\right|_{t=t_0} = \left.\frac{\mathrm{d}^k u(t)}{\mathrm{d}t^k}\right|_{t=t_0}, \quad k = 0, 1, \ldots, n,$$

$$\left.\frac{\mathrm{d}^{n+1} y(t)}{\mathrm{d}t^{n+1}}\right|_{t=t_0} \neq \left.\frac{\mathrm{d}^{n+1} u(t)}{\mathrm{d}t^{n+1}}\right|_{t=t_0}.$$

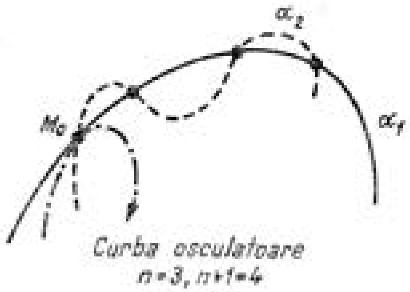


Fig. 55

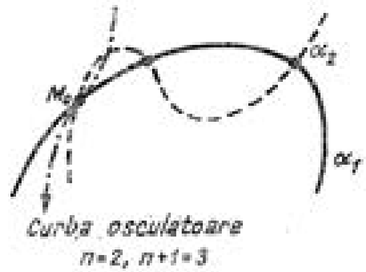


Fig. 56

Din (**) și (*) rezultă că funcția $t \to \Phi(t) = f(x(t),\ y(t))$ satisface

$$(***) \qquad \Phi^{(k)}(t_0) = \left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{dy}{dt}\right)^{(k)} f(x(t), y(t))\bigg|_{t=t_0} = 0$$

$$k = 0, 1, \ldots, n,$$

$$\Phi^{(n+1)}(t_0) = \left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{dy}{dt}\right)^{(n+1)} f(x(t), y(t))\bigg|_{t=t_0} \neq 0.$$

Reciproc, relațiile (***) și (*) implică pe (**), adică α_1 și α_2 au în $t_0 \leftrightarrow M_0(x_0, y_0)$ un contact de ordinul n.

11.6. *Curbe osculatoare.* Fie $\alpha_1 : x = x(t),\ y = y(t),\ t \in I$ o curbă fixată și $\alpha_2 : f(x, y\,;\, a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}) = 0$ o familie de curbe care depind de $n+1$ parametri, unde f este o funcție diferențiabilă de $n+3$ variabile.

Se pune problema să determinăm din familia α_2 o curbă care să aibă cu α_1, într-un punct dat, un contact de ordinul n, adică $n+1$ puncte confundate. Această curbă se numește *osculatoarea* curbei α_1.

Problema găsirii curbei osculatoare se rezolvă prin înlocuirea lui $x(t)$ și $y(t)$ în f, aplicarea teoremei 11.5 și găsirea celor $n+1$ necunoscute a_i ce determină curba osculatoare. Dacă în punctul considerat curba obținută are cel puțin un contact de ordinul $n+1$ cu α_1, atunci ea se numește *supraosculatoare*.

Deoarece curba osculatoare a unei curbe α_1 este de fapt poziția limită a unei curbe din familia α_2 care trece prin $n+1$ puncte ale lui α_1, atunci cînd aceste puncte tind de-a lungul lui α_1 către punctul dat inițial, putem afirma că :

a) dacă $n = 2k + 1$, atunci curba osculatoare nu traversează pe α_1 în punctul M_0 (fig. 55),

b) dacă $n = 2k$, atunci curba osculatoare traversează pe α_1 în punctul M_0 (fig. 56).

11.7. Exemple

1) Dreptele din plan $ax + by + c = 0$ formează o familie de curbe cu doi parametri esențiali. De aceea, fiind dată o curbă α se poate determina, într-unul din punctele sale, o dreaptă osculatoare (contact ordinul $1 \sim 2$ puncte confundate) care este de fapt *tangenta* la curbă (fig. 57). În punctele singulare ale lui α dreapta găsită este supraosculatoare.

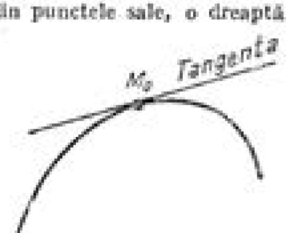


Fig. 57

2) Cercurile din plan $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$ sau $(\bar{r} - \bar{c})^2 - R^2 = 0$ formează o familie de curbe cu trei parametri esențiali (coordonatele centrului și raza). Fiind dată o curbă $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ și un punct pe ea se poate determina un *cerc osculator* (contact ordinul $2 \sim 3$ puncte confundate).

Pentru determinarea acestui cerc ne folosim de teorema 11.5. Astfel impunem condițiile:

$$(\vec{\alpha}-\vec{c})^2-R^2=0$$

$$(\vec{\alpha}',\vec{\alpha}-\vec{c})=0$$

$$(\vec{\alpha}'',\vec{\alpha}-\vec{c})+\vec{\alpha}'^2=0.$$

Ecuația din mijloc dă $\vec{c}=\vec{\alpha}+\lambda\vec{N}$, unde $\vec{N}$ este cîmpul *normal unitar*, iar ultima ecuație implică $\lambda=\dfrac{1}{k}$, unde k este curbura lui α. Evident, trebuie impusă condiția $k\neq 0$ în punctul considerat. Centrul cercului osculator $\vec{c}=\vec{\alpha}+\dfrac{1}{k}\vec{N}$ se află pe $\vec{N}$ și se numește *centru de curbură*. Raza cercului osculator $R=\dfrac{1}{|k|}$ se obține din prima ecuație și se numește *raza de curbură* a lui α. Cercul osculator se mai numește și *cerc de curbură* (fig. 58).

Explicit, centrul cercului osculator este dat de

$$x_0=x-y'\frac{x'^2+y'^2}{x'y''-x''y'},\quad y_0=y+x'\frac{x'^2+y'^2}{x'y''-x''y'},$$

iar raza sa este

$$R=\frac{(x'^2+y'^2)^{3/2}}{|x'y''-x''y'|}.$$

Curba $\gamma=\vec{\alpha}+\dfrac{1}{k}\vec{N}$, care este de fapt locul geometric al centrelor de curbură ale lui α, se numește *evoluta* sau *desfășurata* lui α.

3) Fie o curbă α și un punct pe această curbă. În acest punct se poate determina o parabolă osculatoare care să aibă cu α un contact de ordinul trei; o elipsă sau hiperbolă osculatoare care să aibă cu α un contact de ordinul patru etc.

Fie (a) o familie de curbe din plan reprezentată prin ecuația $f(x,y;a)=0$, unde f este o funcție diferențiabilă în raport cu cele trei argumente.

11.8. *Definiție. O curbă $\alpha: I\to\mathbb{R}^2$, $\alpha(a)=(x(a),y(a))$ se numește înfășurătoarea familiei (a) dacă satisface condițiile:*

1) *$\forall P\in\alpha(I)$ se poate indica o curbă unică a familiei care să conțină punctul P ca punct regulat și care să aibă în P un contact de ordinul $n\geq 1$ cu $\alpha(I)$.*

2) *$\forall$ curba din familia (a), există un punct regulat P, al său care să aparțină și lui $\alpha(I)$ și în care cele două curbe să aibă un contact de ordinul $n\geq 1$.*

3) *Nici o curbă a familiei (a) să nu aibă un arc comun cu $\alpha(I)$.*

Cu alte cuvinte înfășurătoarea este curba la care sînt tangente curbele din familia (a) (fig. 59).

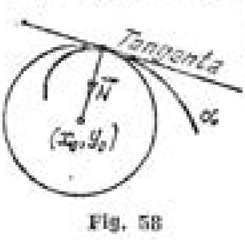


Fig. 58

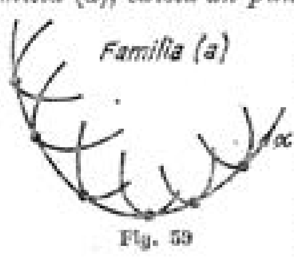


Fig. 59

11.9. Teoremă. Înfășurătoarea familiei *(a)* este inclusă în curba definită prin:

$$\begin{cases} f(x, y\,;\,a) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial a}(x, y\,;\,a) = 0. \end{cases}$$

Demonstrație. Prin ipoteză $f(x(a),\ y(a)\,;\,a) = 0$, $\forall a$. Derivînd rezultă identitatea $\dfrac{\partial f}{\partial x}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}a} + \dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}a} + \dfrac{\partial f}{\partial a} = 0$. Scriem condiția ca în punctele comune să avem aceeași tangentă adică vectorii $\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}\right)$ și $\left(\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}a}, \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}a}\right)$ să fie perpendiculari,

$$\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}a} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}a} = 0.$$

Din ultimele două relații găsim

$$\frac{\partial f}{\partial a}(x, y\,;\,a) = 0,$$

ceea ce trebuia demonstrat.

11.10. Exemplu. Să se determine înfășurătoarea curbelor

$$f(x, y\,;\,a) = (y - a)^2 - (x - a^2)^3 = 0$$

Soluție. Alcătuim sistemul

$$f(x, y\,;\,a) = (y - a)^2 - (x - a^2)^3 = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial a}(x, y\,;\,a) = -2(y - a) + 6a(x - a^2)^2 = 0,$$

care conduce la $y^2 - x = 0$ și

$$\alpha(a) = \left(\frac{9a^4 + 1}{9a^2}, \frac{27a^4 + 1}{27a^3}\right).$$

Observăm însă că punctele pentru care $y^2 - x = 0$ sînt puncte critice pentru familia (a) adică puncte în care avem $f = 0$, $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 0$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$. De aceea numai curba α este înfășurătoarea familiei (a).

§ 12. Curbe plane în coordonate polare

12.1. Presupunem că planul xOy a fost raportat la un reper polar și că punctului (x, y) îi corespunde punctul (ρ, θ). În această ipoteză, o curbă plană mai poate fi dată și prin *ecuația polară*, $\rho = f(\theta)$.

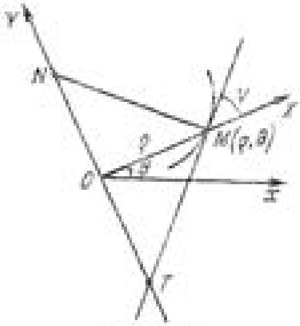


Fig. 60

12.2. Fie (ρ, θ) un punct al unei curbe date, diferit de pol. Unghiul V dintre tangenta în acest punct și raza vectoare corespunzătoare este dat de $\operatorname{tg} V = \frac{\rho}{\rho'}$. Dacă considerăm un reper cartezian adecvat: OX este pe raza vectoare corespunzătoare punctului (ρ, θ) iar OY este perpendiculară pe OX astfel încît XOY să fie un reper orientat pozitiv, atunci tangenta și normala în (ρ, θ) au respectiv ecuațiile (fig. 60)

$$Y = \frac{\rho}{\rho'}(X - \rho) \quad \text{și} \quad \frac{\rho}{\rho'}Y + X - \rho = 0.$$

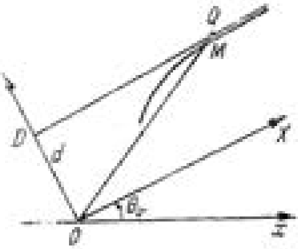


Fig. 61

Numerele reale $\overline{OT} = \frac{\rho^2}{\rho'}$ și $\overline{ON} = \rho'$ se numesc *subtangentă polară* și respectiv *subnormala polară* (fig. 60).

Dacă curba considerată trece prin pol, atunci tangenta în pol face cu Ox unghiul θ_1 care anulează pe $\rho = f(\theta)$.

12.3. Punctele multiple ale unei curbe date prin $\rho = f(\theta)$ se găsesc rezolvînd ecuațiile

$$f(\theta_1) = f(\theta_2 + 2k\pi), \quad f(\theta_1) = -f(\theta_2 + \pi + 2k\pi), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

12.4. Alura curbei se stabilește cu ajutorul semnului curburii

$$k = \frac{\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho''}{(\rho^2 + \rho'^2)^{3/2}}.$$

Pentru $k > 0$ corespund puncte în vecinătatea cărora curba se încovoaie în sens opus polului, pentru $k < 0$ corespund puncte în vecinătatea cărora curba se încovoaie către pol, iar pentru $k = 0$ obținem de obicei puncte de inflexiune.

12.5. Valorile lui θ pentru care limita lui $\rho = f(\theta)$ este infinită, dau direcțiile asimptotice. Fie θ_0 o direcție asimptotică. Notăm $d = \lim\limits_{\theta \to \theta_0} \sin(\theta - \theta_0)$. Dacă d este finit, atunci curba admite o asimptotă a cărei ordonată la origine este d (fig. 61). Dacă $d = \infty$, atunci curba are o ramură parabolică.

CURBE ÎN $\mathbb{R}^3$

§ 13. Tangenta și planul normal

Raportăm spațiul la reperul natural și considerăm curba $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$, $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$.

Curbele din spațiu se împart în două categorii: *curbe plane* și *curbe strîmbe*.

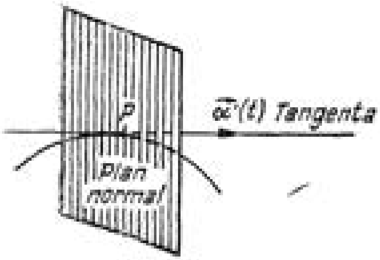


Fig. 62

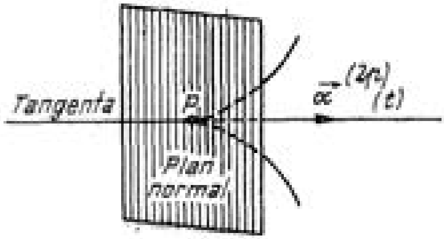


Fig. 63

O curbă din spaţiu se numeşte *curbă plană* dacă $\forall\, t \in I$, $\exists a, b, c, d \in \mathbb{R}$ astfel ca $ax(t) + by(t) + cz(t) + d = 0$.

Fie $P = \alpha(t)$ un punct regulat al curbei. Se ştie (§ 2) că dreapta care trece prin P şi are ca vector director pe $\vec{\alpha}'(t)$ este *tangentă* la curba α în P.

13.1. *Definiţie. Planul care trece prin P şi are drept vector normal pe $\vec{\alpha}'(t)$ se numeşte plan normal la curba α în P* (fig. 62).

Într-un punct regulat fixat, $P = \alpha(t)$, tangenta şi planul normal au respectiv ecuaţiile:

$$\frac{x - x(t)}{x'(t)} = \frac{y - y(t)}{y'(t)} = \frac{z - z(t)}{z'(t)}, \quad (x - x(t))\, x'(t) + (y - y(t))\, y'(t) + (z - z(t))\, z'(t) = 0.$$

Dacă $P = \alpha(t)$ este un punct singular de ordinul m, se ştie că dreapta care trece prin P şi are ca vector director pe $\vec{\alpha}^{(m)}(t)$ este *tangenta* curbei în punctul P.

13.2. *Definiţie. Planul care trece prin P şi are drept vector normal pe $\vec{\alpha}^{(m)}(t)$ se numeşte plan normal la curba α în P* (fig. 63).

Într-un punct singular de ordinul m, tangenta şi planul normal la curbă au respectiv ecuaţiile:

$$\frac{x - x(t)}{x^{(m)}(t)} = \frac{y - y(t)}{y^{(m)}(t)} = \frac{z - z(t)}{z^{(m)}(t)} \quad \text{şi} \quad (x - x(t))\, x^{(m)}(t) + (y - y(t))\, y^{(m)}(t) + (z - z(t))\, z^{(m)}(t) = 0.$$

§ 14. Curbe definite prin ecuaţii carteziene implicite

Curbele din $\mathbb{R}^3$ mai pot fi introduse şi pornind de la funcţii diferenţiabile de tipul $F = (f, g) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $F(x, y, z) = (f(x, y, z),\ g(x, y, z))$. Deoarece

$$J(F) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} & \frac{\partial g}{\partial z} \end{bmatrix},$$

punctele critice ale lui F se află rezolvind sistemul

$$\frac{D(f, g)}{D(y, z)} = 0, \quad \frac{D(f, g)}{D(z, x)} = 0, \quad \frac{D(f, g)}{D(x, y)} = 0.$$

Punctele în care cel puţin unul din aceşti determinanţi este diferit de zero sînt puncte regulate. Mulţimea

$$C = F^{-1}(a, b) = \{(x, y, z) \mid (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad f(x, y, z) = a, \quad g(x, y, z) = b\},$$

se numeşte *mulţime de ecuaţii carteziene* implicite $f(x, y, z) = a$, $g(x, y, z) = b$.

Mulţimea C este de fapt intersecţia a două mulţimi de nivel constant. Ea poate să conţină atît puncte regulate cît şi puncte critice ale lui F.

Fie $(x_0, y_0, z_0) \in C$. Mulţimea tuturor punctelor din C a căror distanţă faţă de (x_0, y_0, z_0) este mai mică decît un număr $\varepsilon > 0$ se numeşte *vecinătate* a lui (x_0, y_0, z_0) în C.

14.1. Teoremă. Dacă (x_0, y_0, z_0) este un punct regulat din C, atunci există o vecinătate a acestui punct în care ecuaţiile

$$f(x, y, z) = a, \quad g(x, y, z) = b$$

definesc o curbă simplă şi regulată.

Demonstraţie. Deoarece ecuaţiile $f(x, y, z) = a$, $g(x, y, z) = b$ reprezintă respectiv mulţimi de nivel constant diferite, mulţimea C apare ca fiind intersecţia acestor mulţimi.

În ipoteza $\dfrac{D(f, g)}{D(y, z)}(x_0, y_0, z_0) \neq 0$, teorema funcţiilor implicite asigură că sistemul $f(x, y, z) = a$, $g(x, y, z) = b$ defineşte două funcţii $x \to y(x)$, $x \to z(x)$, în vecinătatea I a punctului x_0, pentru care

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\dfrac{D(f, g)}{D(z, x)}}{\dfrac{D(f, g)}{D(y, z)}}, \qquad \frac{dz}{dx} = \frac{\dfrac{D(f, g)}{D(x, y)}}{\dfrac{D(f, g)}{D(y, z)}}.$$

Astfel porţiunea din C din jurul punctului (x_0, y_0, z_0) poate fi gîndită în mai multe moduri (fig. 64):

— intersecţia a două suprafeţe cilindrice (vezi Cap. 3),

— graficul aplicaţiei $h : I \to \mathbb{R}^2$, $h(x) = (y(x), z(x))$,

— imaginea lui I prin aplicaţia $\alpha : x = t$, $y = y(t)$, $z = z(t)$. De aceea această porţiune este o curbă simplă şi regulată.

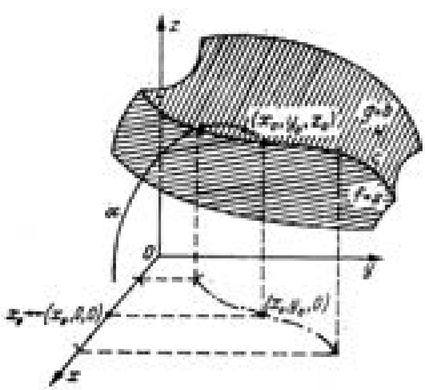


Fig. 64

În ipotezele teoremei 14.1, mulţimea C este reuniunea imaginilor unor curbe simple şi regulate, numindu-se *curbă de ecuaţii carteziene implicite* $f(x, y, z) = a$, $g(x, y, z) = b$. Această denumire se păstrează uneori chiar dacă C conţine şi puncte critice.

Dacă f şi g sînt polinoame, atunci C se numeşte *curbă algebrică*.

14.2. *Tangenta.* Fie $P(x_0, y_0, z_0)$ un punct regulat al lui C. În baza definiţiei din §2 şi a teoremei 14.1 deducem că tangenta la C în P are ecuaţiile

$$\frac{x - x_0}{\dfrac{D(f, g)}{D(y_0, z_0)}} = \frac{y - y_0}{\dfrac{D(f, g)}{D(z_0, x_0)}} = \frac{z - z_0}{\dfrac{D(f, g)}{D(x_0, y_0)}}.$$

De aceea planul normal corespunzător are ecuaţia

$$(x - x_0)\frac{D(f, g)}{D(y_0, z_0)} + (y - y_0)\frac{D(f, g)}{D(z_0, x_0)} + (z - z_0)\frac{D(f, g)}{D(x_0, y_0)} = 0.$$

14.3. Observaţii.

1) În situaţii concrete curba C poate fi dată prin două ecuaţii şi prin mai multe inecuaţii în x, y, z (inecuaţiile precizează o anumită porţiune din spaţiu).

2) Reprezentarea curbei C (sau a unei porţiuni din C) în forma $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$ se poate face prin intermediul teoremei 14.1 sau prin artificii de calcul.

3) Fie o curbă din spaţiu dată în forma $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$. Dacă pentru $t = t_0$ avem $x'(t_0) \neq 0$, atunci teorema funcţiei inverse permite să spunem că funcţia $x = x(t)$ are inversa $t = t(x)$ în vecinătatea lui t_0. Astfel $y = y(t)$, $z = z(t)$ apar ca funcţii compuse sau pe scurt ca funcţii de tipul

$$\begin{cases} y = y(x) \\ z = z(x) \end{cases}$$

şi deci, în vecinătatea punctului ales, curba apare ca intersecţie a două suprafeţe cilindrice.

4) În general, dacă există o funcţie $F = (f, g): \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ astfel incit

$$f(x(t), y(t), z(t)) = a, \quad g(x(t), y(t), z(t)) = b, \quad \forall\, t \in I,$$

atunci $f(x, y, z) = a$, $g(x, y, z) = b$ sînt ecuaţiile carteziene implicite ale curbei $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$, $t \in I$.

5) Fie $C: f(x, y, z) = a$, $g(x, y, z) = b$ o curbă regulată. Gradienţii

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}, \quad \nabla g = \frac{\partial g}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial g}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial g}{\partial z}\vec{k},$$

definiţi pe C, sînt cîmpuri normale la C (Exerciţiu !).

14.4. Exemple

1) *Dreapta.* Ecuaţiile carteziene implicite ale unei drepte din spaţiu (intersecţie de plane) sînt

$$D: \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \end{cases} \qquad \text{rang}\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{bmatrix} = 2,$$

iar ecuaţiile parametrice sînt $\alpha: x = x_0 + lt$, $y = y_0 + mt$, $z = z_0 + nt$, $t \in \mathbb{R}$.

2) *Cercul.* De obicei un cerc din spațiu este privit ca fiind intersecția dintre o sferă și un plan :

$$C:\begin{cases}(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=r^2\\ ax+by+cz+d=0\end{cases},\qquad \frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\leqslant r.$$

3) *Conicele.* În general, intersecția dintre un plan și o cuadrică este o conică în spațiu ; astfel

$$C:\begin{cases}f(x,y,z)=0\\ ax+by+cz+d=0,\end{cases}$$

unde $f(x, y, z)$ este un polinom de gradul doi.

§ 15. Formule Frenet pentru curbe cu viteza unu

Inițial vom face cîteva observații în legătură cu studiul formei unei curbe din spațiu în vecinătatea unui punct al său, studiu care se face în același mod ca la curbele plane. Precizăm că în acest caz, figurile 47—50 ne dau forma proiecției curbei (în general proiecție oblică) pe planul determinat de cele două derivate necoliniare.

O mai bună aproximare a formei unei curbe din spațiu se poate obține utilizînd trei derivate liniar independente. De exemplu, presupunem că P este un punct regulat și că $\vec{\alpha}'(t)$, $\vec{\alpha}''(t)$, $\vec{\alpha}'''(t)$ determină o bază în $T_P\mathbb{R}^3$. Utilizînd formula Taylor de ordinul trei

$$\overrightarrow{PQ}=\frac{h}{1!}\vec{\alpha}'(t)+\frac{h^2}{2!}\vec{\alpha}''(t)+\frac{h^3}{3!}\vec{\alpha}'''(t)+\frac{h^3}{3!}\vec{\varepsilon}(h),\quad \lim_{h\to 0}\vec{\varepsilon}(h)=\vec{0},$$

ajungem la concluzia că pentru $|h|$ suficient de mic tripletul $\left(h, \frac{h^2}{2}, \frac{h^3}{6}\right)$ dă cu aproximație coordonatele lui $\overrightarrow{PQ}$ în baza aleasă. Cînd h trece prin zero prima și ultima coordonată își schimbă semnul, iar cea din mijloc și-l păstrează. Astfel, în vecinătatea lui P, arcul se află în același semispațiu cu $\vec{\alpha}''(t)$, traversează pe $\vec{\alpha}''(t)$, $\vec{\alpha}'''(t)$ și planul determinat de P, $\vec{\alpha}'(t)$ și $\vec{\alpha}''(t)$ (fig. 65).

Planul determinat de P, $\vec{\alpha}'(t)$ și $\vec{\alpha}''(t)$ se numește *plan osculator*.

Astfel, în vecinătatea lui P, curba considerată are o abatere de la tangentă (*curbare*) și o abatere de la planul osculator (*torsionare*).

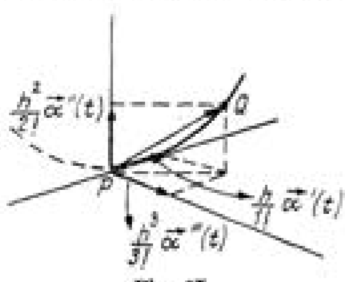


Fig. 65

Ne propunem să găsim elementele matematice care măsoară curbarea și torsionarea unei curbe regulate din $\mathbb{R}^3$.

15.1. Fie $\beta : J \to \mathbb{R}^3$ o curbă cu viteza unu, adică $\|\vec{\beta}'(s)\| = 1$, $\forall\, s \in J$. Cîmpul $\vec{T} = \vec{\beta}'$ se numește cîmp *tangent unitar* al lui β. Derivînd pe $(\vec{\beta}', \vec{\beta}') = 1$ deducem $(\vec{\beta}'', \vec{\beta}') = 0$ și deci $\vec{T}' = \vec{\beta}''$, $\vec{\beta}'' \perp \vec{\beta}'$. După raționamentul făcut în § 9, curba β se încovoaie în acelaşi sens cu $\vec{T}' = \vec{\beta}''$. Pe măsură ce $\|\vec{\beta}''\|$ creşte, încovoierea lui β creşte. În acest fel $\vec{T}' = \vec{\beta}''$ controlează curbarea lui β, iar lungimea lui $\vec{T}'$ dă o măsură numerică a acestei curbări. De aceea $\vec{T}'$ se numeşte cîmp curbură, iar funcţia $k : J \to [0, \infty)$, $k(s) = \|\vec{T}'(s)\|$, se numeşte *curbura* lui β (fig. 66).

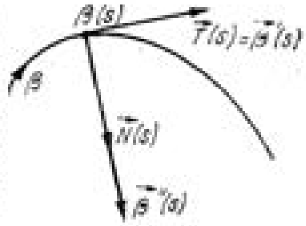


Fig. 66

Presupunem $k > 0$. În această ipoteză cîmpul vectorial $\vec{N} = \frac{1}{k}\vec{T}'$ se numeşte *cîmpul normal principal* al lui β. Cîmpul $\vec{N}$ indică în fiecare punct sensul în care se curbează β. Evident $\vec{T}(s)$ şi $\vec{N}(s)$ determină planul osculator al curbei β. Pentru controlul abaterii curbei de la planul osculator (*torsionare*) în vecinătatea punctului $\beta(s)$ se utilizează versorul normal al acestui plan. De aceea se introduce cîmpul unitar $\vec{B} = \vec{T} \times \vec{N}$ care se numeşte *cîmp binormal* pe β.

Evident cîmpurile vectoriale $\vec{T}, \vec{N}, \vec{B}$ definite pe β sînt ortonormate. Ansamblul $\vec{T}, \vec{N}, \vec{B}$ poartă numele de *cîmpul reperului Frenet* pe β, iar ansamblul $\vec{T}(s)$, $\vec{N}(s)$, $\vec{B}(s)$ se numeşte *reper Frenet* ataşat punctului $\beta(s)$ de pe curbă.

Acest reper determină un triedru Frenet (mobil) ale cărui muchii se numesc respectiv : *tangenta*, *normala principală* şi *binormala*.

Planele de coordonate ale acestui triedru se numesc respectiv *plan normal*, *plan rectificant* şi *plan osculator* (fig. 67).

Folosirea cîmpului reperului Frenet în studiul unei curbe regulate β dă mai multe informaţii despre curbă decît ar da folosirea oricărui alt cîmp de repere. Ideea de bază care pune în evidenţă utilitatea acestui cîmp de repere constă în posibilitatea exprimării derivatelor $\vec{T}', \vec{N}', \vec{B}'$ cu ajutorul lui $\vec{T}, \vec{N}, \vec{B}$. Ştim că $\vec{T}' = k\vec{N}$. Să arătăm că $\vec{B}'$ este coliniar cu $\vec{N}$. Pentru aceasta este suficient să dovedim că $(\vec{B}', \vec{B}) = 0$ şi $(\vec{B}', \vec{T}) = 0$. Prima relaţie este adevărată deoarece $\vec{B}(s)$ este un versor. Pentru a demonstra a doua relaţie derivăm pe $(\vec{B}, \vec{T}) = 0$ şi găsim

$$(\vec{B}', \vec{T}) + (\vec{B}, \vec{T}') = 0 \text{ sau } (\vec{B}', \vec{T}) = -(\vec{B}, k\vec{N}) = 0.$$

Funcţia reală $\tau : J \to \mathbb{R}$ definită prin

$$\vec{B}' = -\tau\vec{N}$$

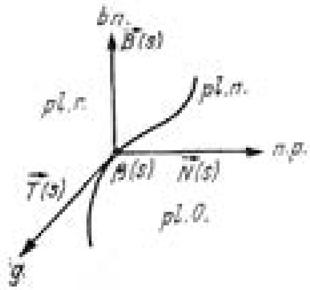


Fig. 67

se numeşte *torsiunea* curbei (semnul minus este pus prin convenţie). $\tau(s)$ poate fi un număr negativ, nul sau pozitiv. Ulterior vom arăta modul în care τ măsoară abaterea curbei β de la planul său osculator.

Să exprimăm acum pe $\vec{N}'$, în raport cu $\vec{T}, \vec{N}, \vec{B}$. Avem

$$\vec{N}' = (\vec{N}', \vec{T})\vec{T} + (\vec{N}', \vec{N})\vec{N} + (\vec{N}', \vec{B})\vec{B}.$$

Deoarece $\vec{N}(s)$ este un versor rezultă că $(\vec{N}', \vec{N}) = 0$. Pentru evaluarea lui $(\vec{N}', \vec{T})$ şi $(\vec{N}', \vec{B})$ pornim de la $(\vec{N}, \vec{T}) = 0$ şi $(\vec{N}, \vec{B}) = 0$ pe care le derivăm în raport cu s. Găsim:

$$(\vec{N}', \vec{T}) = -(\vec{N}, \vec{T}') = -(\vec{N}, k\vec{N}) = -k,$$

$$(\vec{N}', \vec{B}) = -(\vec{N}, \vec{B}') = -(\vec{N}, -\tau\vec{N}) = \tau.$$

Astfel am demonstrat:

15.2. Teoremă (*formulele Frenet*). Dacă $\beta : J \to \mathbb{R}^3$ este o curbă cu viteza unu, cu curbura $k > 0$ şi cu torsiunea τ, atunci

$$\begin{aligned} \vec{T}' &= \phantom{-k\vec{T}} \quad k\vec{N} \\ \vec{N}' &= -k\vec{T} \qquad\qquad + \tau\vec{B} \\ \vec{B}' &= \phantom{-k\vec{T}} \quad -\tau\vec{N}. \end{aligned}$$

15.3. *Aproximarea Frenet*. Ne propunem să dăm acum o aproximare a unei curbe β în vecinătatea unui punct al său şi cu ajutorul acestei aproximări să arătăm în ce mod curbura şi torsiunea influenţează forma curbei. Pentru aceasta pornim de la aproximarea Taylor

$$\vec{\beta}(s) \simeq \vec{\beta}(0) + \frac{s}{1!}\vec{\beta}'(0) + \frac{s^2}{2!}\vec{\beta}''(0) + \frac{s^3}{3!}\vec{\beta}'''(0)$$

pe care o vom exprima cu ajutorul reperului Frenet în punctul considerat. Avem

$$\vec{\beta}'(0) = \vec{T}_0, \qquad \vec{\beta}''(0) = k_0\vec{N}_0.$$

Pe de altă parte

$$\vec{\beta}''' = (k\vec{N})' = \frac{dk}{ds}\vec{N} + k\vec{N}'$$

Fig. 68

şi folosind formula lui Frenet pentru $\vec{N}'$ găsim

$$\vec{\beta}'''(0) = -k_0^2\vec{T}_0 + \frac{dk}{ds}(0)\vec{N}_0 + k_0\tau_0\vec{B}_0.$$

Înlocuind în aproximarea Taylor şi reţinînd numai partea principală în fiecare componentă (puterile cele mai mici ale lui s) obţinem

$$\vec{\beta}(s) \sim \vec{\beta}(0) + s\vec{T}_0 + k_0\frac{s^2}{2}\vec{N}_0 + k_0\tau_0\frac{s^3}{6}\vec{B}_0.$$

Notînd partea dreaptă cu $\vec{\gamma}(s)$ obţinem o curbă $\gamma : J \to \mathbb{R}^3$ numită *aproximarea Frenet* a lui β în vecinătatea lui $s = 0$ (fig. 68). Precizăm că β are aproximări Frenet diferite în puncte diferite. Dacă $s = 0$ este înlocuit printr-un punct arbitrar $s = s_0$, atunci în expresiile anterioare s se înlocuiește cu $s - s_0$.

Să examinăm aproximarea Frenet dată anterior. Primul termen în expresia lui $\vec{\gamma}(s)$ este chiar punctul $\beta(0)$. Primii doi termeni dau tangenta lui β în $\beta(0)$:

$$s \to \vec{\beta}(0) + s\vec{T}_0.$$

Aceasta este *cea mai bună aproximare liniară a lui* β în vecinătatea lui $\beta(0)$. Primii trei termeni dau parabola

$$s \to \vec{\beta}(0) + s\vec{T}_0 + k_0 \frac{s^2}{2} \vec{N}_0,$$

care este *cea mai bună aproximare pătratică a lui* β în vecinătatea lui $\beta(0)$. Observăm că această parabolă se află în planul osculator al lui β în punctul $\beta(0)$, are aceeași formă ca și parabola $y = k_0 \dfrac{x^2}{2}$ din planul xOy și este complet determinată prin curbura k_0. Astfel k_0 măsoară abaterea curbei de la tangenta în $\beta(0)$ în sensul lui $\vec{N}_0$.

În final, torsiunea τ_0, care apare în ultimul și cel mai mic termen al lui $\vec{\gamma}$, controlează abaterea lui β de la planul său osculator, în $\beta(0)$, în direcția lui $\vec{B}_0$.

§ 16. Formule Frenet pentru curbe cu viteza arbitrară

16.1. Fie $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$, $t \to \alpha(t)$, o curbă regulată care nu are viteza unu și $\beta : J \to \mathbb{R}^3$, $s \to \beta(s)$, reprezentarea sa normală. Dacă $s : I \to J$ este abscisa curbilinie, atunci

$$\forall\, t \in I,\ \alpha(t) = \beta(s(t)).$$

Dacă $k_\beta > 0$, τ_β, $\vec{T}_\beta$, $\vec{N}_\beta$ și $\vec{B}_\beta$ sînt elementele Frenet pentru β, atunci pentru α definim:

— funcția curbură: $k = k_\beta \circ s$,

— funcția torsiune: $\tau = \tau_\beta \circ s$,

— cîmpul tangent unitar: $\vec{T} = \vec{T}_\beta \circ s$,

— cîmpul normal principal: $\vec{N} = \vec{N}_\beta \circ s$,

— cîmpul binormal: $\vec{B} = \vec{B}_\beta \circ s$

și astfel obținem elementele Frenet pentru o curbă cu viteza arbitrară (fig. 69).

16.2. Lemă. (*Formulele Frenet pentru o curbă cu viteza arbitrară*). Dacă $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ este o curbă regulată cu viteza v și $k > 0$, atunci

$$\begin{aligned}
\vec{T}' &= & k v \vec{N} & \\
\vec{N}' &= -k v \vec{T} & & + \tau v \vec{B} \\
\vec{B}' &= & -\tau v \vec{N} &
\end{aligned}$$

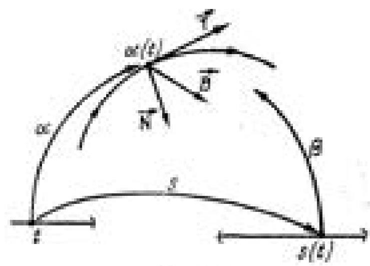


Fig. 69

Demonstrație. Fie β reprezentarea normală a lui α. Prin definiție $\vec{T}(t) = \vec{T}_\beta(s(t))$, $t \in I$, și prin derivare găsim

$$\vec{T}'(t) = s'(t)\vec{T}'_\beta(s(t)).$$

Pe de altă parte teorema 15.2 dă

$$\vec{T}'_\beta(s) = k_\beta(s)\,\vec{N}_\beta(s).$$

Înlocuind pe s cu $s(t)$ și revenind la $\vec{T}'(t)$ deducem

$$\vec{T}'(t) = s'(t)\,k_\beta(s(t))\,\vec{N}(s(t)) = v(t)\,k(t)\,\vec{N}(t).$$

Celelalte formule se demonstrează analog.

Să exprimăm acum cîmpul viteză și cîmpul accelerație în raport cu $\vec{T}$, $\vec{N}$ și $\vec{B}$.

16.3. Lemă. Dacă α este o curbă regulată cu viteza v, atunci cîmpurile viteză și accelerație ale lui α sînt date de

$$\vec{\alpha}' = v\vec{T}, \quad \vec{\alpha}'' = \frac{dv}{dt}\,\vec{T} + kv^2\vec{N}.$$

Demonstrație. Deoarece $\vec{\alpha} = \vec{\beta}(s)$ găsim

$$\vec{\alpha}'(t) = s'(t)\,\vec{\beta}'(s(t)) = v(t)\,\vec{T}_\beta(s(t)) = v(t)\,\vec{T}(t).$$

O nouă derivare dă (fig. 70)

$$\vec{\alpha}'' = \frac{dv}{dt}\,\vec{T} + v\vec{T}' = \frac{dv}{dt}\,\vec{T} + kv^2\vec{N}.$$

Formula care dă accelerația este mai complicată decît formula care dă viteza. Prin definiție $\vec{\alpha}''$ este variația vitezei $\vec{\alpha}'$ în unitatea de timp și în general se schimbă atît lungimea lui $\vec{\alpha}'$ cît și direcția.

Componenta tangențială $\dfrac{dv}{dt}\,\vec{T}$ a lui $\vec{\alpha}''$ indică variația lungimii lui $\vec{\alpha}'$, iar *componenta normală* $kv^2\vec{N}$ indică variația direcției lui $\vec{\alpha}'$.

Ne propunem acum să dăm formulele explicite pentru determinarea elementelor Frenet.

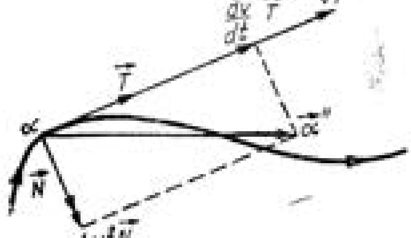


Fig. 70

16.4. Teoremă. Dacă $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ este o curbă regulată, atunci

$$\vec{T} = \frac{\vec{\alpha}'}{\|\vec{\alpha}'\|}, \quad \vec{N} = \vec{B} \times \vec{T},$$

$$\vec{B} = \frac{\vec{\alpha}' \times \vec{\alpha}''}{\|\vec{\alpha}' \times \vec{\alpha}''\|},$$

$$k = \frac{\|\vec{\alpha}' \times \vec{\alpha}''\|}{\|\vec{\alpha}'\|^3}, \qquad \tau = \frac{(\vec{\alpha}' \times \vec{\alpha}'', \vec{\alpha}''')}{\|\vec{\alpha}' \times \vec{\alpha}''\|^2},$$

unde „$'$" înseamnă derivata în raport cu t.

Demonstrație. Deoarece $v = \|\vec{\alpha}'\| > 0$, formula $\vec{T} = \dfrac{\vec{\alpha}'}{\|\vec{\alpha}'\|}$ este echivalentă cu $\vec{\alpha}' = v\vec{T}$.

Folosind lema anterioară găsim

$$\vec{\alpha}' \times \vec{\alpha}'' = kv^3\vec{B}.$$

Deoarece $\|\vec{B}\| = 1$, $k \geqslant 0$ și $v > 0$, obținem

$$kv^3 = \|\vec{\alpha}' \times \vec{\alpha}''\|.$$

Această relație arată că pentru curbele regulate condiția $k > 0$ este echivalentă cu $\|\vec{\alpha}' \times \vec{\alpha}''\| > 0$. De aceea, pentru $k > 0$, vectorii $\vec{\alpha}'$ și $\vec{\alpha}''$ sînt liniar independenți și determină planul osculator în fiecare punct, ca și $\vec{T}$ și $\vec{N}$. Rezultă

$$\vec{B} = \frac{\vec{\alpha}' \times \vec{\alpha}''}{kv^3} = \frac{\vec{\alpha}' \times \vec{\alpha}''}{\|\vec{\alpha}' \times \vec{\alpha}''\|}.$$

Pentru obținerea produsului $(\vec{\alpha}' \times \vec{\alpha}'', \vec{\alpha}''')$ este suficient să exprimăm pe $\vec{\alpha}'''$ cu ajutorul lui $\vec{T}, \vec{N}, \vec{B}$. Avem

$$\vec{\alpha}''' = \left(\frac{dv}{dt}\vec{T} + kv^2\vec{N}\right)' = kv^3\tau\vec{B} + \ldots$$

Ceilalți termeni nu ne interesează deoarece $(\vec{B}, \vec{T}) = 0$, $(\vec{B}, \vec{N}) = 0$.

Rezultă

$$(\vec{\alpha}' \times \vec{\alpha}'', \vec{\alpha}''') = k^2v^6\tau$$

și deoarece $\|\vec{\alpha}' \times \vec{\alpha}''\| = kv^3$, găsim formula pentru τ.

16.5. Observație. Din punctul de vedere al calculului este suficient să folosim aceeași literă α atît pentru curba dată inițial cît și pentru reprezentarea ei normală și analog aceleași notații pentru elementele Frenet.

§ 17. Aplicații ale formulelor Frenet

În baza rezultatelor din § 15 și § 16 este suficient să facem raționamente numai pentru curbele cu viteza unu (în loc de curbe regulate) și preferăm aceste raționamente deoarece sînt mai simple.

17.1. Teoremă. O curbă cu viteza unu $\beta : J \to \mathbb{R}^3$ este o parte a unei drepte dacă și numai dacă $k = 0$.

Demonstrație. Deoarece $k(s) = \|\vec{\beta}''(s)\|$, relația $k = 0$ este echivalentă cu $\vec{\beta}''(s) = \vec{0}$, $\forall s \in J$.

17.2. Teoremă. Fie $\beta : J \to \mathbb{R}^3$ o curbă cu viteza unu pentru care $k > 0$. β este o curbă plană dacă și numai dacă $\tau = 0$.

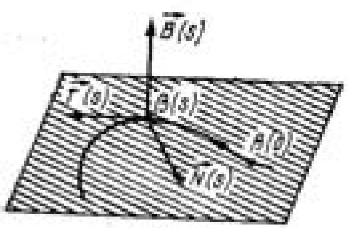


Fig. 71

Demonstrație. Fie planul $(\vec{r} - \vec{r}_0, \vec{a}) = 0$. Dacă β se află în acest plan, atunci $(\beta - \vec{r}_0, \vec{a}) = 0$. Derivind, obținem

$$(\vec{\beta}', \vec{a}) = (\vec{\beta}'', \vec{a}) = 0.$$

Rezultă că $\vec{a}$ este perpendicular pe $\bar{T} = \bar{\beta}'$ și $\vec{N} = \dfrac{\vec{\beta}''}{k}$. Astfel

$$\vec{B} = \pm \frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|},$$

adică $\vec{B}' = \vec{0}$ și deci $\tau = 0$.

Invers, presupunem $\tau = 0$. Din teorema 15.2 rezultă $\vec{B}' = \vec{0}$ și deci $\vec{B} = \vec{a}_0$. Vom arăta că β se află în planul care trece prin $\beta(0)$ și este perpendicular pe $\vec{B}$ (fig. 71). Pentru aceasta considerăm funcția

$$f : J \to \mathbb{R},\ f(s) = (\vec{\beta}(s) - \vec{\beta}(0),\ \vec{B}).$$

Avem $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}s} = (\vec{\beta}', \vec{B}) = 0$ și deci $f(s) = \text{const.}$ Cum $f(0) = 0$, găsim $(s) = 0$. Astfel

$$(\vec{\beta}(s) - \vec{\beta}(0), \vec{B}) = 0,\ \forall\, s.$$

17.3. Teoremă. Fie $\beta : J \to \mathbb{R}^3$ o curbă cu viteza unu care are curbura $k > 0$ și torsiunea τ. β este o parte a unui cerc de rază $\dfrac{1}{k}$ dacă și numai dacă $k = \text{const.}$ și $\tau = 0$.

Demonstrație. Fie $\tau = 0$, adică β o curbă plană. Considerăm curba $\vec{\delta} = \vec{\beta} + \dfrac{1}{k}\vec{N}$. Găsim $\vec{\delta}' = \vec{\beta}' + \dfrac{1}{k}\vec{N}' = \vec{T} + \dfrac{1}{k}(-k\vec{T}) = \vec{0}$. Astfel curba δ se reduce la un punct, adică

$$\forall\, s \in J,\ \vec{\beta}(s) + \frac{1}{k}\vec{N}(s) = \vec{C} \text{ și deci } \|\vec{\beta}(s) - \vec{C}\| = \left\| -\frac{1}{k}\vec{N} \right\| = \frac{1}{k}.$$

Rezultă că β se află pe cercul cu centrul în C și de rază $\dfrac{1}{k}$ (fig. 72).

Invers, fie β o parte a unui cerc de rază r. Deoarece cercul este o curbă plană avem $\vec{\beta}(s) = \vec{c} - r\vec{N}(s)$ și $\tau = 0$. De aici și din teorema 15.2 rezultă $\vec{\beta}'(s) = -r\vec{N}'(s) = rk\vec{T}(s)$, adică $rk = 1$ sau $k = \dfrac{1}{r}$.

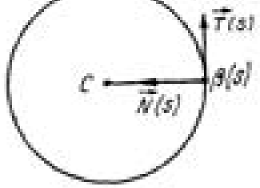


Fig. 72

În continuare ne vom ocupa de elici cilindrice.

17.4. *Definiție. O curbă regulată $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$, $t \to \alpha(t)$ al cărui vector tangent unitar $\vec{T}(t)$ face în fiecare* *punct un unghi constant cu un versor dat $\vec{u}$, adică $(\vec{T}(t), \vec{u}) = \cos\theta$, $\forall t \in I$, se numește elice cilindrică.*

Condiția impusă nu este afectată de reparametrizare. De aceea ne vom ocupa cu elicea cilindrică $\beta : J \to \mathbb{R}^3$ care are viteza unu.

Fie β o curbă cu viteza unu pentru care $(\vec{T}, \vec{u}) = \cos\theta$. Luind pe $\beta(0)$ drept origine, funcția $h(s) = (\vec{\beta}(s) - \vec{\beta}(0), \vec{u})$ arată cum se ridică $\beta(s)$ în direcția lui $\vec{u}$ (fig. 73). Pe de altă parte

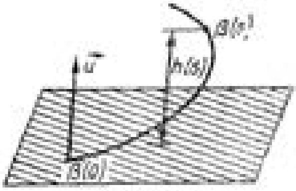


Fig. 73

$$\frac{dh}{ds} = (\vec{\beta}', \vec{u}) = (\vec{T}, \vec{u}) = \cos\theta$$

și astfel

$$h(s) = s\cos\theta.$$

Dacă prin fiecare punct al lui β ducem o dreaptă paralelă cu $\vec{u}$, atunci obținem o suprafață cilindrică pe care se află β. Considerentele de mai sus arată că pentru orice elice cilindrică β există o curbă γ astfel încît

$$\vec{\beta}(s) = \vec{\gamma}(s) + s\cos\theta\vec{u},$$

unde abscisa curbilinie s este măsurată, de exemplu, de la zero. Curba γ se numește *curba secțiunii transversale* a suprafeței cilindrice pe care se află β. Ea se află în planul determinat de punctul $\beta(0)$ și de vectorul normal $\vec{u}$ (fig. 74). De asemenea, dacă curbura lui β este k, atunci un calcul simplu arată că funcția curbură a lui γ este $\frac{k}{\sin^2\theta}$.

17.5. Observație. Pentru o parametrizare arbitrară avem

$$\vec{\beta}(t) = \vec{\gamma}(t) + s(t)\cos\theta\,\vec{u},$$

unde $s = s(t)$ este abscisa curbilinie.

17.6. Teoremă. Fie $\beta : J \to \mathbb{R}^3$ o curbă cu viteza unu care are curbura $k > 0$ și torsiunea τ. β este o elice cilindrică dacă și numai dacă $\frac{\tau}{k} = \text{const.}$

Demonstrație. Dacă β este o elice cilindrică cu $(\vec{T}, \vec{u}) = \cos\theta$, atunci

$$0 = (\vec{T}, \vec{u})' = (\vec{T}', \vec{u}) = (k\vec{N}, \vec{u}) \Rightarrow (\vec{N}, \vec{u}) = 0.$$

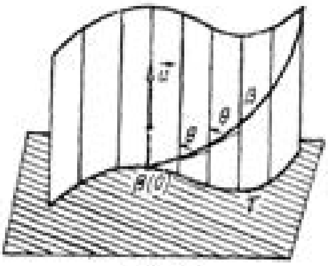


Fig. 74

Astfel, $\forall s \in J$, $\vec{u}$ se află în planul lui $\vec{T}(s)$ și $\vec{B}(s)$. Deoarece $\vec{u}$ este un versor, avem $\vec{u} = \vec{T}\cos\theta + \vec{B}\sin\theta$ și prin derivare găsim

$$0 = (k\cos\theta - \tau\sin\theta)\vec{N} \Rightarrow \frac{\tau}{k} = \operatorname{ctg}\theta = \text{const.}$$

Invers, fie $\frac{\tau}{k} = \text{const}$. Alegem pe θ astfel incit $\frac{\tau}{k} = \text{ctg}\,\theta$ şi construim cimpul $\vec{U} = \vec{T}\cos\theta + \vec{B}\sin\theta$. Deoarece $\vec{U}' = (k\cos\theta - \tau\sin\theta)\vec{N} = \vec{0}$, rezultă că $\vec{U}$ este un cimp de vectori paraleli şi deci el se reprezintă prin vectorul $\vec{u}$ astfel incit $(\vec{T}, \vec{u}) = \cos\theta$. De aceea β este o elice cilindrică.

Un caz particular al elicei cilindrice este elicea circulară. În acest caz suprafaţa cilindrică este un cilindru circular drept, iar secţiunea transversală este un cerc de rază $\frac{\sin^2\theta}{k}$.

17.7 Exemplu. Fie $\beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ o curbă cu viteza unu care are curbura $k > 0$ şi torsiunea $\tau \neq 0$. Să se arate că β este o (parte dintr-o) elice circulară dacă şi numai dacă $k = \text{const.}$ şi $\tau = \text{const.}$

Soluţie. Pentru implicaţia directă vom da o demonstraţie care poate servi ca model pentru determinarea elementelor Frenet pentru o curbă cu viteza unu.

Fie elicea circulară $\vec{\beta}(s) = \left(a\cos\frac{s}{c},\ a\sin\frac{s}{c},\ \frac{bs}{c}\right)$, unde $c = \sqrt{a^2+b^2}$, $a > 0$, $b \neq 0$. Avem

$$\vec{T}(s) = \vec{\beta}'(s) = \left(-\frac{a}{c}\sin\frac{s}{c},\ \frac{a}{c}\cos\frac{s}{c},\ \frac{b}{c}\right),$$

$$\vec{T}'(s) = \vec{\beta}''(s) = \left(-\frac{a}{c^2}\cos\frac{s}{c},\ -\frac{a}{c^2}\sin\frac{s}{c},\ 0\right)$$

şi deci

$$k(s) = \|\vec{T}'(s)\| = \frac{a}{c^2} = \frac{a}{a^2+b^2} > 0.$$

Deoarece $\vec{T}' = k\vec{N}$, găsim

$$\vec{N}(s) = \left(-\cos\frac{s}{c},\ -\sin\frac{s}{c},\ 0\right).$$

Astfel, $\forall a, b$, sensul lui $\vec{N}$ este spre axa cilindrului (fig. 75). Din $\vec{B} = \vec{T} \times \vec{N}$ rezultă

$$\vec{B}(s) = \left(\frac{b}{c}\sin\frac{s}{c},\ -\frac{b}{c}\cos\frac{s}{c},\ \frac{a}{c}\right)$$

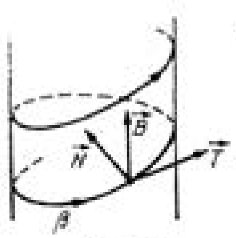


Fig. 75

şi deci

$$\vec{B}'(s) = \left(\frac{b}{c^2}\cos\frac{s}{c},\ \frac{b}{c^2}\sin\frac{s}{c},\ 0\right).$$

Din $B' = -\tau\vec{N}$ rezultă

$$\tau(s) = \frac{b}{c^2} = \frac{b}{a^2+b^2} \neq 0.$$

Invers, fie β o curbă cu viteza unu pentru care $k = \text{const.} > 0$ şi $\tau = \text{const.} \neq 0$. Deoarece $\frac{\tau}{k} = \text{ctg}\, \theta = \text{const.}$, β este o elice cilindrică. Deoarece $k = \text{const.}$, rezultă că secţiunea transversală γ este un cerc de rază $\frac{\sin^2 \theta}{k}$. De aceea β este o elice circulară. Luînd $\vec{u} = \vec{k}$, $k = \frac{a}{a^2 + b^2}$, $\tau = \frac{b}{a^2 + b^2}$, găsim reprezentarea

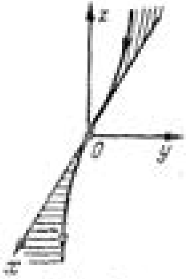


Fig. 76

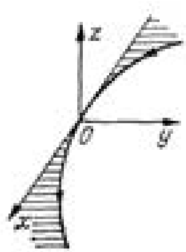


Fig. 77

$$\vec{\beta}(s) = \left(a \cos \frac{s}{c},\ a \sin \frac{s}{c},\ \frac{bs}{c}\right).$$

17.8. Observaţii.

1) Curbura şi torsiunea determină o curbă din spaţiu abstracţie făcînd de poziţie (adică de o izometrie) [33]. Ipoteza esenţială care permite demonstraţia acestei afirmaţii este $k > 0$.

Chiar dacă k se anulează într-un singur punct, caracterul geometric al curbei se poate schimba radical în acest punct. Pentru a pune în evidenţă acest lucru fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcţie diferenţiabilă care satisface condiţiile $f(t) = 0$ pentru $t \leq 0$, $f(t) > 0$, $f''(t) > 0$ pentru $t > 0$ şi curbele

$$\alpha_1(t) = \begin{cases} (t, 0, f(-t)), & t < 0 \\ (0, 0, 0), & t = 0 \\ (t, f(t), 0), & t > 0 \end{cases} \qquad \alpha_2(t) = \begin{cases} (t, f(-t), 0), & t < 0 \\ (0, 0, 0), & t = 0 \\ (t, f(t), 0), & t > 0. \end{cases}$$

Observăm că ambele curbe au aceeaşi curbură care se anulează numai în $t = 0$. În $t = 0$ nu putem defini torsiunea, dar pentru $t \neq 0$ ambele curbe au torsiunea nulă. Într-adevăr, arcul $t < 0$ al lui α_1 se află în planul xOz, iar arcul $t > 0$ se află în planul xOy (fig. 76). Curba α_2 este în întregime situată în planul xOy (fig. 77). Evident cele două curbe nu pot fi suprapuse printr-o izometrie.

2) Curbele din plan pot fi privite ca nişte curbe particulare din spaţiu. Mai restrictiv, orice curbă regulată din spaţiu pentru care $k > 0$ este curbă plană dacă şi numai dacă, $\tau = 0$. De aceea am putea obţine elemente Frenet pentru curbele regulate din plan prin particularizarea noţiunilor introduse în paragrafele precedente. Acest punct de vedere este însă prea restrictiv şi nu oferă libertatea de care dispunem în plan (vezi § 11).

§ 18. Probleme

1. Fie curba $\alpha : [0, \pi] \to \mathbb{R}^4$, $\alpha(t) = (\sin t, \cos^2 t, 5 \sin t, 1 - 3 \cos^2 t)$. Să se arate că α este închisă, iar prelungirea ei $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^4$ este periodică.

2. Fie curba $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^4$, $\alpha(t) = (\sin t, 1 + \cos t, \sin t + \cos^2 t, \sin^2 t)$. Să se arate că punctul $\alpha\left(\frac{\pi}{4}\right)$ este regulat, iar tangenta la curbă în acest punct este perpendiculară pe dreapta de direcţie $\vec{d} = (1, 1, -\sqrt{2} - 2, -1)$. Să se determine hiperplanul normal la α în punctul $\alpha\left(\frac{\pi}{4}\right)$.

3. Fie $\overrightarrow{Y}$ un cîmp vectorial pe curba $\alpha(t) = (\sin t,\ 1 + \cos t,\ \sin t + \cos^2 t,\ \sin^2 t)$. În fiecare dintre cazurile următoare, să se exprime $\overrightarrow{Y}$ în forma $\overrightarrow{Y} = y_1\vec{e}_1 + y_2\vec{e}_2 + y_3\vec{e}_3 + y_4\vec{e}_4$.

1) $\overrightarrow{Y}(t)$ este vectorul cu originea în $\alpha(t)$ și cu extremitatea în originea lui $\mathbb{R}^4$.

2) $\overrightarrow{Y}(t) = \vec{\alpha}'(t) - \vec{\alpha}''(t)$.

3) $\overrightarrow{Y}(t)$ are lungimea unu și este perpendicular pe $\vec{\alpha}'(t)$, $\vec{\alpha}''(t)$ și pe $\vec{\alpha}'''(t)$.

4) $\overrightarrow{Y}(t)$ este vectorul cu originea în $\alpha(t)$ și cu extremitatea în $\alpha(t + \pi)$.

4. Să se cerceteze ramurile infinite și să se determine asimptotele (dacă există)

1) $\alpha = (x, y) : (\mathbb{R} - \{1\}) \to \mathbb{R}^2,\ x(t) = \dfrac{t^2 + 2}{t^2 - 1},\ y(t) = \dfrac{3t}{t^2 - 1}$.

2) $\alpha = (x, y) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2,\ x(t) = \dfrac{2 + t^2}{1 + t^2},\ y(t) = \dfrac{t^3}{1 + t^2}$.

5. Fie curba $\alpha : (\mathbb{R} - \{-1, 1\}) \to \mathbb{R}^5,\ \alpha(t) = \left(\dfrac{1}{t-1},\ \dfrac{2t}{t^2-1},\ \dfrac{t^2+1}{t^2-1},\ \dfrac{2}{t+1},\ \dfrac{t}{t+1}\right)$.

1) Să se arate că punctul $(-1, 0, -1, 2, 0)$ se află pe curbă și să se determine tangenta și hiperplanul normal la curbă în acest punct.

2) Să se cerceteze ramurile infinite ale curbei și să se determine asimptotele (dacă există)

6. Fie curba $\alpha : (0, 4) \to \mathbb{R}^3,\ \alpha(t) = (\sqrt{t},\ t\sqrt{t},\ 1 - t)$. Să se reparametrizeze prin $h : (0, 2) \to \mathbb{R},\ h(u) = u^2$.

7. Fie curba $\alpha : [0, 2\pi) \to \mathbb{R}^2,\ \alpha(t) = (2 \cos t - \cos 2t,\ 2 \sin t - \sin 2t)$. Să se determine abscisa curbilinie corespunzătoare originii $t = 0$ și reprezentarea normală.

8. Fie curba $\alpha : (\mathbb{R} - \{0\}) \to \mathbb{R}^2,\ \alpha(t) = \left(\displaystyle\int \frac{\sin t}{t}\, dt,\ \int \frac{\cos t}{t}\, dt\right)$. Să se arate că α este o curbă regulată și să se calculeze lungimea arcului $t \in [2, 3]$.

9. Fie curbele:

$$\alpha_1 : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^4,\ \alpha_1(t) = (\cos t,\ \sin^2 t,\ 2 + \sin t,\ 1 - \cos t),$$

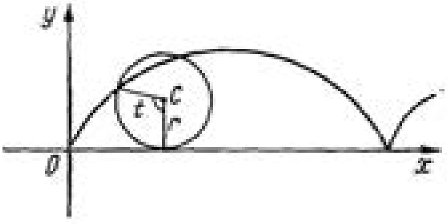
$$\alpha_2 : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^4,\ \alpha_2(t) = \left(\sin t,\ \frac{1}{2} \cos t,\ 2 + \cos t,\ 1 - \sin t\right).$$

1) Să se arate că sînt curbe închise și au un punct comun M_0.

2) Să se arate că cele două curbe au un contact de ordinul întîi în M_0 și să se determine unghiul curbelor în M_0.

10. Să se arate că $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2,\ \alpha(t) = \left(\dfrac{2 + t^2}{1 + t^2},\ \dfrac{t^3}{1 + t^2}\right)$ este o curbă simplă. Să se determine punctele singulare ale curbei, tangentele și normalele în aceste puncte.

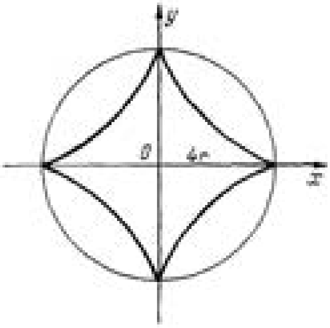
11. Curba descrisă de un punct M aflat pe un cerc de rază r ce se rostogolește (fără alunecare) de-a lungul unei drepte se numește *cicloidă*. Să se găsească ecuațiile parametrice ale cicloidei (fig. 78). Să se determine abscisa curbilinie și lungimea primei arcade a curbei. Să se calculeze segmentele tangentă, subtangentă, normală și subnormală într-un punct oarecare al cicloidei.



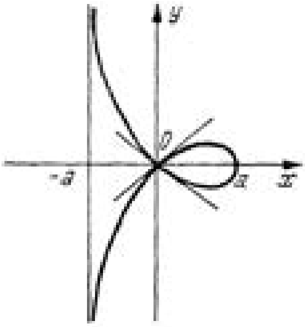
Cicloida : $\begin{cases} x = r(t - \sin t) \\ y = r(1 - \cos t),\ t \in \mathbb{R} \end{cases}$

Fig. 78

12. Să se construiască curbele de nivel con-



Astroidă
Fig. 79



Strofoida
Fig. 80

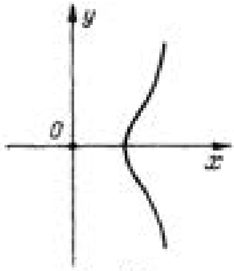


Fig. 81

stant $f^{-1}(-1), f^{-1}(0), f^{-1}(1)$ pentru $f(x, y) = x^2 - y^2$. În fiecare caz să se cerceteze în care puncte spațiul tangent va fi $[\nabla f(P)]^{\perp}$.

13. Să se găsească o parametrizare globală pentru fiecare dintre următoarele curbe, orientate prin $\dfrac{\nabla f}{\|\nabla f\|}$, unde f este funcția definită de membrul stîng al fiecărei ecuații:

1) $ax + by = c, \quad b \neq 0.$

2) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1, \; a \neq 0, \; b \neq 0.$

3) $y - ax^2 = c, \quad a \neq 0.$

4) $x^2 - y^2 = 1, \quad x > 0.$

14. Să se arate că $\alpha : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $\alpha(t) = (4r \cos^3 t, \; 4\, r \sin^3 t)$, (fig. 79), are puncte de întoarcere și să se determine tangentele în aceste puncte.

15. Fie curba $C = f^{-1}(0)$ unde $f(x, y) = y^2x + ay^2 + x^3 - ax^2$ (fig. 80). Să se arate că originea este punct dublu pentru curbă. Să se determine tangentele la curbă în acest punct.

16. Fie curba $C = f^{-1}(0)$, $f(x, y) = x^3 - x^2 - y^2$ (fig. 81). Să se arate că originea este punct izolat al curbei C.

17. Să se arate că originea este punct de întoarcere pentru curba $C = f^{-1}(0)$, $f(x, y) = x^3 + xy^2 - 2ay^2$ (fig. 82).

18. Să se traseze următoarele curbe

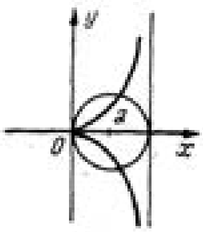
1) Curba Gauss: $y = e^{-x^2}$ ((fig. 17).

2) Lănțișorul: $y = \dfrac{a}{2}(e^{x/a} + e^{-x/a})$ (fig. 18).

3) Parabola cubică: $y = ax^3$ (fig. 19).

4) Curba Agnési: $x^2y = 4a^2(2a - y)$ (fig. 83).

5) Lemniscata Bernoulli: $(x^2+y^2)^2+2a^2(y^2-x^2)=0$ (fig. 84).



Cisoida lui Diocles
Fig. 82

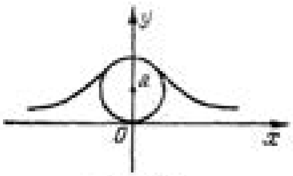


Fig. 83

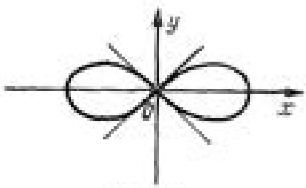


Fig. 84

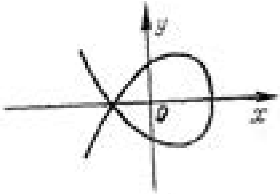


Fig. 85

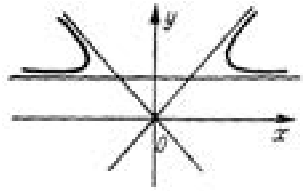


Fig. 86

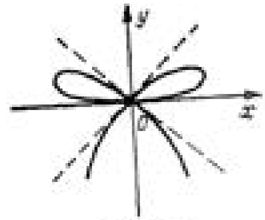


Fig. 87

6) Curba Lissajous: $x = \cos 2t$, $y = \sin 3t$ (fig. 85).

7) $x = \dfrac{\operatorname{ch} t}{t}$, $y = \dfrac{\operatorname{sh} t}{t}$ (fig. 86).

8) $x = t - t^3$, $y = t^2 - t^4$ (fig. 87).

19. Să se determine parabola cu axa paralelă cu Oy care are un contact de ordinul doi cu curba $y = x^3$ în punctul $x = 1$.

20. Să se determine înfășurătoarea următoarelor familii de curbe:

1) $(x - \alpha)^2 + y^2 - \dfrac{\alpha^2}{2} = 0$.

2) $\dfrac{x}{\alpha} + \dfrac{y}{\beta} - 1 = 0$, cînd $\alpha^m + \beta^m - a^m = 0$ (a = const.).

3) $x \cos \alpha + y \sin \alpha - 1 = 0$.

4) $y = \alpha x + \dfrac{p}{2\alpha}$.

21. Să se determine evoluta pentru curbele:

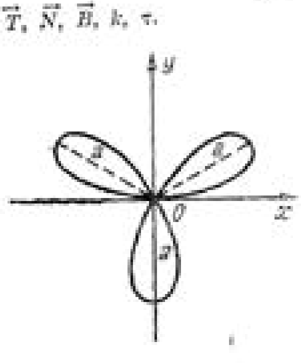
1) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - 1 = 0$

2) $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$.

22. Să se construiască curbele (rozetă cu trei foi),

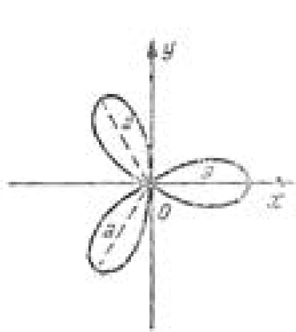
$$\rho = a \sin 3\theta \text{ (fig. 88)}, \quad \rho = a \cos 3\theta \text{ (fig. 89)}.$$

23. Fie curba $\vec{\beta}(s) = \left(\dfrac{(1+s)^{3/2}}{3}, \dfrac{(1-s)^{3/2}}{3}, \dfrac{s}{\sqrt{2}}\right)$, $s \in (-1, 1)$. Să se determine $\vec{T}$, $\vec{N}$, $\vec{B}$, k, τ.



$\rho = a \sin 3\theta$

Fig. 88



$\rho = a \cos 3\theta$

Fig. 89

24. Să se determine abscisa curbilinie a curbei

1) $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $\alpha(t) = (\cos t, \sin t, t^2/2)$.

2) $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $\alpha(t) = (a \operatorname{ch} t, a \operatorname{sh} t, at)$.

3) $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $\alpha(t) = (t \cos t, t \sin t, t^2/2)$, luînd ca origine punctul în care curba intersectează planul xOy. Să se găsească elementele Frenet $\vec{T}, \vec{N}, \vec{B}, k, \tau$ și să se scrie ecuațiile muchiilor și fețelor triedrului Frenet în acest punct.

25. Se numește *curbă Țițeica*, curba pentru care $\frac{1}{\tau} d^2 =$ const., unde τ este torsiunea într-un punct arbitrar al curbei, iar d distanța de la un punct fix la planul osculator al curbei.

Să se arate că $C: xyz = 1,\ y^2 = x$ este o curbă Țițeica.

Capitolul 3

SUPRAFEȚE

§1. Noțiunea de suprafață

Fie spațiul $\mathbb{R}^3$ și $T_0\mathbb{R}^3$ spațiul tangent în origine la spațiul $\mathbb{R}^3$. Spațiile $\mathbb{R}^3$ și $T_0\mathbb{R}^3$ sînt izomorfe și de aceea de cele mai multe ori le vom identifica.

O suprafață în spațiu este o submulțime $\mathbb{M}$ a lui $\mathbb{R}^3$, netedă și cu două dimensiuni.

Fie $\mathbb{D}$ o mulțime deschisă din $\mathbb{R}^2$. De exemplu interiorul unui dreptunghi, al unui cerc etc.

1.1. *Definiție. O funcție diferențiabilă, regulată și injectivă $r : \mathbb{D} \to \mathbb{R}^3$ se numește hartă* (de coordonate).

Imaginea $r(\mathbb{D})$ a unei hărți r este o submulțime netedă și cu două dimensiuni a lui $\mathbb{R}^3$ (fig. 91). Observăm că avem diagrama din fig. 90, unde $\mathcal{J}_0$ este izomorfismul canonic dintre $\mathbb{R}^3$ și $T_0\mathbb{R}^3$. Astfel lui r putem să-i atașăm o funcție și numai una de tipul $\vec{r} : \mathbb{D} \to T_0\mathbb{R}^3$, ceea ce ne permite să privim mulțimea $\vec{r}(\mathbb{D})$ ca fiind descrisă de extremitatea unui vector variabil $\vec{r}$ cu originea fixată în O (fig. 91).

Din definiția lui $r(\mathbb{D})$ rezultă echivalența

$$P \in r(\mathbb{D}) \Leftrightarrow \exists (u, v) \in \mathbb{D},\ P = r(u, v).$$

Evident, aplicațiile anterioare sînt caracterizate prin coordonatele lor euclidiene

$$r(u, v) = (x(u, v),\ y(u, v),\ z(u, v)),\ (u, v) \in \mathbb{D},$$

$$\vec{r} = \vec{r}(u, v) = x(u, v)\vec{i} + y(u, v)\vec{j} + z(u, v)\vec{k},\ (u, v) \in \mathbb{D}.$$

Ipoteza de regularitate se face pentru a asigura netezimea lui $r(\mathbb{D})$ iar ipoteza că aplicația r este injectivă asigură că $r(\mathbb{D})$ nu se intersectează cu ea însăși.

Pentru a defini suprafața plecăm de la ideea că orice regiune suficient de mică dintr-o suprafață $\mathbb{M}$ trebuie să semene cu o regiune din plan. În

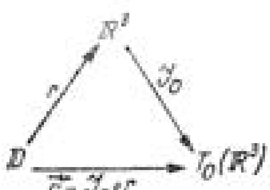


Fig. 90

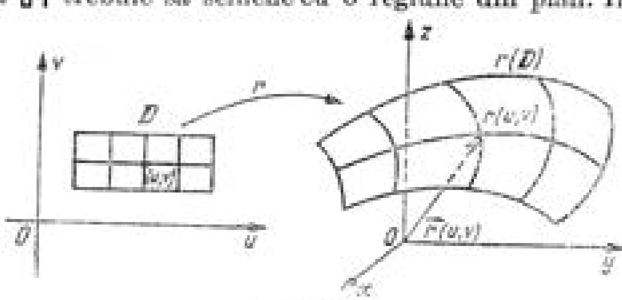


Fig. 91

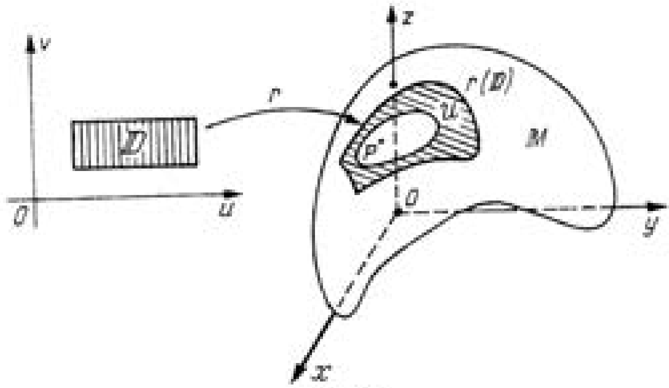


Fig. 92

particular, la mulţimi deschise din plan trebuie să corespundă mulţimi deschise din suprafaţa $\mathbb{M}$ şi invers. Acest lucru este asigurat dacă presupunem că în vecinătatea oricărui punct al său, $\mathbb{M}$ se poate exprima ca imaginea unei hărţi proprii. O hartă $r : \mathbb{D} \to \mathbb{R}^3$ se numeşte *proprie* dacă funcţia inversă $r^{-1} : r(\mathbb{D}) \to \mathbb{D}$ este continuă (Imaginea concretă pentru $\mathbb{D}$ poate fi aceea a unei fişii de cauciuc concepută fără margini; în acest caz $r(\mathbb{D})$ se obţine prin întinderea şi îndoirea lui $\mathbb{D}$). Pentru precizare definim *vecinătatea* U în $\mathbb{M}$ a lui $P \in \mathbb{M}$ ca fiind mulţimea tuturor punctelor lui $\mathbb{M}$ a căror distanţă euclidiană faţă de P este mai mică decît un număr $\varepsilon > 0$. O parte a lui $\mathbb{M}$ se numeşte *deschisă* dacă odată cu fiecare punct al său conţine şi o vecinătate U din $\mathbb{M}$ a acestui punct.

Hărţile ale căror imagini sînt conţinute în $\mathbb{M}$ se numesc *hărţi în* $\mathbb{M}$.

1.2. *Definiţie. O submulţime* $\mathbb{M}$ *a lui* $\mathbb{R}^3$, *care se bucură de proprietatea că* $\forall P \in \mathbb{M}$ *există o hartă proprie în* $\mathbb{M}$ *a cărei imagine să conţină o vecinătate a lui* P *din* $\mathbb{M}$, *se numeşte suprafaţă* (fig. 92).

Observăm că imaginea $\mathbb{M} = r(\mathbb{D})$ a unei hărţi proprii satisface definiţia 1.2 şi deci este o suprafaţă. O asemenea suprafaţă se numeşte *simplă*. Definiţia 1.2 arată că orice suprafaţă din $\mathbb{R}^3$ poate fi concepută ca reuniunea unor suprafeţe simple.

1.3 Exemple

1) *Sfera* este o suprafaţă în sensul definiţiei 1.2. Pentru a pune în evidenţă acest lucru este suficient să considerăm sfera cu centrul în origine şi de rază unu (fig. 93)

$$\mathbb{M} : x^2 + y^2 + z^2 = 1.$$

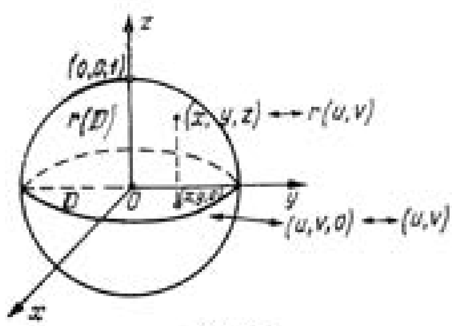


Fig. 93

Ne propunem să găsim o hartă proprie în $\mathbb{M}$ care să acopere o vecinătate a polului nord $(0, 0, 1)$. Prin proiecția fiecărui punct (x, y, z) al emisferei nordice a lui $\mathbb{M}$ pe planul xOy în (x, y, O) găsim o corespondență biunivocă a acestei emisfere cu un disc $\mathbb{D}$ de rază unu din planul xOy. Dacă identificăm acest plan cu $\mathbb{R}^2$ prin $(x, y, O) \leftrightarrow (x, y)$, atunci $\mathbb{D}$ devine un disc din $\mathbb{R}^2$ care constă din punctele (u, v) pentru care $u^2 + v^2 < 1$. Exprimînd corespondența dintre $\mathbb{D}$ și emisfera nordică ca o funcție pe $\mathbb{D}$ găsim

$$r : \mathbb{D} \to \mathbb{R}^3, \ r(u, v) = (u, v, \sqrt{1 - u^2 - v^2}).$$

Să arătăm că r este o hartă proprie. Mai întîi observăm că r este o aplicație diferențiabilă și injectivă. De asemenea r este și regulată deoarece transpusa matricii Jacobian,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dfrac{\partial f}{\partial u} \\ & & \\ 0 & 1 & \dfrac{\partial f}{\partial v} \end{bmatrix}, \ f = \sqrt{1 - u^2 - v^2},$$

are rangul doi, $\forall (u, v) \in \mathbb{D}$. Deoarece funcția inversă $r^{-1} : r(\mathbb{D}) \to \mathbb{D}$ este dată prin $r^{-1}(x, y, z) = (x, y)$, rezultă că r^{-1} este continuă. Deci r este o hartă proprie.

Facem observația că harta r acoperă o vecinătate a lui $P(0, 0, 1)$ din $\mathbb{M}$. În mod necesar ea acoperă o vecinătate a oricărui alt punct Q din emisfera nordică.

Analog, putem găsi alte cinci hărți proprii, care să acopere celelalte cinci emisfere ale sferei și astfel verificăm că sfera este o suprafață în sensul definiției 1.2.

2) *Suprafața* $\mathbb{M} : z = f(x, y)$. Fie $f : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$ o funcție diferențiabilă. Graficul său

$$\mathbb{M} = \{(x, y, z) \mid z = f(x, y), \ (x, y) \in \mathbb{D}\}$$

este o suprafață simplă (fig. 94) deoarece poate fi acoperit de imaginea lui $\mathbb{D}$ prin harta proprie (vezi raționamentul de la sferă)

$$r : \mathbb{D} \to \mathbb{R}^3, \ r(u, v) = (u, v, f(u, v)).$$

O hartă de acest tip se numește *hartă Monge*, iar despre $\mathbb{M}$ se spune că este dată prin *ecuația carteziană explicită* $z = f(x, y)$.

3) Dăm acum un exemplu din care să rezulte necesitatea ca o hartă să fie proprie.

Presupunem că avem o fișie dreptunghiulară de cauciuc cu ajutorul căreia construim configurația $\mathbb{M}$ din figura 95. Configurația $\mathbb{M}$ nu este o suprafață în sensul dat anterior deoarece nu

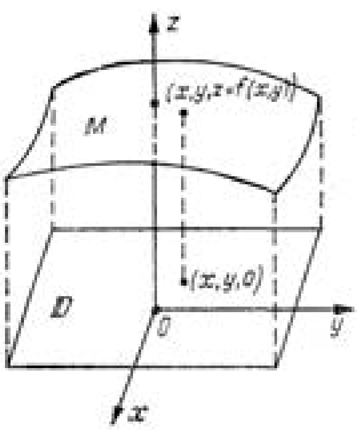


Fig. 94

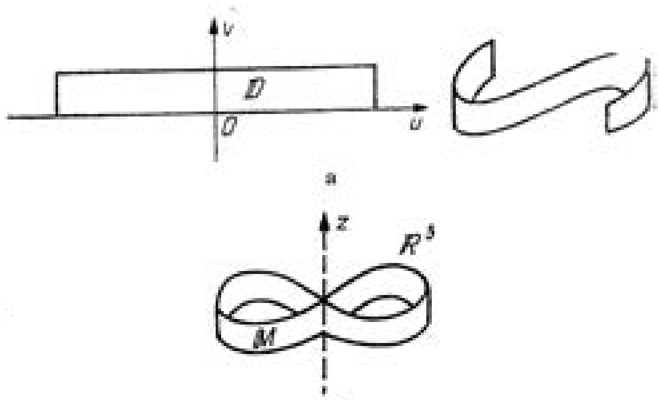


Fig. 95

satisface cerința ca în vecinătatea oricărui punct să semene cu o porțiune din plan. Într-adevăr de-a lungul lui Oz ea seamănă cu intersecția a două plane. Mai mult, trecerea de la fîșia plană la $\mathbb{M}$ este continuă în timp ce trecerea inversă nu este continuă deoarece $\mathbb{M}$ trebuie ruptă de-a lungul lui Oz.

Matematic, construcția anterioară se prezintă astfel: fie $\mathbb{D}$ dreptunghiul deschis $-\pi < u < \pi$, $0 < v < 1$ din $\mathbb{R}^2$ și $r: \mathbb{D} \to \mathbb{R}^3$ aplicația definită prin $r(u, v) = (\sin u, \sin 2u, v)$. Se verifică ușor că r este o hartă (aplicație diferențiabilă, injectivă și regulată). Notăm $\mathbb{M} = r(\mathbb{D})$. Observăm că $\mathbb{D} = \mathbb{D}_1 \cup \mathbb{D}_2 \cup \mathbb{D}_3$, unde $\mathbb{D}_1 = \left(-\pi, -\frac{\pi}{2}\right) \times (0, 1)$, $\mathbb{D}_2 = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \times (0, 1)$, $\mathbb{D}_3 = \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) \times (0, 1)$ și deci $\mathbb{M} = \mathbb{M}_1 \cup \mathbb{M}_2 \cup \mathbb{M}_3$, unde $\mathbb{M}_i = r(\mathbb{D}_i)$, $i = 1, 2, 3$. Găsim

$$r^{-1}(x, y, z) = \begin{cases} (-\pi - \arcsin x, & z) \quad (x, y, z) \in \mathbb{M}_1 \\ (\arcsin x, & z) \quad (x, y, z) \in \mathbb{M}_2 \\ (\pi - \arcsin x, & z) \quad (x, y, z) \in \mathbb{M}_3. \end{cases}$$

Funcția r^{-1} nu este continuă în punctele $(0, 0, z)$, $0 < z < 1$. Astfel r nu este o hartă proprie și deci $\mathbb{M} = r(\mathbb{D})$ nu este o suprafață în sensul definiției 1.2.

4) *Suprafețe definite prin ecuații carteziene implicite.*

Considerăm o aplicație diferențiabilă de tipul $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$. Deoarece

$$J(f) = \left[\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right]$$

punctele critice ale acestei aplicații (dacă există) se află rezolvînd sistemul

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = 0, \ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = 0, \ \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = 0.$$

Punctele în care cel puțin una din aceste derivate nu se anulează sînt puncte regulate.

Cu ajutorul lui f construim mulțimea

$$\mathbb{M} = f^{-1}(c) = \{(x, y, z) \mid (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \ f(x, y, z) = c, \ c \in \mathbb{R}, c \text{ fixat}\},$$

care se numește *mulțime de nivel constant* c sau *mulțime de ecuație carteziană implicită* $f(x, y, z) = c$. Pe scurt se scrie $\mathbb{M}: f(x, y, z) = c$. Presupunem că $\mathbb{M}$ nu este vidă și precizăm că, în general, $\mathbb{M}$ conține atît puncte regulate cît și puncte critice ale lui f.

1.4. Teoremă. Dacă $\mathbb{M} = f^{-1}(c)$ este nevidă și dacă funcția f este regulată (submersie) în punctele lui $\mathbb{M} = f^{-1}(c)$, atunci $\mathbb{M}$ este o suprafață.

Demonstrație. Pentru $\forall P(x, y, z) \in \mathbb{M}$, trebuie să găsim o hartă proprie care să acopere o vecinătate a lui P din $\mathbb{M}$. Ipoteza că f este regulată în punctele lui $\mathbb{M}$ este echivalentă cu presupunerea că cel puțin una dintre derivatele parțiale $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ $\frac{\partial f}{\partial z}$ nu este zero în P; fie, de exemplu,

$\frac{\partial f}{\partial z}(P) \neq 0$. În acest caz teorema funcţiei implicite spune că în vecinătatea lui P ecuaţia $f(x, y, z)=c$ defineşte pe z ca funcţie de x şi y. Mai precis, există o funcţie diferenţiabilă g definită pe o vecinătate $\mathbb{D}$ a lui (x, y) astfel incit (fig. 96)

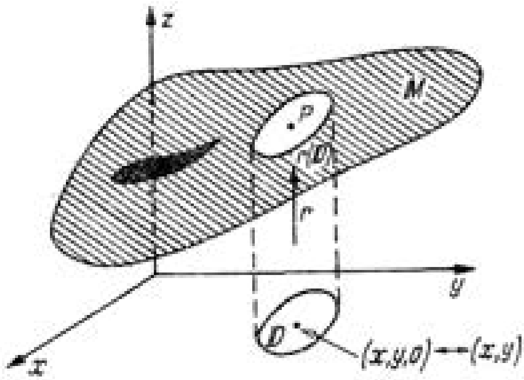


Fig. 96

(1) $\forall(u, v) \in \mathbb{D}$, $(u, v, g(u, v)) \in \mathbb{M}$, adică $f(u, v, g(u, v)) = c$,

(2) punctele de forma $(u, v, g(u, v))$ cu $(u, v) \in \mathbb{D}$ constituie o vecinătate a lui P în $\mathbb{M}$.

Rezultă că harta Monge $r : \mathbb{D} \to \mathbb{R}^3$ definită prin $r(u, v) = (u, v, g(u, v))$ satisface cerinţele din definiţia 1.2. Deoarece P este arbitrar în $\mathbb{M}$, tragem concluzia că $\mathbb{M}$ este o suprafaţă.

Dacă $\mathbb{M} : f(x, y, z) = c$ este o suprafaţă, atunci spunem că $\mathbb{M}$ este definită prin *ecuaţia carteziană implicită* $f(x, y, z) = c$ (denumirea de suprafaţă pentru $\mathbb{M} : f(x, y, z) = c$ se păstrează uneori chiar dacă $\mathbb{M}$ conţine şi puncte critice ale lui f).

Dacă f este un polinom de gradul n, atunci $\mathbb{M}$ se numeşte *suprafaţă algebrică de ordinul n*. În particular avem următoarele denumiri : suprafeţe algebrice de ordinul unu (plane), suprafeţe algebrice de ordinul doi (cuadrice) etc.

1.5. Observaţii.

1) În situaţii concrete $\mathbb{M}$ poate fi dată printr-o ecuaţie şi prin mai multe inecuaţii în x, y, z (inecuaţiile precizează o anumită porţiune din spaţiu).

2) Reprezentarea lui $\mathbb{M}$ (sau a unei porţiuni din $\mathbb{M}$) în forma $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$ se poate face prin intermediul teoremei 1.4 sau prin artificii de calcul.

3) Fie suprafaţa simplă $\mathbb{M} : x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$, $(u, v) \in \mathbb{D}$. În general, trecerea de la această reprezentare la reprezentarea carteziană explicită se poate face numai local. De exemplu, dacă $\frac{D(x, y)}{D(u, v)}(u_0, v_0) \neq 0$, atunci teorema funcţiei inverse arată că în vecinătatea lui (u_0, v_0) restricţia lui $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$ admite inversa $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$. Astfel, restricţia lui $z = z(u, v)$ apare ca o funcţie compusă de tipul $z = z(u(x, y), v(x, y))$.

4) În general, dacă există o funcţie $f(x, y, z)$ astfel încît $f(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) = c$, $\forall (u, v) \in \mathbb{D}$, atunci $f(x, y, z) = c$ este ecuaţia carteziană implicită a suprafeţei $\mathbb{M} : x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$, $(u, v) \in \mathbb{D}$.

§2. Curbe coordonate

În acest paragraf vor fi prezentate unele proprietăţi ale hărţilor care sînt necesare la studiul unei suprafeţe date.

Fie $r : \mathbb{D} \to \mathbb{R}^3$, $(u, v) \to r(u, v)$, o hartă.

Funcţiile parţiale $u \to r(u, v)$ şi $v \to r(u, v)$ sînt curbe cu imaginea în $r(\mathbb{D})$. Explicit, $\forall (u_0, v_0) \in \mathbb{D}$, curba $u \to r(u, v_0)$ se numeşte *curba de para-*

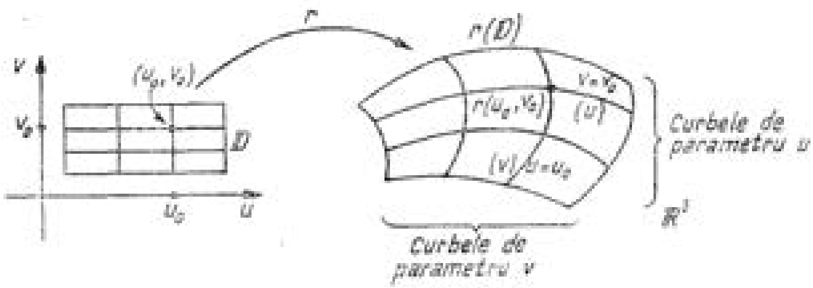


Fig. 97

metru u sau curba $v = v_0$; curba $v \to r(u_0, v)$ se numește *curba de parametru v sau curba* $u = u_0$ (fig. 97). Astfel imaginea $r(\mathbb{D})$ este acoperită de aceste două familii de curbe, care sînt imaginile prin r ale liniilor orizontale și verticale din $\mathbb{D}$. Prin orice punct al lui $r(\mathbb{D})$ trece o curbă din familia (u) și una din familia (v). De aceea uneori pentru aceste curbe se întrebuințează denumirea de *curbe coordonate*.

Dacă $r : \mathbb{D} \to \mathbb{R}^3$ este o hartă și $(u_0, v_0) \in \mathbb{D}$, atunci

(1) vectorul viteză, în u_0, al curbei de parametru u se notează cu $\vec{r}_u(u_0, v_0)$;

(2) vectorul viteză, în v_0, al curbei de parametru v se notează cu $\vec{r}_v(u_0, v_0)$.

Vectorii $\vec{r}_u(u_0, v_0)$, $\vec{r}_v(u_0, v_0)$ se numesc *vitezele parțiale* ale lui r în (u_0, v_0) (fig. 98).

Astfel $\vec{r}_u$ și $\vec{r}_v$ sînt funcții definite pe $\mathbb{D}$ ale căror valori în fiecare punct $(u_0, v_0) \in \mathbb{D}$ sînt vectori tangenți la $\mathbb{R}^3$ în $r(u_0, v_0)$. Indicii u și v sînt scriși pentru a sugera derivarea parțială. Dacă harta este dată cu ajutorul coordonatelor sale

$$r(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)),$$

atunci vitezele parțiale sînt date de

$$\vec{r}_u = (x_u, y_u, z_u), \quad \vec{r}_v = (x_v, y_v, z_v),$$

cu precizarea că punctul de aplicație al lui $\vec{r}_u$ și $\vec{r}_v$ este prin convenție $r(u, v)$.

Pentru a testa dacă o submulțime $\mathbb{M}$ a lui $\mathbb{R}^3$ este o suprafață, definiția 1.2 cere hărți proprii. Dar deîndată ce știm că $\mathbb{M}$ este o suprafață această condiție este de la sine îndeplinită. Într-adevăr, dacă $\mathbb{M}$ este o suprafață și dacă $r : \mathbb{D} \to \mathbb{M}$ este o hartă în $\mathbb{M}$, atunci se demonstrează că r este o hartă proprie (vezi §5). În probleme de natură locală, restricția ca r să fie injectivă poate fi lăsată deoparte. De aceea admitem

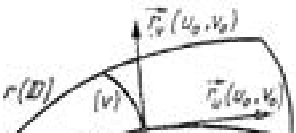


Fig. 98

2.1. *Definiție. O funcție diferențiabilă și regulată* $r : \mathbb{D} \to \mathbb{R}^3$ *a cărei imagine se află într-o suprafață* $\mathbb{M}$ *se numește parametrizare a regiunii* $r(\mathbb{D})$ *din* $\mathbb{M}$ (astfel o hartă este o parametrizare injectivă).

În acest context u şi v se numesc *parametri*, relaţiile $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$ se numesc *ecuaţiile parametrice* ale lui $r(\mathbb{D}) \subset \mathbb{M}$, iar $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$ se numeşte *ecuaţia vectorială* a lui $r(\mathbb{D}) \subset \mathbb{M}$. În unele cazuri $r(\mathbb{D})$ poate fi intreaga suprafaţă $\mathbb{M}$.

Deoarece parametrizările au o mare importanţă în aplicaţii, vom pune în evidenţă un mod prin care putem stabili dacă o aplicaţie diferenţiabilă $r: \mathbb{D} \to \mathbb{R}^3$ este o parametrizare. În primul rînd imaginea lui $\mathbb{D}$ prin r trebuie să fie în $\mathbb{M}$. Dacă suprafaţa $\mathbb{M}$ este dată implicit prin $f(x, y, z) = c$, atunci funcţia compusă $f(r)$ trebuie să aibă valoarea constantă „c".

Pentru a proba dacă r este regulată, considerăm vitezele parţiale $\vec{r}_u$ şi $\vec{r}_v$ şi produsul vectorial

$$\vec{r}_u \times \vec{r}_v = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix}.$$

Se observă că ultimele două linii dau transpusa matricei Jacobian a lui r. Astfel regularitatea lui r este echivalentă cu $\vec{r}_u \times \vec{r}_v \neq \vec{0}$, $\forall (u, v) \in \mathbb{D}$, adică cu faptul că vectorii viteze parţiale sînt liniar independenţi $\forall (u, v) \in \mathbb{D}$.

§3. Suprafeţe riglate

Există mai multe moduri de a genera o suprafaţă. În acest paragraf ne vom referi la unul dintre aceste moduri.

Mai întîi reamintim că o dreaptă D ce trece printr-un punct P_0 şi are direcţia $\vec{\beta}_0$ poate fi reprezentată prin ecuaţia vectorială $\vec{r} = \vec{\alpha}_0 + v\vec{\beta}_0$, $v \in \mathbb{R}$ (fig. 99).

3.1. *Definiţie. O suprafaţă care poate fi generata prin mişcarea unei drepte D care se sprijină pe o curbă $\alpha: I \to \mathbb{R}^3$ se numeşte suprafaţă riglată.*

Dreapta D se numeşte *generatoarea* suprafeţei riglate (fig. 100).

Avînd în vedere ecuaţia vectorială a unei drepte, rezultă că o suprafaţă riglată poate fi parametrizată întotdeauna sub forma

$$\vec{r}(u, v) = \vec{\alpha}(u) + v\vec{\beta}(u), \quad (u, v) \in \mathbb{D} = I \times \mathbb{R},$$

cu precizarea că punctele în care $\vec{r}_u \times \vec{r}_v = \vec{0}$ nu sînt incluse în mulţimea pe care o numim suprafaţă.

În cazurile concrete v se poate restrînge la un anumit interval şi de aceea în aceste cazuri generatoarele sînt segmente de dreaptă. De asemenea uneori se convine ca $\vec{\beta}$ să fie privit ca un cîmp vectorial definit pe curba α.

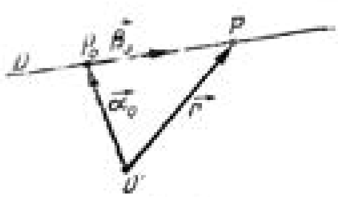


Fig. 99

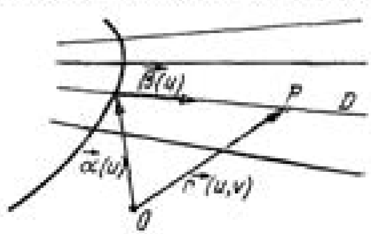


Fig. 100

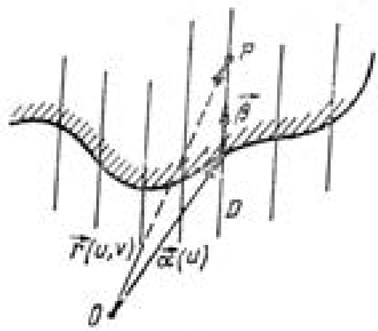


Fig. 101

1). *Suprafețe cilindrice.* Dacă generatoarea D se mișcă păstrînd aceeași direcție, atunci suprafața riglată se numește *suprafață cilindrică*. Curba α pe care se sprijină D se numește *curbă directoare* (fig. 101).

O suprafață cilindrică admite o parametrizare de forma

$$\bar{r}(u, v) = \bar{\alpha}(u) + v\bar{\beta},$$

unde $\vec{\beta}$ este un vector cu coordonate constante.

În continuare, prin $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ vom înțelege polinoame de gradul unu în trei variabile.

3.2. Teoremă. O suprafață cilindrică cu generatoarea paralelă cu dreapta $D: P(x, y, z) = 0$, $Q(x, y, z) = 0$ este caracterizată printr-o ecuație de forma $f(P, Q) = 0$.

Demonstrație. Mulțimea dreptelor paralele cu dreapta D este reprezentată analitic prin

(1) $$\begin{cases} P = u \\ Q = w \end{cases}, \qquad (u, w) \in \mathbb{R}^2.$$

Condiția ca dreptele (1) să se sprijine pe curba

(2) $$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t), \quad t \in I,$$

se obține eliminînd pe x, y, z, t între cele cinci ecuații (1) și (2). Se deduce $f(u, w) = 0$ și deci

(3) $$f(P, Q) = 0.$$

Reciproc, fie $\mathbb{M}$ submulțimea punctelor din spațiu caracterizate printr-o ecuație de tipul (3). Dacă planele $P = 0$ și $Q = 0$ determină o dreaptă și dacă $\mathbb{M}$ nu conține puncte critice ale lui f, atunci $\mathbb{M}$ este o suprafață cilindrică. Într-adevăr, pentru orice soluție reală (x, y, z) a lui (3) există două numere reale u și w așa ca $P(x, y, z) = u$, $Q(x, y, z) = w$. Această intersecție reprezintă o dreaptă paralelă cu $D: P = 0$, $Q = 0$, iar u și w verifică condiția $f(u, w) = 0$. Deoarece w este funcție de u (teorema funcțiilor implicite!), rezultă că $\mathbb{M}$ admite parametrizarea

$$\bar{r}(u, v) = \bar{\alpha}(u) + v\bar{\beta}, \text{ unde } \vec{\beta} \text{ dă direcția lui } D.$$

3.3. Observație. Suprafețele cilindrice cu generatoarele paralele cu axele Oz, Ox, Oy, se pot caracteriza, respectiv, astfel

$$\mathbb{M}: f(x, y) = 0, \ \mathbb{M}: f(y, z) = 0, \ \mathbb{M}: f(z, x) = 0.$$

2) *Suprafețe conice.* Dacă generatoarea D se mișcă trecînd printr-un punct fix V, atunci suprafața riglată se numește *suprafață conică*. Curba

pe care se sprijină D se numește *curbă directoare*, iar punctul V se numește *vîrf* (fig. 102).

O suprafață conică admite o parametrizare de forma

$$\bar{r}(u, v) = \bar{\alpha} + v\bar{\beta}(u),$$

unde $\bar{\alpha}$ este un vector cu coordonatele constante a cărui extremitate este vîrful V (vîrful nu aparține mulțimii pe care o numim suprafață conică).

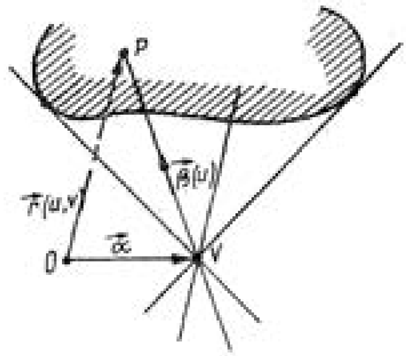


Fig. 102

3.4. Teoremă. Fie $\mathbb{M}$ o suprafață conică cu vîrful

$$V : P(x, y, z) = 0,\ Q(x, y, z) = 0,\ R(x, y, z) = 0.$$

Mulțimea $\mathbb{M} - \{(x, y, z) | R(x, y, z) = 0\}$, este caracterizată analitic printr-o ecuație de forma:

$$f\left(\frac{P}{R}, \frac{Q}{R}\right) = 0.$$

Demonstrație. Mulțimea dreptelor ce trec prin punctul fix V și care nu aparțin planului $R(x, y, z) = 0$ este reprezentată prin

$$(4) \qquad P - uR = 0,\ Q - wR = 0,\ (u, w) \in \mathbb{R}^2.$$

Condiția ca aceste drepte să se sprijine pe o curbă de ecuații (2) se obține eliminînd pe x, y, z, t între cele cinci ecuații (2) și (4). Se deduce $f(u, w) = 0$ și deci

$$(5) \qquad f\left(\frac{P}{R}, \frac{Q}{R}\right) = 0.$$

Reciproc, fie $\mathbb{M}$ mulțimea punctelor din spațiu caracterizate printr-o ecuație de tipul (5). Dacă planele $P = 0$, $Q = 0$, $R = 0$ determină un punct și dacă $\mathbb{M}$ nu conține puncte critice ale lui f, atunci $\mathbb{M}$ este o suprafață conică. Într-adevăr, pentru orice soluție reală (x, y, z) a lui (5) există două numere reale u și w așa ca $P(x, y, z) - uR(x, y, z) = 0$, $Q(x, y, z) - wR(x, y, z) = 0$, iar u și w sînt legați prin relația $f(u, w) = 0$. Deoarece w se exprimă local prin u, rezultă că suprafața admite parametrizarea

$$\bar{r}(u, v) = \bar{\alpha} + v\bar{\beta}(u),$$

unde $\bar{\alpha}$ dă vîrful.

3.5. Observație. Din ecuația (5) se poate deduce o ecuație omogenă în trei variabile $g(P, Q, R) = 0$ și reciproc. De aceea, în general, o ecuație omogenă de tipul $g(P, Q, R) = 0$, unde $P = 0$, $Q = 0$, $R = 0$ determină un punct, reprezintă o suprafață conică.

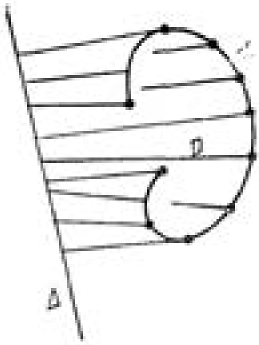


Fig. 103

3) *Suprafețe conoide.* O suprafață riglată generată de o dreaptă D care se sprijină pe o dreaptă fixă Δ (*axă*) și pe o curbă α (*curbă directoare*), se numește *conoid* (fig. 103).

Dacă Δ este luată drept axă Oz, atunci conoidul admite parametrizarea

$$\bar{r}(u, v) = (u \cos \theta(v),\ u \sin \theta(v),\ h(v)).$$

Un conoid a cărui generatoare rămîne paralelă cu un plan fix P se numește *conoid cu plan director.* Acest conoid admite o parametrizare de forma

$$\bar{r}(u, v) = \overline{\alpha}(u) + v\overline{\beta}(u),$$

unde $\overline{\beta} \| P$ și $(\overline{\alpha} - \overline{\beta}) \| \Delta$.

3.6. Teoremă. Fie $\mathbb{M}$ conoidul cu planul director $P = 0$ și cu axa $\Delta : Q = 0$, $R = 0$. Mulțimea $\mathbb{M} - \{(x, y, z) | P(x, y, z) = u,\ R(x, y, z) = 0\}$ este caracterizată analitic printr-o ecuație de forma

$$f\left(P, \frac{Q}{R}\right) = 0.$$

Demonstrație. Abstracție făcînd de dreptele $D : P = u$, $R = 0$, mulțimea dreptelor paralele cu P și care intîlnesc pe Δ este reprezentată analitic prin

$$\begin{cases} P = u \\ Q - wR = 0. \end{cases} \tag{6}$$

Condiția ca aceste drepte să se sprijine pe o curbă α de ecuații (2) se obține eliminînd pe x, y, z, t între cele cinci ecuații (2) și (6). Se deduce $f(u, w) = 0$ și deci

$$f\left(P, \frac{Q}{R}\right) = 0. \tag{7}$$

Reciproc, fie $\mathbb{N}$ submulțimea punctelor din spațiu caracterizate printr-o ecuație de tipul (7). Dacă $P = 0$ este ecuația unui plan care taie dreapta $\Delta : Q = 0$, $R = 0$ și dacă $\mathbb{N}$ nu conține puncte critice ale lui f, atunci $\mathbb{N}$ este un conoid. Într-adevăr, pentru orice soluție reală (x, y, z) a lui (7) există două numere reale u, w așa ca $P = u$, $Q - wR = 0$ cu $f(u, w) = 0$.

§4. Suprafețe de rotație

4.1. *Definiție. O suprafață care poate fi generată prin rotația unei curbe C în jurul unei drepte fixe D, numită axă de rotație, se numește suprafață de rotație.*

Fie $P(x, y, z) = 0$ planul perpendicular pe axa D și $\Sigma(x, y, z) = 0$ o sferă cu centrul pe D. Avem

4.2. Teoremă. O suprafață de rotație cu axa D este caracterizată printr-o ecuație carteziană implicită de forma $f(P, \Sigma) = 0$.

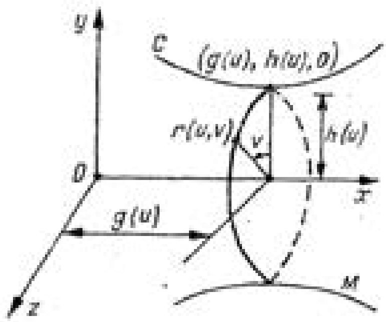


Fig. 104

Demonstrație. Orice punct de pe curba C se va deplasa într-un plan perpendicular pe axă, $P = u$ și va descrie un cerc cu centrul pe axa de rotație (fig. 104). De aceea suprafața de rotație poate fi privită ca fiind locul geometric al cercurilor cu centrele pe D, care trec prin C și ale căror plane sînt perpendiculare pe D. Astfel sistemul

$$\begin{cases} \Sigma(x, y, z) = w, \quad w > 0, \\ P(x, y, z) = u \\ x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t) \end{cases}$$

trebuie să fie compatibil. Eliminînd pe x, y, z, t rezultă $f(u, w) = 0$ și deci $\mathbb{M} : f(P, \Sigma) = 0$.

Reciproca este evidentă.

Cazul cel mai des întîlnit este acela în care C este o curbă situată în același plan cu axa D, fără ca C și D să se intersecteze. În acest caz cercurile din $\mathbb{M}$ generate prin rotația fiecărui punct al lui C se numesc *paralele*, iar diversele poziții ale lui C se numesc *meridiane*. Pentru simplificare să presupunem că C este în planul xOy, iar D este Ox (fig. 104).

1) Dacă $C : f(x, y) = 0,\ z = 0,\ y > 0$, atunci $\mathbb{M} : f(x, y^2 + z^2) = 0$.

2) Dacă C este dată prin parametrizarea $\alpha(u) = (g(u), h(u), 0)$, $h(u) > 0$, $u \in I$, atunci $\mathbb{M}$ admite parametrizarea $r(u, v) = (g(u),\ h(u)\cos v,\ h(u)\sin v)$, $u \in I$, $v \in \mathbb{R}$.

§5. Calcul diferențial pe suprafețe

Ne propunem să arătăm că pe orice suprafață $\mathbb{M}$ se poate face un calcul diferențial asemănător calculului diferențial obișnuit din $\mathbb{R}^2$. Elementele acestui calcul: funcții, cîmpuri vectoriale tangente etc., aparțin suprafeței și nu spațiului euclidian $\mathbb{R}^3$ în care este scufundată suprafața.

Presupunem că f este o funcție reală definită numai pe suprafața $\mathbb{M}$, adică $f : \mathbb{M} \to \mathbb{R}$. Dacă $r : \mathbb{D} \to \mathbb{M}$ este o hartă, atunci $f \circ r : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$ se numește *expresia lui f în coordonate*. Dacă $f \circ r$ este diferențiabilă în sens obișnuit, oricare ar fi r, atunci f se numește *diferențiabilă*.

Fie acum funcția $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{M}$. Orice hartă r în $\mathbb{M}$ dă o expresie în coordonate $r^{-1} \circ F$ pentru F. Evident această funcție compusă este definită numai pe mulțimea (deschisă) $U \subset \mathbb{R}^n$ pentru care $F(U) \subset r(\mathbb{D})$. Dacă $r^{-1} \circ F$ este diferențiabilă în sens obișnuit, oricare ar fi r, atunci funcția F se numește *diferențiabilă*.

Fie $\mathbb{M}$ și $\mathbb{N}$ două suprafețe, r_1 o hartă în $\mathbb{M}$ și r_2 o hartă în $\mathbb{N}$. O funcție $F : \mathbb{M} \to \mathbb{N}$ se numește *diferențiabilă* dacă funcția compusă $r_2^{-1} \circ F \circ r_1$ este diferențiabilă în sens obișnuit, oricare ar fi r_1 și r_2.

În particular, o funcție diferențiabilă de tipul $\alpha : I \to \mathbb{M}$, unde I este un interval deschis al dreptei reale, se numește *curbă* în $\mathbb{M}$.

5.1. Teoremă. Fie curba $\alpha : I \to \mathbb{M}$ și harta $r : \mathbb{D} \to \mathbb{M}$. Dacă $\alpha(I) \subset r(\mathbb{D})$, atunci există o pereche de funcții diferențiabile u, v definite pe I astfel încît:

$$\alpha(t) = r(u(t), v(t)),\ t \in I \text{ sau } \alpha = r(u, v).$$

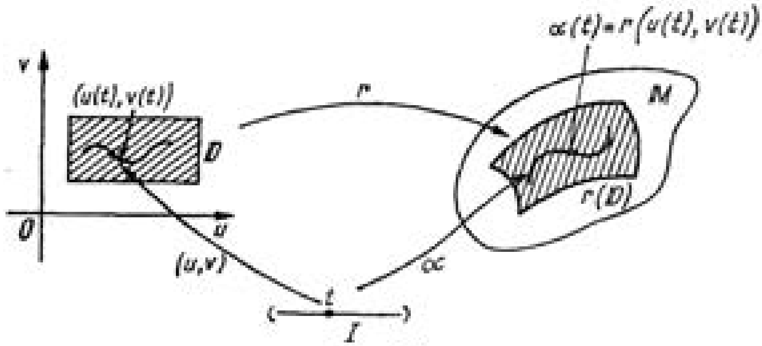


Fig. 105

Demonstrație. Prin ipoteză, expresia în coordonate $r^{-1}\circ\alpha : I \to \mathbb{D}$ este diferențiabilă. Ea este o curbă plană a cărei imagine se află în domeniul $\mathbb{D}$, de definiție al lui r (fig. 105). Dacă (u, v) sînt coordonatele euclidiene ale lui $r^{-1}\circ\alpha$ adică $r^{-1}(\alpha(t)) = (u(t), v(t))$, atunci $\alpha = r\circ(r^{-1}\circ\alpha) = r(u, v)$. Funcțiile u și v sînt unic determinate. Într-adevăr, din presupunerea $\alpha = r(u_1, v_1)$, rezultă $(u, v) = r^{-1}\circ\alpha = r^{-1}(r(u_1, v_1)) = (u_1, v_1)$.

Funcțiile u, v sînt numite *coordonatele curbei* α în raport cu harta r.

Dăm fără demonstrație

5.2. Teoremă. Fie $\mathbb{M}$ o suprafață. Dacă $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^3$ este o funcție diferențiabilă a cărei imagine se află în $\mathbb{M}$, atunci funcția $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{M}$ este diferențiabilă în sensul dat în acest paragraf.

Această teoremă arată legătura strînsă între calculele din $\mathbb{R}^3$ și calculele de pe suprafața $\mathbb{M}$. De exemplu, ea implică faptul că o curbă din $\mathbb{R}^3$ care se află în $\mathbb{M}$, este o curbă a lui $\mathbb{M}$.

Fie $\mathbb{M}$ o suprafață și r o hartă în $\mathbb{M}$. Deoarece harta r este o funcție diferențiabilă definită pe $\mathbb{D}\subset\mathbb{R}^2$ și cu valori în $\mathbb{R}^3$, rezultă că r este diferențiabilă și ca funcție în $\mathbb{M}$.

5.3. Consecință. Dacă r_1 și r_2 sînt hărți într-o suprafață $\mathbb{M}$ ale căror imagini se suprapun, atunci funcțiile compuse $r_1^{-1}\circ r_2$ și $r_2^{-1}\circ r_1$ sînt aplicații diferențiabile definite pe mulțimi deschise din plan (fig. 106).

De exemplu, funcția $r_2^{-1}\circ r_1$ este definită numai pentru acele puncte (u, v) din $\mathbb{D}_1$ pentru care $r_1(u, v)$ se află în imaginea $r_2(\mathbb{D}_2)$ a lui r_2 (fig. 106).

După un raționament analog celui folosit pentru demonstrația teoremei 5.1, consecința 5.3 poate fi retranscrisă astfel

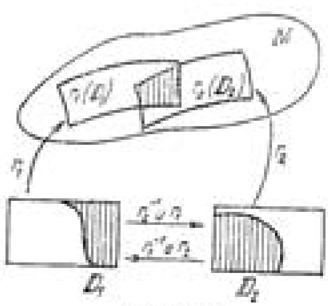


Fig. 106

5.4. Consecință. Dacă r_1 și r_2 sînt hărți ale căror imagini se suprapun în $\mathbb{M}$, atunci există o pereche unică de funcții diferențiabile f și g astfel încît $r_2(u, v) = r_1(f(u, v), g(u, v))$, $\forall(u, v)$ din domeniul de definiție al lui $r_1^{-1}\circ r_2$. Analog se poate exprima r_1 în funcție de r_2.

Consecința 5.3 sugerează o metodă concretă de a stabili dacă o funcție este sau nu diferențiabilă pe $\mathbb{M}$. Dacă $f : \mathbb{M} \to \mathbb{R}$, atunci în loc să verificăm că toate expresiile sale în coordonate $f\circ r$ sînt diferențiabile în sens euclidian, este suficient să facem aceasta pentru un anumit număr de hărţi care să acopere pe $\mathbb{M}$. Adesea este suficientă o singură hartă. Demonstraţia este un exerciţiu din calculul cu funcţii compuse. Într-adevăr, fie r_2 o hartă arbitrară; din faptul că $f\circ r_1$ şi $r_1^{-1}\circ r_2$ sînt diferenţiabile rezultă că $f\circ r_1\circ r_1^{-1}\circ r_2$ este diferenţiabilă. În general ultima funcţie este o restricţie a lui $f\circ r_2$. Dacă însă imaginea lui r_1 acoperă pe $\mathbb{M}$, atunci $f\circ r_1\circ r_1^{-1}\circ r_2$ reprezintă pe $f\circ r_2$ şi astfel diferenţiabilitatea este demonstrată.

Din punct de vedere intuitiv este clar ce înseamnă un vector tangent la o suprafaţă $\mathbb{M}$. Definiţia formală se bazează pe ideea că o curbă din $\mathbb{M}$ trebuie să aibă toţi vectorii viteză tangenţi la $\mathbb{M}$.

5.5. *Definiţie. Fie $\mathbb{M}$ o suprafaţă şi P un punct oarecare din ea. Un vector $\vec{v}$ tangent la $\mathbb{R}^3$ în P se numeşte tangent la $\mathbb{M}$ în P dacă este vectorul viteză al unei curbe oarecare din $\mathbb{M}$ ce trece prin P.*

Mulţimea tuturor vectorilor tangenţi la $\mathbb{M}$ în P se numeşte ***planul tangent*** al lui $\mathbb{M}$ în P şi se notează cu $T_P\mathbb{M}$ (fig. 107). Imaginea concretă a lui $T_P\mathbb{M}$ în $\mathbb{R}^3$ poartă aceeaşi denumire.

Teorema următoare arată că $T_P\mathbb{M}$ este un subspaţiu vectorial bidimensional al spaţiului tangent $T_P\,\mathbb{R}^3$.

5.6. Teoremă. Fie P un punct al unei suprafeţe $\mathbb{M}$ şi r o hartă în $\mathbb{M}$ astfel încît $r(u_0, v_0) = P$. Un vector $\vec{w}$ tangent la $\mathbb{R}^3$ în P este tangent la $\mathbb{M}$ dacă şi numai dacă $\vec{w}$ poate fi scris ca o combinaţie liniară a lui $\vec{r}_u(u_0, v_0)$ şi $\vec{r}_v(u_0, v_0)$.

Demonstraţie. Vitezele parţiale $\vec{r}_u$ şi $\vec{r}_v$ sînt tangente la $\mathbb{M}$ în orice punct al lui $r(\mathbb{D})$ deoarece curbele coordonate ale lui r sînt curbe în $\mathbb{M}$ (fig. 108).

Să presupunem că $\vec{w}$ este tangent la $\mathbb{M}$ în P, adică există o curbă α pe $\mathbb{M}$ pentru care $\alpha(0) = 0$ şi $\alpha'(0) = \vec{w}$. După teorema 5.1, curba α poate fi scrisă în forma $\alpha = r(u, v)$ sau $\vec{\alpha}(t) = \vec{r}(u(t), v(t))$. Regula de derivare a funcţiilor compuse dă

$$\vec{\alpha}\,' = \vec{r}_u(u, v)\,\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \vec{r}_v(u, v)\,\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\,.$$

Deoarece $\alpha(0) = P = r(u_0, v_0)$, avem $u(0) = u_0$, $v(0) = v_0$ şi deci, pentru $t = 0$, găsim

$$\vec{w} = \vec{\alpha}\,'(0) = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(0)\vec{r}_u(u_0, v_0) + \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}(0)\vec{r}_v(u_0, v_0).$$

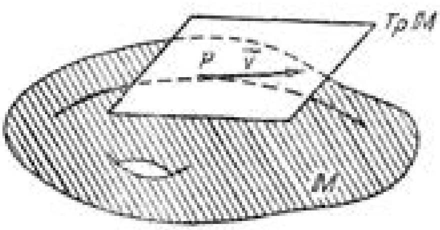


Fig. 107

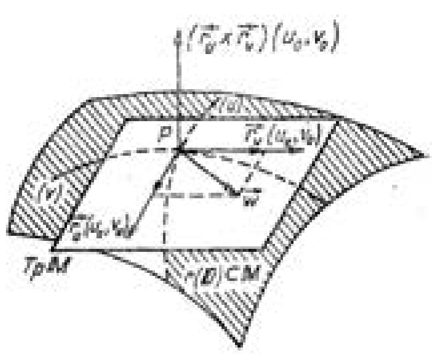


Fig. 108

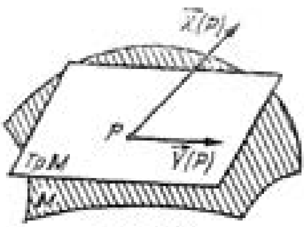


Fig. 109

Invers să presupunem că vectorul $\vec{w} \in T_P\mathbb{R}^3$ poate fi scris în forma $\vec{w} = c_1\vec{r}_u(u_0, v_0) + c_2\vec{r}_v(u_0, v_0)$. Calculul anterior arată că $\vec{w}$ este vectorul viteză al curbei $\alpha(t) = r(u_0 + tc_1, v_0 + tc_2)$ la momentul $t = 0$. Astfel $\vec{w}$ este tangent la $\mathbb{M}$ în P.

Deoarece vitezele parțiale sînt vectori liniar independenți, teorema anterioară arată că, $\forall P \in r(\mathbb{D}) \subset \mathbb{M}$, vitezele parțiale formează o bază a planului tangent $T_P\mathbb{M}$.

5.7. *Definiție. O funcție $\vec{X}$ care asociază fiecărui punct $P \in \mathbb{M}$ un vector $\vec{X}(P)$ tangent la $\mathbb{R}^3$ în P se numește cîmp vectorial euclidian pe suprafața $\mathbb{M}$.*

Fie $\vec{X} = f(x, y, z)\vec{i} + g(x, y, z)\vec{j} + h(x, y, z)\vec{k}$ un cîmp vectorial euclidian pe suprafața $\mathbb{M}$. Dacă funcțiile coordonate f, g, h sînt diferențiabile pe $\mathbb{M}$, atunci cîmpul $\vec{X}$ se numește *diferențiabil*.

Un cîmp vectorial euclidian $\vec{Y}$ pentru care, $\forall P \in \mathbb{M}$, $\vec{Y}(P)$ este tangent la $\mathbb{M}$ în P se numește cîmp vectorial *tangent la* $\mathbb{M}$ (fig. 109). Dacă $\vec{Y}$ este un cîmp vectorial tangent la $\mathbb{M}$, atunci oricare ar fi harta $r : \mathbb{D} \to \mathbb{M}$, avem

$$\vec{Y}(r(u, v)) = F(u, v)\vec{r}_u + G(u, v)\vec{r}_v.$$

De aceea $\vec{Y}$ este diferențiabil dacă și numai dacă funcțiile F și G sînt diferențiabile pe $\mathbb{D}$.

În continuare presupunem că lucrăm numai cu cîmpuri diferențiabile și precizăm că de cele mai multe ori cîmpurile pe $\mathbb{M}$ sînt definite local (numai în anumite regiuni ale lui $\mathbb{M}$).

5.8. *Observație.* Cîmpurile vectoriale tangente la $\mathbb{M}$ aparțin calculului din $\mathbb{M}$, deoarece conform definiției 5.5 ele dau în fiecare punct vitezele unor curbe din $\mathbb{M}$.

§ 6. Cîmpuri normale pe suprafețe

Fie $\mathbb{M}$ o suprafață și P un punct al său. Un vector $\vec{z}$ cu originea în P care este ortogonal planului tangent $T_P\mathbb{M}$, adică ortogonal oricărui vector tangent la $\mathbb{M}$ în P, se numește *vector normal* la $\mathbb{M}$. Un cîmp vectorial euclidian $\vec{Z}$ definit pe $\mathbb{M}$ se numește *cîmp normal* pe $\mathbb{M}$ dacă fiecare vector $\vec{Z}(P)$ este normal la $\mathbb{M}$.

Deoarece $T_P\mathbb{M}$ este un subspațiu bidimensional al lui $T_P\mathbb{R}^3$, există numai o *direcție normală* la $\mathbb{M}$ în P, adică toți vectorii $\vec{z}$ normali în P sînt coliniari. Astfel dacă $\vec{z}$ nu este zero, rezultă că $T_P\mathbb{M}$ constă numai din vectorii lui $T_P\mathbb{R}^3$ care sînt ortogonali lui $\vec{z}$. Dreapta ce trece prin P și este perpendiculară pe planul tangent $T_P\mathbb{M}$ se numește *normala* suprafeței în punctul P.

Fie $r(\mathbb{D})$ regiunea din $\mathbb{M}$ acoperită de harta $r : \mathbb{D} \to \mathbb{M}$. Funcția vectorială $\vec{Z}(u, v) = \vec{r}_u \times \vec{r}_v$ atașează fiecărui punct din $\mathbb{D}$ un vector normal la $\mathbb{M}$ în $r(u, v)$ (fig. 108). De aceea $\vec{Z}(u, v)$ poate fi privit ca un cîmp normal definit local pe $\mathbb{M}$.

Dacă gîndim $T_P M$ ca fiind determinat de punctul $P(x_0, y_0, z_0)$ și de vectorul normal $\vec{Z}(u_0, v_0)$, atunci găsim pentru $T_P M$ ecuația

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_{u_0} & y_{u_0} & z_{u_0} \\ x_{v_0} & y_{v_0} & z_{v_0} \end{vmatrix} = 0,$$

unde $x_0 = x(u_0, v_0)$, $x_{v_0} = x_v(u_0, v_0)$ etc. Normala la M în P are ecuațiile

$$\frac{x - x_0}{\dfrac{D(y, z)}{D(u_0, v_0)}} = \frac{y - y_0}{\dfrac{D(z, x)}{D(u_0, v_0)}} = \frac{z - z_0}{\dfrac{D(x, y)}{D(u_0, v_0)}}.$$

Dacă suprafața M este dată prin ecuația carteziană implicită, atunci este ușor să punem în evidență cîmpul normal și cîmpurile tangente.

6.1. Teoremă. Dacă $M : f(x, y, z) = c$ este o suprafață, atunci gradientul $\nabla f = \dfrac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \dfrac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \dfrac{\partial f}{\partial z}\vec{k}$, definit pe M, este un cîmp vectorial normal care nu se anulează în nici un punct al lui M (fig. 110).

Demonstrație. Gradientul nu se anulează pe M deoarece prin ipoteză derivatele parțiale f_x, f_y, f_z nu se pot anula simultan în nici un punct al lui M(§ 1).

Să arătăm acum că $(\nabla f(P), \vec{v}) = 0$, $\forall \vec{v} \in T_P M$. Pentru aceasta observăm că dacă α este o curbă pe M, atunci $f(\alpha) = f(x(t), y(t), z(t)) \equiv 0$. Deci

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\alpha)\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}(\alpha)\frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z}(\alpha)\frac{dz}{dt} = 0.$$

Alegînd pe α astfel încît să aibă viteza inițială

$$\vec{\alpha}'(0) = \vec{v} = v_1\vec{i} + v_2\vec{j} + v_3\vec{k},$$

în $\alpha(0) = P$, găsim

$$0 = f_x(\alpha(0))\frac{dx}{dt}(0) + f_y(\alpha(0))\frac{dy}{dt}(0) + f_z(\alpha(0))\frac{dz}{dt}(0) =$$

$$= f_x(P)v_1 + f_y(P)v_2 + f_z(P)v_3 = (\nabla f(P), \vec{v}).$$

Din punct de vedere analitic, ecuația planului tangent la M în $P(x_0, y_0, z_0)$ este

$$(x - x_0)f_{x_0} + (y - y_0)f_{y_0} + (z - z_0)f_{z_0} = 0,$$

iar ecuațiile normalei sînt

$$\frac{x - x_0}{f_{x_0}} = \frac{y - y_0}{f_{y_0}} = \frac{z - z_0}{f_{z_0}}.$$

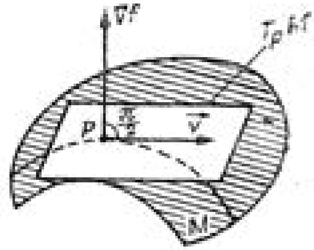


Fig. 110

Fig. 111

În particular pentru reprezentarea carteziană explicită $z = f(x, y)$ avem:

planul tangent, $z - z_0 = p(x - x_0) + q(y - y_0)$,

normală, $\dfrac{x - x_0}{p_0} = \dfrac{y - y_0}{q_0} = \dfrac{z - z_0}{-1}$

6.2. Observații. 1) Planul tangent $T_P\mathbb{M}$ este aproximația liniară a suprafeței $\mathbb{M}$ în vecinătatea lui P.

2) Cîmpurile vectoriale normale aparțin calculului din $\mathbb{R}^3$. Ele sînt folosite în studiul lui $\mathbb{M}$ din punctul de vedere al unui observator din $\mathbb{R}^3$.

§7. Proprietăți topologice ale suprafețelor

Suprafețe conexe. Fie $\alpha : I \to \mathbb{M}$ o curbă de pe suprafața $\mathbb{M}$ și $[a, b] \subset I$. Restricția $\alpha : [a, b] \to \mathbb{M}$ se numește *segment de curbă* sau 1-*segment* pe suprafața $\mathbb{M}$.

7.1. *Definiție. O suprafață $\mathbb{M}$ se numește conexă dacă $\forall P, Q \in \mathbb{M}$ există un segment de curbă $\alpha : [a, b] \to \mathbb{M}$, cel puțin continuă, astfel încît $\alpha(a) = P$ și $\alpha(b) = Q$, adică imaginea $\alpha([a, b]) \subset \mathbb{M}$ unește punctele P și Q* (fig. 111).

O suprafață conexă $\mathbb{M}$ este toată dintr-o singură bucată. De exemplu, exceptînd hiperboloidul cu două pînze care nu este conex, toate cuadricele nedegenerate sînt conexe.

7.2. Teoremă. Fie $\mathbb{M}_1$ și $\mathbb{M}_2$ două suprafețe. Dacă $\mathbb{M}_1$ este conexă iar $F : \mathbb{M}_1 \to \mathbb{M}_2$ este o aplicație surjectivă și diferențiabilă, atunci $\mathbb{M}_2$ este conexă.

Demonstrație. Fie R, S două puncte arbitrare din $\mathbb{M}_2$. Deoarece F este surjectivă există $P, Q \in \mathbb{M}_1$ așa ca $F(P) = R$, $F(Q) = S$. Dar prin ipoteză $\mathbb{M}_1$ este conexă și deci există un segment de curbă α care unește pe P cu Q. Imaginea lui α prin funcția continuă F este un segment de curbă ce unește pe R cu S, adică $\mathbb{M}_2$ este conexă.

7.3. Consecință. Dacă $\mathbb{D}$ este o mulțime deschisă și conexă din plan, iar $r : \mathbb{D} \to \mathbb{M}$ este o parametrizare, atunci $r(\mathbb{D}) \subset \mathbb{M}$ este conexă.

7.4. Exemplu. Hiperboloidul cu o pînză este conex deoarece el este mulțimea valorilor funcției diferențiabile:

$$x = a \operatorname{ch} u \cos v,\ y = b \operatorname{ch} u \sin v,\ z = c \operatorname{sh} u$$

definită pe mulțimea conexă $\mathbb{R}^2$.

Analog putem stabili că fiecare dintre pînzele hiperboloidului cu două pînze este conexă. Deoarece aceste două pînze sînt mulțimi disjuncte, rezultă că hiperboloidul cu două pînze nu este conex.

7.5. Teoremă. Fie $\mathbb{M}$ o suprafață conexă și $f : \mathbb{M} \to \mathbb{R}$ o aplicație diferențiabilă.

(1) Dacă $df = 0$, atunci $f = \text{const.}$

(2) Dacă f nu se anulează pe $\mathbb{M}$, atunci $f > 0$ sau $f < 0$ peste tot.

Demonstrație. Fie $P, Q \in \mathbb{M}$ două puncte arbitrare. Prin ipoteză acestea pot fi unite printr-un segment de curbă $\alpha : [a, b] \to \mathbb{M}$. Utilizînd funcția diferențiabilă $f \circ \alpha : [a, b] \to [f(\alpha(c)), f(\alpha(d))]$, $c, d \in [a, b]$, căreia îi aplicăm teorema creșterilor finite și proprietatea lui Darboux, deducem $f = \text{const.}$ și respectiv $f > 0$ sau $f < 0$ peste tot.

Fig. 112

7.6. Observație. O suprafață $\mathbb{M}$ poate fi privită ca un spațiu topologic și în acest context putem demonstra că $\mathbb{M}$ este conexă dacă și numai dacă (1) $\mathbb{M}$ nu este reuniunea a două mulțimi nevide, disjuncte și deschise sau dacă și numai dacă (2) singurele submulțimi închise și deschise ale lui $\mathbb{M}$ sînt $\varnothing \subset \mathbb{M}$ și $\mathbb{M}$.

Suprafețe simplu conexe. Suprafața $\mathbb{M}$ se numește *simplu conexă* dacă orice curbă închisă de pe $\mathbb{M}$ poate fi deformată prin continuitate (fără a părăsi punctele suprafeței) astfel încît să se reducă la un punct (fig. 112). De exemplu, sfera este (conexă și) simplu conexă; cilindrul circular drept (este conex dar) nu este simplu conex, deoarece cercurile situate în plane perpendiculare pe axa cilindrului nu se pot reduce la un punct fără a ieși din cilindru; hiperboloidul cu două pînze (nu este conex dar) este simplu conex etc.

Suprafețe compacte. Fie $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ și *intervalul bidimensional* închis (dreptunghi închis) $\mathbb{D}_0 : a \leqslant u \leqslant b,\ c \leqslant v \leqslant d$.

Fie $\mathbb{M}$ o suprafață. O funcție diferențiabilă de tipul $r : \mathbb{D}_0 \to \mathbb{M}$ se numește 2-segment în $\mathbb{M}$, figura 113. (Atributul diferențiabilă este folosit în sensul că r se poate extinde diferențiabil la un interval bidimensional deschis ce conține pe $\mathbb{D}_0$.)

7.7. *Definiție. Suprafața $\mathbb{M}$ se numește compactă dacă poate fi acoperită prin imaginile unui număr finit de 2-segmente.*

De exemplu sfera este o suprafață compactă deoarece este acoperită de imaginea 2-segmentului $r(u, v) = (x_0 + a \cos u \sin v,\ y_0 + a \sin u \sin v,\ z_0 + a \cos v)$, $(u, v) \in \mathbb{D}_0 = [0, 2\pi] \times [0, \pi]$. De asemenea torul de rotație este o suprafață compactă.

Se știe că orice funcție (reală) continuă definită pe un dreptunghi închis $\mathbb{D}_0$ își atinge maximul (minimul) într-un punct din $\mathbb{D}_0$. Acest rezultat îl folosim pentru a demonstra teorema următoare.

7.8. Teoremă. Dacă f este o funcție continuă definită pe o suprafață compactă $\mathbb{M}$, atunci f își atinge maximul (minimul) într-un punct din $\mathbb{M}$.

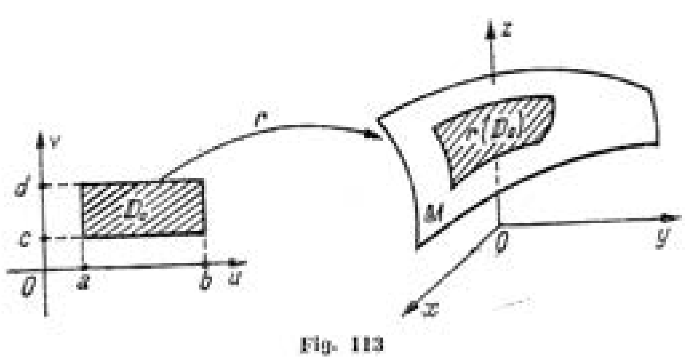


Fig. 113

Demonstrație. Fie $r_i : \mathbb{D}_{0i} \to \mathbb{M}$, $1 \leqslant i \leqslant k$, 2-segmentele ale căror imagini acoperă pe $\mathbb{M}$. Deoarece aplicațiile r_i sînt diferențiabile, iar f este continuă rezultă că $f \circ r_i : \mathbb{D}_{0i} \to \mathbb{R}$ sînt funcții continue. De aceea, pentru fiecare i, există punctul $(u_i, v_i) \in \mathbb{D}_{0i}$ în care $f \circ r_i$ ia valoarea maximă. Fie $f(r_1(u_1, v_1))$ cel mai mare dintre numerele $f(r_i(u_i, v_i))$. Să arătăm că $P = r_1(u_1, v_1)$ este punctul în care f are valoarea maximă. Într-adevăr, deoarece r_i sînt în număr finit, $\forall Q \in \mathbb{M}$, există un indice i așa ca $Q = r_i(u, v)$ și avem :

$$f(P) = f(r_1(u_1, v_1)) \geqslant f(r_i(u_i, v_i)) \geqslant f(r_i(u, v)) = f(Q),$$

ceea ce trebuie demonstrat.

Teorema anterioară poate fi folosită pentru a proba că o suprafață nu este compactă. De exemplu, cilindrul $\mathbb{M}$ cu generatoarele paralele cu Oz nu este o suprafață compactă deoarece funcția coordonată z dă cota $z(P)$, $\forall P \in \mathbb{M}$, și astfel ea nu are o valoare maximă pe $\mathbb{M}$.

O submulțime $\mathbb{M}$ din $\mathbb{R}^3$ se numește *închisă* în $\mathbb{R}^3$ dacă complementara sa $\mathbb{R}^3 - \mathbb{M}$ este deschisă în $\mathbb{R}^3$.

O submulțime $\mathbb{M}$ din $\mathbb{R}^3$ se numește *mărginită* dacă distanța euclidiană dintre două puncte oarecare ale sale este mai mică decît un număr real dat. Cu alte cuvinte $\mathbb{M}$ este mărginită dacă poate fi inclusă într-o sferă de rază finită.

7.9. Teorema Heine-Borel. O submulțime din $\mathbb{R}^3$ este compactă dacă și numai dacă ea este închisă și mărginită.

O suprafață de tipul $\mathbb{M} : f(x, y, z) = c$ este închisă deoarece ea constă din punctele $f^{-1}(\{c\})$, $\{c\}$ este o submulțime închisă din $\mathbb{R}$, iar f este o funcție continuă. Astfel o suprafață $\mathbb{M} : f(x, y, z) = c$ este compactă dacă și numai dacă ea este mărginită în $\mathbb{R}^3$. De exemplu elipsoidul este compact, dar hiperboloizii nu sînt compacți.

7.10. Teoremă. Dacă $f(x, y, z)$ este un polinom omogen de gradul $n \geqslant 1$ care are cel puțin o valoare pozitivă, atunci $\mathbb{M} : f(x, y, z) = 1$ este o suprarață. Dacă $f(P) > 0$ exceptînd $P(0, 0, 0)$, atunci $\mathbb{M}$ este compactă și feciproc.

Demonstrație. Prin ipoteză există un punct $P(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ așa ca $f(x, y, z) = a > 0$. Astfel $\mathbb{M}$ conține punctul $\frac{1}{\sqrt[n]{a}}(x, y, z)$ și deci nu este vidă. Din formula lui Euler pentru funcțiile omogene rezultă că orice punct Q care satisface $f_x(Q) = 0$, $f_y(Q) = 0$, $f_z(Q) = 0$ satisface și $f(Q) = 0$. De aceea $Q \notin \mathbb{M}$ și astfel $\mathbb{M}$ este o suprafață.

Să presupunem $f > 0$ exceptînd originea. Fie sfera S și $i : S \to \mathbb{R}^3$ injecția naturală. Funcția compusă $f \circ i : S \to \mathbb{R}$ este continuă. Deoarece S este compactă funcția $f \circ i$ are o valoare minimă b și $b > 0$. Dacă $Q \in \mathbb{R}^3$, avem

$$f(Q) = \|Q\|^n f\left(\frac{Q}{\|Q\|}\right) \geqslant \|Q\|^n b.$$

De aceea pentru $f(Q) = 1$ găsim $\|Q\| \leqslant \frac{1}{\sqrt[n]{b}}$. Rezultă că $\mathbb{M} = f^{-1}(1)$ este conținută în sfera închisă cu centrul în O și de rază $\frac{1}{\sqrt[n]{b}}$. Astfel $\mathbb{M}$ este mărginită și deci $\mathbb{M}$ este compactă.

Reciproc, presupunem că $\mathbb{M}$ este o suprafață compactă. Rezultă că $\mathbb{M}$ este mărginită și deci $f(Q) \geqslant \|Q\|^n b$. De aceea $f > 0$, exceptînd originea.

SUPRAFEȚE ORIENTABILE

7.11. *Definiție. O suprafață $\mathbb{M}$ se numește orientabilă dacă posedă un cîmp vectorial normal $\vec{Z}$ care să nu se anuleze în nici un punct al lui $\mathbb{M}$.*

Din § 6 rezultă că:

— orice suprafață simplă este orientabilă,

— orice suprafață $\mathbb{M} : f(x, y, z) = c$ (care nu posedă puncte critice ale lui f) este orientabilă. De exemplu planul, sfera, cuadricele nedegenerate etc. sînt suprafețe orientabile. În particular orice suprafață dată cartezian explicit este orientabilă.

Dăm fără demonstrație următoarea teoremă.

7.12. Teoremă. Orice suprafață simplu conexă și conexă este orientabilă.

Pe de altă parte avem

7.13. Teoremă. Orice suprafață conexă și compactă $\mathbb{M}$ este orientabilă.

Demonstrație. Dacă $\mathbb{M}$ este o suprafață conexă și compactă, atunci $\mathbb{R}^3$ se descompune în două părți conexe, una mărginită $\mathbb{M}$ și alta nemărginită $\mathbb{R}^3 - \mathbb{M}$. Suprafața $\mathbb{M}$ admite două cîmpuri vectoriale normale unitare opuse dintre care unul indică regiunea nemărginită. De aceea $\mathbb{M}$ este orientabilă.

7.14. Teoremă. Dacă $\mathbb{M}_2$ este o suprafață orientabilă, iar $F : \mathbb{M}_1 \to \mathbb{M}_2$ este o aplicație regulată, atunci suprafața $\mathbb{M}_1$ este orientabilă.

Demonstrație. Presupunem că $\mathbb{M}_2$ admite cîmpul normal nenul $\vec{Y}$ și construim funcția reală

$$\mu(\vec{v}, \vec{w}) = (\vec{Y}(Q), \vec{v} \times \vec{w}), \ \vec{v}, \vec{w} \in T_Q\mathbb{M}_2, \ Q = F(P), \ P \in \mathbb{M}_1.$$

Fie F_* matricea Jacobian a reprezentării în coordonate a lui F. Dacă $\vec{a}, \vec{b}$ sînt doi vectori independenți din $T_P\mathbb{M}_1$, atunci $F_*\vec{a}, F_*\vec{b}$ sînt doi vectori independenți din $T_Q\mathbb{M}_2$, deoarece F este regulată. Definim

$$(F^* \mu)(\vec{a}, \vec{b}) = \mu(F_*\vec{a}, F_*\vec{b}).$$

Deoarece F este regulată rezultă $F^* \mu \neq 0$. Construim

$$\vec{Z}(P) = \frac{\vec{a} \times \vec{b}}{(F^*\mu)(\vec{a}, \vec{b})}.$$

Această expresie este independentă de alegerea lui $\vec{a}$ și $\vec{b}$ și dă în fiecare punct un vector normal nenul. De aceea $P \to \vec{Z}(P)$, este un cîmp normal nenul pe $\mathbb{M}_1$, adică $\mathbb{M}_1$ este orientabilă.

Un cîmp vectorial normal unitar pe o suprafață orientabilă $\mathbb{M}$ se numește *orientare* pe $\mathbb{M}$.

7.15. Teoremă. Orice suprafață conexă și orientabilă admite exact două orientări.

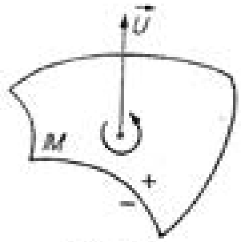


Fig. 114

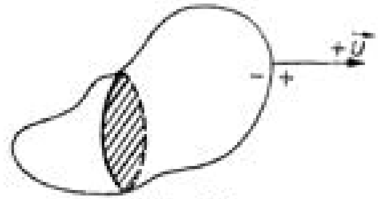


Fig. 115

Demonstrație. Fie $\vec{Z}$ un cîmp normal global definit pe $\mathbb{M}$. Cu ajutorul lui putem construi pe $\pm\vec{U} = \pm\dfrac{\vec{Z}}{\|\vec{Z}\|}$ care sînt cîmpuri normale unitare. Să arătăm acum că orice alt cîmp normal unitar trebuie să fie $+\vec{U}$ sau $-\vec{U}$. Fie $\vec{V}$ un cîmp normal unitar arbitrar definit pe $\mathbb{M}$. Evident avem $\vec{V} = (\vec{V}, \vec{U})\vec{U}$, unde $f = (\vec{V}, \vec{U})$ are în fiecare punct valorile -1 sau $+1$. După teorema 7.6, f are peste tot fie valoarea -1 fie valoarea $+1$, c.c.t.d.

Intuitiv, teorema 7.15 arată că, suprafețele conexe și orientabile au două fețe. O suprafață orientabilă împreună cu o alegere a unei orientări (alegerea unei fețe) se numește suprafață *orientată*. Convențional fața care corespunde alegerii sensului dat de $+\vec{U}$ se notează cu $+$ (*fața pozitivă*), iar fața opusă se notează cu $-$ (*fața negativă*); fig. 114; orientare în concordanță cu regula burghiului drept.

Pentru suprafețele orientabile ce mărginesc un volum finit sensul pozitiv pe normală se ia prin convenție din interior către exterior (fig. 115).

Dacă $\mathbb{M}$ nu este conexă, dar se compune din porțiuni conexe și orientabile (de exemplu hiperboloidul cu două pînze), atunci orientarea componentelor determină o orientare a lui $\mathbb{M}$.

Să ne referim acum la suprafețele neorientabile, adică la suprafețele care au o singură față. Cel mai simplu exemplu este banda lui Möbius. Un model al ei se poate obține dacă răsucind o dată bucățica dreptunghiulară de hîrtie $ABCD$, se lipesc capetele ei în așa fel încît punctul A să coincidă cu C, iar B cu D.

Banda lui Möbius (fig. 116) nu este global orientabilă deoarece orice cîmp normal $\vec{Z}$ definit pe $\mathbb{M}$ trebuie să se anuleze într-un punct al lui $\mathbb{M}$ și să-și schimbe sensul la trecerea prin acest punct. Pentru a vedea acest lucru fie $\alpha : [0, 1] \to \mathbb{M}$ o curbă închisă pe $\mathbb{M}$ cu $\alpha(0) = \alpha(1)$ ca în fig. 116. Dacă presupunem că $\vec{Z}$ nu se anulează în nici un punct, atunci răsucirea în $\mathbb{M}$ dă contradicția $\vec{Z}(\alpha(0)) = -\vec{Z}(\alpha(1))$, deoarece funcția $\vec{Z}(\alpha(t))$ este prin ipoteză diferențiabilă.

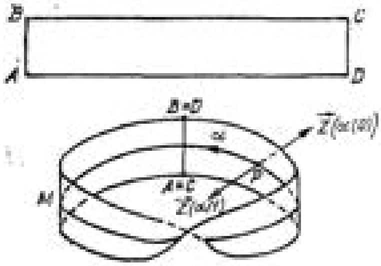


Fig. 116

7.16. Teoremă. Orice punct P al unei suprafețe neorientabile $\mathbb{M}$ este cuprins într-o regiune conexă și orientabilă.

Demonstrație. Fie $\mathbb{D}$ o mulțime deschisă și conexă din plan și $r : \mathbb{D} \to \mathbb{M}$ o hartă în $\mathbb{M}$. După teorema 7.3, $r(\mathbb{D})$ este conexă. Mai mult, imaginea $r(\mathbb{D})$ este orientabilă deoarece $\overrightarrow{Z} = \overrightarrow{r}_u \times \overrightarrow{r}_v$ este un cîmp normal nenul.

Teorema anterioară arată că pe suprafețele neorientabile există numai cîmpuri normale local nenule. În sprijinul acestei afirmații vom da un exemplu folosind un alt model al benzii Möbius. Fie $\alpha(u) = (\cos u, \sin u, 0)$ un cerc de rază unu situat în planul xOy și $[PQ]$ un segment de lungime unu așezat radial cu mijlocul pe cercul α. Presupunem că mijlocul segmentului descrie cercul și simultan segmentul se rotește în jurul mijlocului său (momentan în planul normal al cercului), astfel încît în momentul cînd mijlocul segmentului încheie o rotație de 360°, segmentul încheie o rotație de 180°. Suprafața riglată care ia naștere este o bandă Möbius particulară de ecuație vectorială

$$\overrightarrow{r}(u, v) = \overrightarrow{\alpha}(u) + v\overrightarrow{\beta}(u), \quad v \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right],$$

unde $\overrightarrow{\beta}(u) = \left(\cos \frac{u}{2}\right)\overrightarrow{\alpha} + \left(\sin \frac{u}{2}\right)\overrightarrow{k}$.

Deoarece $\overrightarrow{Z} = \overrightarrow{r}_u \times \overrightarrow{r}_v \neq \overrightarrow{0}$ dă local un cîmp vectorial normal nenul, rezultă că banda Möbius este local orientabilă.

§8. Aplicația Weingarten

În acest paragraf și în paragrafele următoare introducem elementele matematice ce caracterizează forma suprafeței într-o vecinătate a unui punct al său. Toate aceste elemente au la bază o transformare liniară definită pe planul tangent și cu valori în planul tangent numită *aplicația Weingarten*.

Fie $\mathbb{M}$ o suprafață, $\overrightarrow{X}$ un cîmp vectorial euclidian definit pe $\mathbb{M}$ și $\overrightarrow{v}$ un vector tangent la $\mathbb{M}$ în punctul P. Vectorul $D_{\overrightarrow{v}}\overrightarrow{X}$ se numește *derivata covariantă a lui $\overrightarrow{X}$ pe suprafața $\mathbb{M}$*. Această derivată se poate calcula în două moduri:

(1) luăm o curbă α de pe suprafața $\mathbb{M}$ astfel încît $\alpha(0) = P$ și $\overrightarrow{\alpha}'(0) = \overrightarrow{v}$. Explicităm compunerea $\overrightarrow{X} \circ \alpha$ și

$$D_{\overrightarrow{v}}X = \frac{d}{dt}\overrightarrow{X}(\alpha(t))|_{t=0}$$

(2) exprimăm pe $\overrightarrow{X}$ în forma $\overrightarrow{X} = f\overrightarrow{i} + g\overrightarrow{j} + h\overrightarrow{k}$ și atunci

$$D_{\overrightarrow{v}}\overrightarrow{X} = D_{\overrightarrow{v}}f\overrightarrow{i} + D_{\overrightarrow{v}}g\overrightarrow{j} + D_{\overrightarrow{v}}h\overrightarrow{k}.$$

Chiar dacă $\overrightarrow{X}$ este un cîmp tangent la $\mathbb{M}$, derivata covariantă $D_{\overrightarrow{v}}\overrightarrow{X}$ nu este în general tangentă la $\mathbb{M}$ (fig. 117).

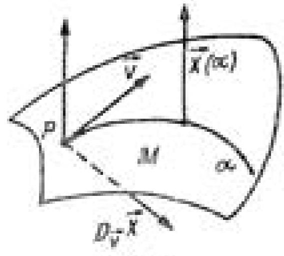


Fig. 117

Presupunem acum că $\mathbb{M}$ este o porțiune orientabilă dintr-o suprafață conexă și că ea a fost orientată prin alegerea cîmpului normal unitar $\overrightarrow{U}$.

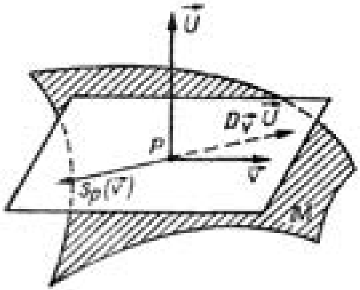


Fig. 118

8.1. *Definiție. Fie P un punct din* $\mathbb{M}$ *și* $T_P\mathbb{M}$ *spațiul tangent la* $\mathbb{M}$ *în P. Funcția definită prin*

$$S_P(\vec{v}) = -D_{\vec{v}}\,\vec{U}, \quad \vec{v} \in T_P\mathbb{M},$$

se numește aplicația lui Weingarten a lui $\mathbb{M}$ *în punctul P.*

Deoarece $T_P\mathbb{M}$ constă din vectorii ortogonali lui $\vec{U}(P)$, derivata $D_{\vec{v}}\vec{U}$ indică variația planelor tangente în sensul lui $\vec{v}$ și aceasta dă o descriere infinitezimală a modului în care se curbează $\mathbb{M}$.

8.2. Teoremă. Aplicația Weingarten este o transformare liniară a spațiului tangent în el însuși (fig. 118).

Demonstrație. Pentru a arăta că S_P are valorile în $T_P\mathbb{M}$ trebuie să demonstrăm că $S_P(\vec{v}) \perp \vec{U}(P)$. Pornim de la relația $1 = (\vec{U}, \vec{U})$ pe care o derivăm în raport cu $\vec{v}$. În baza proprietăților derivatei covariante avem

$$0 = \vec{v}(1) = \vec{v}((\vec{U}, \vec{U})) = 2(D_{\vec{v}}\vec{U}, \vec{U}) = -2(S_P(\vec{v}), \vec{U}(P)),$$

c.c.t.d.

Liniaritatea lui S_P este o consecință a liniarității derivatei covariante

$$S_P(a\vec{v} + b\vec{w}) = -D_{a\vec{v}+b\vec{w}}\vec{U} = -a\,D_{\vec{v}}\vec{U} - bD_{\vec{w}}\vec{U} =$$

$$= aS_P(\vec{v}) + bS_P(\vec{w}).$$

Funcția $P \to S_P$ va fi numită *aplicația Weingarten* a suprafeței $\mathbb{M}$ și va fi notată cu S.

Să presupunem acum că $t \to \alpha(t)$ este o curbă din $\mathbb{M}$, iar $\vec{U}$ este restricția cîmpului normal unitar la α. În acest caz observăm că

$$S(\vec{\alpha}') = -\vec{U}'.$$

8.3. Teoremă. Aplicația Weingarten este simetrică, adică

$$(S_P(\vec{v}), \vec{w}) = (\vec{v}, S_P(\vec{w})), \ \forall \vec{v}, \vec{w} \in T_P\mathbb{M}.$$

O demonstrație simplă a acestei teoreme este dată în § 12.

Teorema 8.3 este echivalentă cu faptul că matricea atașată transformării liniare S_P în raport cu o bază ortonormată a lui $T_P\mathbb{M}$ este simetrică.

Elementele intrinseci ale transformării liniare simetrice S_P și anume determinantul, urma, valorile proprii (care sînt reale deoarece S_P este simetrică) și vectorii proprii au semnificații geometrice pe care le vom pune în evidență în paragrafele următoare. Pentru explicitarea acestor elemente este suficient să alegem o bază $\{\vec{v}, \vec{w}\}$ în planul tangent, să explicităm matricea atașată lui S_P în raport cu această bază,

$$\begin{matrix} S_P(\vec{v}) = a\vec{v} + b\vec{w} \\ S_P(\vec{w}) = c\vec{v} + d\vec{w} \end{matrix}, \quad \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$$

și să determinăm determinantul, urma, valorile proprii și vectorii proprii ai acestei matrice.

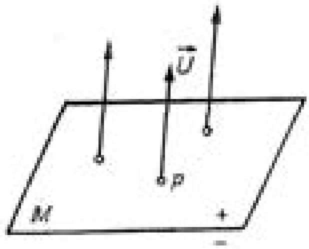


Fig. 119

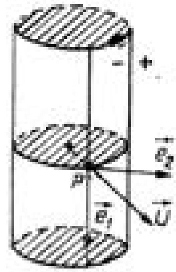


Fig. 120

8.4. Exemple

1) Fie $\mathbb{M} : ax + by + cz + d = 0$ un plan din $\mathbb{R}^3$. Evident aceasta este o suprafață conexă și orientabilă. Orientăm pe $\mathbb{M}$ alegînd

$$\vec{U} = \frac{a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Deoarece cîmpul $\vec{U}$ este paralel avem $S(\vec{v}) = -D_{\vec{v}}\vec{U} = 0$, $\forall \vec{v} \in T_P\mathbb{M} = \mathbb{M}$. Operatorul Weingarten este identic zero ceea ce corespunde faptului intuitiv că planele nu se îndoaie (fig. 119).

2) Fie $\mathbb{M} : x^2 + y^2 = r^2$ un cilindru circular drept din $\mathbb{R}^3$. Aceasta este o suprafață conexă și orientabilă. Orientăm pe $\mathbb{M}$ alegînd

$$\vec{U} = \frac{x\vec{i} + y\vec{j} + 0\vec{k}}{r}.$$

Fie P un punct din $\mathbb{M}$, $\vec{e_1}$ un versor tangent la generatoarea ce trece prin P și $\vec{e_2}$ un versor tangent la cercul de secțiune ce trece prin P.

Deoarece $\vec{e_1} = (0, 0, -1)_P$, găsim $S_P(\vec{e_1}) = 0$, $\forall P$, adică de-a lungul generatoarei, $\vec{U}$ rămîne paralel cu el însuși. Analog $\vec{e_2} = (-y, x, 0)_P$ și găsim

$$S_P(\vec{e_2}) = -\frac{D_{\vec{e_2}}x\vec{i} + D_{\vec{e_2}}y\vec{j}}{r} = -\frac{-y\vec{i} + x\vec{j}}{r} = -\frac{\vec{e_2}}{r}, \quad \forall P \in \mathbb{M}.$$

Aceasta arată că de-a lungul cercului de secțiune cilindrul se curbează uniform (fig. 120).

3) Fie sfera $\mathbb{M} : x^2 + y^2 + z^2 = r^2$. Orientăm pe $\mathbb{M}$ alegînd

$$\vec{U} = \frac{x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}}{r}.$$

Găsim

$$S(\vec{v}) = -D_{\vec{v}}\vec{U} = -\frac{1}{r}(D_{\vec{v}}x\vec{i} + D_{\vec{v}}y\vec{j} + D_{\vec{v}}z\vec{k}) = -\frac{\vec{v}}{r}, \quad \forall \vec{v};\ \forall P \in \mathbb{M}.$$

Astfel în acest caz aplicația Weingarten se reduce la multiplicarea cu $-\frac{1}{r}$. Această uniformitate a lui S reflectă rotunjimea sferelor, adică faptul că, $\forall P$, sfera se curbează în același mod în toate direcțiile (fig. 121).

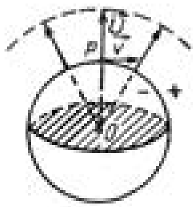


Fig. 121

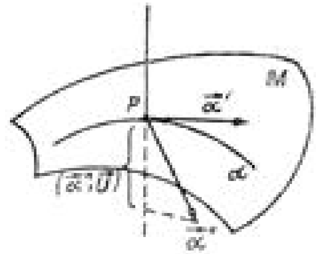


Fig. 122

§9. Curbura normală

Forma unei suprafețe influențează forma oricărei curbe de pe suprafața respectivă. Se pune problema ca folosind anumite curbe de pe o suprafață să caracterizăm forma suprafeței.

Presupunem că lucrăm într-o regiune a unei suprafețe conexe $\mathbb{M}$ orientată prin alegerea cîmpului normal unitar $\vec{U}$.

9.1. Lemă. Dacă α este o curbă din $\mathbb{M}$, iar $\vec{U}$ este restricția cîmpului normal unitar la α, atunci

$$(\mathrm{S}(\vec{\alpha}'), \vec{\alpha}') = (\vec{\alpha}'', \vec{U}).$$

Demonstrație. Deoarece $\vec{\alpha}'$ este tangent la $\mathbb{M}$ avem $(\vec{\alpha}', \vec{U}) = 0$. Prin derivare găsim $(\vec{\alpha}'', \vec{U}) + (\vec{\alpha}', \vec{U}') = 0$. Știm însă că $\mathrm{S}(\vec{\alpha}') = -\vec{U}'$ și astfel formula din lemă este adevărată.

Formula din lema precedentă arată că componenta normală a accelerației lui α, componentă care apare din cauza îndoirii suprafeței, depinde numai de $\vec{\alpha}'$ și $\mathrm{S}(\vec{\alpha}')$. Cu alte cuvinte componenta normală a accelerației în punctul P este aceeași pentru toate curbele de pe suprafață ce trec prin P cu aceeași viteză $\vec{v}$ (fig. 122).

Această observație ne sugerează să caracterizăm încovoierea suprafeței după o direcție prin funcția din definiția următoare.

9.2. *Definiție. Fie $\vec{e}$ un versor tangent la M în P. Numărul $k_n(\vec{e}) = (\mathrm{S}(\vec{e}), \vec{e})$ se numește curbura normală a lui $\mathbb{M}$ în direcția lui $\vec{e}$.*

Deoarece avem:

$$k_n(-\vec{e}) = (\mathrm{S}(-\vec{e}), -\vec{e}) = (-\mathrm{S}(\vec{e}), -\vec{e}) = (\mathrm{S}(\vec{e}), \vec{e}) = k_n(\vec{e}),$$

numărul $k_n(\vec{e})$ este definit pe direcția tangentă la $\mathbb{M}$ în P generată de versorul $\vec{e}$. Astfel, deși evaluăm pe k_n pe versori, avem totuși de-a face cu o funcție reală pe mulțimea direcțiilor tangente la $\mathbb{M}$ în punctul P.

Fie $\vec{e}$ un versor tangent la $\mathbb{M}$ în P. Considerăm o curbă α de viteză unu pe $\mathbb{M}$ astfel încît $\alpha(0) = P$ și $\vec{\alpha}'(0) = \vec{e}$. Utilizînd lema 9.1 și formulele lui Frenet pentru curba α, găsim

$$k_n(\vec{e}) = (\mathrm{S}(\vec{e}), \vec{e}) = (\mathrm{S}(\vec{\alpha}'(0)), \vec{\alpha}'(0)) = (\vec{\alpha}''(0), \vec{U}(P)) =$$

$$= k_\alpha(0)(\vec{N}(0), \vec{U}(\mathrm{P})) = k_\alpha(0) \cos\ \theta,$$

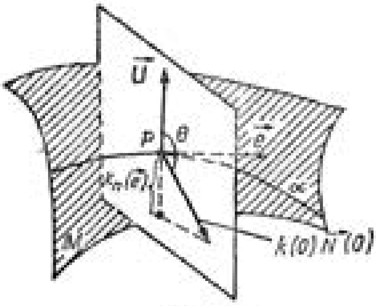


Fig. 123

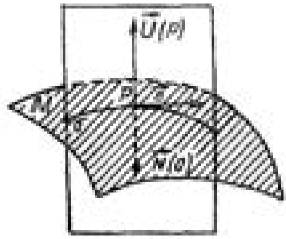


Fig. 124

unde $k_\alpha(0) \geqslant 0$ este curbura lui α în punctul P, iar θ este unghiul dintre normala principală a curbei și normala suprafeței (fig. 123).

Funcția reală definită prin $\theta \to k_n(\vec{e}) = k_\alpha(0)\cos\theta$, $\theta \in [0, \pi]$ arată că încovoierea maximă a lui $\mathbb{M}$ este indicată de curba α pentru care $\theta = 0$ sau $\theta = \pi$ (punctele de extrem ale funcției). Această curbă este intersecția dintre $\mathbb{M}$ și planul determinat de P, $\vec{U}(P)$, $\vec{e}$ și se numește ***secțiunea normală a lui $\mathbb{M}$ în direcția lui $\vec{e}$***.

Pentru secțiunea normală σ, de viteză unu, avem (fig. 124): $\vec{\sigma}'(0) = \vec{e}$, accelerația $\vec{\sigma}''(0) = k_\sigma(0)\,\vec{N}(0)$ aparține planului de secțiune și este perpendiculară pe $\vec{\sigma}'(0) = \vec{e}$, $\vec{N}(0) = \pm\vec{U}(P)$, $k_n(\vec{e}) = \pm k_\sigma(0)$.

Fie P un punct din suprafața $\mathbb{M}$, $\vec{e}$ un versor tangent la $\mathbb{M}$ în P și $k_n(\vec{e})$ curbura normală corespunzătoare. Utilizînd secțiunea normală a lui $\mathbb{M}$ în direcția lui $\vec{e}$ și ținînd cont că normala principală $\vec{N}$ a unei curbe din spațiu arată sensul în care aceasta se curbează, putem da următoarele interpretări geometrice ale semnului lui $k_n(\vec{e})$ relativ la alegerea cîmpului normal unitar $\vec{U}$.

1) Presupunem $k_n(\vec{e}) > 0$. Rezultă că $\vec{U}(P)$ și $\vec{N}(0)$ au același sens. De aceea în vecinătatea lui P și în direcța lui $\vec{e}$ suprafața se încovoaie în sensul indicat de $\vec{U}(P)$ (fig. 125).

2) Presupunem $k_n(\vec{e}) < 0$. Rezultă că $\vec{U}(P)$ și $\vec{N}(0)$ au sensuri opuse. De aceea în vecinătatea lui P și în direcția lui $\vec{e}$ suprafața se curbează contrar sensului lui $\vec{U}(P)$ (fig. 126).

3) Fie $k_n(\vec{e}) = 0$. Rezultă $k_\sigma(0) = 0$ și $\vec{N}(0)$ nu este definit. Nu putem spune precis care este forma suprafeței în vecinătatea punctului considerat

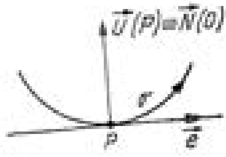


Fig. 125

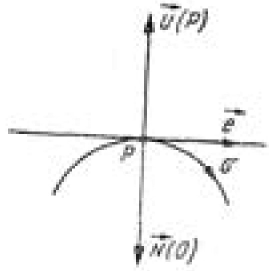


Fig. 126

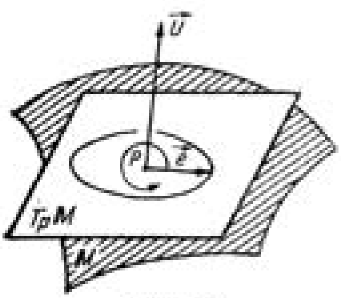


Fig. 127

pe direcţia $\vec{e}$. Putem însă afirma că într-o vecinătate a lui P pe direcţia $\vec{e}$ suprafaţa se curbează foarte puţin.

Presupunem acum că fixăm punctul P şi că extremitatea lui $\vec{e}$ descrie un cerc în planul tangent. Diversele secţiuni normale ce se pot face ne dau informaţii despre forma suprafeţei în vecinătatea lui P în diferite direcţii (fig. 127).

Fie $k_1 = \max\limits_{\|\vec{e}\|=1} k_n(\vec{e})$ şi $k_2 = \min\limits_{\|\vec{e}\|=1} k_n(\vec{e})$. Aceste numere există deoarece mulţimea determinată de relaţia $\|\vec{e}\| = 1$ este compactă (cerc), iar funcţia $\vec{e} \to k_n(\vec{e})$ este continuă.

9.3. *Definiţie. Numerele k_1 şi k_2 se numesc curburile principale ale lui $\mathbb{M}$ în punctul P. Direcţiile pentru care se găsesc aceste valori extreme se numesc direcţii principale ale lui $\mathbb{M}$ în P. Versorii acestor direcţii se numesc vectori principali ai lui $\mathbb{M}$ în punctul P.*

Dacă în punctul P avem $k_1 = k_2$, atunci rezultă $k_n(\vec{e}) = \text{const.}$, adică $\mathbb{M}$ se curbează la fel în toate direcţiile şi toate direcţiile ce trec prin P sînt principale.

9.4. *Definiţie. Dacă $k_n(\vec{e}) = const.$, $\forall\, \vec{e} \in T_P\mathbb{M}$, $\|\vec{e}\|=1$, atunci punctul P se numeşte punct ombilical.*

9.5. Teoremă.

(1) Dacă P este un punct ombilical, atunci operatorul Weingarten în P se reduce la multiplicarea cu $k_1 = k_2$.

(2) Dacă P nu este un punct ombilical ($k_1 \neq k_2$), atunci există două (şi numai două) direcţii principale ortogonale. Dacă $\vec{e}_1$ şi $\vec{e}_2$ sînt vectorii principali, atunci

$$S(\vec{e}_1) = k_1\vec{e}_1, \quad S(\vec{e}_2) = k_2\vec{e}_2.$$

Altfel : Curburile principale ale lui $\mathbb{M}$ în P sînt valorile proprii ale lui S. Vectorii principali ai lui $\mathbb{M}$ în P sînt vectori proprii ai lui S.

Demonstraţie. Fie $\{e_1, e_2\}$ o bază ortonormată a lui $T_P\mathbb{M}$. Avem

$$S(\vec{e}_1) = S_{11}\vec{e}_1 + S_{21}\vec{e}_2$$

$$S(\vec{e}_2) = S_{12}\vec{e}_1 + S_{22}\vec{e}_2,$$

unde $S_{ij} = (S(\vec{e}_i), \vec{e}_j)$, $i, j = 1, 2$ şi $S_{12} = S_{21}$ din simetria lui S. Pentru orice vector unitate $\vec{e}$ tangent la $\mathbb{M}$ în P putem scrie (fig. 128)

$$\vec{e} = \vec{e}(\theta) = \cos\theta\,\vec{e}_1 + \sin\theta\,\vec{e}_2,\ \theta \in [0, 2\pi).$$

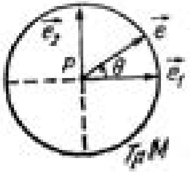


Fig. 128

Cu acestea curbura normală devine

$$f(\theta) = k_n(\vec{e}(\theta)) = (S(\cos\theta\vec{e}_1 + \sin\theta\vec{e}_2), \cos\theta\vec{e}_1 + \sin\theta\vec{e}_2) =$$
$$= S_{11}\cos^2\theta + 2S_{12}\sin\theta\cos\theta + S_{22}\sin^2\theta,\ \theta \in [0, 2\pi).$$

Prin derivare găsim

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\theta} = 2(S_{22} - S_{11})\sin\theta\cos\theta + 2S_{12}(\cos^2\theta - \sin^2\theta).$$

(1) Punctul P este ombilical $\Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\theta} = 0,\ \forall\theta \Leftrightarrow S_{11} = S_{22}$ și $S_{12} = 0$. În acest caz notînd $k_n(\vec{e}) = c$ (constantă) obținem $S(\vec{e}) = \cos\theta S(\vec{e}_1) + \sin\theta S(\vec{e}_2) = S_{11}\vec{e} = k_n(\vec{e}_1)\vec{e} = c\vec{e}$, c.c.tr.d.

(2) Presupunem că P nu este un punct ombilical. Putem proba ușor că $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\theta} = 0$ are două soluții $\theta_0,\ \theta_0 + \frac{\pi}{2}$ în intervalul $[0, 2\pi)$ și că la trecerea lui θ prin aceste puncte $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\theta}$ își schimbă semnul. De aceea pe aceste două direcții ortogonale $k_n(\vec{e})$ își atinge extremele.

Presupunem acum că funcția $k_n(\vec{e})$ își atinge valoarea maximă k_1 chiar pe $\vec{e}_1$. Rezultă $\theta_0 = 0$, $k_1 = S_{11}$ și din $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\theta}(0) = 0$ rezultă $S_{12} = 0$. Din raționamentul precedent deducem că valoarea minimă $k_2 = S_{22}$ este atinsă în direcția lui $\vec{e}_2$. De aceea

$$S(\vec{e}_1) = k_1\vec{e}_1,\ S(\vec{e}_2) = k_2\vec{e}_2,$$

c.c.tr.d.

Ca o consecință avem:

9.6. Formula Euler. Fie k_1, k_2 curburile principale și $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ vectorii principali ai lui $\mathbb{M}$ în P. Dacă $\vec{e} = \cos\theta\,\vec{e}_1 + \sin\theta\vec{e}_2$, atunci

$$k_n(\vec{e}) = k_1\cos^2\theta + k_2\sin^2\theta.$$

Vom utiliza acum curburile principale $k_1(P)$ și $k_2(P)$ pentru a construi o aproximare pătratică a suprafeței $\mathbb{M}$ în vecinătatea punctului P. Pentru aceasta presupunem că:

(1) P este originea lui $\mathbb{R}^3$,

(2) $T_P\mathbb{M} = xOy$,

(3) $\vec{i}_P = (1, 0, 0)_P$ și $\vec{j}_P = (0, 1, 0)_P$ sînt vectori principali.

În vecinătatea lui P suprafața $\mathbb{M}$ poate fi reprezentată în forma $z = f(x, y)$ pe care o orientăm cu ajutorul lui (fig. 129)

$$\vec{U} = \frac{-f_x\vec{i} - f_y\vec{j} + \vec{k}}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}}.$$

Din (1) și (2) rezultă $f(0, 0) = f_x(0, 0) = f_y(0, 0) = 0$. De aceea avem următoarea aproximare Taylor

$$z \sim \frac{1}{2}(x^2 f_{xx}(0, 0) + 2xyf_{xy}(0, 0) + y^2 f_{yy}(0,0)).$$

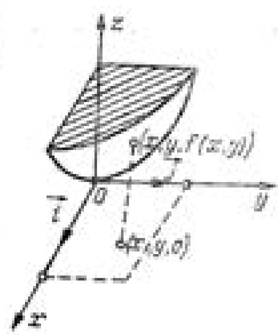


Fig. 129

Prin calcul direct găsim

$$S(\vec{i}) = f_{xx}(0,0)\vec{i} + f_{xy}(0,0)\vec{j},$$

$$S(\vec{j}) = f_{xy}(0,0)\vec{i} + f_{yy}(0,0)\vec{j}.$$

Din (3) şi din teorema 9.5 deducem $f_{xy}(0,0) = 0$, $f_{xx}(0,0) = k_1$ şi $f_{yy}(0,0) = k_2$.

Aceste raţionamente arată că în vecinătatea punctului P suprafaţa $\mathbb{M}$ are aproximativ aceeaşi formă cu suprafaţa

$$z = \frac{1}{2}(k_1 x^2 + k_2 y^2)$$

pe care o vom numi *aproximarea pătratică* a lui $\mathbb{M}$ în vecinătatea lui P.

Definiţiile 9.3, 9.4 şi teoremele 9.5, 9.6 au fost formulate pentru punctul P. Ele sînt valabile în toate punctele din regiunea orientată a lui M unde este definit cîmpul vectorial normal unitar $\vec{U}$. De aceea

$$P \to k_i(P), \ i = 1, 2,$$

vor fi două funcţii reale k_1, k_2 definite pe aceeaşi regiune cu $\vec{U}$. Aceste funcţii se numesc *curburile principale* ale lui $\mathbb{M}$.

9.7. Exemplu. Fie elicoidul drept $\mathbb{M}: x = u \cos v,\ y = u \sin v,\ z = v,\ (u, v) \in \mathbb{R}^2$. Ne propunem să găsim curbura normală şi curburile principale în punctul curent al lui $\mathbb{M}$. Pentru aceasta reprezentăm pe $\mathbb{M}$ în forma $\vec{r} = u \cos v\, \vec{i} + u \sin v\, \vec{j} + v\, \vec{k}$. Vitezele parţiale sînt

$$\vec{r}_u = \cos v\, \vec{i} + \sin v\, \vec{j},\quad \vec{r}_v = -u \sin v\, \vec{i} + u \cos v\, \vec{j} + \vec{k}.$$

Deoarece $\vec{r}_u \perp \vec{r}_v$, alegem drept bază ortonormată a planului tangent în punctul curent al suprafeţei pe

$$\vec{e}_1 = \frac{1}{\|\vec{r}_u\|}\vec{r}_u = \cos v\, \vec{i} + \sin v\, \vec{j},$$

$$\vec{e}_2 = \frac{1}{\|\vec{r}_v\|}\vec{r}_v = \frac{-u \sin v\, \vec{i} + u \cos v\, \vec{j} + \vec{k}}{\sqrt{1+u^2}}.$$

Orientăm pe $\mathbb{M}$ prin alegerea lui

$$\vec{U} = \frac{\vec{r}_u \times \vec{r}_v}{\|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\|} = \frac{\sin v}{\sqrt{1+u^2}}\vec{i} - \frac{\cos v}{\sqrt{1+u^2}}\vec{j} + \frac{u}{\sqrt{1+u^2}}\vec{k}.$$

Avem

$$S(\vec{e}_1) = -\frac{d}{du}\vec{U} = \frac{u \sin v}{(1+u^2)^{3/2}}\vec{i} - \frac{u \cos v}{(1+u^2)^{3/2}}\vec{j} - \frac{1}{(1+u^2)^{3/2}}\vec{k}.$$

$$S(\vec{e}_2) = -\frac{1}{\|\vec{r}_v\|}\frac{d}{dv}\vec{U} = -\frac{1}{\sqrt{1+u^2}}\left(\frac{\cos v}{\sqrt{1+u^2}}\vec{i} + \frac{\sin v}{\sqrt{1+u^2}}\vec{j}\right).$$

De aceea găsim

$$S_{11} = (S(\vec{e}_1), \vec{e}_1) = 0, \; S_{22} = (S(\vec{e}_2), \vec{e}_2) = 0,$$

$$S_{12} = (S(\vec{e}_1), \vec{e}_2) = (\vec{e}_1, S(\vec{e}_2)) = -\frac{1}{1+u^2}.$$

Fie $\vec{e} = \cos\theta\vec{e}_1 + \sin\theta\vec{e}_2$. Obţinem

$$f(\theta) = k_n(\vec{e}(\theta)) = -\frac{\sin 2\theta}{1+u^2}$$

şi deci

$$-\frac{1}{1+u^2} \leqslant k_n(\vec{e}(\theta)) \leqslant \frac{1}{1+u^2},$$

adică

$$k_1 = k_n\left(\frac{\sqrt{2}}{2}(\vec{e}_1 - \vec{e}_2)\right) = \frac{1}{1+u^2},$$

$$k_2 = k_n\left(\frac{\sqrt{2}}{2}(\vec{e}_1 + \vec{e}_2)\right) = -\frac{1}{1+u^2}.$$

§10. Curbura Gauss

Fie $\mathbb{M}$ o suprafaţă şi S aplicaţia Weingarten. În acest paragraf vom da semnificaţiile geometrice ale determinantului şi urmei operatorului S.

10.1. *Definiţie. Funcţia* $K = \det S : \mathbb{M} \to \mathbb{R}$ *se numeşte curbura Gauss a suprafeţei* $\mathbb{M}$. *Funcţia* $H = \frac{1}{2}\cdot$ *urma* $S : \mathbb{M} \to \mathbb{R}$ *se numeşte curbura medie a suprafeţei* $\mathbb{M}$.

Curbura Gauss şi curbura medie se exprimă cu ajutorul curburilor principale k_1 şi k_2.

10.2. Lemă. Avem

$$K = k_1 . k_2, \; H = \frac{k_1 + k_2}{2}.$$

Demonstraţie. Fie P un punct din $\mathbb{M}$. Toate matricele ce se pot ataşa aplicaţiei S_P au acelaşi determinant şi aceeaşi urmă. De aceea pentru găsirea determinantului şi urmei lui S_P este suficient să alegem în planul tangent $\mathbf{T}_P\mathbb{M}$ o bază convenabilă în raport cu care aplicaţia S_P să fie reprezentată de o matrice simplă. Alegînd drept bază vectorii principali $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ din teorema 9.5 rezultă că lui S_P îi corespunde matricea

$$\begin{bmatrix} k_1(P) & 0 \\ 0 & k_2(P) \end{bmatrix}$$

şi astfel lema este evidentă.

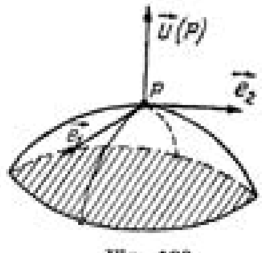


Fig. 130

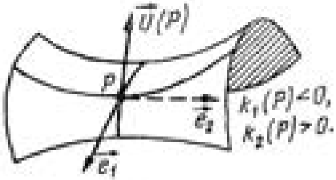


Fig. 131

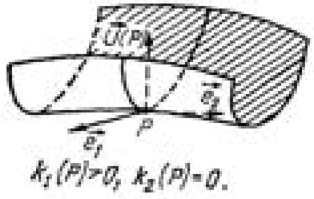


Fig. 132

Observaţie. Dacă $\vec{U}$ se schimbă în $-\vec{U}$, atunci k_1 şi k_2 se schimbă respectiv în $-k_1$, $-k_2$, curbura medie H se schimbă în $-H$, iar curbura Gauss K rămîne neschimbată.

În continuare vom da interpretarea geometrică a semnului curburii Gauss.

10.3. Interpretarea semnului lui K(P)

1) Presupunem că în punctul $P \in \mathbb{M}$ avem $K(P) > 0$. Din $K = k_1 k_2$ rezultă că $k_1(P)$ şi $k_2(P)$ au acelaşi semn. Din formula Euler rezultă $k_n(\vec{e}) > 0$ sau $k_n(\vec{e}) < 0$. Aceasta înseamnă că în vecinătatea lui P suprafaţa se încovoaie fie în sensul lui $\vec{U}$, fie în sens contrar. Aproximarea pătratică a lui $\mathbb{M}$ în vecinătatea lui P este paraboloidul eliptic $2z = k_1(P)x^2 + k_2(P)y^2$ (fig. 130).

2) Presupunem $K(P) < 0$. Din $K = k_1 k_2$ rezultă că $k_1(P)$ şi $k_2(P)$ au semne opuse. Aproximarea pătratică a lui $\mathbb{M}$, în vecinătatea lui P este paraboloidul hiperbolic $2z = k_1(P)x^2 + k_2(P)y^2$. De aceea în vecinătatea lui P suprafaţa arată ca o şa (fig. 131).

3) Presupunem $K(P) = 0$. Deoarece $K = k_1 k_2$, considerăm următoarele două cazuri :

(a) numai una dintre curburile principale este zero, de exemplu $k_1(P) \neq 0$, $k_2(P) = 0$. În acest caz aproximarea pătratică este cilindrul parabolic

$$2z = k_1(P)x^2$$

şi deci, în vecinătatea lui P, suprafaţa $\mathbb{M}$ arată ca o albie (fig. 132),

(b) ambele curburi principale sînt zero

$$k_1(P) = k_2(P) = 0.$$

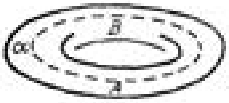


Fig. 133

Aproximarea pătratică se reduce la planul $z = 0$ şi nu putem obţine nici o informaţie cu privire la forma lui $\mathbb{M}$ în vecinătatea lui P. Un punct $P \in \mathbb{M}$ pentru care $k_1(P) = 0$, $k_2(P) = 0$ se numeşte *punct planar*.

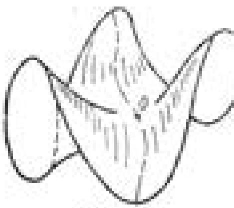


Fig. 134

10.4. Exemple

(1) *Torul* de rotaţie este un exemplu de suprafaţă pe care avem de-a face cu cazurile 1), 2) şi 3) (a).

În punctele regiunii A (fig. 133) avem $K > 0$ deoarece în aceste puncte torul se îndepărtează faţă de planul tangent. În punctele regiunii B avem $K < 0$ deoarece în vecinătatea oricărui punct din această regiune torul seamănă cu o şa. Pe cele două cercuri care separă regiunile A și B avem $K = 0$ deoarece de-a lungul acestor cercuri torul seamănă (local) cu o albie.

(2) Punctul $O(0, 0, 0)$ de pe suprafața (fig. 134)

$$z = x^3 - 3xy^2 = \operatorname{Re}(x + iy)^3$$

este un punct planar.

În continuare vom da formule pentru calculul funcțiilor K și H.

10.5. Lemă. Dacă $\vec{v}_1$ și $\vec{v}_2$ sint doi vectori liniar independenți tangenți la $\mathbb{M}$ in P, atunci

$$S(\vec{v}_1) \times S(\vec{v}_2) = K(P)\vec{v}_1 \times \vec{v}_2,$$

$$S(\vec{v}_1) \times \vec{v}_2 + \vec{v}_1 \times S(\vec{v}_2) = 2H(P)\vec{v}_1 \times \vec{v}_2.$$

Demonstrație. Deoarece $\vec{v}_1$ și $\vec{v}_2$ formează o bază a planului tangent $T_P\mathbb{M}$ putem scrie

$$S(\vec{v}_1) = a\vec{v}_1 + b\vec{v}_2$$

$$S(\vec{v}_2) = c\vec{v}_1 + d\vec{v}_2$$

Astfel

$$\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$$

este matricea lui S in raport cu baza $\vec{v}_1, \vec{v}_2$. Găsim

$$K(P) = \det S = ad - bc,\ H(P) = \frac{1}{2} \text{ urma } S = \frac{1}{2}(a + d).$$

Folosind proprietățile produsului vectorial deducem

$$S(\vec{v}_1) \times S(\vec{v}_2) = (a\vec{v}_1 + b\vec{v}_2)\times(c\vec{v}_1 + d\vec{v}_2) = (ad - bc)\vec{v}_1\times\vec{v}_2 = K(P)\vec{v}_1\times\vec{v}_2.$$

Analog se găsește relația in care intră $H(P)$.

Fie acum $\vec{V}_1$ și $\vec{V}_2$ două cimpuri vectoriale tangente independente definite pe o regiune orientată a lui $\mathbb{M}$. În baza lemei precedente avem

$$S(\vec{V}_1) \times S(\vec{V}_2) = K\vec{V}_1 \times \vec{V}_2,$$

$$S(\vec{V}_1) \times \vec{V}_2 + \vec{V}_1 \times S(\vec{V}_2) = 2H\vec{V}_1 \times \vec{V}_2.$$

Deoarece cimpurile $\vec{V}_1$ şi $\vec{V}_2$ sint liniar independente, adică $\|\vec{V}_1 \times \vec{V}_2\|^2 > 0$, inmulţind scalar ambii membri ai acestor ecuaţii cu cimpul normal $\vec{V}_1 \times \vec{V}_2$ şi utilizind identitatea Lagrange găsim

$$K = \frac{\begin{vmatrix} (S(\vec{V}_1), \vec{V}_1) & (S(\vec{V}_1), \vec{V}_2) \\ (S(\vec{V}_2), \vec{V}_1) & (S(\vec{V}_2), \vec{V}_2) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} (\vec{V}_1, \vec{V}_1) & (\vec{V}_1, \vec{V}_2) \\ (\vec{V}_2, \vec{V}_1) & (\vec{V}_2, \vec{V}_2) \end{vmatrix}},$$

$$H = \frac{\begin{vmatrix} (S(\vec{V}_1), \vec{V}_1) & (S(\vec{V}_1), \vec{V}_2) \\ (\vec{V}_2, \vec{V}_1) & (\vec{V}_2, \vec{V}_2) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} (\vec{V}_1, \vec{V}_1) & (\vec{V}_1, \vec{V}_2) \\ (S(\vec{V}_2), \vec{V}_1) & (S(\vec{V}_1), \vec{V}_2) \end{vmatrix}}{2\begin{vmatrix} (\vec{V}_1, \vec{V}_1) & (\vec{V}_1, \vec{V}_2) \\ (\vec{V}_2, \vec{V}_1) & (\vec{V}_2, \vec{V}_2) \end{vmatrix}}.$$

Evident funcţiile K şi H astfel obţinute sint diferenţiabile.

Dacă funcţiile K şi H sint cunoscute, atunci curburile principale sint date de formulele din consecinţa următoare.

10.6. Consecinţă. Pe o regiune orientată U din $\mathbb{M}$ curburile principale sint date de

$$k_1, k_2 = H \pm \sqrt{H^2 - K}.$$

Demonstraţie. Relaţiile rezultă din faptul că

$$K = k_1 k_2, \quad H = \frac{k_1 + k_2}{2}$$

şi deci

$$H^2 - K = \frac{(k_1 - k_2)^2}{4}.$$

Formulele precedente arată că funcţiile k_1 şi k_2 sint continue pe U. Aceste funcţii nu sint diferenţiabile in punctele in care $H^2 - K = 0$, adică in punctele ombilicale. Dacă U nu posedă puncte ombilicale, atunci funcţiile k_1 şi k_2 sint diferenţiabile.

Să prezentăm acum unele tipuri de suprafeţe.

10.7. *Definiţie. O suprafaţă pentru care K = const. se numeşte suprafaţă cu curbura constantă. În particular suprafeţele pentru care $K = 0$ se mai numesc şi local euclidiene.*

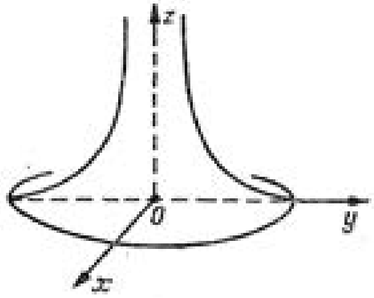


Fig. 135

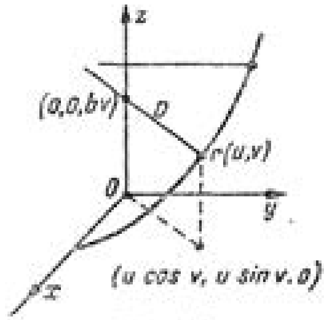


Fig. 136

10.8. Exemple.

(1) Suprafaţa de rotaţie

$$z = -\sqrt{1 - x^2 - y^2} + \operatorname{sech}^{-1}\sqrt{x^2 + y^2}, \quad z > 0$$

numită *pseudo-sferă*, fig. 135) are curbura $K = -1$.

(2) Planul (fig. 119), cilindrul circular drept (fig. 120), conul fără vîrf, banda Möbius (fig. 116) etc. sînt exemple de suprafeţe local euclidiene.

Suprafeţele *desfăşurabile* (adică suprafeţele riglate pentru care cîmpul normal este paralel în $\mathbb{R}^3$ de-a lungul fiecărei generatoare) sînt local euclidiene.

Reciproc, suprafeţele conexe, închise (ca submulţime în $\mathbb{R}^3$) şi local euclidiene sînt desfăşurabile. De asemenea ele sînt local izometrice cu planul, adică există o aplicaţie definită pe suprafaţa respectivă şi cu valori în plan care păstrează produsul scalar al vectorilor tangenţi (izometrie locală).

(3) Sfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ are curbura $K = 1$.

10.9. *Definiţie. O suprafaţă pentru care $H = 0$ se numeşte suprafaţă minimală.*

Facem observaţia că suprafeţele minimale au curbura Gauss $K \leqslant 0$, deoarece din

$$H = \frac{k_1 + k_2}{2} = 0 \text{ rezultă } k_1 = -k_2.$$

Exemplu. Elicoidul cu plan director (fig. 136) este o suprafaţă minimală.

Denumirea de suprafaţă minimală provine din aceea că, dintre toate suprafeţele ce trec printr-o curbă închisă, suprafaţa de arie minimă are curbura medie nulă.

§11. Formele fundamentale ale unei suprafeţe

Fie V un spaţiu vectorial euclidian real şi $\mathcal{T} : V \to V$ o transformare liniară simetrică. Funcţiei $\mathcal{T}$ i se poate ataşa forma biliniară simetrică

$$\mathcal{A} : V \times V \to \mathbb{R}, \; \mathcal{A}(v, w) = (\mathcal{T}(v), w)$$

și deci implicit forma pătratică

$$Q : V \to \mathbb{R},\ Q(v) = \mathscr{A}(v, v) = (\mathscr{T}(v), v).$$

Forma biliniară simetrică $\mathscr{A}$ (implicit forma pătratică Q) atașată unei transformări liniare simetrice $\mathscr{T}$ conține exact aceeași informație ca și $\mathscr{T}$ deoarece $\mathscr{T}$ poate fi recuperată din formula

$$(\mathscr{T}(v), w) = \frac{1}{2}\,[Q(v + w) - Q(v) - Q(w)],$$

care este adevărată pentru orice vectori v, w din V.

Fie $\mathbb{M}$ o suprafață, P un punct din $\mathbb{M}$ și $T_P\mathbb{M}$ spațiul tangent la $\mathbb{M}$ în punctul P. Forma biliniară simetrică I_P asociată *identității* pe $T_P\mathbb{M}$, adică funcția reală definită prin

$$I_P(\vec{v}, \vec{w}) = (\vec{v}, \vec{w}), \qquad \vec{v}, \vec{w} \in T_P\mathbb{M},$$

se numește *prima formă fundamentală a suprafeței* $\mathbb{M}$ *în punctul* P. Se observă că I_P nu este altceva decît un produs scalar fiind restricția produsului scalar din $\mathbb{R}^3$ la subspațiul bidimensional $T_P\mathbb{M}$. Funcția $P \to I_P$ se numește *prima formă fundamentală a suprafeței* $\mathbb{M}$ și se notează cu I. Geometria pe $\mathbb{M}$ derivată din prima formă fundamentală se numește *geometrie intrinsecă*. Conținutul acesteia rezultă din faptul că funcția I, și deci cunoașterea produsului scalar pe fiecare $T_P\mathbb{M}$, permite calcularea lungimii unui arc de curbă de pe suprafața $\mathbb{M}$, a unghiului dintre două tangente la suprafața $\mathbb{M}$, a ariei unei porțiuni din suprafața $\mathbb{M}$ etc. De exemplu, dacă $\alpha : [a, b] \to \mathbb{M}$ este o curbă regulată, atunci lungimea lui α este dată prin

$$l(\alpha) = \int_a^b \left\| \frac{d\vec{\alpha}}{dt} \right\| dt.$$

Presupunem că $\mathbb{M}$ este o suprafață conexă și notăm cu Ω mulțimea curbelor regulate $\alpha : [a, b] \to \mathbb{M}$ care unesc punctul $P = \alpha(a)$ cu punctul $Q = \alpha(b)$. *Distanța* de la P la Q se definește prin

$$d(P, Q) = \inf_{\alpha \in \Omega} l(\alpha).$$

Această expresie definește o *distanță (metrică)* d pe $\mathbb{M}$ și deci o suprafață conexă este un exemplu de spațiu metric. Mai mult, topologia lui $\mathbb{M}$ determinată de metrica d coincide cu topologia originală a lui $\mathbb{M}$ (ca subvarietate).

Fie $\mathbb{M}$ o suprafață orientată, P un punct din $\mathbb{M}$ și $T_P\mathbb{M}$ spațiul tangent la $\mathbb{M}$ în punctul P. Forma biliniară simetrică II_P asociată aplicației Weingarten S_P, adică funcția reală definită prin

$$II_P(\vec{v}, \vec{w}) = (S_P(\vec{v}), \vec{w}), \quad \vec{v}, \vec{w} \in T_P\mathbb{M},$$

se numeşte a *doua formă fundamentală a suprafeţei* $\mathbb{M}$ *în punctul* P. Forma pătratică corespunzătoare se poate exprima prin

$$\mathrm{II}_P(\vec{v}, \vec{v}) = (S_P(\vec{v}), \vec{v}) = (\vec{\alpha}''(t_0), \ \vec{U}(P)),$$

unde $\alpha : I \to \mathbb{M}$ este o curbă din $\mathbb{M}$ pentru care $\alpha(t_0) = P$, $\vec{\alpha}'(t_0) = \vec{v}$, iar $\vec{U}$ este cîmpul vectorial unitar normal la $\mathbb{M}$. În particular, pentru $\|\vec{v}\| = 1$, numărul $\mathrm{II}_P(\vec{v}, \vec{v})$ este egal cu curbura normală a lui $\mathbb{M}$ în punctul P, în direcţia $\vec{v}$. Funcţia $P \to \mathrm{II}_P$ se numeşte *a doua formă fundamentală a suprafeţei* $\mathbb{M}$ *şi se notează cu* II. Cunoaşterea acesteia este echivalentă cu cunoaşterea aplicaţiei Weingarten. De aceea geometria pe $\mathbb{M}$ ce emană din a doua formă fundamentală conţine elemente matematice ce permit descrierea formei suprafeţei local sau global: curbură normală, curburi principale, curbura Gauss, curbura medie etc. Deşi toate acestea sînt introduse pornind de la cîmpul vectorial unitar normal pe suprafaţa $\mathbb{M}$, adică de la un element care aparţine calculului din $\mathbb{R}^3$, totuşi Gauss a demonstrat că curbura care azi îi poartă numele este un element intrinsec (se poate exprima cu coeficienţii primei forme fundamentale). Proprietăţile suprafeţei $\mathbb{M}$ care nu depind numai de prima formă fundamentală se numesc *proprietăţi rigide*.

Primele două forme fundamentale împreună cu anumite relaţii între coeficienţii lor fixează suprafaţa $\mathbb{M}$ pînă la o izometrie în $\mathbb{R}^3$.

Forma biliniară simetrică III_P asociată pătratului aplicaţiei lui Weingarten S_P, adică funcţia reală definită prin

$$\mathrm{III}_P(\vec{v}, \vec{w}) = (S_P^2(\vec{v}), \vec{w}) = (S_P(\vec{v}), S_P(\vec{w})), \quad \vec{v}, \vec{w} \in T_P\mathbb{M}$$

se numeşte a *treia formă fundamentală a suprafeţei* $\mathbb{M}$ *în punctul* P. Aceasta determină funcţia $P \to \mathrm{III}_P$, notată cu III şi numită a treia formă fundamentală a suprafeţei $\mathbb{M}$.

Formele fundamentale I, II, III, curbura medie H şi curbura Gauss K sînt legate prin relaţia

$$\mathrm{III} - 2H \cdot \mathrm{II} + K \cdot I = 0.$$

§12. Formule de calcul

Fie $\mathbb{M}$ o suprafaţă. Ne propunem să exprimăm curbura Gauss K, curbura medie H şi curburile principale k_1, k_2 cu ajutorul unei hărţi în $\mathbb{M}$.

Fie $r : \mathbb{D} \to \mathbb{M}$ o hartă cu ajutorul căreia reprezentăm o porţiune $r(\mathbb{D})$ din $\mathbb{M}$. Acestei hărţi îi ataşăm trei funcţii reale

$$E = (\vec{r}_u, \vec{r}_u), \ F = (\vec{r}_u, \vec{r}_v), \quad G = (\vec{r}_v, \vec{r}_v)$$

definite pe $\mathbb{D}$. Funcţiile E şi G sînt strict pozitive deoarece reprezintă pătratele lungimilor vitezelor parţiale. Unghiul θ dintre $\vec{r}_u$ şi $\vec{r}_v$ depinde de F (fig. 137) deoarece

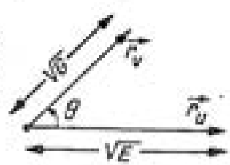


Fig. 137

$$F = \|\vec{r}_u\| \|\vec{r}_v\| \cos \theta = \sqrt{EG} \cos \theta.$$

Funcţiile E, F şi G măsoară modul în care r îndoaie regiunea plană $\mathbb{D}$ pentru a o aplica pe regiunea curbă $r(\mathbb{D})$ din $\mathbb{M}$. Aceste funcţii determină complet prima formă fundamentală a suprafeţei. Într-adevăr, dacă $\vec{a}$ şi $\vec{b}$ sînt doi vectori tangenţi la $\mathbb{M}$ în punctul $r(u, v)$, atunci avem

$$(*) \qquad \vec{a} = a_1\vec{r}_u + a_2\vec{r}_v, \quad \vec{b} = b_1\vec{r}_u + b_2\vec{r}_v$$

şi deci

$$\mathrm{I}(\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{a}, \vec{b}) = E\, a_1b_1 + F(a_1b_2 + a_2b_1) + Ga_2b_2.$$

În particular pătratul elementului de arc (al unei curbe de pe $r(\mathbb{D})$) este

$$\mathrm{d}s^2 = (\mathrm{d}\vec{r}, \mathrm{d}\vec{r}) = E\,\mathrm{d}u^2 + 2F\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v + G\,\mathrm{d}v^2.$$

Cu ajutorul vitezelor parţiale $\vec{r}_u$ şi $\vec{r}_v$ se construieşte funcţia vectorială $\vec{Z} = \vec{r}_u \times \vec{r}_v$ care ataşează fiecărui punct $(u, v) \in \mathbb{D}$ un vector perpendicular pe $\vec{r}_u, \vec{r}_v$ în punctul $r(u, v) \in r(\mathbb{D})$. Avem

$$\|\vec{Z}\| = \|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\| = \sqrt{EG - F^2} > 0 \text{ (identitatea Lagrange).}$$

Din punct de vedere local, funcţia $\vec{Z}$ poate fi privită ca un cîmp vectorial normal pe $r(\mathbb{D}) \subset \mathbb{M}$ şi cu ajutorul ei construim cîmpul normal unitar

$$\vec{U} = \frac{\vec{r}_u \times \vec{r}_v}{\|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\|}.$$

Conform observaţiilor anterioare, calculul derivatelor covariante ale cîmpurilor vectoriale definite pe $\mathbb{M}$ în punctele curbelor parametrice ale hărţii r se reduce la calculul derivatelor parţiale în raport cu u şi v. Dacă

$$\vec{r}(u, v) = (x(u, v), \quad y(u, v), \quad z(u, v)),$$

atunci

$$\vec{r}_u = (x_u, y_u, z_u), \quad \vec{r}_v = (x_v, y_v, z_v)$$

şi

$$\vec{r}_{u^2} = (x_{u^2}, y_{u^2}, z_{u^2}) = \mathrm{D}_{\vec{r}_u}\vec{r}_u,$$

$$\vec{r}_{uv} = (x_{uv}, y_{uv}, z_{uv}) = \mathrm{D}_{\vec{r}_u}\vec{r}_v = \mathrm{D}_{\vec{r}_v}\vec{r}_u,$$

$$\vec{r}_{v^2} = (x_{v^2}, y_{v^2}, z_{v^2}) = \mathrm{D}_{\vec{r}_v}\vec{r}_v,$$

sînt vectori legaţi în $r(u, v)$.

Fie S aplicaţia Weingarten ataşată lui $\vec{U}$. Cu ajutorul ei definim pe $\mathbb{D}$ alte trei funcţii reale

$$l = (S(\vec{r}_u), \vec{r}_u),$$
$$m = (S(\vec{r}_u), \vec{r}_v) = (\vec{r}_u, S(\vec{r}_v)),$$
$$n = (S(\vec{r}_v), \vec{r}_v).$$

Deoarece $\vec{r}_u, \vec{r}_v$ constituie o bază a lui $T_P\mathbb{M}$, $\forall P \in r(\mathbb{D}) \subset \mathbb{M}$, aceste funcţii determină unic a doua formă fundamentală. Într-adevăr, dacă $\vec{a}$ şi $\vec{b}$ sînt doi vectori tangenţi la $\mathbb{M}$ în punctul $r(u, v)$, atunci avem egalităţile (*) şi deci

$$\mathrm{II}(\vec{a}, \vec{b}) = (S(\vec{a}), \vec{b}) = la_1b_1 + m(a_1b_2 + a_2b_1) + na_2b_2.$$

În particular

$$(S(\mathrm{d}\vec{r}), \mathrm{d}\vec{r}) = l\,\mathrm{d}u^2 + 2m\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v + n\,\mathrm{d}v^2.$$

Coordonatele lui $S(\vec{r}_u)$ şi $S(\vec{r}_v)$ în raport cu $\vec{r}_u, \vec{r}_v$ nu sînt simple din cauza faptului că baza $\vec{r}_u$ şi $\vec{r}_v$ nu este în general ortonormată. Avem însă avantajul că obţinem expresii simple pentru curbura Gauss şi curbura medie.

12.1. Teoremă. Dacă r este o hartă în $\mathbb{M}$, atunci

$$K(r) = \frac{ln - m^2}{EG - F^2}, \quad H(r) = \frac{Gl - 2Fm + En}{2(EG - F^2)}.$$

Demonstraţie. Expresiile lui $K(P)$ şi $H(P)$ în funcţie de vectorii $\vec{V}_1(P)$ şi $\vec{V}_2(P)$ tangenţi la $\mathbb{M}$ în P sînt date în § **10**, lema **10.5**. Dacă vectorii $\vec{V}_1(P)$ şi $\vec{V}_2(P)$ sînt înlocuiţi cu vectorii $\vec{r}_u(u, v)$, $\vec{r}_v(u, v)$ tangenţi la $\mathbb{M}$ în $\vec{r}(u, v)$, atunci găsim pe $K(r(u, v))$ şi $H(r(u, v))$.

Dacă harta r reiese din context, atunci funcţiile compuse $K(r)$ şi $H(r)$ vor fi scrise pe scurt K şi H.

Determinarea funcţiilor l, m şi n pornind de la definiţie este complicată. De aceea, urmînd ideea din lema 9.1, vom stabili nişte formule mai avantajoase din punctul de vedere al calculelor. Deoarece

$$(\vec{U}, \vec{r}_u) = 0$$

derivarea parţială în raport cu v (derivarea obişnuită de-a lungul curbei de parametru v) ne dă

$$0 = \frac{\partial}{\partial v}(\vec{U}, \vec{r}_u) = (\vec{U}_v, \vec{r}_u) + (\vec{U}, \vec{r}_{uv}).$$

Pe de altă parte ştim că

$$\vec{U}_v = -S(\vec{r}_v)$$

şi astfel găsim

$$m = (S(\vec{r}_v), \vec{r}_u) = (\vec{U}, \vec{r}_{uv}) = (\vec{U}, \vec{r}_{vu}) = (\vec{r}_v, S(\vec{r}_u)).$$

Astfel am pus în evidenţă o nouă formulă pentru calculul lui m (fig. 138) şi am demonstrat că operatorul S este simetric.

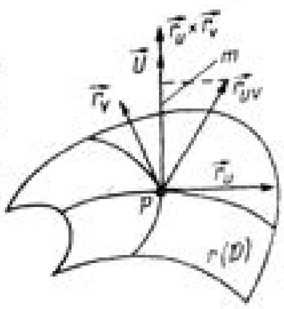


Fig. 138

12.2. Teoremă. Dacă r este o hartă în $\mathbb{M}$ atunci

$$l = (S(\vec{r}_u), \vec{r}_u) = (\vec{U}, \vec{r}_{u^2}),$$

$$m = (S(\vec{r}_u), \vec{r}_v) = (\vec{r}_u, S(\vec{r}_v)) = (\vec{U}, \vec{r}_{uv}),$$

$$n = (S(\vec{r}_v), \vec{r}_v) = (\vec{U}, \vec{r}_{v^2}).$$

Demonstrație. Pentru l se derivează $0=(\vec{U}, \vec{r}_u)$ în raport cu u, iar pentru n se derivează $0=(\vec{U}, \vec{r}_v)$ în raport cu v.

§13. Curbe speciale pe o suprafață

Curbe principale

13.1. *Definiție. O curbă regulată α de pe suprafața $\mathbb{M}$ se numește curbă principală sau linie de curbură dacă viteza sa $\vec{\alpha}'$ determină în fiecare punct al curbei o direcție principală.*

Astfel curbele principale sînt traiectorii în direcțiile în care curbura normală a lui $\mathbb{M}$ devine maximă sau minimă. Abstracție făcînd de reparametrizări, prin fiecare punct al lui $\mathbb{M}$, care nu este punct ombilical, trec două curbe principale (necesar ortogonale).

13.2. Teoremă. Fie α o curbă regulată din $\mathbb{M}$ și $\vec{U}$ restricția cîmpului normal unitar la α.

(1) Curba α este principală dacă și numai dacă $\vec{U}'$ și $\vec{\alpha}'$ sînt coliniari în orice punct.

(2) Dacă α este o curbă principală, atunci

$$k_n\left(\frac{\vec{\alpha}'}{\|\vec{\alpha}'\|}\right)=\frac{(\vec{\alpha}'', \vec{U})}{(\vec{\alpha}', \vec{\alpha}')}.$$

Demonstrație. (1) Curba α este principală dacă și numai dacă $S(\vec{\alpha}')$ și $\vec{\alpha}'$ sînt coliniari. Pe de altă parte $S(\vec{\alpha}')=-\vec{U}'$ și astfel afirmația devine evidentă.

(2) Deoarece $\dfrac{\vec{\alpha}'}{\|\vec{\alpha}'\|}$ este un vector principal avem

$$k_1 \text{ sau } k_2=k_n\left(\frac{\vec{\alpha}'}{\|\vec{\alpha}'\|}\right)=\left(S\left(\frac{\vec{\alpha}'}{\|\vec{\alpha}'\|}\right), \frac{\vec{\alpha}'}{\|\vec{\alpha}'\|}\right)=\frac{(S(\vec{\alpha}'), \vec{\alpha}')}{\|\vec{\alpha}'\|^2}=\frac{(\vec{\alpha}'', \vec{U})}{(\vec{\alpha}', \vec{\alpha}')}$$

(vezi și lema 9.1).

Curbe asimptotice

Direcțiile tangente la suprafața $\mathbb{M}$ pe care curbura normală este zero se numesc *direcții asimptotice*. Cu alte cuvinte un vector $\vec{v}$ tangent la $\mathbb{M}$ este asimptotic $\Leftrightarrow k(\vec{v})=0 \Leftrightarrow (S(\vec{v}), \vec{v})=0$.

13.3. Teoremă. Fie P un punct din suprafața $\mathbb{M}$.

(1) Dacă $K(P)>0$, atunci în P nu există direcții asimptotice.

(2) Dacă $K(P)<0$, atunci există exact două direcții asimptotice în P. Bisectoarele acestor direcții sînt direcțiile principale. Unghiul dintre o direcție principală și o direcție asimptotică este dat de (fig. 139)

$$\operatorname{tg}^2\theta=-\frac{k_1(P)}{k_2(P)}.$$

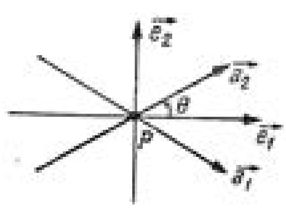


Fig. 139

(3) Fie $K(P) = 0$. Dacă P este planar, atunci orice direcţie ce trece prin P este asimptotică. Dacă P nu este planar, atunci există o singură direcţie asimptotică care este şi direcţie principală.

Demonstraţie. Totul rezultă din formula Euler

$$k_n(\vec{u}) = k_1(P)\cos^2\theta + k_2(P)\sin^2\theta.$$

(1) Deoarece k_1, k_2 au acelaşi semn rezultă $k_n(\vec{u}) \neq 0$.

(2) Deoarece k_1 şi k_2 au semne contrare, din ecuaţia

$$k_1\cos^2\theta + k_2\sin^2\theta = 0$$

obţinem două direcţii asimptotice.

(3) Dacă P este planar, adică $k_1(P) = k_2(P) = 0$, rezultă $k_n(\vec{u}) = 0$ şi deci direcţiile asimptotice sînt nedeterminate.

Dacă $k_1(P) \neq 0$, $k_2(P) = 0$, atunci $k_n(\vec{u}) = k_1(P)\cos^2\theta$ se anulează numai pentru $\theta = \frac{\pi}{2}$ şi deci $\vec{u} = \vec{e}_2$.

13.4. *Definiţie. O curbă regulată α din $\mathbb{M}$ se numeşte curbă asimptotică dacă viteza sa $\vec{\alpha}'$ dă în fiecare punct o direcţie asimptotică.*

13.5. Teoremă. Fie α o curbă regulată din $\mathbb{M}$ şi $\vec{U}$ restricţia cîmpului normal unitar la α.

(1) Curba α este asimptotică dacă şi numai dacă $\vec{U}'$ şi $\vec{\alpha}'$ sînt ortogonali în orice punct.

(2) Curba α este asimptotică dacă şi numai dacă acceleraţia sa $\vec{\alpha}''$ este tangentă la $\mathbb{M}$.

Demonstraţie. (1) Curba α este asimptotică $\Leftrightarrow k_n(\vec{\alpha}') = 0 \Leftrightarrow (S(\vec{\alpha}'), \vec{\alpha}')=0$, şi ţinînd cont că $S(\vec{\alpha}') = -\vec{U}'$, $\Leftrightarrow (\vec{U}', \vec{\alpha}') = 0$.

(2) Derivînd pe $(\vec{U}, \vec{\alpha}') = 0$ găsim

$$(\vec{U}', \vec{\alpha}') + (\vec{U}, \vec{\alpha}'') = 0$$

şi deci $(\vec{U}', \vec{\alpha}') = 0 \Leftrightarrow (\vec{U}, \vec{\alpha}'') = 0$.

13.6. Teoremă. O suprafaţă $\mathbb{M}$ este minimală dacă şi numai dacă în fiecare punct al său există două direcţii asimptotice ortogonale.

Demonstraţie. $H(P) = 0 \Leftrightarrow k_1(P) = -k_2(P) \Leftrightarrow$ (1)P este planar (şi criteriul este banal) sau (2) $K(P) < 0$ cu $\theta = \pm\frac{\pi}{4}$ ceea ce înseamnă că cele două direcţii asimptotice sînt ortogonale.

13.7. Teoremă. Dacă $\mathbb{M}$ este o suprafaţă riglată, atunci $K \leqslant 0$. Suprafaţa riglată $\mathbb{M}$ este local euclidiană ($K = 0$) dacă şi numai dacă $\vec{U}$ este paralel de-a lungul fiecărei generatoare a lui $\mathbb{M}$ (de-a lungul generatoarei avem acelaşi plan tangent).

Demonstrație. O dreaptă $\vec{\alpha} = \vec{a} + t\vec{b}$ situată pe o suprafață este o curbă asimptotică deoarece $\vec{\alpha}'' = \vec{0}$ este un vector tangent la $\mathbb{M}$. Prin definiție, prin fiecare punct al unei suprafețe riglate trece o dreaptă care este conținută în suprafață. Astfel în fiecare punct avem cel puțin o direcție asimptotică și în baza teoremei 13.3 rezultă $K \leqslant 0$.

Fie α o generatoare oarecare a lui $\mathbb{M}$. Dacă $\vec{U}$ este paralel de-a lungul lui α, atunci $S(\vec{\alpha}') = -\vec{U}' = \vec{0}$. Astfel α este o curbă principală cu curbura normală $k_n(\vec{\alpha}') = 0$ și deci $K = k_1 k_2 = 0$. Invers, dacă $K = 0$, din cazul (3) al teoremei 13.3 rezultă că direcțiile asimptotice (și curbele) din $\mathbb{M}$ sînt și principale. Astfel fiecare generatoare α este atît o curbă principală, adică

$$S(\vec{\alpha}') = k_n(\vec{\alpha}')\vec{\alpha}',$$

cît și o curbă asimptotică, adică $k_n(\vec{\alpha}') = 0$.

Rezultă

$$\vec{U}' = -S(\vec{\alpha}') = \vec{0}.$$

Geodezice

13.8. *Definiție. O curbă regulată α din $\mathbb{M}$ se numește geodezică a lui $\mathbb{M}$ dacă accelerația sa $\vec{\alpha}''$ este normală la $\mathbb{M}$.*

Deoarece $\vec{\alpha}''$ este normală lui $\mathbb{M}$, un observator din $\mathbb{M}$ nu sesizează nici o accelerație de-a lungul lui α, adică pentru un astfel de observator geodezica α este ca linia dreaptă pentru un observator din spațiu. Se poate demonstra că arcul de curbă care dă minimul distanței între două puncte pe o suprafață este o geodezică (și reciproc).

Fie α o geodezică a lui $\mathbb{M}$. Deoarece $\vec{\alpha}''$ este normală la $\mathbb{M}$, în particular avem

$$(\vec{\alpha}'', \vec{\alpha}') = 0 \Rightarrow (\vec{\alpha}', \vec{\alpha}') = \text{const.}$$

și deci viteza unei geodezice este constantă.

Deși definiția geodezicei unei suprafețe este independentă de aplicația Weingarten, totuși între elementele Frenet atașate unei geodezice și aplicația Weingarten există o strînsă legătură. Pentru a pune în evidență acest lucru, fie α o geodezică cu viteza unu. Deoarece $\vec{N} = \dfrac{\vec{\alpha}''}{k}$ este un vector normal la $\mathbb{M}$, avem

$$-\vec{N}' = S(\vec{\alpha}') = S(\vec{T})$$

și în baza formulelor Frenet găsim

$$S(\vec{T}) = k\vec{T} - \tau\vec{B}.$$

§14. Aria unei porțiuni de suprafață

Fie σ o porțiune dintr-o suprafață $\mathbb{M} \subset \mathbb{R}^3$ reprezentată de imaginea funcției $r : \mathbb{D}_0 \to \mathbb{M}$, adică $\sigma = r(\mathbb{D}_0)$, unde $\mathbb{D}_0$ este un dreptunghi închis, iar $r : \mathbb{D} \to \mathbb{M}$, $\mathbb{D} = \text{int.}\, \mathbb{D}_0$ este o hartă. Dorim să definim aria lui $\sigma = r(\mathbb{D}_0)$.

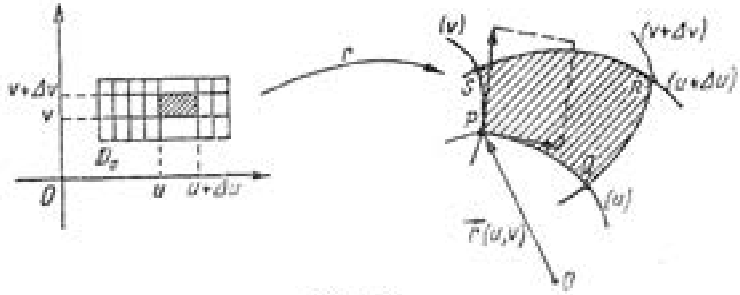


Fig. 140

Fie $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$, $(u, v) \in \mathbb{D}_0$, ecuația vectorială a lui $r(\mathbb{D}_0) = \sigma$. Liniile de coordonate împart pe σ în patrulatere curbilinii. Dintre acestea alegem pe cel mărginit de curbele (u), (v), $(u + \Delta u)$, $(v + \Delta v)$, figura 140.

Aria patrulaterului curbiliniu $PQRS$ se aproximează cu aria paralelogramului rectiliniu construit în planul tangent $T_P\mathbb{M}$ pe vectorii $\vec{r}_u\Delta u$ și $\vec{r}_v\Delta v$. Astfel

$$\text{Aria } PQRS = \|\vec{r}_u\Delta u \times \vec{r}_v\Delta v\| = \|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\|\Delta u\Delta v$$

și

$$\text{Aria } \sigma = \sum \text{Aria } PQRS = \sum \|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\| \,\Delta u\Delta v.$$

Aceste observații ne permit să spunem că simbolul

$$\mathrm{d}\sigma = \|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\| \,\mathrm{d}u \,\mathrm{d}v = \sqrt{\vec{r}_u^{\,2}\vec{r}_v^{\,2} - (\vec{r}_u, \vec{r}_v)^2}\,\mathrm{d}u \,\mathrm{d}v = \sqrt{EG - F^2}\,\mathrm{d}u \,\mathrm{d}v$$

este elementul de arie al porțiunii σ. Aria lui σ se definește ca fiind integrala

$$A = \iint_{\sigma} \mathrm{d}\sigma = \iint_{\mathbb{D}_0} \sqrt{EG - F^2}\,\mathrm{d}u \,\mathrm{d}v.$$

Dacă σ este dată cartezian explicit prin $z = f(x, y)$, atunci

$$\mathrm{d}\sigma = \sqrt{1 + p^2 + q^2}\,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y \quad \text{și} \quad A = \iint_{\mathbb{D}_0} \sqrt{1 + p^2 + q^2}\,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y.$$

Fie $\mathbb{M}$ o suprafață și $\sigma_i \subset \mathbb{M}$ un număr finit de imagini de tipul $r_i(\mathbb{D}_{0i})$ care nu au în comun decît frontierele $\partial \sigma_i$ (fig. 141).

Prin definiție avem

$$\text{Aria } (\sigma_1 \cup \sigma_2 \cup \ldots \cup \sigma_k) = \sum_k \iint_{\sigma_k} \mathrm{d}\sigma.$$

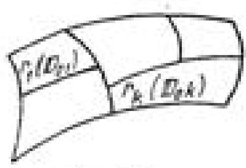


Fig. 141

14.1. Exemple

1) Fie σ sfera de rază R. Ea poate fi privită ca fiind imaginea lui $\mathbb{D}: 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$, $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$ prin

$$\begin{cases} x = R \sin \varphi \cos \theta \\ y = R \sin \varphi \sin \theta \\ z = R \cos \varphi \end{cases}$$

şi $\sqrt{EG - F^2} = R^2 \sin \varphi$. Astfel $A = \int\limits_0^{\pi} \int\limits_0^{2\pi} R^2 \sin \varphi \, d\varphi \, d\theta = 4\pi R^2$.

2) Fie torul de raze $R > r > 0$:

$$\begin{cases} x = (R + r \cos u) \cos v \\ y = (R + r \cos u) \sin v \\ z = r \sin u, \ (u, v) \in [-\pi, \pi] \times [-\pi, \pi]. \end{cases}$$

Să se arate că

$$A = 4\pi^2 R r.$$

§15. Subvarietăţi ale lui $\mathbb{R}^n$

Fie $\mathbb{R}^n$ spaţiul euclidian canonic cu n dimensiuni.

15.1. Fie $m \leqslant n$ două numere naturale. Incluziunea canonică $\mathbb{R}^m \subset \mathbb{R}^n$ este $(x_1, \ldots, x_m) \to (x_1, \ldots, x_m, 0, \ldots, 0)$. Uneori se scrie $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m}$.

O submulţime $\mathbb{M}$ a lui $\mathbb{R}^n$ se numeşte *subvarietate de dimensiune* m dacă satisface una dintre următoarele condiţii (echivalente):

(1) pentru $\forall x \in \mathbb{M}$ există o mulţime deschisă $\mathbb{D}$ din $\mathbb{R}^n$ care conţine pe x şi un difeomorfism $f: \mathbb{D} \to f(\mathbb{D}) \subset \mathbb{R}^n$ astfel încît $f(\mathbb{D} \cap \mathbb{M}) = f(\mathbb{D}) \cap \mathbb{R}^m$;

(2) pentru $\forall x \in \mathbb{M}$ există o mulţime deschisă $\mathbb{D}$ din $\mathbb{R}^n$ care conţine pe x şi $n - m$ funcţii diferenţiabile $f_i: \mathbb{D} \to \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \ldots, n$ astfel încît vectorii grad $f_i(x)$ să fie liniar independenţi şi

$$\mathbb{M} \cap \mathbb{D} = \{x \mid x \in \mathbb{D}, f_1(x) = 0, \ldots, f_{n-m}(x) = 0\};$$

(3) pentru $\forall x \in \mathbb{M}$ există o mulţime deschisă $\mathbb{D}$ din $\mathbb{R}^n$ care conţine pe x şi o submersie $f: \mathbb{D} \to \mathbb{R}^{n-m}$ astfel încît $\mathbb{M} \cap \mathbb{D} = \{x \mid x \in \mathbb{D}, f(x) = 0\}$;

(4) pentru $\forall x \in \mathbb{M}$ există o mulţime deschisă $\mathbb{D}$ din $\mathbb{R}^n$ care conţine pe $x = (x_1, \ldots, x_n)$, o mulţime deschisă $\mathbb{E}$ din $\mathbb{R}^m$ care conţine pe $(x_1, \ldots, x_m)$ şi $n - m$ funcţii diferenţiabile $h_i: \mathbb{E} \to \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \ldots, n - m$, astfel încît, abstracţie făcînd eventual de o permutare a coordonatelor, $\mathbb{M} \cap \mathbb{D}$ să fie graficul aplicaţiei $(h_1, \ldots, h_{n-m}): \mathbb{E} \to \mathbb{R}^{n-m}$;

(5) pentru $\forall x \in \mathbb{M}$ există o mulţime deschisă $\mathbb{D}$ din $\mathbb{R}^n$ care conţine pe x, o mulţime deschisă $\mathbb{E}$ din $\mathbb{R}^m$ şi o imersie injectivă $g: \mathbb{E} \to \mathbb{R}^n$ cu imaginea $\mathbb{M} \cap \mathbb{D}$ şi cu inversa $g^{-1}: \mathbb{M} \cap \mathbb{D} \to \mathbb{E}$ continuă.

Dacă în fiecare dintre aceste definiţii utilizăm funcţii de clasă C^p, atunci $\mathbb{M}$ se numeşte *subvarietate de clasă* C^p.

Numărul natural $n - m$ se numește *codimensiunea* lui $\mathbb{M}$.

15.2. Subvarietățile de dimensiune 0 sînt mulțimile de puncte izolate din $\mathbb{R}^n$. Subvarietățile de dimensiune 1 se numesc *curbe*, iar subvarietățile de dimensiune 2 se numesc *suprafețe*.

Subvarietățile de codimensiune 0 sînt mulțimile deschise din $\mathbb{R}^n$. Subvarietățile de codimensiune 1 se numesc *hipersuprafețe*.

15.3. Fie $\mathbb{M}$ o subvarietate a lui $\mathbb{R}^n$ de dimensiune m. O funcție diferențiabilă $h: \mathbb{D} \to \mathbb{R}^n$ cu proprietățile

1) $\mathbb{D}$ este o mulțime deschisă din $\mathbb{R}^m$,
2) $h(\mathbb{D}) \subset \mathbb{M}$,
3) h este o imersie injectivă,

se numește *hartă* în $\mathbb{M}$.

Dacă h este numai imersie, atunci h se numește *parametrizare* a regiunii $h(\mathbb{D})$ din $\mathbb{M}$. Conform lui 15.1.(5) orice punct $x \in \mathbb{M}$ admite hărți $h: \mathbb{D} \to \mathbb{M}$ astfel încît $x \in h(\mathbb{D})$.

15.4. Fie $\mathbb{M}$ o subvarietate a lui $\mathbb{R}^n$. Un vector v din $\mathbb{R}^n$ se zice *tangent* în x la $\mathbb{M}$ dacă există o curbă din $\mathbb{M}$ (o aplicație diferențiabilă $\alpha: I \to \mathbb{M}$, I = interval deschis din $\mathbb{R}$) pentru care $\alpha(t_0) = x$, $\alpha'(t_0) = v$, $t_0 \in I$.

Mulțimea vectorilor din $\mathbb{R}^n$ tangenți la $\mathbb{M}$ în x este un subspațiu vectorial al lui $\mathbb{R}^n$ de dimensiune m, numit *spațiul tangent* la $\mathbb{M}$ în x și notat cu $\mathrm{T}_x\,\mathbb{M}$.

Mulțimea $\mathrm{T}\,\mathbb{M} = \bigcup\limits_{x \in \mathbb{M}} \mathrm{T}_x\,\mathbb{M}$ se numește *fibrarea tangentă* a lui $\mathbb{M}$. Aceasta este o subvarietate a lui $\mathbb{R}^{2n}$ de dimensiune $2m$.

15.5. Fie $\mathbb{M}$ o subvarietate a lui $\mathbb{R}^n$ și $\alpha: I \to \mathbb{M}$ o curbă din $\mathbb{M}$. Restricția $\alpha: [a, b] \to \mathbb{M}$, $[a, b] \subset I$, se numește *segment de curbă* în $\mathbb{M}$.

O subvarietate $\mathbb{M}$ de clasă C^p, $p \geqslant 1$, se numește *conexă* dacă $\forall\, x, y \in \mathbb{M}$ există un segment de curbă în $\mathbb{M}$ care unește pe x cu y.

15.6. O submulțime $\mathbb{M}$ a lui $\mathbb{R}^n$ se numește subvarietate *de dimensiune m, cu frontieră*, dacă pentru $\forall x \in \mathbb{M}$ există o mulțime deschisă $\mathbb{D}$ din $\mathbb{R}^n$ care conține pe x și un difeomorfism $f: \mathbb{D} \to f(\mathbb{D}) \subset \mathbb{R}^n$ astfel încît

$$f(\mathbb{D} \cap \mathbb{M}) = f(\mathbb{D}) \cap (H^m \times \{c\}),$$

unde $H^m = \{(x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^m,\ x_m \geqslant a\}$ și $c \in \mathbb{R}^{n-m}$.

Mulțimea $\partial\mathbb{M} = \{x \mid x \in \mathbb{M},\ f(x) \in \mathbb{R}^{m-1} \times \{a\} \times \{c\}\}$, numită *frontiera* lui $\mathbb{M}$, este o subvarietate de dimensiune $m - 1$. Mulțimea $\mathbb{M} - \partial\mathbb{M}$, numită *interiorul* lui $\mathbb{M}$, este o subvarietate de dimensiune m.

Spațiul tangent $\mathrm{T}_x\,\mathbb{M}$ se definește ca și pentru o varietate fără frontieră.

15.7. *Hipersuprafețe cu frontieră.* Fie $\widetilde{\mathbb{M}}$ o hipersuprafață în $\mathbb{R}^n$. O *hipersuprafață cu frontieră* în $\mathbb{R}^n$ poate fi definită astfel

$$\mathbb{M} = \{x \in \widetilde{\mathbb{M}} \mid g_1(x) \leqslant c_1, \ldots, g_k(x) \leqslant c_k\}, \text{ unde } g_1, \ldots, g_k : \widetilde{\mathbb{M}} \to \mathbb{R}$$

sînt funcții diferențiabile cu proprietățile $g_i^{-1}(c_i) \cap g_j^{-1}(c_j) = \emptyset$, $\forall\, i \neq j$ și $\operatorname{grad} g_i(x) \neq 0$, $\forall\, x \in g_i^{-1}(c_i)$. Frontiera lui $\mathbb{M}$ este $\partial\mathbb{M} = \bigcup\limits_{i=1}^{k} g_i^{-1}(c_i) \cap \mathbb{M}$.

Dacă hipersuprafața $\widetilde{\mathbb{M}}$ este caracterizată prin ecuația $f(x) = 0$ ($\operatorname{grad} f(x) \neq 0$, $\forall\, x \in \widetilde{\mathbb{M}}$), atunci $\mathbb{M} = f^{-1}(c) \cap \bigcap\limits_{i=1}^{k} g_i^{-1}((-\infty, c_i])$ și $\mathrm{T}_x\,\mathbb{M} = \{v \in \mathrm{T}_x\,\mathbb{R}^n \mid \langle v, \nabla f(x)\rangle = 0\}$. Un vector

$v \in T_x\mathbb{M}$, $x \in \partial\mathbb{M} \subset \mathbb{M}$ (adică $x \in g_i^{-1}(c_i)$ pentru anumiți i) se numește

1) *orientat către exterior* dacă $(v, \nabla g_i(x)) > 0$,
2) *orientat către interior* dacă $(v, \nabla g_i(x)) < 0$,
3) *tangent la frontieră* dacă $(v, \nabla g_i(x)) = 0$,
4) *normal la frontieră* dacă $(v, w) = 0$, $\forall w \in T_x\mathbb{M} \cap T_x\partial\mathbb{M}$.

15.8. Fie $\mathbb{M}$ o hipersuprafață a lui $\mathbb{R}^n$ cu sau fără frontieră. Un cîmp vectorial normal unitate U pe $\mathbb{M}$ se numește orientare a lui $\mathbb{M}$.

Noțiunea generală de orientare va fi dată în capitolul 4, § 7.

§16. Probleme

1. Fie funcția $r : \mathbb{D} \to \mathbb{R}^3$, dată prin $r(u, v) = (\cos 2\pi u, \sin 2\pi u, v)$. Să se arate că r este o hartă proprie și că $r(\mathbb{D})$ este suprafața $\mathbb{M} : x^2 + y^2 = 1$, $-1 < x < 1$, $y > 0$, $z \in \mathbb{R}$.

2. Fie imersia $r : x = u \cos v$, $y = u \sin v$, $z = a \ln(u + \sqrt{u^2 - a^2})$, $a > 0$, $u \in [a, \infty)$, $v \in \mathbb{R}$. Să se determine curbele de pe suprafața $r([a, \infty) \times \mathbb{R})$ care intersectează curbele $v = v_0$ sub un unghi constant.

3. Să se determine ecuațiile carteziene implicite ale suprafețelor cilindrice ale căror curbe directoare sînt

1) $x^2 + y^2 - 3x + 2y - 1 = 0$, $z = 0$,

2) $x^2 - x + 2y - 1 = 0$, $z = 0$,

ale căror generatoare sînt perpendiculare respectiv pe planele curbelor directoare.

4. Se consideră funcția $r : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $r(u, v) = (1 + uv,\ u + u^2v,\ u^3 + u^3v)$.

1) Să se arate că $r(\mathbb{R}^2)$ este o „suprafață conică";
2) Să se găsească ecuația carteziană a lui $r(\mathbb{R}^2)$.

5. O suprafață care admite simultan parametrizările $\vec{r}(u, v) = \vec{\alpha}(u) + v\vec{\beta}(u)$ și $\vec{r}(u, v) = \vec{\gamma}(v) + u\vec{\delta}(v)$ se numește *dublu riglată*.

1) Să se arate că orice suprafață dublu riglată este o cuadrică;
2) Se consideră harta r definită prin $x = a\left(u + \dfrac{1}{v}\right)$, $y = b\left(u - \dfrac{1}{v}\right)$, $z = \dfrac{2u}{v}$, $u \in \mathbb{R}$, $v \in \mathbb{R} - \{0\}$. Să se arate că imaginea $r(\mathbb{R} \times (\mathbb{R} - \{0\}))$ este o suprafață dublu riglată. Să se determine curbele coordonate ale suprafeței și ecuația carteziană a suprafeței.

6. Suprafața generată prin rotirea unui cerc în jurul unei axe conținută în planul cercului (care nu intersectează cercul) se numește tor.

Alegînd convenabil axele, să se găsească o parametrizare a torului. Apoi să se determine ecuația carteziană implicită.

7. Fie sfera $\mathbb{M} : x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ și harta în sferă $r(u, v) = (a \cos u \sin v,\ a \sin u \sin v,\ a \cos v)$, $(u, v) \in (0, 2\pi) \times (0, \pi)$. Să se găsească expresiile în coordonate pentru următoarele funcții definite pe $\mathbb{M}$:

1) $f(x, y, z) = x^2 + z^2$; 2) $f(x, y, z) = (y - z)^2 + x^2$.

8. Să se construiască mulțimile de nivel $\mathbb{M} = f^{-1}(c)$, pentru $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$ și $c_1 = -1$, $c_2 = 0$, $c_3 = 1$. Pentru fiecare dintre ele să se cerceteze în care puncte spațiul tangent va fi $[\nabla f(P)]^{\perp}$.

9. Fie suprafața $\mathbb{M} : x^{\alpha} y^{\beta} z^{\gamma} = 1$, $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$. Planul tangent la $\mathbb{M}$ în punctul (x_0, y_0, z_0) intersectează axele de coordonate respectiv în punctele A, B, C. Să se arate că punctul (x_0, y_0, z_0) este centrul de greutate al „maselor" α, β, γ aplicate respectiv în A, B, C.

10. Fie $\mathbb{D} \subset \mathbb{R}^2$ o mulțime deschisă și conexă, iar $r : \mathbb{D} \to \mathbb{R}^3$ o parametrizare. Să se arate că dacă normala la suprafața $r(\mathbb{D})$ are direcție fixă, atunci suprafața este o parte a unui plan. Să se verifice acest rezultat pentru

1) $r : \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\} \to \mathbb{R}^3$, $r(u, v) = (u^2 + v^2,\ uv,\ (u + v)^2)$,

2) $r : \mathbb{R}^2 - \{(u, v)/u > 0,\ v > 0,\ u - v > 0,\ u - 3v > 0\} \to \mathbb{R}^3$,

$$r(u, v) = \left((u - v)^2,\ u^2 - 3v^2,\ \frac{v}{2}(u - 2v)\right).$$

11. Să se arate că suprafața Țițeica $\mathbb{M} : xyz - 1 = 0$ nu este conexă.

12. Fie $a > b > 0$ și funcția $r : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definită prin $r(u, v) = ((a + b \cos v)\cos u,\ (a + b \cos v)\sin u,\ b \sin v)$.

1) Să se arate că r este o parametrizare a torului, dublu periodică.

2) Să se arate că torul este o suprafață conexă și compactă.

13. Fie $\mathbb{M}$ o suprafață orientată și fie $\{\vec{a}, \vec{b}\}$ o bază pentru planul tangent $T_P\mathbb{M}$. Să se arate că orientarea bazei $\{\vec{a}, \vec{b}\}$ este coerentă cu orientarea $\vec{U}$ a lui $\mathbb{M}$ dacă și numai dacă este îndeplinită una dintre următoarele condiții:

1) $\langle\vec{U}(P),\ \vec{a} \times \vec{b}\rangle > 0$

2) $\dfrac{\vec{b}}{\|\vec{b}\|} = \mathscr{R}_\theta\left(\dfrac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|}\right)$ pentru $0 < \theta < \pi$, unde $\mathscr{R}_\theta$ este rotația pozitivă de unghi θ în $T_P\mathbb{M}$.

14. Fie suprafața $\mathbb{M} : z = f(x, y)$ orientată prin alegerea cîmpului normal unitar

$$\vec{U} = \frac{-f_x\vec{i} - f_y\vec{j} + \vec{k}}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}}.$$

Presupunem că $f(0, 0) = f_x(0, 0) = f_y(0, 0) = 0$.

1) Să se arate că $\vec{i}$ și $\vec{j}$ sînt vectori tangenți la $\mathbb{M}$ în $(0, 0, 0)$.

2) Să se arate că

$$S(\vec{i}) = f_{xx}(0, 0)\vec{i} + f_{xy}(0, 0)\vec{j}$$

$$S(\vec{j}) = f_{xy}(0, 0)\vec{i} + f_{yy}(0, 0)\vec{j}.$$

15. Fie $\mathbb{M} = f^{-1}(1)$, unde $f(x, y, z) = -x^2 + y^2 + z^2$. Să se orienteze suprafața $\mathbb{M}$. Să se determine curbura normală a suprafeței în punctul $P(0, 0, 1)$, în direcția $\vec{v}$, unde $\vec{v}$ este un vector unitar, $\vec{v} \in T_P\mathbb{M}$. Cazuri particulare:

1) $\vec{v} = \vec{i} = (1, 0, 0)$; 2) $\vec{v} = \vec{j} = (0, 1, 0)$; 3) $\vec{v} = \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$.

16. Fie k_1, k_2, curburile principale ale suprafeței S de separație a unui lichid. Presiunea normală p, pe elementul de suprafață, într-un punct oarecare, e dată de ecuația Laplace $\sigma(k_1 + k_2) = p$, unde σ este tensiunea superficială, considerată constantă. Să se afle presiunea

p cînd S este:

1) Suprafaţa Enneper

$$x = \mathrm{Re}\int(1-t^2)dt, \quad y = \mathrm{Im}\int(1+t^2)dt, \quad z = \mathrm{Re}\int 2t\,dt,$$

$$t = u + iv, \quad i^2 = -1.$$

2) Şaua: $z = xy$.

17. Fie suprafeţele

1) $M: z = e^{x+y} - 1$, 2) $M: z = \ln\cos x - \ln\cos y$, 3) $M: z = (x+3y)^3$. Să se determine curburile principale şi aproximarea pătratică a suprafeţei M în jurul lui $(0, 0, 0)$.

18. Fie harta Monge $r: x = u,\ y = v,\ z = f(u, v)$. Să se arate că

$$E = 1 + f_u^2,\ F = f_u f_v,\ G = 1 + f_v^2,$$

$$l = \frac{f_{uu}}{W}, \quad m = \frac{f_{uv}}{W}, \quad n = \frac{f_{vv}}{W},$$

unde $W = \sqrt{1 + f_u^2 + f_v^2}$.

19. Să se arate că imaginea imersiei (suprafaţa Enneper) $r: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $r(u, v) = \left(u - \frac{u^3}{3} + uv^2,\ v - \frac{v^3}{3} + u^2 v,\ u^2 - v^2\right)$, este o suprafaţă minimală.

20. *Pseudosfera*. Fie $\alpha(u) = (x(u),\ y(u))$ unde $x(u) = \int_0^u \sqrt{1 - e^{-2t}}\,dt$, $y(u) = e^{-u}$, $u > 0$ şi fie M suprafaţa de rotaţie obţinută prin rotirea lui α în jurul lui Ox. Să se arate că M are curbura Gauss $K = -1$.

21. O suprafaţă pentru care $K/d^4 = \text{const.}$, unde K este curbura Gauss pe suprafaţă, iar d este distanţa de la un punct fix la planul tangent într-un punct oarecare al suprafeţei, se numeşte *suprafaţă Ţiţeica*. Să se arate că $M: xyz - 1 = 0$ este o suprafaţă Ţiţeica.

22. Fie β o curbă cu viteza unu şi curbura $k > 0$. Suprafaţa riglată $\vec{r}(u, v) = \vec{\beta}(u) + v\vec{T}(u)$, $v > 0$, se numeşte *suprafaţa tangentă* a lui β. Să se probeze că $\vec{r}_u \times \vec{r}_v \neq 0$ şi că suprafaţa tangentă este local euclidiană.

23. Se consideră imersia definită prin $x = \cos u \cos v$, $y = \cos u \sin v$, $z = \sin u - \ln \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{u}{2}\right)$, $u \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, $v \in \mathbb{R}$. Să se determine liniile de curbură şi liniile asimptotice ale suprafeţei $r\left(\left(0, \frac{\pi}{2}\right) \times \mathbb{R}\right)$.

24. Fie P centrul masei punctiforme m, care se mişcă pe o suprafaţă cu acceleraţia $\vec{a}$ şi fie $\vec{N}$ reacţiunea (normală în P la suprafaţă). Dacă asupra particulei P nu acţionează forţe exterioare, atunci să se arate că P descrie o curbă α, care este o geodezică a suprafeţei.

25. 1) Să se afle aria suprafeței $\mathbb{M}$: $(x^2+y^2-4)^2+(z-4)^2=1$.

2) Să se arate că aria suprafeței $\mathbb{M}$: $y^2+z^2-x^2=0$, $x^2+y^2\leq 1$ este $A=\pi\sqrt{2}$.

26. Să se găsească aria benzii Möbius: $x=\cos u+v\cos u\cos\frac{u}{2}$, $y=\sin u+v\sin u\cos\frac{u}{2}$, $z=\sin\frac{u}{2}$, $u\in[0,2\pi]$, $v\in\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$.

27. Mulțimea matricelor pătratice reale de ordinul n, cu determinantul 1, este un grup în raport cu înmulțirea, numit *grupul liniar special* $SL(n,\mathbb{R})$. Identificăm pe $\mathscr{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ cu $\mathbb{R}^{n^2}$.

1) Să se arate că $SL(2,\mathbb{R})$ este o hipersuprafață a lui $\mathbb{R}^4$. Să se determine $T_{x_0}SL(2,\mathbb{R})$, unde

$$x_0=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

2) Să se arate că $SL(3,\mathbb{R})$ este o hipersuprafață a lui $\mathbb{R}^9$. Să se determine $T_{x_0}SL(3,\mathbb{R})$, unde

$$x_0=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

3) Să se arate că $SL(n,\mathbb{R})$ este o hipersuprafață a lui $\mathbb{R}^{n^2}$. Să se determine $T_{x_0}SL(n,\mathbb{R})$ pentru $x_0=I$ (matricea unitate de ordinul n).

28. (Fibrarea tangentă). Fie $\mathbb{M}$ o hipersuprafață a lui $\mathbb{R}^n$ orientată prin U. Să se arate că

$$T\mathbb{M}=\{(x,v)\mid x\in\mathbb{M},\ (v,U)=0\}$$

este o subvarietate de dimensiune $2n-2$ în $\mathbb{R}^{2n}$.

29. (Fibrarea sferică). Fie $\mathbb{M}$ o hipersuprafață a lui $\mathbb{R}^n$ orientată prin U. Să se arate că

$$T^1\mathbb{M}=\{(x,v)\mid x\in\mathbb{M},\ (v,U)=0,\ (v,v)=1\}$$

este o varietate cu $2n-3$ dimensiuni în $\mathbb{R}^{2n}$.

30. Să se verifice că semisfera

$$S=\{(x_1,x_2,x_3)\mid(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3,\ x_1^2+x_2^2+x_3^2=1,\ x_3\geq 0\}$$

este o suprafață cu frontieră în $\mathbb{R}^3$.

Fie $\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0\right)$ un punct de pe frontieră. Să se scrie ecuația planului tangent la S în acest punct și apoi să se explicitеze un vector tangent la S orientat către exterior, unul orientat către interior, unul tangent și unul normal la frontieră.

Capitolul 4

ALGEBRĂ ŞI ANALIZĂ TENSORIALĂ

§1. Tensori

Fie V un spaţiu vectorial real de dimensiune n. O transformare liniară $\omega : V \to \mathbb{R}$ (cimpul $\mathbb{R}$ este considerat ca spaţiu vectorial aritmetic cu o dimensiune peste $\mathbb{R}$) se numeşte 1-*formă*. Spaţiul vectorial $\mathscr{L}(V, \mathbb{R})$ al tuturor 1-formelor definite pe V şi cu valori în $\mathbb{R}$ se numeşte *dualul* lui V şi se notează cu V^*. Spaţiul vectorial V^* are dimensiunea n. Dualul lui $V^* = \mathscr{L}(V, \mathbb{R})$, adică V^{**}, se identifică cu V în baza izomorfismului descris mai jos.

Elementele lui V vor fi notate cu $v_1, v_2, \ldots$, iar elementele lui V^* cu $\omega^1, \omega^2, \ldots$

Fie v un vector din V şi ω un vector din V^*. Dacă fixăm pe v, atunci funcţia $f_v : V^* \to \mathbb{R}$, $f_v(\omega) = \omega(v)$ este o 1-formă pe V^* şi deci un element din V^{**}. Într-adevăr, $\forall\, k_1, k_2 \in \mathbb{R}$, $\forall \omega^1, \omega^2 \in V^*$, găsim

$$f_v(k_1\omega^1 + k_2\omega^2) = (k_1\omega^1 + k_2\omega^2)(v) = k_1\omega^1(v) + k_2\omega^2(v) =$$

$$= k_1 f_v(\omega^1) + k_2 f_v(\omega^2).$$

Fiecărui vector $v \in V$ i se poate ataşa 1-forma f_v din V^{**}. Să arătăm că funcţia $v \to f_v$ este un izomorfism de la V la V^{**}. Mai întîi observăm că este o transformare liniară,

$$f_{k_1v_1+k_2v_2}(\omega) = \omega(k_1v_1 + k_2v_2) = k_1\omega(v_1) + k_2\omega(v_2) =$$

$$= k_1 f_{v_1}(\omega) + k_2 f_{v_2}(\omega) \Rightarrow f_{k_1v_1+k_2v_2} = k_1 f_{v_1} + k_2 f_{v_2}.$$

De asemenea se observă că $f_v = 0 \Leftrightarrow v = 0$, iar $\dim V = \dim V^* = \dim V^{**}$. Astfel funcţia $v \to f_v$ este o bijecţie şi deci un izomorfism de la V la V^{**}. În consecinţă, dacă f este o 1-formă pe V^*, atunci există un vector unic $v \in V$ astfel incît $f(\omega) = \omega(v)$, $\forall \omega \in V^*$.

Deoarece $v \to f_v$ este un izomorfism canonic de la V la V^{**} se obişnuieşte ca f_v să se identifice cu v şi deci V^{**} să se identifice cu V. În acest sens spunem că V este dualul lui V^* sau că V, V^* sînt duale unul altuia.

1.1. *Definiţie. Un tensor de tipul* (p, q) *pe* V, *unde* $p, q \in \mathbb{N}$, *este o funcţie*

$$T : \underbrace{V^* \times \ldots \times V^*}_{p \text{ factori}} \times \underbrace{V \times \ldots \times V}_{q \text{ factori}} \to \mathbb{R},$$

$$(\omega^1, \ldots, \omega^p, v_1, \ldots, v_q) \to T(\omega^1, \ldots, \omega^p, v_1, \ldots, v_q)$$

liniară în fiecare argument (multiliniară). Numărul p *se numeşte ordin de contravarianţă,* q *se numeşte ordin de covarianţă, iar* $p + q$ *se numeşte ordinul tensorului.*

Mulţimea tuturor tensorilor de tipul (p, q) pe V se notează cu $\mathcal{T}^p_q(V)$ şi este un spaţiu vectorial real de dimensiune n^{p+q}(pentru dimensiune vezi teorema 1.3). Tensorul *zero* din $\mathcal{T}^p_q(V)$ se defineşte prin $0(\omega^1, \ldots, \omega^p, v_1, \ldots, v_q) = 0$, $\forall \omega^1, \ldots, \omega^p \in V^*$, $\forall v_1, \ldots, v_q \in V$. Evident $\mathcal{T}^0_1(V) = V^*$ şi se acceptă identificările $\mathcal{T}^0_0(V) = \mathbb{R}$, $\mathcal{T}^1_0(V) = V$, adică tensorii de ordinul zero sînt numere reale, iar tensorii de ordinul unu sînt vectori contravarianţi (elementele lui V) sau vectorii covarianţi (1-forme, elementele lui V^*).

Identificarea $\mathcal{T}^1_0(V) = V$ impune definiţia $v(\omega) = \omega(v)$, $v \in V$, $\omega \in V^*$.

1.2. *Definiţie. Fie $\mathcal{T}^p_q(V)$, $\mathcal{T}^r_s(V)$ şi $\mathcal{T}^{p+r}_{q+s}(V)$. Funcţia*

$$\otimes : \mathcal{T}^p_q(V) \times \mathcal{T}^r_s(V) \to \mathcal{T}^{p+r}_{q+s}(V)$$

definită prin

$S \otimes T(\omega^1, \ldots, \omega^{p+r}, v_1, \ldots, v_{q+s}) = S(\omega^1, \ldots, \omega^p, v_1, \ldots, v_q) T(\omega^{p+1}, \ldots, \omega^{p+r}, v_{q+1}, \ldots, v_{q+s})$ *se numeşte produs tensorial.*

Se observă că produsul tensorial este o aplicaţie biliniară şi asociativă, adică

$$(k_1 S_1 + k_2 S_2) \otimes T = k_1 S_1 \otimes T + k_2 S_2 \otimes T,$$

$$S \otimes (k_1 T_1 + k_2 T_2) = k_1 S \otimes T_1 + k_2 S \otimes T_2,\ k_1, k_2 \in \mathbb{R},$$

$$S \otimes (T \otimes R) = (S \otimes T) \otimes R.$$

Asociativitatea permite extinderea definiţiei produsului tensorial la un număr finit de factori.

Fie $\{e_i, i = 1, \ldots, n\}$ o bază a lui V. Orice vector contravariant $v \in V$ se poate scrie în forma $v = v^i e_i$ (*convenţia Einstein de însumare*) numerele reale v^i, $i = 1, \ldots, n$ numindu-se *coordonatele* lui v.

Fie $\delta^j_i = \begin{cases} 1 \text{ pentru } i = j \\ 0 \text{ pentru } i \neq j \end{cases}$ *simbolul lui Kronecker*. Mulţimea $\{e^j, j = 1, \ldots, n\}$ ale cărei elemente sînt definite prin

$$e^j(e_i) = \delta^j_i,\ i, j = 1, \ldots, n$$

este o bază în spaţiul n-dimensional V^*. Într-adevăr, ecuaţia $\sum_{j=1}^{n} \omega_j e^j = 0$ implică $\sum_{j=1}^{n} \omega_j e^j(e_i) = 0$, adică $\omega_j = 0$, $j = 1, \ldots, n$, şi deci $\{e^j, j = 1, \ldots, n\}$ este liniar independentă. Orice vector covariant $\omega \in V^*$ se scrie în forma $\omega = \omega_j e^j$ (convenţia Einstein de însumare), numerele reale ω_j, $j = 1, \ldots, n$, numindu-se *coordonatele* lui ω.

Baza $\{e^j, j = 1, \ldots, n\}$ a lui V^* definită prin $e^j(e_i) = \delta^j_i$, $i, j = 1, \ldots, n$, se numeşte *bază duală*. Avînd în vedere identificarea lui V^{**} cu V bazele $\{e_i, i = 1, \ldots, n\}$ şi $\{e^j, j = 1, \ldots, n\}$ sînt duale una alteia.

1.3. Teoremă. Dacă $\{e_i, i = 1, \ldots, n\}$ este o bază a lui V, iar $\{e^j, j = 1, \ldots, n\}$ este baza duală în V^*, atunci mulţimea

$$\{e_{i_1} \otimes \ldots \otimes e_{i_p} \otimes e^{j_1} \otimes \ldots \otimes e^{j_q},\ i_1, \ldots, i_p, j_1, \ldots, j_q = 1, \ldots, n\}$$

este o bază a lui $\mathcal{T}^p_q(V)$, numită baza produs. Deci $\dim \mathcal{T}^p_q(V) = n^{p+q}$.

Demonstrație. Mulțimea din teoremă este liniar independentă. Într-adevăr, relația

$$T^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q} e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_p} \otimes e^{j_1} \otimes \dots \otimes e^{j_q} = 0 \text{ (tensorul zero)}$$

scrisă cu convenția Einstein de însumare, implică

$$0 = T^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q} e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_p} \otimes e^{j_1} \otimes \dots \otimes e^{j_q}(e^{k_1}, \dots, e^{k_p}, e_{l_1}, \dots, e_{l_q}) =$$

$$= T^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q} e_{i_1}(e^{k_1}) \dots e_{i_p}(e^{k_p}) e^{j_1}(e_{l_1}) \dots e^{j_q}(e_{l_q}) =$$

$$= T^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q} \delta^{k_1}_{i_1} \dots \delta^{k_p}_{i_p} \delta^{j_1}_{l_1} \dots \delta^{j_q}_{l_q} = T^{k_1 \dots k_p}_{l_1 \dots l_q},\ k_1, \dots, k_p, l_1, \dots, l_q = 1, \dots n.$$

Să arătăm că mulțimea din teoremă generează pe $\mathcal{T}^p_q(V)$. Pentru aceasta fie $T \in \mathcal{T}^p_q(V)$ și numerele reale $T^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q} = T(e^{i_1}, \dots, e^{i_p}, e_{j_1}, \dots, e_{j_q})$. Găsim $T^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q} e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_p} \otimes e^{j_1} \otimes \dots \otimes e^{j_q}(e^{k_1}, \dots, e^{k_p}, e_{l_1}, \dots, e_{l_q}) = T(e^{k_1}, \dots, e^{k_p}, e_{l_1}, \dots, e_{l_q})$. Deoarece T este multiliniar, iar $\{e_i\}$, $\{e^j\}$ sînt baze duale, ultima relație implică

$$T^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q} e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_p} \otimes e^{j_1} \otimes \dots \otimes e^{j_q}(\omega^1, \dots, \omega^p, v_1, \dots, v_q) =$$

$$= T(\omega^1, \dots, \omega^p, v_1, \dots, v_q),\ \forall\, \omega^1, \dots, \omega^p \in V^*,\ \forall\, v_1, \dots, v_q \in V. \text{ Deci}$$

$$T = T^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q} e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_p} \otimes e^{j_1} \otimes \dots \otimes e^{j_q},$$

unde numerele reale

$$T^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q} = T(e^{i_1}, \dots, e^{i_p}, e_{j_1}, \dots, e_{j_q})$$

sînt *coordonatele tensorului* T în raport cu baza produs.

Fie $S^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q}$ coordonatele lui S, fie $T^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q}$ coordonatele lui T și fie $k \in \mathbb{R}$. Coordonatele tensorilor kS, $S + T$ și $S \otimes T$ sînt respectiv

$$kS^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q},\ S^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q} + T^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q},\ S^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q}\ T^{k_1 \dots k_p}_{l_1 \dots l_q}$$

Fie $\{e_i, i = 1, \dots, n\}$ și $\{e_{i'}, i' = 1', \dots, n'\}$ două baze în V și $\{e^j, j = 1, \dots, n\}$, $\{e^{j'}, j' = 1', \dots, n'\}$ respectiv bazele duale în V^*. Schimbarea bazelor este descrisă de relațiile

$$e_{i'} = A^i_{i'} e_i, \quad e^{i'} = A^{i'}_i e^i,$$

unde

$$A^{i'}_i A^i_{j'} = \delta^{i'}_{j'}, \quad A^i_{i'} A^{i'}_j = \delta^i_j.$$

Corespunzător,

$$e_{i'_1} \otimes \dots \otimes e_{i'_p} \otimes e^{j'_1} \otimes \dots \otimes e^{j'_q} = A^{i_1}_{i'_1} \dots A^{i_p}_{i'_p} A^{j'_1}_{j_1} \dots A^{j'_q}_{j_q} e_{i_1} \otimes$$

$$\otimes \dots \otimes e_{i_p} \otimes e^{j_1} \otimes \dots \otimes e^{j_q}.$$

Aceasta implică

$$v^{i'} = A^{i'}_i v^i, \quad \omega_{j'} = A^j_{j'} \omega_j$$

şi în general

$$T^{i'_1 \dots i'_p}_{j'_1 \dots j'_q} = A^{i'_1}_{i_1} \dots A^{i'_p}_{i_p} A^{j_1}_{j'_1} \dots A^{j_q}_{j'_q} T^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q}.$$

Aceasta din urmă poartă numele de *regula de schimbare a coordonatelor unui tensor la o schimbare a bazei*. Se observă că schimbarea pentru indicii de covarianţă se face cu ajutorul elementelor matricei $A = [A^j_{j'}]$ în timp ce schimbarea pentru indicii de contravarianţă se face cu ajutorul matricei $A^{-1} = [A^{i'}_i]$.

Fie $\omega : V \times \dots \times V \to \mathbb{R}$, $(v_1, \dots, v_q) \to \omega(v_1, \dots, v_q)$, un tensor de tipul $(0, q)$. Acesta se numeşte

1) *simetric* dacă valoarea sa rămîne aceeaşi pentru toate permutările posibile ale argumentelor,

2) *antisimetric* dacă valoarea sa după orice permutare a argumentelor este produsul dintre valoarea înainte de permutare şi semnul permutării.

1.4. *Definiţie. Fie $p > 0, q > 0$, $s = 1, \dots, p$; $t = 1, \dots, q$. Aplicaţia*

$$\mathrm{tr}^i_j : \mathcal{T}^p_q(V) \to \mathcal{T}^{p-1}_{q-1}(V)$$

definită prin

$$(\mathrm{tr}^i_j T)(\omega^1, \dots, \omega^{p-1}, v_1, \dots, v_{q-1}) = \sum_{k=1}^{n} T(\omega^1, \dots, \omega^{s-1}, e^k, \omega^s, \dots, \omega^{p-1},$$

$$v_1, \dots, v_{t-1}, e_k, v_t, \dots, v_{q-1}),$$

unde $\{e_i\}$ este baza lui V, iar $\{e^i\}$ este baza duală din V^*, se numeşte contracţie.

Pe coordonate contracţia acţionează astfel

$$(\mathrm{tr}^i_j T)^{i_1 \dots i_{p-1}}_{j_1 \dots j_{q-1}} = \sum_{k=1} T^{i_1 \dots i_{s-1} k i_s \dots i_{p-1}}_{j_1 \dots j_{t-1} k j_t \dots j_{q-1}}.$$

Exemple. 1) Dacă T^i_j sînt coordonatele unui tensor mixt de ordinul doi, atunci $T^i_i = T^1_1 + \dots + T^n_n$ este un tensor de ordinul zero (număr real). Evident T^i_i este urma matricei ale cărei elemente sînt coordonatele T^i_j.

2) Fie T^i_{jk} un tensor de tipul (1, 2). Contractînd pe i cu j obţinem vectorul covariant T^i_{ik}; contractînd pe i cu k obţinem vectorul covariant T^i_{ji}.

În final presupunem că V este un spaţiu euclidian. Produsul scalar (,) pe V este un tensor covariant de ordinul doi (formă biliniară), simetric şi pozitiv definit. Acesta se numeşte *metrica riemanniană* pe V. Metrica induce transformarea liniară nesingulară (izomorfism) $\mathcal{G} : V \to V^*$, $\mathcal{G}(u)(v) = (u, v)$, $\forall v \in V$. Fie $\mathcal{G}^{-1}$ inversa lui $\mathcal{G}$; dacă $\omega \in V^*$, atunci $(\mathcal{G}^{-1}\omega, v) = \omega(v)$.

Fie $\{e_i\}$ baza ortonormată în V. Dacă notăm $\mathcal{G}(e_i) = e^i$, $i = 1, \dots, n$ atunci $\mathcal{G}(e_i)(e_j) = (e_i, e_j) = \delta_{ij}$, adică $e^i(e_j) = \delta_{ij} (= \delta^i_j)$. Rezultă că mulţimea $\{e^i\}$ este bază duală în V^*.

Fie $\{e^k \otimes e^l\}$ baza în $\mathcal{T}^0_2(V)$. Metrica riemanniană și transformarea liniară nesingulară asociată $\mathcal{G}$ sînt caracterizate prin matricea $[g_{kl}]$ simetrică și pozitiv definită. Inversa lui $[g_{kl}]$ este o matrice simetrică și se notează cu $[g^{kl}]$; deci $g_{kl}g^{kj} = \delta^j_l$. Dacă v^k este un vector din V, atunci $g_{kl}v^k$ este un vector din V^*; dacă ω_k este un vector din V^*, atunci $g^{kl}\omega_k$ este un vector din V. Acestea se extind prin definițiile care urmează.

1.5. *Definiție. Fie* $s = 1, \ldots, p$; $t = 1, \ldots, q$ *și* $T \in \mathcal{T}^p_q(V)$. *Funcția definită prin*

$$\mathcal{G}_{s,t} : \mathcal{T}^p_q(V) \to \mathcal{T}^{p-1}_{q+1}(V),$$

$$(\mathcal{G}_{s,t}T)(\omega^1, \ldots, \omega^{p-1}, v_1, \ldots, v_{q+1}) = T(\omega^1, \ldots, \omega^{s-1}, \mathcal{G}(v_t), \omega^s, \ldots, \omega^{p-1},$$

$$v_1, \ldots, \hat{v}_t, \ldots, v_{q+1}),$$

unde semnul ^ *înseamnă că argumentul respectiv lipsește, se numește coborîrea indicilor.*

Pe coordonate,

$$(\mathcal{G}_{s,t}\, T)^{i_1 \ldots i_{p-1}}_{j_1 \ldots j_{t-1}\, u\, j_{t+1} \ldots j_{q+1}} = g_{ut} T^{i_1 \ldots i_{s-1} t\, i_s \ldots i_{p-1}}_{j_1 \ldots j_{t-1} j_{t+1} \ldots j_{q+1}}.$$

Analog, utilizînd pe $\mathcal{G}^{-1}$, se definește ridicarea indicilor.

Izomorfismul $\mathcal{G}$ permite identificarea lui V cu V^*. De asemenea prin intermediul coborîrii și ridicării indicilor el induce un izomorfism între $\mathcal{T}^p_q(V)$ și $\mathcal{T}^0_{p+q}(V)$. În acest context vorbim despre coordonatele contravariante, mixte sau covariante (după caz) ale aceluiași tensor. De exemplu,

$$g^{li}g^{sk}\, T_{ik}\,, g^{li}\, T_{ik}\,, T_{ik}$$

sînt respectiv coordonatele contravariante, mixte și covariante ale tensorului de ordinul doi $T = T_{ik}e^i \otimes e^k$.

§2. Cîmpuri tensoriale

Fie $\mathbb{M}$ o mulțime deschisă din $\mathbb{R}^n$. Mulțimea $\mathcal{F}(\mathbb{M})$ a tuturor funcțiilor reale (cîmpurilor scalare) diferențiabile de clasă C^∞ definite pe $\mathbb{M}$ este un spațiu vectorial real. Deoarece înmulțirea funcțiilor reale este o operație $\mathbb{R}$-biliniară, comutativă, mulțimea $\mathcal{F}(\mathbb{M})$ este o *algebră comutativă*.

Fie $x = (x^1, \ldots, x^n) \in \mathbb{M}$ și $f \in \mathcal{F}(\mathbb{M})$. Unui vector X_x tangent la $\mathbb{M}$ în punctul x i se asociază numărul

$$X_x(f) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(x + tX)|_{t=0}$$

numit *derivata lui f în raport cu* X_x sau *derivata lui f după direcția* X_x. Derivata după o direcție are următoarele proprietăți

$$X_x(af + bg) = aX_x(f) + bX_x(g)$$

$$X_x(fg) = (X_x(f))g(x) + f(x)X_x(g)$$

$$(aX_x + bY_x)(f) = aX_x(f) + bY_x(f),$$

unde X_x, Y_x sînt vectorii tangenți la $\mathbb{M}$ în punctul x, a și $b \in \mathbb{R}$, $f, g \in \mathcal{F}(\mathbb{M})$.

Să privim acum lucrurile dintr-un alt punct de vedere. Se observă că dacă dăm regula $f \to X_x(f)$, atunci X_x este bine determinat. Astfel sintem conduşi la următoarea definiţie care este potrivită pentru teoria cimpurilor vectoriale.

2.1. *Definiţie. O funcţie $X_x : \mathscr{F}(\mathbb{M}) \to \mathbb{R}$ cu proprietăţile*

$$X_x(af + bg) = aX_x(f) + bX_x(g)$$

$$X_x(fg) = (X_x(f))g(x) + f(x)X_x(g),$$

unde $a, b \in \mathbb{R}, f, g \in \mathscr{F}(\mathbb{M})$, se numeşte vector tangent la $\mathbb{M}$ în punctul x.

În acest context se observă că funcţia definită prin $O_x(f) = 0$, $\forall f \in \mathscr{F}(\mathbb{M})$, deci *vectorul zero*, ca şi operatorii $\left.\frac{\partial}{\partial x^1}\right|_x, \ldots, \left.\frac{\partial}{\partial x^n}\right|_x$ sînt vectori tangenţi la $\mathbb{M}$ în punctul x. De asemenea, dacă $f = g = 1$, atunci $X_x(1) = 2X_x(1)$ şi deci $X_x(1) = 0$. În plus $X_x(c) = cX_x(1) = 0$, pentru orice funcţie constantă c. Identificînd funcţiile constante cu valorile lor putem spune că valorile oricărui vector tangent pentru scalari sînt nule.

Fie $T_x\mathbb{M}$ mulţimea tuturor vectorilor tangenţi la $\mathbb{M}$ în punctul x. Elementele lui $T_x\mathbb{M}$ sînt funcţii reale definite pe $\mathscr{F}(\mathbb{M})$ şi deci are sens suma a doi vectori tangenţi şi produsul dintre un număr real şi un vector tangent. Mai mult, pentru fiecare $x \in \mathbb{M}$, mulţimea $T_x\mathbb{M}$ este un spaţiu vectorial real.

2.2. Teoremă. Mulţimea $\left\{\frac{\partial}{\partial x^i},\ i = 1, \ldots, n\right\}_{x_0}$ este o bază a spaţiului vectorial $T_{x_0}\mathbb{M}$ (reper în punctul x_0).

Demonstraţie. Evident $\left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_{x_0}$, $i = 1, \ldots, n$, fac parte din $T_{x_0}\mathbb{M}$. Să arătăm că ei sînt liniar independenţi. Pentru aceasta pornim de la relaţia $a^i \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_{x_0} = 0$ şi folosim funcţiile coordonate $x^j : \mathbb{M} \to \mathbb{R}$, $j = 1, \ldots, n$. În baza definiţiei 2.1, a faptului că $T_{x_0}\mathbb{M}$ este un spaţiu vectorial şi a observaţiei $\frac{\partial x^j}{\partial x^i} = \delta_i^j$ rezultă $0 = a^i \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_{x_0}(x^j) = a^i \left.\frac{\partial x^j}{\partial x^i}\right|_{x_0} = a^i\delta_i^j = a^j, j = 1, \ldots, n$.

A rămas să demonstrăm că $\left\{\frac{\partial}{\partial x^i},\ i = 1, \ldots, n\right\}_{x_0}$ generează pe $T_{x_0}\mathbb{M}$. Pentru aceasta observăm că pe o vecinătate convexă a lui x_0 şi pentru orice $f \in \mathscr{F}(\mathbb{M})$ avem

$$f(x) = f(x_0) + \int_0^1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(x_0 + t(x - x_0))\,\mathrm{d}t = f(x_0) + \int_0^1 \sum_{i=1}^{n} \left.\frac{\partial f}{\partial x^i}\right|_{(x_0 + t(x - x_0))} (x^i - x_0^i)\mathrm{d}t =$$

$$= f(x_0) + \sum_{i=1}^{n} (x^i - x_0^i)g_i(x), \text{ unde } g_i(x_0) = \frac{\partial f}{\partial x^i}(x_0).$$

Conform definiţiei 2.1 şi a observaţiei că valorile lui X_x pe constante sînt nule găsim

$$X_x(f) = \sum_{i=1}^{n} X_x(x^i - x_0^i)g_i(x) + \sum_{i=1}^{n} (x^i - x_0^i)\, X_x(g_i) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} X_x(x^i)g_i(x) + \sum_{i=1}^{n} (x^i - x_0^i) X_x(g_i).$$

Înlocuirea $x = x_0$ implică

$$X_{x_0}(f) = \sum_{i=1}^{n} X_{x_0}(x^i) \frac{\partial f}{\partial x^i}(x_0).$$

Ţinînd seama că $f \in \mathscr{F}(\mathbb{M})$ este arbitrară şi notînd $X_{x_0}(x^i) = a^i$ deducem

$$X_{x_0} = a^i \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_{x_0}.$$

Numerele $X_{x_0}(x^i) = a^i$ se numesc *coordonatele* lui X_{x_0}, iar reperul $\left\{\frac{\partial}{\partial x^i},\ i = 1, \ldots, n\right\}_{x_0}$ se numeşte *reper natural.*

Dacă raportăm pe $T_{x_0}\mathbb{M}$ la reperul natural, atunci adunarea a doi vectori se reduce la adunarea coordonatelor corespondente, iar inmulţirea unui vector cu un număr real se reduce la inmulţirea coordonatelor vectorului cu acel număr.

Exemplu. Pentru $X = 2\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y}$, $Y = \frac{\partial}{\partial x} + 7\frac{\partial}{\partial y}$ şi $k \in \mathbb{R}$ găsim

$$X + Y = 3\frac{\partial}{\partial x} + 6\frac{\partial}{\partial y},\ kX = 2k\frac{\partial}{\partial x} - k\frac{\partial}{\partial y}.$$

2.3. *Definiţie. O funcţie* $X : \mathbb{M} \to \bigcup_{x \in \mathbb{M}} T_x\mathbb{M}$, $X(x) \in T_x\mathbb{M}$, *se numeşte cîmp vectorial pe* $\mathbb{M}$.

Adunarea dintre două cîmpuri vectoriale şi produsul dintre o funcţie reală şi un cîmp vectorial se definesc punctual.

Cîmpurile vectoriale definite prin

$$x \to \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_x,\ i = 1, \ldots, n$$

şi notate cu $\frac{\partial}{\partial x^i}$, $i = 1, \ldots, n$, se numesc *cîmpuri fundamentale*. Ansamblul lor se numeşte *cîmpul reperului natural*.

2.4. Teoremă. Dacă X este un cîmp vectorial pe $\mathbb{M}$, atunci există n funcţii reale $X^i : \mathbb{M} \to \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, n$ astfel incît

$$X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

Demonstrație. Prin definiție X asociază lui $x \in \mathbb{M}$ un vector $X(x)$ tangent la $\mathbb{M}$ în punctul x. Dar $X(x) = X^i(x) \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_x$ și regulile $x \to X^i(x)$, $x \in \mathbb{M}$ definesc (unic) funcțiile $X^i : \mathbb{M} \to \mathbb{R}$.

Funcțiile reale X^i se numesc *coordonatele cîmpului* X. Cîmpul vectorial $X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ se numește diferențiabil (de clasă C^∞) dacă funcțiile coordonate sînt diferențiabile (de clasă C^∞).

Exemplu. $X(x, y) = 2x \frac{\partial}{\partial x} + e^y \frac{\partial}{\partial y}$ este un cîmp vectorial de clasă C^∞.

Alternativ, cîmpul vectorial X poate fi privit ca fiind aplicația $X : \mathscr{F}(\mathbb{M}) \to \mathscr{F}(\mathbb{M})$ cu proprietățile

$$X(af + bg) = aX(f) + bX(g)$$

$$X(fg) = (X(f))g + fX(g),$$

unde $a, b \in \mathbb{R}$, iar $f, g \in \mathscr{F}(\mathbb{M})$.

2.5. *Definiție. Fie X și Y două cîmpuri vectoriale diferențiabile de clasă C^∞ pe $\mathbb{M}$. Cîmpul vectorial $[X, Y]$ definit prin $f \to [X, Y](f) = X(Y(f)) - Y(X(f))$ se numește croșetul cîmpurilor X și Y.*

Evident $[X, Y] = -[Y, X]$. De asemenea pentru orice trei cîmpuri vectoriale diferențiabile X, Y, Z se satisface *identitatea lui Jacobi*

$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0.$$

Mulțimea $\mathscr{X}(\mathbb{M})$ a tuturor cîmpurilor vectoriale diferențiabile de clasă C^∞ pe $\mathbb{M}$ este un spațiu vectorial real infinit dimensional. Deoarece croșetul $[,] : \mathscr{X}(\mathbb{M}) \times \mathscr{X}(\mathbb{M}) \to \mathscr{X}(\mathbb{M})$ este biliniar peste cîmpul numerelor reale, mulțimea $\mathscr{X}(\mathbb{M})$ este ceea ce se cheamă o *algebră*; croșetul fiind anticomutativ și verificînd identitatea lui Jacobi, algebra $\mathscr{X}(\mathbb{M})$ se numește *algebră Lie*.

Fie $T_x \mathbb{M}$ spațiul tangent la $\mathbb{M}$ în punctul x și ω_x o 1-formă în x, adică o transformare liniară $\omega_x : T_x \mathbb{M} \to \mathbb{R}$. Mulțimea tuturor 1-formelor în x este un spațiu vectorial real de dimensiune n, dualul lui $T_x \mathbb{M}$. Acest spațiu vectorial se numește *spațiul cotangent* la $\mathbb{M}$ în x și se notează cu $T_x^* \mathbb{M}$.

2.6. *Definiție. Fie $f \in \mathscr{F}(\mathbb{M})$. Funcția $\mathrm{d}f_x : T_x \mathbb{M} \to \mathbb{R}$ definită prin $\mathrm{d}f_x(X_x) = X_x(f)$ se numește diferențiala lui f în punctul x.*

Această definiție împreună cu definiția vectorilor tangenți arată că $\mathrm{d}f_x$ este o 1-formă în x.

2.7. Teoremă. Fie $x^j : \mathbb{M} \to \mathbb{R}$, $j = 1, \ldots, n$, funcțiile coordonate pe $\mathbb{M}$. Mulțimea $\{\mathrm{d}x^j, j = 1, \ldots, n\}_{x_0}$ este o bază a lui $T_{x_0}^* \mathbb{M}$ (reper în punctul x_0).

Demonstrație. Evident $\mathrm{d}x^j|_{x_0}$, $j = 1, \ldots, n$, aparțin lui $T_{x_0}^* \mathbb{M}$. Fie $\left\{\frac{\partial}{\partial x^i}, i = 1, \ldots, n\right\}_{x_0}$ reperul natural în $T_{x_0} \mathbb{M}$. Ținînd seama de definiția 2.6 deducem

$$\mathrm{d}x^j|_{x_0} \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_{x_0} = \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_{x_0} (x^j) = \left.\frac{\partial x^j}{\partial x^i}\right|_{x_0} = \delta_i^j, \; i, j = 1, \ldots, n,$$

și deci $\{\mathrm{d}x^j, j = 1, \ldots, n\}_{x_0}$ este bază duală.

Reperul $\{dx^j, j = 1, \ldots, n\}_{x_0}$ se numește *coreper natural* în x_0.

Fie $X_x = a^i \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_x$. Rezultă $dx^j|_x(X_x) = a^i dx^j|_x \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_x = a^j$. De asemenea orice 1-formă $\omega_x \in T_x^* \mathbb{M}$ se scrie $\omega_x = \omega_j dx^j|_x$, ω_j fiind coordonatele lui ω_x în raport cu coreperul natural. Rezultă $\omega_x \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_x = \omega_i$, adică coordonatele 1-formei ω_x sînt valorile lui ω_x pentru vectorii reperului natural în x.

Fie $\mathscr{F}(\mathbb{M})$ algebra funcțiilor reale diferențiabile pe $\mathbb{M}$ și $\mathscr{X}(\mathbb{M})$ algebra Lie a cîmpurilor vectoriale diferențiabile pe $\mathbb{M}$.

2.8. *Definiție. O funcție* $\omega : \mathscr{X}(\mathbb{M}) \to \mathscr{F}(\mathbb{M})$, *$\mathscr{F}(\mathbb{M})$-liniară, $\omega(X)$-diferențiabilă $\forall X \in \mathscr{X}(\mathbb{M})$, se numește 1-formă diferențială pe $\mathbb{M}$.*

Adunarea a două 1-forme și produsul dintre o funcție reală și o 1-formă se definesc punctual.

Fie ω o 1-formă diferențială. Valorile ω_x sînt 1-forme în x. De aceea expresia locală a unei 1-forme diferențiale este $\omega_x = \omega_j(x) dx^j|_x$. Mai scurt, putem scrie $\omega = \omega_j dx^j$ deoarece 1-formele diferențiale $dx^1, \ldots$ $\ldots, dx^n$ sînt duale cîmpurilor fundamentale $\frac{\partial}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}$. Ansamblul $\{dx^j, j = 1, \ldots, n\}$ se numește *cîmpul coreperului natural*. Mulțimea tuturor 1-formelor diferențiale pe $\mathbb{M}$ va fi notată cu $\mathscr{X}^*(\mathbb{M})$.

O mulțime ordonată $\{X_1, \ldots, X_n\}$ de cîmpuri vectoriale se numește *cîmp de repere* pe $\mathbb{M}$ dacă $\{X_1(x), \ldots, X_n(x)\}$ este o bază în $T_x \mathbb{M}$, $\forall x \in \mathbb{M}$. Analog se definește *cîmpul de corepere* $\{\omega^1, \ldots, \omega^n\}$. Acestea se numesc *duale* unul altuia dacă $\omega^b(X_a) = \delta_a^b$. În general, cîmpurile de repere (sau de corepere) nu există decît pe o vecinătate a punctului x din $\mathbb{M}$.

Dacă $\{X_a, a = 1, \ldots, n\}$ este un cîmp de repere pe $\mathbb{M}$, atunci orice alt cîmp vectorial V se exprimă în forma $V = V^a X_a$. Analog, dacă $\{\omega^b, b = 1, \ldots, n\}$ este un cîmp de corepere, atunci orice altă 1-formă diferențială η se exprimă în forma $\eta = \eta_b \omega^b$.

2.9. *Definiție. Fie $\mathscr{T}_q^p(T_x \mathbb{M})$ mulțimea tuturor tensorilor de tipul (p, q) pe spațiul tangent $T_x \mathbb{M}$. O funcție*

$$T : \mathbb{M} \to \bigcup_{x \in \mathbb{M}} \mathscr{T}_q^p(T_x \mathbb{M}), \quad T(x) \in \mathscr{T}_q^p(T_x \mathbb{M}),$$

se numește cîmp tensorial de tipul (p, q) pe $\mathbb{M}$.

Fie $\mathscr{T}_q^p(\mathbb{M})$ mulțimea tuturor cîmpurilor tensoriale pe $\mathbb{M}$ de tipul (p, q). Adunarea a două elemente din această mulțime ca și produsul dintre o funcție reală și un cîmp vectorial se definesc punctual. Mulțimea $\mathscr{T}_q^p(\mathbb{M})$ este un spațiu vectorial real infinit dimensional. Identificări : $\mathscr{T}_0^0(\mathbb{M}) = \mathscr{F}(\mathbb{M})$, $\mathscr{T}_0^1(\mathbb{M}) = \mathscr{X}(\mathbb{M})$, $\mathscr{T}_1^0(\mathbb{M}) = \mathscr{X}^*(\mathbb{M})$.

Deoarece baza canonică în $\mathscr{T}_q^p(T_x \mathbb{M})$ este

$$\left\{\frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \otimes \ldots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_p}} \otimes dx^{j_1} \otimes \ldots \otimes dx^{j_q}\right\}_x$$

expresia în coordonate a lui T este

$$T(x) = T^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q}(x) \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \otimes \ldots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_p}} \otimes dx^{j_1} \otimes \ldots \otimes dx^{j_q}.$$

Cimpul T se numește *diferențiabil* dacă funcțiile coordonate $T^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q}$ sint diferențiabile.

Echivalent, un cimp tensorial de tipul (p, q) este o funcție

$$T : \underbrace{\mathscr{X}^*(\mathbb{M}) \times \ldots \times \mathscr{X}^*(\mathbb{M})}_{p \text{ factori}} \times \underbrace{\mathscr{X}(\mathbb{M}) \times \ldots \times \mathscr{X}(\mathbb{M})}_{q \text{ factori}} \to \mathscr{F}(\mathbb{M}),$$

$$(\omega^1, \ldots, \omega^p, X_1, \ldots, X_q) \to T(\omega^1, \ldots, \omega^p, X_1, \ldots, X_q),$$

$\mathscr{F}(\mathbb{M})$-liniară în fiecare argument. Identificarea $\mathscr{T}^1_0(\mathbb{M}) = \mathscr{X}(\mathbb{M})$ impune definiția $X(\omega) = \omega(X)$, $X \in \mathscr{X}(\mathbb{M})$, $\omega \in \mathscr{X}^*(\mathbb{M})$.

Definițiile cimpurilor tensoriale *simetrice* respectiv *antisimetrice* ca și definițiile *produsului tensorial* și *contracției* pentru cimpuri tensoriale sint evidente.

Fie $S^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q}$ coordonatele cimpului tensorial S, fie $T^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q}$ coordonatele cimpului tensorial T și fie $f \in \mathscr{F}(\mathbb{M})$. Coordonatele cimpurilor $fS, S + T$ și $S \otimes T$ sint respectiv

$$fS^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q},\ S^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q} + T^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q},\ S^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q}\ T^{k_1\ldots k_p}_{l_1\ldots l_q}.$$

Fie x un punct din $\mathbb{M}$ caracterizat pe de o parte prin coordonatele $(x^1, \ldots, x^n) = (x^i)$, iar pe de altă parte prin coordonatele $(x^{1'}, \ldots, x^{n'}) = (x^{i'})$, schimbarea de coordonate fiind $x^{i'} = x^{i'}(x^i)$ cu inversa $x^i = x^i(x^{i'})$, pe o vecinătate a lui x conținută în $\mathbb{M}$. Baza $\left\{\dfrac{\partial}{\partial x^i}\right\}_x$ se schimbă în $\left\{\dfrac{\partial}{\partial x^{i'}}\right\}_x$ cu legătura $\left.\dfrac{\partial}{\partial x^i}\right|_x = \dfrac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}(x^i)\left.\dfrac{\partial}{\partial x^{i'}}\right|_x$; corespunzător baza duală $\{dx^j\}_x$ se schimbă în $\{dx^{j'}\}_x$ cu legătura $dx^j|_x = \dfrac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}(x^{j'})\, dx^{j'}|_x$.

Evident,

$$\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}\frac{\partial x^i}{\partial x^{j'}} = \delta^{i'}_{j'},\ \ \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^j} = \delta^i_j.$$

Corespunzător

$$\frac{\partial}{\partial x^{i'_1}} \otimes \ldots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i'_p}} \otimes dx^{j'_1} \otimes \ldots \otimes dx^{j'_q} = \frac{\partial x^{i_1}}{\partial x^{i'_1}} \ldots \frac{\partial x^{i_p}}{\partial x^{i'_p}} \frac{\partial x^{j'_1}}{\partial x^{j_1}} \ldots$$

$$\ldots \frac{\partial x^{j'_q}}{\partial x^{j_q}} \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \otimes \ldots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_p}} \otimes dx^{j_1} \otimes \ldots \otimes dx^{j_q}$$

Acestea implică

$$X^{i'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} X^i, \quad \omega_{j'} = \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} \omega_j$$

şi in general

$$T^{i'_1 \dots i'_p}_{j'_1 \dots j'_q} = \frac{\partial x^{i'_1}}{\partial x^{i_1}} \dots \frac{\partial x^{i'_p}}{\partial x^{i_p}} \frac{\partial x^{j_1}}{\partial x^{j'_1}} \dots \frac{\partial x^{j_q}}{\partial x^{j'_q}} T^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q}.$$

Observaţie. În acest paragraf, ca şi în § 3, 4, 5, mulţimea deschisă $\mathbb{M}$ poate fi înlocuită cu orice subvarietate de dimensiune $m \geqslant 1$, cu sau fără frontieră, a lui $\mathbb{R}^n$.

§3. Conexiune liniară

Fie Y un cîmp vectorial diferenţiabil definit pe mulţimea deschisă $\mathbb{M}$ din $\mathbb{R}^n$ şi X_x un vector tangent la $\mathbb{M}$ în punctul x. Vectorul

$$\mathrm{D}_{X_x} Y = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} Y(x + tX)\Big|_{t=0}$$

tangent în $\mathbb{M}$ în punctul x se numeşte *derivata covariantă a lui Y în raport cu X_x*. Dacă $Y = Y^i \frac{\partial}{\partial x^i}$, atunci $\mathrm{D}_{X_x} Y = X_x(Y^i) \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_x$.
Această noţiune se extinde la *derivata covariantă a unui cîmp vectorial Y în raport cu cîmpul vectorial X*. Rezultatul este un cîmp vectorial care se notează cu $\mathrm{D}_X Y$ şi a cărui valoare este $\mathrm{D}_{X(x)} Y$; pe coordonate, $\mathrm{D}_X Y = X(Y^i) \frac{\partial}{\partial x^i}$. Această derivată are următoarele proprietăţi

$$\mathrm{D}_{fX+gY} Z = f\mathrm{D}_X Z + g\mathrm{D}_Y Z$$

(1) $$\mathrm{D}_X(aY + bZ) = a\mathrm{D}_X Y + b\mathrm{D}_X Z$$

$$\mathrm{D}_X(fY) = X(f)Y + f\mathrm{D}_X Y,$$

unde $f, g \in \mathscr{F}(\mathbb{M})$, $a, b \in \mathbb{R}$ şi $X, Y, Z \in \mathscr{X}(\mathbb{M})$.

3.1. *Definiţie. O funcţie* $\mathrm{D} : \mathscr{X}(\mathbb{M}) \times \mathscr{X}(\mathbb{M}) \to \mathscr{X}(\mathbb{M})$, $(X, Y) \to \mathrm{D}_X Y$, *cu proprietăţile (1) se numeşte conexiune liniară sau derivare covariantă pe $\mathbb{M}$.*

Fie D o conexiune liniară pe $\mathbb{M}$. Funcţiile reale $\Gamma^h_{ij} : \mathbb{M} \to \mathbb{R}$, $h, i, j = 1, \dots, n$, definite prin

$$\mathrm{D}_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} = \Gamma^h_{ij} \frac{\partial}{\partial x^h}$$

se numesc *componentele conexiunii* D. Aceste n^3 funcţii reale determină unic pe $\mathrm{D}_X Y$. Într-adevăr, dacă $X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$, $Y = Y^j \frac{\partial}{\partial x^j}$, atunci

$$\mathrm{D}_X Y = \mathrm{D}_{X^i \frac{\partial}{\partial x^i}} \left(Y^j \frac{\partial}{\partial x^j} \right) = X^i \mathrm{D}_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \left(Y^j \frac{\partial}{\partial x^j} \right) = X^i \left(\frac{\partial Y^j}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j} + Y^j \mathrm{D}_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} \right) =$$

$$= \left(\frac{\partial Y^j}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j} + Y^j \Gamma^h_{ij} \frac{\partial}{\partial x^h} \right) X^i = \left(\frac{\partial Y^j}{\partial x^i} + \Gamma^j_{ih} Y^h \right) X^i \frac{\partial}{\partial x^j} = Y^j_{,i} X^i \frac{\partial}{\partial x^j},$$

unde s-a notat

$$Y^j_{,i} = \frac{\partial Y^j}{\partial x^i} + \Gamma^j_{ih} Y^h.$$

O conexiune D determină următoarele două cîmpuri tensoriale:

1) unul de tipul (1,2), $T : \mathscr{X}(\mathbb{M}) \times \mathscr{X}(\mathbb{M}) \to \mathscr{X}(\mathbb{M})$, $T(X, Y) = \mathrm{D}_X Y - \mathrm{D}_Y X - [X, Y]$,
numit *cîmpul tensorial de torsiune*;

2) altul de tipul (1,3), $R : \mathscr{X}(\mathbb{M}) \times \mathscr{X}(\mathbb{M}) \times \mathscr{X}(\mathbb{M}) \to \mathscr{X}(\mathbb{M})$, $R(X, Y)Z = \mathrm{D}_X(\mathrm{D}_Y Z) - \mathrm{D}_Y(\mathrm{D}_X Z) - \mathrm{D}_{[X,Y]}Z$, numit *cîmpul tensorial de curbură*.

Coordonatele lui T şi R în raport cu bazele canonice sînt respectiv

$$T^i_{jk} = \Gamma^i_{jk} - \Gamma^i_{kj},$$

$$R^h_{ijk} = \frac{\partial \Gamma^h_{ki}}{\partial x^j} - \frac{\partial \Gamma^h_{ji}}{\partial x^k} + \Gamma^r_{ki}\Gamma^h_{jr} - \Gamma^r_{ji}\Gamma^h_{kr}.$$

Conexiunea D se numeşte *simetrică* dacă $T = 0$ sau echivalent $\Gamma^i_{jk} = \Gamma^i_{kj}$.

La o schimbare a bazei în punctul x, componentele conexiunii se schimbă după legea locală

$$\frac{\partial^2 x^{i'}}{\partial x^j \partial x^k} = \Gamma^{i'}_{j'k'} \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^j} \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^k} - \Gamma^h_{jk} \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^h}.$$

Fie D o conexiune pe $\mathbb{M}$ şi $X \in \mathscr{X}(\mathbb{M})$. Conexiunea D induce *derivarea covariantă în raport cu* X, notată D_X, care aplică pe $\mathscr{T}^p_q(\mathbb{M})$ în el însuşi. Operatorul D_X se defineşte prin

$$\mathrm{D}_X f = X(f),\ f \in \mathscr{F}(\mathbb{M}),$$

$$\mathrm{D}_X Y = \text{conexiunea pe } \mathbb{M},$$

$$(\mathrm{D}_X \omega)(Y) = X(\omega(Y)) - \omega(\mathrm{D}_X Y),\ \omega \in \mathscr{T}^0_1(\mathbb{M}),$$

$$(\mathrm{D}_X T)(\omega^1, \ldots, \omega^p, Y_1, \ldots, Y_q) = X(T(\omega^1, \ldots, \omega^p, Y_1, \ldots, Y_q)) -$$

$$- T(\mathrm{D}_X \omega^1, \omega^2, \ldots, \omega^p, Y_1, \ldots, Y_q) - \ldots - T(\omega^1, \ldots, \omega^p,$$

$$Y_1, \ldots, \mathrm{D}_X Y_q), \quad T \in \mathscr{T}^p_q(\mathbb{M}).$$

Se verifică relaţia

$$\mathrm{D}_X(S \otimes T) = \mathrm{D}_X S \otimes T + S \otimes \mathrm{D}_X T,\ \forall S, T.$$

Dacă $\mathrm{D}_X T = 0$, $\forall X \in \mathscr{X}(\mathbb{M})$, atunci T se numeşte *cîmp tensorial paralel* în raport cu D.

Operatorul D_X induce un *operator general de derivare covariantă* care aplică pe $\mathscr{T}^p_q(\mathbb{M})$ în $\mathscr{T}^p_{q+1}(\mathbb{M})$. Acesta comută cu contracţia.

Iată cîteva reguli de derivare covariantă pe coordonate:

$$Y^j_{,i} = \frac{\partial Y^j}{\partial x^i} + \Gamma^j_{ih} Y^h, \quad \omega_{j,i} = \frac{\partial \omega_j}{\partial x^i} - \Gamma^h_{ij}\omega_h,$$

$$T^i_{j,k} = \frac{\partial T^i_j}{\partial x^k} + \Gamma^i_{kh} T^h_j - \Gamma^h_{kj} T^i_h, \quad (Y^i\omega_j)_{,k} = Y^i_{,k}\omega_j + Y^i\omega_{j,k}.$$

§4. Metrici riemanniene

Reamintim că un produs scalar pe $T_x\mathbb{M}$ se numește metrică riemanniană pe $T_x\mathbb{M}$.

4.1. *Definiție. Un cîmp tensorial g de tipul* (0,2) pe $\mathbb{M}$ *cu proprietatea că pentru fiecare $x \in \mathbb{M}$ tensorul $g(x)$ este o metrică riemanniană pe $T_x\mathbb{M}$ se numește cîmp tensorial metric sau metrică riemanniană pe $\mathbb{M}$. Perechea $(\mathbb{M}, g)$ se numește varietate Riemann.*

Cu ajutorul lui g putem defini *norma* pentru cîmpurile vectoriale, $\| X \|^2 = g(X, X)$, și unghiul a două cîmpuri tensoriale X, Y nenule,

$$\cos \theta = \frac{g(X, Y)}{\| X \| \, \| Y \|}, \quad \theta \in [0, \pi].$$

De asemenea metrica riemanniană g induce operațiile de ridicare și coborîre a indicilor pentru orice cîmp tensorial pe $\mathbb{M}$.

Dacă există, un cîmp de repere $\{X_1, \ldots, X_n\}$ pe $\mathbb{M}$ se numește *ortonormat* dacă $g(X_a, X_b) = \delta_{ab}$, adică $\{X_1(x), \ldots, X_n(x)\}$ este o bază ortonormată în $T_x\mathbb{M}$, $\forall\, x \in \mathbb{M}$.

Local avem exprimarea $g = g_{ij}\, dx^i \otimes dx^j$, unde $g_{ij} = g\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right)$.

De asemenea reamintim că dacă coordonatele (x^i) ale punctului x se schimbă în $(x^{i'})$, atunci funcțiile g_{ij} se schimbă după legea (locală)

$$g_{i'j'} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}} \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} g_{ij}.$$

4.2. Teoremă. Pe spațiul riemannian $(\mathbb{M}, g)$ există o singură conexiune simetrică D cu proprietatea

$$D_X(g(Y, Z)) = g(D_X Y, Z) + g(Y, D_X Z), \quad \forall\, X, Y, Z \in \mathscr{X}(\mathbb{M}),$$

numită conexiune riemanniană.

Demonstrație. Mai întîi observăm că relația din teoremă este echivalentă cu $D_X g = 0$, $\forall X \in \mathscr{X}(\mathbb{M})$, adică cu faptul că g este un cîmp tensorial paralel în raport cu D. Pentru simplificarea demonstrației vom lucra direct pe coordonate; fie g_{ij} coordonatele lui g și Γ^h_{ij} componentele lui D. Prin ipoteză

$$\Gamma^h_{ij} = \Gamma^h_{ji}, \quad g_{ij,k} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} - \Gamma^h_{ki} g_{hj} - \Gamma^h_{kj} g_{hi} = 0.$$

Rezultă

$$\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} = 2g_{hk}\Gamma^h_{ij}$$

şi deci

$$\Gamma^h_{ij} = 1/2g^{hk}\left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\right).$$

Astfel conexiunea riemanniană este caracterizată prin *simbolurile Christoffel*.

Exemple de metrici. 1) metrica uzuală pe $\mathbb{R}^n$, $g(X_x, Y_x) = (X_x, Y_x)$ = produsul scalar canonic: $g_{ij}(x) = \delta_{ij}$.

2) metrica stereografică pe $\mathbb{R}^n$, $g(X_x, Y_x) = \frac{4}{(1 + k\|x\|^2)^2}(X_x, Y_x)$, $k \geq 0$; $g_{ij}(x) = \frac{4}{(1 + k\|x\|^2)^2}\delta_{ij}$.

3) metrica pe $\mathbb{M} = \left\{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|^2 < \frac{1}{-k},\ k < 0\right\}$, $g(X_x, Y_x) = \frac{4}{(1 + k\|x\|^2)^2}(X_x, Y_x)$; $g_{ij}(x) = \frac{4}{(1 + k\|x\|^2)^2}\delta_{ij}$.

4) metrica Poincaré pe $\mathbb{M} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ y > 0\}$; $g_{ij}(x, y) = \frac{1}{y^2}\delta_{ij}$.

Facem precizarea că în unele lucrări, metrica este dată prin pătratul elementului de arc, $ds^2 = g_{ij}dx^i dx^j$.

Fie $g_{ij} = \delta_{ij}$ metrica uzuală pe $\mathbb{M} = \mathbb{R}^n$ şi (x^i) coordonatele euclidiene (sistem de coordonate ortonormat) ale punctului $x \in \mathbb{R}^n$. În acest caz, pentru orice cîmp tensorial, coordonatele covariante, mixte sau contravariante coincid. În particular pentru un cîmp vectorial coordonatele contravariante coincid cu cele covariante şi cu cele obişnuite din geometria analitică elementară numite *deseori coordonate fizice*.

Presupunem că de la coordonatele euclidiene (x^i) trecem la alte coordonate $(x^{i'})$, tot ale punctului x. Rezultă

$$g_{i'j'} = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}}\delta_{ij} = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}\frac{\partial x^i}{x^{j'}}.$$

Sistemul de coordonate $(x^{i'})$ se numeşte *ortogonal* dacă $g_{i'j'} = 0$ pentru $i' \neq j'$. În acest caz $g_{i'i'}(x) > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$ şi funcţiile $h_{i'} = \sqrt{g_{i'i'}}$, $i' = 1', \ldots, n'$, se numesc *coeficienţii Lamé*.

Fixăm un sistem de coordonate $(x^{i'})$ ortogonal. Fie cîmpul vectorial $X = X^{i'}\frac{\partial}{\partial x^{i'}}$. Coordonatele covariante ale lui X sînt $X_{j'} = \sum_{i'=1}^{n'} g_{j'i'}X^{i'} = h_{j'}^2 X^{j'}$ (fără sumare după j'). Pe de altă parte observăm că ansamblul format din cîmpurile vectoriale

$$t_{i'} = \frac{\partial x^1}{\partial x^{i'}}\frac{\partial}{\partial x^1} + \ldots + \frac{\partial x^n}{\partial x^{i'}}\frac{\partial}{\partial x^n},\quad i' = 1', \ldots, n',$$

este un cîmp de repere pe $\mathbb{R}^n$. Ortonormînd acest cîmp de repere în raport cu metrica uzuală obținem

$$e_{1'} = \frac{1}{h_{1'}} t_{1'}, \ldots, e_{n'} = \frac{1}{h_{n'}} t_{n'}.$$

Cu aceasta obținem exprimarea

$$X = X^{i'} \frac{\partial}{\partial x^{i'}} = X^{i'} \frac{\partial x^j}{\partial x^{i'}} \frac{\partial}{\partial x^j} = X^{1'} t_{1'}, \ldots + X^{n'} t_{n'} =$$

$$= (h_{1'} X^{1'}) e_{1'} + \ldots + (h_{n'} X^{n'}) e_{n'},$$

coordonatele

$$X_{x^{1'}} = h_{1'} X^{1'}, \ldots, X_{x^{n'}} = h_{n'} X^{n'}$$

numindu-se *coordonate fizice* pentru X.

§5. Operatori diferențiali

Fie $(\mathbb{M}, g)$ o varietate riemanniană, fie $\mathcal{F}(\mathbb{M})$ algebra funcțiilor diferențiabile de clasă C^∞ pe $\mathbb{M}$ și $\mathcal{X}(\mathbb{M})$ algebra Lie a cîmpurilor vectoriale diferențiabile de clasă C^∞ pe $\mathbb{M}$.

Gradient. Fie $f \in \mathcal{F}(\mathbb{M})$. Cîmpul vectorial grad f definit prin

$$g(X, \operatorname{grad} f) = X(f) = \mathrm{d}f(X), \ \forall X \in \mathcal{X}(\mathbb{M})$$

se numește *gradientul* lui f.

În coordonate,

$$\operatorname{grad} f = g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^j} \frac{\partial}{\partial x^i} \ ; \ (\operatorname{grad} f)^i = g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^j}.$$

Din definiție se observă că grad f este ortogonal hipersuprafețelor de nivel constant atașate lui f.

Se verifică următoarele relații

$$\operatorname{grad}(a_1 f_1 + a_2 f_2) = a_1 \operatorname{grad} f_1 + a_2 \operatorname{grad} f_2$$

$$\operatorname{grad}(f_1 f_2) = f_1 \operatorname{grad} f_2 + f_2 \operatorname{grad} f_1$$

$$\operatorname{grad} \frac{f_1}{f_2} = \frac{f_2 \operatorname{grad} f_1 - f_1 \operatorname{grad} f_2}{f_2^2}.$$

Demonstrație. $g(X, \operatorname{grad}(f_1 f_2)) = X(f_1 f_2) = f_1 X(f_2) + f_2 X(f_1) = f_1 g(X, \operatorname{grad} f_2) + f_2 g(X, \operatorname{grad} f_1) = g(X, f_1 \operatorname{grad} f_2 + f_2 \operatorname{grad} f_1)$, $\forall X \in \mathcal{X}(\mathbb{M})$. Rezultă $\operatorname{grad}(f_1 f_2) = f_1 \operatorname{grad} f_2 + f_2 \operatorname{grad} f_1$.

Operatorul grad : $\mathcal{F}(\mathbb{M}) \to \mathcal{X}(\mathbb{M})$ definit prin $f \to \operatorname{grad} f$ se numește *gradient*.

Hessiană. Fie $f \in \mathcal{F}(\mathbb{M})$. A doua derivată covariantă a lui f în raport cu conexiunea riemanniană se numește *hessiana* lui f și se notează prin Hess f. Alternativ, hessiana este cîmpul tensorial de tipul (0,2) definit prin

$$\operatorname{Hess} f(X, Y) = D_X(df)(Y) = X(df(Y)) - df(D_X Y),\ \forall\, X, Y \in \mathcal{X}(\mathbb{M}).$$

În coordonate,

$$\operatorname{Hess} f = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^k} - \Gamma^h_{jk}\frac{\partial f}{\partial x^h}\right) dx^j \otimes dx^k,\ (\operatorname{Hess} f)_{jk} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^k} - \Gamma^h_{jk}\frac{\partial f}{\partial x^h}.$$

Operatorul Hess : $\mathcal{F}(\mathbb{M}) \to \mathcal{T}^0_2(\mathbb{M})$ definit prin $f \to \operatorname{Hess} f$ se numește *hessiană.*

Divergență. Fie $X \to \mathcal{X}(\mathbb{M})$, $X = X^i \dfrac{\partial}{\partial x^i}$ și derivata sa covariantă $X^i_{,j}$ în raport cu conexiunea riemanniană. Cîmpul scalar div X definit prin contracția

$$\operatorname{div} X = X^i_{,i} = \frac{\partial X^i}{\partial x^i} + \Gamma^i_{ij} X^j$$

se numește *divergența* lui X.

Fie $g = g_{ij} dx^i \otimes dx^j$. Dacă notăm $G = \det [g_{ij}]$, atunci

$$\operatorname{div} X = \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial(\sqrt{G}\, X^i)}{\partial x^i}.$$

Într-adevăr se observă că

$$\Gamma^i_{ij} = 1/2 g^{ik}\left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\right) = 1/2\, g^{ik} \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j},$$

și ținînd seama de regula de derivare a unui determinant,

$$\frac{\partial G}{\partial x^j} = \frac{\partial G}{\partial g_{ik}} \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} = G g^{ik} \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j},$$

deducem

$$\Gamma^i_{ij} = \frac{1}{2G} \frac{\partial G}{\partial x^j} = \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial x^j}.$$

Deci

$$\operatorname{Div} X = \frac{\partial X^i}{\partial x^i} + \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial x^j} X^j = \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial(\sqrt{G} X^i)}{\partial x^i}.$$

Această expresie a divergenței este des utilizată și permite dovedirea imediată a relației

$$\operatorname{div}(fX) = X(f) + f \operatorname{div} X,\ \forall\, f \in \mathcal{F}(\mathbb{M}),\ \forall\, X \in \mathcal{X}(\mathbb{M}).$$

Operatorul $\operatorname{div} : \mathscr{X}(\mathbb{M}) \to \mathscr{F}(\mathbb{M})$ definit prin $X = X^i \dfrac{\partial}{\partial x^i} \to X^i_{,i}$ se numește *divergență*.

Laplacesian. Operatorul Δ definit prin

$$\Delta f = \operatorname{div}(\operatorname{grad} f)$$

se numește *laplacesian*. Explicit

$$\Delta f = \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial}{\partial x^l}\left(\sqrt{G} g^{kl} \frac{\partial f}{\partial x^k}\right) = g^{kl}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^k \partial x^l} - \frac{\partial f}{\partial x^h} \Gamma^h_{kl}\right),$$

adică Δ este urma hessianei.

Rotor. Fie cîmpul vectorial $X = X^i \dfrac{\partial}{\partial x^i}$ și $\omega = g_{ij} X^i \mathrm{d}x^j$, $\omega_j = g_{ij} X^i$, 1-formă diferențială asociată. Cîmpul tensorial rot X de tipul (0,2) definit prin

$$\operatorname{rot} X = (\omega_{j,i} - \omega_{i,j}) \mathrm{d}x^i \otimes \mathrm{d}x^j = \left(\frac{\partial(g_{hj} X^h)}{\partial x^i} - \frac{\partial(g_{hi} X^h)}{\partial x^j}\right) \mathrm{d}x^i \otimes \mathrm{d}x^j$$

se numește *rotorul* lui X.

Operatorul $\operatorname{rot} : \mathscr{X}(\mathbb{M}) \to \mathscr{F}^0_2(\mathbb{M})$, $X \to \operatorname{rot} X$, se numește *rotor*. Se dovedește că dacă $\mathbb{M} \subset \mathbb{R}^3$, atunci cîmpul tensorial rot X este echivalent cu un cîmp vectorial contravariant definit prin coordonatele

$$(\operatorname{rot} X)^i = \frac{1}{\sqrt{G}}\left(\frac{\partial(g_{hk} X^h)}{\partial x^j} - \frac{\partial(g_{hj} X^h)}{\partial x^k}\right),$$

unde $\{i, j, k\}$ este o permutare ciclică a mulțimii $\{1, 2, 3\}$. Tot în acest context se verifică și relațiile

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot} X) = \operatorname{grad}(\operatorname{div} X) - \Delta X$$

$$\operatorname{rot}(\operatorname{grad} f) = 0, \ \operatorname{div}(\operatorname{rot} X) = 0.$$

§6. Forme alternate

Fie V un spațiu vectorial real de dimensiune n.

6.1. *Definiție. O q-formă sau formă alternată de ordinul q pe V este o funcție*

$$\omega : \underbrace{V \times \ldots \times V}_{q \text{ factori}} \to \mathbb{R}, \quad (v_1, \ldots, v_q) \to \omega(v_1, \ldots, v_q)$$

care satisface următoarele condiții.

1) *multiliniară : pentru fiecare $i \in \{1, \ldots, q\}$ și $v_1, \ldots v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots, v_q \in V$, restricția $v \to \omega(v_1, \ldots, v_{i-1}, v, v_{i+1}, \ldots, v_q)$ este liniară,*

2) *antisimetrică: pentru fiecare $v_1, \ldots, v_q \in V$ şi pentru fiecare permutare σ a mulţimii $\{1, \ldots, q\}$ se satisface $\omega(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(q)}) = (\operatorname{sign} \sigma)\omega(v_1, \ldots, v_q)$.*

Cu alte cuvinte o q-formă pe V nu este altceva decît un tensor antisimetric de tipul $(0, q)$ pe V. Mulţimea tuturor q-formelor pe V se notează cu $\mathscr{F}_q(V)$ şi este un spaţiu vectorial real cu (vezi teorema 6.3)

$$\dim \mathscr{F}_q(V) = \begin{cases} C_n^q & \text{dacă } 0 \leqslant q \leqslant n \\ 0 & \text{dacă } \quad q > n. \end{cases}$$

Evident, $\mathscr{F}_0(V) = \mathbb{R}$, $\mathscr{F}_1(V) = V^*$.

6.2. *Definiţie. Fie $\mathscr{F}_p(V)$, $\mathscr{F}_q(V)$ şi $\mathscr{F}_{p+q}(V)$. Funcţia*

$$\wedge : \mathscr{F}_p(V) \times \mathscr{F}_q(V) \to \mathscr{F}_{p+q}(V)$$

definită prin

$$(\omega^1 \wedge \omega^2)(v_1, \ldots, v_{p+q}) =$$

$$= \frac{1}{(p+q)!} \sum_{\sigma} (\operatorname{sign} \sigma)\, \omega^1(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(p)})\omega^2(v_{\sigma(p+1)}, \ldots, v_{\sigma(p+q)}),$$

suma fiind luată după toate permutările σ ale lui $\{1, \ldots, p+q\}$, se numeşte produs exterior.

Se observă că produsul exterior este o aplicaţie biliniară şi asociativă. Asociativitatea permite extinderea definiţiei produsului exterior la un număr finit de factori.

Evident, $$\omega^1 \wedge \omega^2 = (-1)^{pq}\omega^2 \wedge \omega^1.$$

6.3. Teoremă. Dacă $\{e_j, j = 1, \ldots, n\}$ este o bază a lui V şi $\{e^i, i = 1, \ldots, n\}$ este baza duală în V^*, atunci mulţimea

$$\{e^{i_1} \wedge \ldots \wedge e^{i_q},\ 1 \leqslant i_1 < \ldots < i_q \leqslant n\}$$

este o bază a lui $\mathscr{F}_q(V)$, numită *baza produs*.

Demonstraţie. **Mulţimea din teoremă este liniar independentă. Într-adevăr, relaţia**

$$\sum_{i_1<\ldots<i_q} \omega_{i_1\ldots i_q} e^{i_1} \wedge \ldots \wedge e^{i_q} = 0 \text{ (q-forma zero)},$$

implică

$$0 = \sum_{i_1<\ldots<i_q} \omega_{i_1\ldots i_q}\, e^{i_1} \wedge \ldots \wedge e^{i_q}(e_{j_1}, \ldots, e_{j_q}) =$$

$$= \sum_{i_1<\ldots<i_q} \omega_{i_1\ldots i_q} \sum_{\sigma} (\operatorname{sign} \sigma)\, e^{i_1}(e_{\sigma(j_1)}) \ldots e^{i_q}(e_{\sigma(j_q)}) =$$

$$= \sum_{i_1<\ldots<i_q} \omega_{i_1\ldots i_q} \sum_{\sigma} (\operatorname{sign} \sigma)\, \delta^{i_1}_{\sigma(j_1)} \ldots \delta^{i_q}_{\sigma(j_q)} = \omega_{j_1\ldots j_q},$$

unde $j_1 < \ldots < j_q$.

Să arătăm că mulţimea din teoremă sau mai general mulţimea $\{e^{i_1} \wedge \ldots \wedge e^{i_q},\ i_1, \ldots, i_q = 1, \ldots, n\}$ generează pe $\mathcal{F}_q(V)$. Pentru aceasta fie $\omega \in \mathcal{F}_q(V)$ şi numerele reale $\omega_{i_1 \ldots i_q} = \omega(e_{i_1}, \ldots, e_{i_q})$. Găsim

$$\omega_{i_1 \ldots i_q} e^{i_1} \wedge \ldots \wedge e^{i_q}(e_{j_1}, \ldots, e_{j_q}) =$$

$$= \omega_{i_1 \ldots i_q} \frac{1}{q\,!} \sum_{\sigma} (\operatorname{sign} \sigma) e^{i_1}(e_{\sigma(j_1)}) \ldots e^{i_q}(e_{\sigma(j_q)}) =$$

$$= \frac{1}{q\,!} \omega_{i_1 \ldots i_q} \sum_{\sigma} (\operatorname{sign} \sigma)\, \delta^{i_1}_{\sigma(j_1)} \ldots \delta^{i_q}_{\sigma(j_q)} = \omega_{j_1 \ldots j_q} = \omega(e_{j_1}, \ldots, e_{j_q}).$$

Deoarece ω este multiliniară, ultima relaţie implică

$$\omega_{i_1 \ldots i_q} e^{i_1} \wedge \ldots \wedge e^{i_q}(v_1, \ldots, v_q) = \omega(v_1, \ldots, v_q).$$

Deci

$\omega = \omega_{i_1 \ldots i_q} e^{i_1} \wedge \ldots \wedge e^{i_q} = q\,! \sum_{j_1 < \ldots < j_q} \omega_{j_1 \ldots j_q} e^{j_1} \wedge \ldots \wedge e^{j_q}$, unde numerele reale $q\,!\ \omega_{j_1 \ldots j_q}$, $j_1 < \ldots < j_q$, sînt *coordonatele stricte* ale q-formei ω.

§7. Forme diferenţiale alternate

Fie $\mathbb{M}$ o mulţime deschisă din $\mathbb{R}^n$, fie $T_x\mathbb{M}$ spaţiul tangent la $\mathbb{M}$ în punctul x şi $\mathcal{F}_q(T_x\mathbb{M})$ mulţimea tuturor q-formelor pe $T_x\mathbb{M}$.

7.1. *Definiţie. O funcţie*

$$\omega : \mathbb{M} \to \bigcup_{x \in \mathbb{M}} \mathcal{F}_q(T_x\mathbb{M}),\ \omega(x) \in \mathcal{F}_q(T_x\mathbb{M}),$$

se numeşte q-formă diferenţială sau formă diferenţială alternată de ordinul q pe $\mathbb{M}$.

Cu alte cuvinte o q-formă diferenţială este un cîmp tensorial antisimetric de tipul $(0, q)$ pe $\mathbb{M}$. Fie $\mathcal{F}_q(\mathbb{M})$ mulţimea tuturor q-formelor diferenţiale pe $\mathbb{M}$. Adunarea a două elemente din această mulţime ca şi produsul dintre o funcţie reală şi o q-formă se definesc punctual.

Fie $T_x^*\mathbb{M}$ dualul spaţiului tangent. Baza canonică în $T_x\mathbb{M}$ este $\left\{\frac{\partial}{\partial x^i},\ i = 1, \ldots, n\right\}_x$, iar duala sa, bază în $T_x^*\mathbb{M}$, este $\{dx^i,\ i = 1, \ldots, n\}_x$. Baza indusă în $\mathcal{F}_q(\mathbb{M})$ este $\{dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_q},\ 1 \leqslant i_1 < \ldots < i_q \leqslant n\}_x$. De aceea expresia în coordonate a lui ω este

$$\omega(x) = \omega_{i_1 \ldots i_q}(x) dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_q}.$$

Funcţiile $x \to \omega_{i_1 \ldots i_q}(x)$ se presupun diferenţiabile de clasă C^∞ pe $\mathbb{M}$.

Fie $\mathscr{F}(\mathbb{M})$ algebra funcţiilor reale şi $\mathscr{X}(\mathbb{M})$ algebra Lie a cîmpurilor vectoriale. O q-formă diferenţială pe $\mathbb{M}$ poate fi privită ca fiind funcţia

$$\omega : \mathscr{X}(\mathbb{M}) \times \ldots \times \mathscr{X}(\mathbb{M}) \to \mathscr{F}(\mathbb{M}), \quad (X_1, \ldots, X_q) \to \omega(X_1, \ldots, X_q),$$

$\mathscr{F}(\mathbb{M})$ —liniară în fiecare argument şi cu proprietatea $\omega(X_{\sigma(1)}, \ldots, X_{\sigma(q)}) = (\operatorname{sign} \sigma)\, \omega(X_1, \ldots, X_q)$, unde σ este o permutare a mulţimii $\{1, \ldots, q\}$.

Definiţia *produsului exterior* pentru q-forme diferenţiale este evidentă.

Fie $X \in \mathscr{X}(\mathbb{M})$ şi $\omega \in \mathscr{F}_q(\mathbb{M})$. Prin *contracţia* dintre X şi ω înţelegem $(q-1)$-forma diferenţială $X \rfloor \omega$ definită prin $(X \rfloor \omega)(X_1, \ldots, X_{q-1}) = \omega(X, X_1, \ldots, X_{q-1})$, $X_1, \ldots, X_{q-1} \in \mathscr{X}(\mathbb{M})$.

7.2. *Definiţie. Fie $\mathscr{F}_q(\mathbb{M})$ şi $\mathscr{F}_{q+1}(\mathbb{M})$. O funcţie $\mathbb{R}$-liniară $\mathrm{d} : \mathscr{F}_q(\mathbb{M}) \to \mathscr{F}_{q+1}(\mathbb{M})$ cu proprietăţile*

$$\mathrm{d}^2 = 0$$

$$\mathrm{d}(\omega^1 \wedge \omega^2) = \mathrm{d}\omega^1 \wedge \omega^2 + (-1)^q\, \omega^1 \wedge \mathrm{d}\omega^2$$

$$X(\mathrm{d}\omega) = \mathrm{d}(X(\omega)),\ X \in \mathscr{X}(\mathbb{M})$$

$$X(\omega) = X \rfloor \mathrm{d}\omega + \mathrm{d}(X \rfloor \omega)$$

se numeşte diferenţială exterioară.

Utilizînd derivata covariantă şi croşetul putem scrie

$$\mathrm{d}\omega(X_1, \ldots, X_{q+1}) = \sum_{1 \le i \le q+1} (-1)^{i-1} \mathrm{D}_{X_i} \omega(X_1, \ldots, X_{i-1}, X_{i+1}, \ldots, X_{q+1}) +$$

$$+ \sum_{1 \le i < j \le q+1} (-1)^{i+j} \omega([X_i, X_j], X_1, \ldots, X_{i-1}, X_{i+1}, \ldots, X_{j-1}, X_{j+1}, \ldots, X_{q+1}).$$

Pe $\mathscr{F}(\mathbb{M}) = \mathscr{F}_0(\mathbb{M})$ diferenţiala exterioară se reduce la diferenţiala obişnuită. Mai mult,

$$\mathrm{d}\omega(x) = \mathrm{d}\omega_{i_1 \ldots i_q}(x) \wedge \mathrm{d}x^{i_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^{i_q}.$$

O q-formă diferenţială ω cu proprietatea $\mathrm{d}\omega = 0$ se numeşte *formă închisă*. O $(q+1)$-formă diferenţială η cu proprietatea că există o q-formă ω astfel încît $\eta = \mathrm{d}\omega$ se numeşte *formă exactă*.

O b s e r v a ţ i i. 1) Mulţimea deschisă $\mathbb{M}$ poate fi înlocuită cu orice subvarietate de dimensiune $m \geqslant 1$, cu sau fără frontieră, a lui $\mathbb{R}^n$.

2) Fie $\mathbb{M}$ o subvarietate a lui $\mathbb{R}^n$, de dimensiune m, cu sau fără frontieră. O *formă volum* pe $\mathbb{M}$ este o m-formă diferenţială ω pe $\mathbb{M}$ cu proprietatea $\omega(v_1, \ldots, v_m) = \pm 1$ ori de cîte ori $v_1, \ldots, v_m$ este o bază ortonormată a lui $T_x\mathbb{M}$. O alegere a unei forme volum ω pe $\mathbb{M}$ se numeşte *orientare* a lui $\mathbb{M}$; despre $\mathbb{M}$ se zice că este *orientată*.

Fie $\mathbb{M}$ o subvarietate de dimensiune $m \geqslant 2$, cu frontieră. O orientare pe $\mathbb{M}$ induce o orientare pe $\partial\mathbb{M}$.

3) În $(\mathbb{R}^3, \delta_{ij})$, 1-formele şi 2-formele pot fi convertite în cîmpuri vectoriale prin corespondenţele

$$\sum f_i\, \mathrm{d}x^i \overset{(1)}{\leftrightarrow} \sum f_i U_i \overset{(2)}{\leftrightarrow} f_1 \mathrm{d}x^2 \wedge \mathrm{d}x^3 + f_2 \mathrm{d}x^3 \wedge \mathrm{d}x^1 + f_3 \mathrm{d}x^1 \wedge \mathrm{d}x^2$$

$$\mathrm{d}f \overset{(1)}{\leftrightarrow} \operatorname{grad} f$$

$$\omega \overset{(1)}{\leftrightarrow} V \Rightarrow \mathrm{d}\omega \overset{(2)}{\leftrightarrow} \operatorname{rot} V,$$

$$\eta \overset{(2)}{\leftrightarrow} V \Rightarrow \mathrm{d}\eta = (\operatorname{div} V)\, \mathrm{d}x^1 \wedge \mathrm{d}x^2 \wedge \mathrm{d}x^3.$$

§ 8. Probleme

1. Să se explicitezе sumele

$$\omega_i v^i, \quad T^i_{ij}, \quad \omega_i T^i_j, \quad T^i_j v^j.$$

2. Să se verifice că $(\ ,\ ) : \mathscr{T}^1_1(V) \times \mathscr{T}^1_1(V) \to \mathbb{R}$, $(S, T) = S^i_j T^j_i$ este un produs scalar pe $\mathscr{T}^1_1(V)$.

3. Fie $T \in \mathscr{T}_2(V)$ şi $[T_{ij}]$ matricea coordonatelor sale. Să se verifice că la o schimbare a bazei avem

$$\det[T_{i'j'}] = (\det[A^i_{i'}])^2 \det[T_{ij}].$$

4. Se dau $X = 2x\dfrac{\partial}{\partial x} + y^2\dfrac{\partial}{\partial y}$, $Y = \sin x\dfrac{\partial}{\partial x} + xy\dfrac{\partial}{\partial y}$. Să se găsească $[X, Y]$. Apoi, luînd $\omega = -x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y$, să se calculeze $\omega(X)$ şi $\omega(Y)$.

5. Pe $\mathbb{M} : x > 0,\ y > 0$, considerăm cîmpul tensorial

$$T = (x^2+y^2)\frac{\partial}{\partial x} \otimes \frac{\partial}{\partial x} + \arccos\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial}{\partial y} \otimes \frac{\partial}{\partial y}.$$

Să se găsească funcţiile coordonate ale lui T în coordonate polare.

6. Pe $\mathbb{R}^3 - Oz$ se consideră cîmpul vectorial

$$X = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + z\frac{\partial}{\partial z}.$$

Să se găsească funcţiile coordonate ale lui X în coordonate sferice.

7. Pe $\mathbb{R}^2$ se dau: conexiunea D de componente

$$\Gamma^i_{jk}(x) = \begin{cases} 1 & \text{pentru } i = j = 1,\ k = 2 \text{ sau } i = k = 1,\ j = 2 \\ 0 & \text{în rest} \end{cases}$$

şi

$$X = x\frac{\partial}{\partial x} - y\frac{\partial}{\partial y}, \quad Y = \frac{\partial}{\partial x} - e^x\frac{\partial}{\partial y}, \quad \omega = xy\mathrm{d}x + e^y\mathrm{d}y.$$

Să se calculeze $\mathrm{D}_X Y$, $\mathrm{D}_X\omega$, $\mathrm{D}_X(Y \otimes \omega)$.

8. Se dă varietatea riemanniană $(\mathbb{R}^3 - Oz, \delta_{ij})$. Să se explicitezе coordonatele metricii, coeficienţii Lamé şi simbolurile Christoffel, în coordonate cilindrice şi sferice.

9. Fie $\mathbb{M} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, y > 0\}$, $g_{ij}(x, y) = \dfrac{1}{y^2}\delta_{ij}$, $f(x, y) = \sqrt{x^2+y^2}$, $X = y\dfrac{\partial}{\partial x} + x^2y\dfrac{\partial}{\partial y}$. Să se determine grad f, Hess f, div X, Δf, rot X.

10. Să se calculeze $\mathrm{d}\omega$ pentru fiecare din formele diferenţiale

$$\omega = x^2\mathrm{d}x + y^2\mathrm{d}y + z^2\mathrm{d}z,\ \omega = e^{xy}\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}z,\ \omega = \frac{1}{x+y+z}(\mathrm{d}x + \mathrm{d}y + \mathrm{d}z),$$

$$\omega = (1 + 2xyz^2)\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z - y^2z^2\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + xy^2\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y.$$

4

ECUAȚII DIFERENȚIALE

Notații și terminologie

Ecuațiile care conțin funcții, variabilele independente corespunzătoare și derivatele funcțiilor și în care necunoscutele sînt funcțiile se numesc *ecuații diferențiale*. Dacă funcțiile necunoscute depind de o singură variabilă, atunci ecuațiile se numesc *ecuații diferențiale ordinare*. Dacă funcțiile necunoscute depind de mai multe variabile, atunci ecuațiile se numesc *ecuații cu derivate parțiale*.

Ecuații diferențiale ordinare. O ecuație de forma $F(x, y, y', \ldots, y^{(n)})=0$, $F : I \times \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$, $x \in I$, unde $y : I \to \mathbb{R}$ este funcția necunoscută, se numește *ecuație diferențială ordinară de ordinul n* dacă $y^{(n)}$ intervine efectiv. O funcție definită prin $x \to y(x)$, $x \in I_1 \subset I$ care posedă derivate pînă la ordinul n inclusiv se numește *soluție* pe intervalul I_1 dacă $F(x, y(x), y'(x), \ldots$ $\ldots, y^{(n)}(x)) = 0$, $\forall x \in I_1$. Graficul unei soluții se numește *curbă integrală*. De exemplu, o soluție a ecuației $y'' = y$ este $y = e^x$. De asemenea $y = xc + \dfrac{5}{c}$ și $y = 2\sqrt{5x}$ sînt soluții ale ecuației $y = xy' + \dfrac{5}{y'}$, $x > 0$.

O soluție a unei ecuații diferențiale ordinare poate să depindă sau nu de un anumit număr de constante arbitrare. De exemplu $y = xc + \dfrac{5}{c}$ depinde de constanta arbitrară c. O soluție a unei ecuații diferențiale de ordinul n care depinde de n constante arbitrare (independente) se numește *soluție generală* a ecuației. Orice soluție obținută din cea generală prin particularizarea constantelor se numește *soluție particulară*.

Există însă și soluții care nu provin din soluția generală prin particularizarea constantelor. De obicei acestea sînt *soluții singulare*, adică soluții care satisfac $\dfrac{\partial F}{\partial x_{n+2}}(x, y(x), y'(x), \ldots$ $\ldots, y^{(n)}(x)) = 0$, $\forall x \in I_1$. De exemplu $y = 2\sqrt{5x}$ nu se poate obține din $y = xc + \dfrac{5}{c}$ prin particularizarea lui c.

Fie $y = f(x; c_1, \ldots, c_n)$, $x \in I$ o familie de funcții de clasă C^n care depinde de n constante independente c_i. Acestei familii i se poate atașa o ecuație diferențială de ordinul n a cărei soluție generală să fie chiar familia de funcții de la care am plecat. Într-adevăr ansamblul

$$\begin{cases} y = f(x; c_1, \ldots, c_n) \\ y' = f'(x; c_1, \ldots, c_n) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ y^{(n)} = f^{(n)}(x; c_1, \ldots, c_n) \end{cases}$$

poate fi privit ca un sistem de $n+1$ ecuații cu n necunoscute c_i. Condiția de compatibilitate, $F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$, este ecuația diferențială căutată.

De exemplu, familiei $y = c_1\cos x + c_2\sin x$ i se atașează ecuația $y'' + y = 0$. Aceasta rezultă din faptul că $y' = -c_1\sin x + c_2\cos x$, $y'' = -c_1\cos x - c_2\sin x = -y$.

Ecuații cu derivate parțiale. O ecuație de forma

$$F\left(x, f, \frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}, \ldots, \frac{\partial^{i_1+\ldots+i_n} f}{\partial x_1^{i_1} \ldots \partial x_n^{i_n}}\right) = 0,\ x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{D} \subset \mathbb{R}^n,$$

unde f este funcția necunoscută, se numește *ecuație cu derivate parțiale de ordinul* $i_1 + \ldots + i_n$, dacă în ecuație apare efectiv cel puțin o derivată parțială de acest ordin. O funcție definită prin $x \to f(x)$ care posedă derivate parțiale pînă la ordinul $i_1 + \ldots + i_n$ inclusiv se numește *soluție* în $\mathbb{D}^* \subset \mathbb{D}$ dacă $F\left(x, f(x), \frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x), \ldots, \frac{\partial^{i_1+\ldots+i_n} f}{\partial x_1^{i_1} \ldots \partial x_n^{i_n}}(x)\right) = 0$, $\forall x \in \mathbb{D}^*$. Graficul unei soluții se numește *hipersuprafață integrală*.

Drept exemplu considerăm ecuația $\frac{\partial f}{\partial x} = xy$, $f : \mathbb{D} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Ea este o ecuație cu derivate parțiale de ordinul întîi care admite soluția definită prin $f(x, y) = y\frac{x^2}{2} + \varphi(y)$, unde $\varphi \in C^1(\mathbb{D})$ este o funcție arbitrară.

În general, funcțiile arbitrare din soluțiile ecuațiilor cu derivate parțiale joacă rolul constantelor arbitrare din soluțiile ecuațiilor ordinare. Teoremele de existență și unicitate a soluției pun în evidență analogia respectivă.

Capitolul 1

ECUAȚII DIFERENȚIALE DE ORDINUL ÎNTÎI

Fie I un interval din $\mathbb{R}$ și $f : I \to \mathbb{R}$ o funcție care admite primitivă. Cea mai simplă ecuație diferențială de ordinul întîi este $y' = f(x)$ și rezolvarea ei se reduce la aflarea primitivei lui f. Teoria primitivelor este prezentată amănunțit în manualele de Analiză matematică (inclusiv în cele de liceu). De asemenea, reamintim că în manualele de liceu pentru clasa a XII-a este prezentată ecuația diferențială liniară $y' = yf(x)$ și ecuația cu variabile separate $g(y)y' = f(x)$.

Fie $\mathbb{D}$ o submulțime deschisă din $\mathbb{R}^2$ și $f : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$ o funcție continuă. *Forma normală* a unei ecuații diferențiale de ordinul întîi este

$$y' = f(x, y).$$

Presupunem că $Q : \mathbb{D} \to \mathbb{R} - \{0\}$ este o funcție continuă. Dacă înmulțim ambii membri ai ecuației diferențiale cu factorul nenul $Q(x, y)$ găsim ecuația diferențială echivalentă $Q(x, y)y' - Q(x, y)f(x, y) = 0$. Notînd $P(x, y) = -Q(x, y)f(x, y)$ și utilizînd pentru y' notația lui Leibniz $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ (cîtul a două diferențiale — particularitate a funcțiilor de o variabilă) ecuația diferențială se transcrie

$$P(x, y)\,\mathrm{d}x + Q(x, y)\,\mathrm{d}y = 0,\ P, Q \in C^0(\mathbb{D}).$$

Evident, expresia $P(x, y)\,\mathrm{d}x + Q(x, y)\,\mathrm{d}y$ poate fi gîndită ca o 1-formă pe $\mathbb{D}$ fapt ce procură o alternativă de prezentare pentru ecuațiile de tipul $y' = f(x, y)$.

§1. Ecuația diferențială cu variabile separate

O ecuație diferențială de tipul

$$a(x)\,\mathrm{d}x + b(y)\,\mathrm{d}y = 0,$$

unde $a : I_1 \to \mathbb{R}$ și $b : I_2 \to \mathbb{R}$ sînt funcții continue date, se numește *ecuație diferențială cu variabile separate.*

1.1. Teoremă. 1) Funcția $f : I_1 \times I_2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = \int_{x_0}^{x} a(t)\,\mathrm{d}t + \int_{y_0}^{y} b(t)\,\mathrm{d}t$, $(x_0, y_0) \in I_1 \times I_2$, are proprietatea $\mathrm{d}f(x, y) = a(x)\mathrm{d}x + b(y)\,\mathrm{d}y$.

2) Fiecare soluție $x \to y(x)$ a ecuației diferențiale cu variabile separate, cu graficul inclus în $I_1 \times I_2$, satisface relația $f(x, y(x)) = c$ pentru o anumită constantă c. Reciproc, dacă ecuația $f(x, y) = c$ definește pe y ca funcție implicită diferențiabilă de x, atunci această funcție este o soluție a ecuației diferențiale cu variabile separate.

Demonstrație. 1) Existența lui f este asigurată de continuitatea funcțiilor a și b. În plus, $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{x_0}^{x} a(t)\,\mathrm{d}t = a(x)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\int_{y_0}^{y} b(t)\,\mathrm{d}t = b(y)$.

2) Presupunem că $x \to y(x)$, $x \in (a, b) \subset I_1$ este o soluție a ecuației diferențiale cu variabile separate astfel încît $(x, y(x)) \in I_1 \times I_2$, $\forall x \in (a, b)$. Să arătăm că $f(x, y(x)) = c$. Pentru aceasta considerăm funcția compusă $x \to g(x) = f(x, y(x))$, $x \in (a, b)$ și derivata ei $g'(x) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y(x)) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y(x))y'(x) = a(x) + b(y(x))y'(x) = 0$, $\forall x \in (a, b)$. Deci g este o constantă c pe (a, b). Astfel orice soluție y a ecuației diferențiale cu variabile separate satisface ecuația carteziană implicită $f(x, y) = c$.

Să presupunem acum că ecuația $f(x, y) = c$ definește pe y ca funcție implicită diferențiabilă de x pe $(a, b) \subset I_1$. Ecuația $f(x, y) = c$ implică faptul că $x \to g(x) = f(x, y(x))$ este constantă pe (a, b). Rezultă $0 = g'(x) = a(x) + b(y)y'$ și deci y este o soluție a ecuației diferențiale cu variabile separate.

Teorema precedentă procură de fapt un procedeu pentru a găsi soluția generală a ecuației diferențiale cu variabile separate și anume: această soluţie este definită prin familia de ecuaţii carteziene implicite

$$\int_{x_0}^{x} a(t)\,\mathrm{d}t + \int_{y_0}^{y} b(t)\,\mathrm{d}t = c$$

care descrie familia curbelor integrale. Dacă impunem ca la $x = x_0$ să corespundă $y = y_0$, atunci $c = 0$; soluţia particulară există şi este unică.

O ecuaţie diferenţială de tipul

$$a_1(x)b_2(y)\mathrm{d}x + a_2(x)b_1(y)\,\mathrm{d}y = 0,$$

unde $a_1, a_2 \in C^0(I_1), b_1, b_2 \in C^0(I_2)$ se numeşte *ecuaţie diferenţială cu variabile separabile*. Dacă ne limităm la subintervalele lui I_1 respectiv I_2 pe care $a_2(x) \neq 0$ respectiv $b_2(y) \neq 0$, atunci ecuaţia diferenţială cu variabile separabile se reduce la o ecuaţie cu variabile separate

$$\frac{a_1}{a_2}(x)\,\mathrm{d}x + \frac{b_1}{b_2}(y)\,\mathrm{d}y = 0.$$

În ipoteza $a_2(x_0) = 0$ $(b_2(y_0) = 0)$, printr-o simplă verificare se dovedeşte că $x = x_0 (y = y_0)$ este o soluţie a ecuaţiei diferenţiale cu variabile separabile.

Exemplu. Procesul de dizolvare a unui solid într-un lichid este guvernat de ecuaţia diferenţială cu variabile separabile

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = k(a - x), \quad a, k = \text{const.},$$

unde x reprezintă cantitatea de solid dizolvată la momentul t. Evident, $x = a$ este o soluţie a acestei ecuaţii. Pentru $x \neq a$ putem scrie

$$\frac{\mathrm{d}x}{a - x} = k\,\mathrm{d}t$$

şi de aici deducem soluţia generală $x = a + ce^{-kt}$, $t \in [0, \infty)$, unde c este constantă arbitrară.

§ 2. Ecuaţia diferenţială omogenă

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f\left(\frac{y}{x}\right), \text{ unde } f \in C^0(I),\ x \neq 0,$$

se reduce la ecuaţia

$$x\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = f(t) - t,$$

care este o ecuaţie cu variabile separabile. Într-adevăr, schimbarea de funcţie (difeomorfism) $y \leftrightarrow t$ definită prin $y = tx$, $x \neq 0$ conduce la $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = x\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} + t$ şi demonstraţia constă în simple înlocuiri.

Exemplu. Să se determine familia de curbe cu proprietatea că tangenta în punctul (x^2, y^2) taie axa OY într-un punct a cărui ordonată este $-\frac{1}{4}x^2$.

Dacă $y = y(x)$ este ecuația unei astfel de curbe, atunci tangenta în (x^2, y^2) are ecuația $Y - y^2 = y'(X - x^2)$. De aceea ordonata punctului de intersecție cu OY este $y^2 - x^2y'$. Rezultă ecuația diferențială omogenă

$$y' = \left(\frac{y}{x}\right)^2 + \frac{1}{4}.$$

Soluția generală a acestei ecuații omogene este $y = x\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\ln cx}\right)$, $x > 0$, unde $c > 0$ este constanta arbitrară.

§ 3. Ecuația diferențială liniară

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = yf(x) + g(x), \text{ unde } f, g \in C^0(I).$$

Acesteia i se atașează ecuația diferențială cu variabile separabile

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = yf(x),$$

numită *ecuație diferențială liniară și omogenă*, cu soluția generală

$$y = c e^{\int_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t}, \quad x_0 \in I.$$

Să arătăm că există o funcție $u : I \to \mathbb{R}$ de clasă C^1 astfel încît $y = u(x)e^{\int_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t}$ să fie soluția generală a ecuației diferențiale inițiale. Într-adevăr,

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} e^{\int_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t} + uf e^{\int_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t}$$

și introducînd în ecuația inițială găsim

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = g(x)\, e^{-\int_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t}.$$

Deci

$$u(x) = c + \int_{x_0}^{x} g(s)\, e^{-\int_{x_0}^{s} f(t)\,\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}s,$$

adică

$$y = e^{\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt}\left(c + \int_{x_0}^{x} g(s)\, e^{-\int_{x_0}^{s} f(t)\,dt}\, ds\right).$$

Tehnica precedentă de obținere a soluției ecuației diferențiale liniare neomogene din soluția generală a ecuației diferențiale liniare omogene asociate este un caz particular al *metodei variației constantelor* (cap. 3, § 3).

Proprietăți. 1) Mulțimea soluțiilor unei ecuații diferențiale liniare este convexă.

Într-adevăr, dacă y_1 și y_2 sînt două soluții, atunci și $y = cy_1 + (1 - c)y_2$ este o soluție. Această observație are următoarele consecințe:

— raportul simplu atașat celor trei soluții y_1, y_2, y nu depinde de x, adică

$$\frac{y(x) - y_2(x)}{y_1(x) - y_2(x)} = c, \ \forall x \in I.$$

— o ecuație diferențială liniară are sau toate soluțiile mărginite sau cel mult una.

2) Presupunem că pentru $x = x_0$ găsim $y = y_0$. Atunci $c = y_0$.

Dacă $f(x) < 0, \forall x \in [x_0, \infty)$, atunci soluția generală a ecuației diferențiale liniare este o funcție uniform continuă în raport cu valoarea inițială $c = y_0$ ($\Rightarrow$ soluțiile particulare sînt stabile, vezi cap. 2, § 5). Cu alte cuvinte dacă $x \to y_i(x)$ sînt soluțiile care satisfac condițiile inițiale $y_i(x_0) = y_{i0}$, $i = 1, 2$, atunci $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta(\varepsilon)$ astfel încît $\forall y_{i0}$ cu $|y_{10} - y_{20}| < \delta$ avem $\|y_1 - y_2\| = \sup\limits_{x} |y_1(x) - y_2(x)| < \varepsilon$. Într-adevăr se observă că

$$y_1(x) - y_2(x) = (y_{10} - y_{20})\, e^{\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt}$$

și deci relația

$$e^{\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt} < 1$$

implică $|y_1(x) - y_2(x)| < |y_{10} - y_{20}|$.

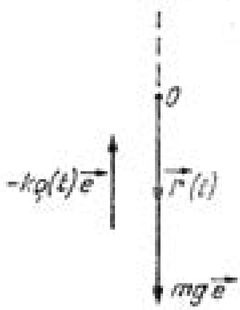


Fig. 1

Exemplu. O particulă de masă m cade vertical, asupra sa acționînd forța de gravitație și rezistența aerului (fig. 1) a cărei mărime este proporțională cu modulul vitezei particulei. Fixînd originea și versorul $\vec{e}$, vectorul de poziție $\vec{r}(t)$ are expresia $\vec{r}(t) = \rho(t)\vec{e}$ și $\vec{v}(t) = \dot\rho(t)\vec{e}$. Forța de gravitație este $mg\vec{e}$, iar rezistența aerului este $-k\dot\rho(t)\vec{e}$. Legea lui Newton se transcrie

$$m\ddot\rho(t)\vec{e} = -k\dot\rho(t)\vec{e} + mg\vec{e}$$

sau, notînd $y = \dot\rho(t)$,

$$\dot y = -\frac{k}{m}y + g.$$

Aceasta este o ecuaţie liniară cu coeficienţi constanţi, cu soluţia generală

$$\dot{y} = (c + g)\,e^{-\frac{k}{m}(x-x_0)} - \frac{mg}{k}.$$

§ 4. Ecuaţia Bernoulli

$$\frac{dy}{dx} = y^r f(x) + yg(x),\ r \in \mathbb{R} - \{0, 1\},\ f, g \in C^0(I).$$

Mulţimea valorilor lui y este impusă de valorile r. Corespunzător rezultă intervalul I.

În ipoteza $y > 0$ ecuaţia Bernoulli se reduce la ecuaţia liniară

$$\frac{dz}{dx} = (1 - r)g(x)z + (1 - r)f(x).$$

Într-adevăr, schimbarea de funcţie (difeomorfism) $y \leftrightarrow z$ definită prin $z = y^{1-r}$ conduce la $\frac{dz}{dx} = (1 - r)y^{-r}\frac{dy}{dx}$, iar inlocuirile in ecuaţia Bernoulli conduc la ecuaţia liniară.

Exemplu. Să se determine soluţia generală a ecuaţiei

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{2x} + \frac{x^2}{2y},\ x > 0.$$

Cu schimbarea $z = y^2$ obţinem ecuaţia liniară $\frac{dz}{dx} = \frac{z}{x} + x^2$ cu soluţia generală $z = c_1x + \frac{x^3}{3}$, $x > 0$. Soluţia generală a ecuaţiei Bernoulli este definită prin $y^2 = c_1x + \frac{x^3}{3}$, $x > 0$.

§ 5. Ecuaţia Riccati

$$\frac{dy}{dx} = y^2f(x) + yg(x) + h(x),\ \text{unde } f, g, h \in C^0(I).$$

Soluţia generală a unei asemenea ecuaţii diferenţiale nu se poate obţine cu ajutorul primitivelor decît in ipoteze suplimentare. De exemplu, dacă se cunoaşte o soluţie y_0, atunci schimbarea de funcţie (difeomorfism) $y \leftrightarrow z$ definită prin $y = y_0 + \frac{1}{z}$ arată că ecuaţia Riccati se reduce la ecuaţia liniară

$$\frac{dz}{dx} = (-g(x) - 2y_0f(x))z - f(x).$$

Observație. Fie $x \to z_i(x)$, $i = 1, 2, 3$, trei soluții ale ecuației diferențiale liniare atașate ecuației Riccati. Deoarece

$$\frac{z_1(x) - z_3(x)}{z_2(x) - z_3(x)} = \text{const}, \quad z_i(x) = \frac{1}{y_i(x) - y_0(x)}, \quad i = 1, 2, 3$$

rezultă

$$\frac{y_1(x) - y_3(x)}{y_2(x) - y_3(x)} : \frac{y_1(x) - y_0(x)}{y_2(x) - y_0(x)} = \text{const},$$

adică biraportul a patru soluții ale ecuației Riccati este constant. **De aceea**, trei soluții ale ecuației Riccati determină soluția generală.

Exemplu. Să se determine soluția generală a ecuației

$$\frac{dy}{dx} = xy^2 - 2x^2y + x^3 + 1.$$

Se observă că $y_0 = x$ este o soluție. Punînd $y = x + \frac{1}{z}$ obținem ecuația diferențială liniară omogenă

$$\frac{dz}{dx} = -x.$$

Rezultă $z = -\frac{x^2 + c}{2}$ și deci $y = x - \frac{2}{x^2 + c}$.

§6. Ecuații diferențiale exacte

Fie ecuația diferențială

(1) $$P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = 0,$$

unde P, Q sînt funcții de clasă C^1 pe mulțimea deschisă $\mathbb{D} \subset \mathbb{R}^2$.

6.1. Teoremă. Dacă $\mathbb{D}$ este un dreptunghi și dacă $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ pe $\mathbb{D}$, atunci funcția $(x, y) \to f(x, y) = \int_{x_0}^{x} P(x, y)\,dx + \int_{y_0}^{y} Q(x_0, y)dy$ are proprietatea $df = Pdx + Qdy$ și deci soluția generală a ecuației (1) este definită prin $f(x, y) = c$.

Demonstrație. Se observă că

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = P(x, y), \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}\int_{x_0}^{x} P(x, y)\,dx + Q(x_0, y) =$$

$$= \int_{x_0}^{x} \frac{\partial P}{\partial y}(x, y)\,dx + Q(x_0, y) = \int_{x_0}^{x} \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y)\,dx + Q(x_0, y) = Q(x, y).$$

De aceea ecuaţia (1) este echivalentă cu $df = 0$. Mulţimea $\mathbb{D}$ fiind conexă rezultă $f(x, y) = c$. Aceasta îndeplineşte condiţiile din teorema funcţiilor implicite în orice punct $(x, y) \in \mathbb{D}$ pentru care $Q(x, y) \neq 0$.

Observaţie. Există posibilitatea să modificăm ipotezele din teorema precedentă fără a afecta formularea concluziei. De exemplu dreptunghiul $\mathbb{D}$ poate fi înlocuit cu o mulţime conexă şi simplu conexă.

6.2. Teoremă. Dacă $\mathbb{D}$ este o mulţime conexă şi dacă $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ pe $\mathbb{D}$, atunci funcţia $f : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = \int_0^1 [P(x_0 + t(x - x_0), y_0 + t(y - y_0))(x - x_0) + Q(x_0 + t(x - x_0), y_0 + t(y - y_0))\cdot(y - y_0)]\,dt$ are proprietatea $df = P\,dx + Q\,dy$ şi deci soluţia generală a ecuaţiei (1) este definită prin $f(x, y) = c$.

Demonstraţie. Într-adevăr, dacă notăm $u(t) = x_0 + t(x - x_0)$, $v(t) = y_0 + t(y - y_0)$, atunci

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \int_0^1 \left[\frac{\partial P}{\partial u}(u(t), v(t))t(x - x_0) + P(u(t), v(t)) + \frac{\partial Q}{\partial u}(u(t), v(t))t \cdot\right.$$

$$\left.\cdot(y - y_0)\right] dt = \left(\text{ţinem seama că } \frac{\partial Q}{\partial u} = \frac{\partial P}{\partial v}\right), \int_0^1 t\frac{d}{dt}P(u(t), v(t))\,dt +$$

$$+ \int_0^1 P(u(t), v(t))dt = (\text{integrăm prin părţi}),\ P(u(1), v(1)) = P(x, y).$$

Analog se găseşte

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = Q(x, y).$$

Restul raţionamentului este ca şi în demonstraţia teoremei precedente.

6.3. *Definiţie. Ecuaţiile diferenţiale* (1) *pentru care mulţimea* $\mathbb{D}$ *este conexă şi simplu conexă, iar* $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, $\forall (x, y) \in \mathbb{D}$, *se numesc ecuaţii exacte.*

Ecuaţiile cu variabile separate sînt ecuaţii exacte.

Exemplu. Liniile de curent în mişcarea staţionară a unui fluid plan sînt descrise de o ecuaţie diferenţială de tipul $-\psi(x, y)dx + \varphi(x, y)dy = 0$, unde (φ, ψ) este cîmpul vectorial viteză. Dacă fluidul este incompresibil, atunci este îndeplinită condiţia

$$\frac{d\varphi}{dx} + \frac{d\psi}{dy} = 0$$

şi ecuaţia liniilor de curent este exactă. Soluţia generală $f(x, y) = c$ reprezintă familia liniilor de curent, unde $f(x, y) = -\int_{x_0}^{x} \psi(x, y)\,dx + \int_{y_0}^{y} \varphi(x_0, y)\,dy$.

6.4. Teoremă. Fie $\mathbb{D}$ o mulţime deschisă conexă şi simplu conexă. Există o funcţie nenulă $\mu : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$ de clasă C^1 astfel încît

$$\mu(x, y)P(x, y)\,dx + \mu(x, y)Q(x, y)\,dy = 0$$

să fie o ecuaţie exactă.

Funcţia μ se numeşte *factor integrant.*

Demonstraţie. Ecuaţia din teoremă este exactă dacă şi numai dacă μ satisface ecuaţia cu derivate parţiale

$$\frac{\partial(\mu P)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu Q)}{\partial x}. \tag{2}$$

Această ecuaţie are cel puţin o soluţie nebanală; în ipoteza $Q(x, y) \neq 0$, aceasta se procură din soluţia ecuaţiei $\frac{dy}{dx} = -\frac{P(x, y)}{Q(x, y)}$ (vezi § 3, Cap. 3), soluţie a cărei existenţă şi unicitate este garantată de teorema 2.1, § 2 din Cap. 2.

Observaţie. Găsirea efectivă a unei soluţii a ecuaţiei cu derivate parţiale (2) nu este o problemă mai uşoară decît cea a găsirii soluţiei generale a ecuaţiei diferenţiale ordinare (1). Există însă destule cazuri particulare în care putem găsi o soluţie particulară a ecuaţiei (2), soluţie care este un factor integrant pentru ecuaţia (1).

Exemple. 1) Ecuaţia cu variabile separabile (cu coeficienţi de clasă C^1),

$$a_1(x)b_2(y)\,dx + a_2(x)b_1(y)\,dy = 0,\ a_2(x) \neq 0,\ \forall x \in I_1;\ b_2(y) \neq 0,\ \forall y \in I_2,$$

admite factorul integrant

$$\mu(x, y) = \frac{1}{a_2(x)b_2(y)}.$$

2) Ecuaţia liniară (cu coeficienţi de clasă C^1),

$$[yf(x) + g(x)]\,dx - dy = 0$$

admite factorul integrant

$$\mu(x) = e^{-\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt}.$$

3) În ipotezele: $Q(x, y) \neq 0, \forall (x, y) \in \mathbb{D}$, μ şi $\frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right)$ depind explicit numai de x, ecuaţia care determină factorul integrant se reduce la ecuaţia diferenţială liniară omogenă

$$\frac{d\mu}{dx} = \frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right)\mu.$$

În ipotezele: $P(x, y) \neq 0$, $\forall (x, y) \in \mathbb{D}$, μ şi $\frac{1}{P}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)$ depind explicit numai de y, ecuaţia care determină factorul integrant se reduce la ecuaţia diferenţială liniară omogenă

$$\frac{d\mu}{dy} = \frac{1}{P}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mu.$$

§7. Ecuaţia Clairaut

$y = xy' + \psi(y')$, unde ψ este o funcţie de clasă C^1, $x \in I$, iar y admite derivată de ordinul doi pe I.

Se notează $y' = p$ şi se derivează în raport cu x în ambii membri. Rezultă

$$\frac{dp}{dx}\left(x + \frac{d\psi}{dp}\right) = 0.$$

Din $\frac{dp}{dx} = 0$ deducem $p = c$ şi deci $y' = c$. Introducînd în ecuaţia iniţială găsim soluţia generală a ecuaţiei Clairaut şi anume $y = cx + \psi(c)$.

Din $x + \frac{d\psi}{dp} = 0$, $y = xp + \psi(p)$ rezultă soluţia singulară $x = -\frac{d\psi}{dp}$, $y = xp + \psi(p)$, care nu este altceva decît înfăşurătoarea familiei de drepte de ecuaţii $y = cx + \psi(c)$.

Exemplu. Să se determine soluţiile ecuaţiei

$$y'^2 + (x + 1)y' - y = 0.$$

Se observă că putem scrie $y = xy' + y'(1 + y')$. Notînd $y' = p$ şi derivînd în ambii membri găsim $\frac{dp}{dx}(x + 2p + 1) = 0$. Rezultă soluţia generală $y = cx + c(1 + c)$ şi soluţia singulară $x = -2p - 1$, $y = -p^2$, adică $y = -\frac{(x + 1)^2}{4}$.

§8. Ecuaţia Lagrange

$y = x\varphi(y') + \psi(y')$, unde $\varphi(y') \neq y'$, φ şi ψ sînt funcţii de clasă C^1, $x \in I$, iar y admite derivată de ordinul doi pe I.

Notînd $y' = p$ şi derivînd în raport cu x în ambii membri găsim $p - \varphi(p) = x\frac{d\varphi}{dp}\frac{dp}{dx} + \frac{d\psi}{dp}\frac{dp}{dx}$. Dacă $\frac{dp}{dx} \neq 0$, atunci privind pe x ca funcţie de p, obţinem ecuaţia liniară

$$(p - \varphi(p))\frac{dx}{dp} = x\frac{d\varphi}{dp} + \frac{d\psi}{dp}$$

cu soluţia generală $x = x(p, c)$. Rezultă că soluţia generală a unei ecuaţii Lagrange este definită parametric prin $x = x(p, c)$, $y = x(p, c)\,\varphi(p) + \psi(p)$.

Ipoteza $\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} = 0$ implică ecuația algebrică $p = \varphi(p)$. Soluțiile ecuației Lagrange corespunzătoare soluțiilor acestei ecuații algebrice sînt de regulă soluții singulare ale ecuației inițiale.

Exemplu. Ecuația

$$y = -2xy' - y'^2$$

admite soluția generală $x = cp^{-\frac{3}{2}} - \frac{2}{5}p$, $y = -\frac{p^2}{5} - 2cp^{\frac{1}{2}}$ și soluția singulară $y = 0$.

§ 9. Probleme

1. Să se determine soluții (generale, particulare, singulare) pentru următoarele ecuații diferențiale, precizîndu-se domeniul de definiție maxim posibil pentru fiecare caz în parte.

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1-x}{y-2}, \qquad (x\cos y)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \sin y = 0 \qquad \text{(separabile)}$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{y}{x + \sqrt{x^2+y^2}}, \qquad x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = x\sin\frac{y}{x} + y \qquad \text{(omogene)}$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{2x-1}{x^2}y + 1, \qquad x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - y = \frac{x}{\ln x} \qquad \text{(liniare)}$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -x^2y^2 + \frac{3y}{x}, \qquad x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - y^2\ln x + y = 0 \qquad \text{(Bernoulli)}$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = xy^2 - 2x^2y + x^3 + 1, \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y^2 - x^4 - 2x^3 + 2x - 1 \qquad \text{(Riccati)}$$

cu soluția $y_0 = x$ cu soluția $y_1 = x^2 + 1$

$$-y^2\mathrm{d}x + (xy - x^3)\mathrm{d}y = 0, \qquad (x + y + 1)\mathrm{d}x + (x - y^2 + 3)\mathrm{d}y = 0 \qquad \text{(exacte)}$$

$$\mu(x, y) = -\frac{1}{x^2y}$$

$$y = xy' + \frac{5}{y'}, \qquad y = xy' + 3y'^2 \qquad \text{(Clairaut)}$$

$$y = 2xy' - y'^2, \qquad x + y = \left(\frac{y'+1}{y'-1}\right)^2 \qquad \text{(Lagrange)}$$

2. Să se determine traiectoriile ortogonale ale familiei de parabole $\Gamma_a : y^2 = ax$, $a \in \mathbb{R}$.
3. Să se găsească ecuația diferențială ce caracterizează familia de cercuri $C_a : x^2 + y^2 = ay$.
4. Să se rezolve următoarele probleme cu condiții inițiale

$$xy' - 2y = x^5,\ x \in (0, \infty),\ \text{cu } y = 1 \text{ pentru } x = 1;$$

$$y' + y\,\mathrm{tg}\,x = \sin 2x,\ x \in \left(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right),\ \text{cu } y = 2 \text{ pentru } x = 0.$$

5. Să se găsească soluțiile ecuației $xy' + y + 3y^2 x \ln x = 0$, $x > 0$, al căror grafic este inclus în primul cadran.

6. Să se arate că soluția generală a ecuației

$$y'(1 - x^3) = y^2 - x^2 y - 2x$$

este o familie de funcții raționale.

7. Să se arate că $\mu(x, y) = \dfrac{1}{x^2}$ este un factor integrant pentru $(x^2 - y)dx + xdy = 0$. Să se determine soluția generală a acestei ecuații utilizînd teorema 6.2.

8. Să se găsească curba a cărei tangentă formează cu axele de coordonate un triunghi de arie constantă.

9. Să se traseze curbele integrale ale ecuației

$$y'^2 + 2xy' + 2y = 0.$$

Capitolul 2

PROBLEME ȘI METODE DE REZOLVARE

§1. Aflarea soluțiilor prin metode analitice

Soluțiile unor ecuații diferențiale simple se pot obține cu ajutorul primitivelor (vezi Cap. 1), seriilor de puteri (vezi Cap. 3 § 4), valorilor și vectorilor proprii (vezi Cap. 3 § 5, Cap. 4 § 5) sau a artificiilor de calcul (vezi Cap. 3 § 6). În general însă aceste metode prezintă dezavantaje de tipul următor :

— există ecuații diferențiale a căror soluție nu se poate scrie ca o combinație de funcții elementare și de primitive din astfel de funcții (de exemplu ecuații Riccati),

— expresia complicată care dă soluția explicită este adesea mai puțin utilă decît o aproximare a sa etc.

§2. Probleme Cauchy

Principiul reducerii. Orice ecuație diferențială de ordinul n, de forma numită *normală*,

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$$

poate fi scrisă ca un sistem de n ecuații de ordinul intii. Într-adevăr, dacă punem $y_1 = y$, $y_2 = y'$, $y_3 = y''$, ..., $y_n = y^{(n-1)}$, atunci

$$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = y_3 \\ \dots \quad \dots \\ y_n' = f(x, y_1, y_2, \dots, y_n). \end{cases}$$

Ținind seama de această observație este suficient să facem raționamentele pur teoretice numai pe sisteme de ecuații de ordinul intii scrise sub forma normală,

$$\frac{\mathrm{d}y_i}{\mathrm{d}x} = f_i(x, y_1, \dots, y_n), \quad x \in I, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Găsirea funcțiilor $x \to y_i(x)$ care verifică condițiile $y_i(x_0) = y_{i0} \in \mathbb{R}$ poartă numele de *problema lui Cauchy* (problemă locală). Numerele x_0, y_{i0} se numesc *condiții inițiale*.

2.1. Teorema de existență și unicitate. Dacă funcțiile reale $(x, y) \to f_i(x, y)$, $y = (y_1, \dots, y_n)$ sint de clasă C^0 pe o mulțime deschisă și conexă $\mathbb{D} = I \times U$ din $\mathbb{R}^{n+1}$, iar funcțiile parțiale $y \to f_i(x, y)$ sint de clasă C^1, atunci $\forall\,(x_0, y_0) \in \mathbb{D}$ există o soluție unică $x \to y(x)$ definită pe o vecinătate a lui x_0 care verifică condițiile $y_i(x_0) = y_{i0}$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Demonstrație. Mai intii observăm că $y: I \to U$ este o soluție a problemei Cauchy (notații vectoriale)

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0$$

dacă și numai dacă

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\,\mathrm{d}t.$$

Pentru simplificarea raționamentului presupunem că funcția $f = (f_1, \dots, f_n)$ este de clasă C^1 pe $\mathbb{D}$. În această ipoteză formula creșterilor finite arată că $\exists\, c > 0$ astfel incit $\|f(x, y) - f(x, z)\| \leqslant c\,\|y - z\|$, de indată ce punctele (x, y), (x, z) aparțin unui hiperparalelipiped inchis $J \times V \subset I \times U$ cu centrul în punctul (x_0, y_0).

Fie $J_r = [x_0 - r, x_0 + r] \subset J$ și $r < \frac{1}{c}$. Notăm cu M mulțimea funcțiilor continue $y: J_r \to V$ cu proprietatea $y(x_0) = y_0$. Mulțimea M este un spațiu metric complet în raport cu distanța $\mathrm{d}(y, z) = \sup\limits_{x \in J_r} \|y(x) - z(x)\|$. Definim aplicația $y \to \varphi(y)$, $(\varphi(y))(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\,\mathrm{d}t$.

Evident $(\varphi(y))(x_0) = y_0$ și din continuitatea lui y rezultă continuitatea lui $\varphi(y)$; deci $\varphi: M \to M$. Mai mult, φ este o contracție. Într-adevăr

$$\mathrm{d}(\varphi(y), \varphi(z)) = \sup_{x \in J_r} \|(\varphi(y))(t) - (\varphi(z))(t)\| = \sup_{x \in J_r} \left\| \int_{x_0}^{x} (f(t, y(t)) - f(t, z(t)))\,\mathrm{d}t \right\| \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{x\in J_r}\int_{x_0}^{x}\|f(t, y(t)) - f(t, z(t))\|\,\mathrm{d}t \leqslant \sup_{x\in J_r}\int_{x_0}^{x} c\|y(t)-z(t)\|\mathrm{d}t \leqslant c|x-x_0|\mathrm{d}(y, z) \leqslant$$

$\leqslant cr\mathrm{d}(y, z)$ şi $cr < 1$ prin ipoteză. Rezultă că φ este o contracţie şi deci există un punct unic $y \in M$ astfel incit $\varphi(y) = y$, adică o funcţie unică

$y : J_r \to V$ astfel incit $y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\,\mathrm{d}t$.

Principii pentru condiţiile iniţiale. (1) Pentru o ecuaţie diferenţială de ordinul n condiţiile iniţiale constau din punctul x_0 şi din valorile $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y'_0, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$.

(2) Dacă avem un sistem de ecuaţii diferenţiale cu funcţiile necunoscute $y_1, \ldots, y_n$, iar $m_1, \ldots, m_n$ sînt respectiv ordinele maxime ale derivatelor lui $y_1, \ldots, y_n$, atunci condiţiile iniţiale constau din punctul x_0 şi din valorile

$$\begin{aligned}
&y_1(x_0) = y_{10},\ y'_1(0) = y'_{10}, \ldots, y_1^{(m_1-1)}(x_0) = y_{10}^{(m_1-1)},\\
&\ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots\\
&y_n(x_0) = y_{n0},\ y'_n(x_0) = y'_{n0}, \ldots, y_n^{(m_n-1)}(x_0) = y_{n0}^{(m_n-1)}.
\end{aligned}$$

Pentru rezolvarea numerică a problemei lui Cauchy se poate aplica metoda Euler şi metoda Runge-Kutta.

§ 3. Metoda Euler

Fie problema Cauchy

$$y' = f(x, y),\ y(x_0) = y_0,$$

în care $f : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ verifică condiţiile din teorema de existenţă şi unicitate. Conform acestei teoreme există o soluţie $x \to y(x)$, $x \in [a, b] \subset I$, dar explicitarea sa exactă nu este întotdeauna posibilă. Dacă se reuşeşte să se aproximeze valorile acestei soluţii în punctele $x_0 < x_1 < x_2 < \ldots$ din $[a, b]$, fie cu ajutorul unui polinom de aproximare fie cu ajutorul funcţiilor spline, se spune că soluţia a fost determinată aproximativ.

Folosim o diviziune a intervalului $[a, b]$ prin puncte echidistante, pasul fiind $h = \dfrac{b-a}{n}$. Prin integrare pe intervalul $[x_k, x_{k+1}]$, $x_{k+1} = x_k + h$, ecuaţia diferenţială se transformă în ecuaţia integrală

$$y(x_{k+1}) = y(x_k) + \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t, y(t))\,\mathrm{d}t,$$

cu necunoscuta $y(x_k)$ pentru fiecare $k = 0, 1, 2, \dots$ Notind prin y_k^* o aproximare a lui $y(x_k)$ şi aplicind metoda dreptunghiurilor găsim relaţia de recurenţă

$$y_{k+1}^* = y_k^* + hf(x_k, y_k^*), \quad k = 0, 1, 2, \dots .$$

Procedeul de aproximare a soluţiei problemei Cauchy prin valorile determinate de această ecuaţie cu diferenţe finite este cunoscut sub numele de *metoda Euler*. Această metodă este interesantă mai mult prin valoarea ei metodologică şi mai puţin prin rezultatele la care conduce (dă erori mari!)

Cazul $y \in \mathbb{R}^n$ este analog celui precedent şi se rezolvă prin sistemul cu diferenţe finite (notaţii vectoriale)

$$y_{k+1}^* = y_k^* + hf(x_k, y_k^*), \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Evaluarea erorii absolute este descrisă de teorema care urmează.

3.1. Teoremă. Dacă $\varepsilon(x) = y(x) - y^*(x)$ este diferenţa între soluţia exactă şi soluţia aproximativă, atunci există o constantă $M > 0$ astfel incit $\| \varepsilon(x) \| \leqslant e^{Mx} o(h)$.

Demonstraţie. Folosind $\varepsilon_k = y_k^* - y(x_k)$ obţinem

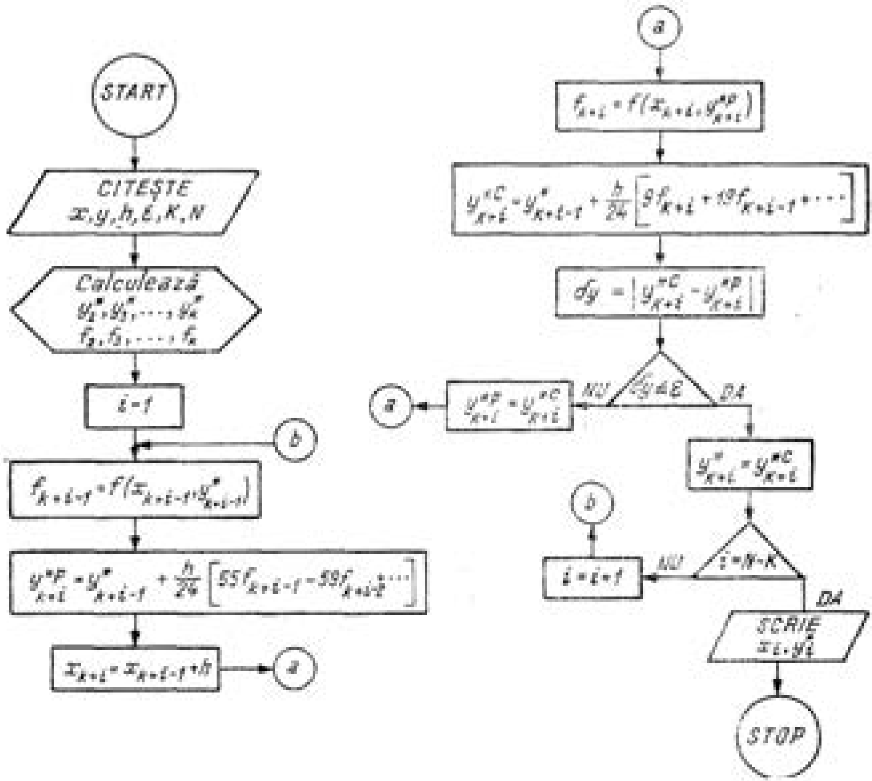
$$\frac{\varepsilon_{k+1} - \varepsilon_k}{h} = \frac{y_{k+1}^* - y(x_{k+1}) - (y_k^* - y(x_k))}{h} =$$

$$= \frac{y_{k+1}^* - y_k^*}{h} - \frac{y(x_{k+1}) - y(x_k)}{h} = f(x_k, y_k^*) - \frac{y(x_{k+1}) - y(x_k)}{h}.$$

Diferenţiabilitatea lui y implică $y(x_{k+1}) = y(x_k + h) = y(x_k) + hy'(x_k) + o(h^2)$ aşa incit $y(x_{k+1}) - y(x_k) = hy'(x_k) + o(h^2) = hf(x_k, y(x_k)) + o(h^2)$. Deci $\dfrac{\varepsilon_{k+1} - \varepsilon_k}{h} = f(x_k, y_k^*) - f(x_k, y(x_k)) + o(h^2)$ şi conform teoremei creşterilor finite avem $\| f(x_k, y_k^*) - f(x_k, y(x_k)) \| = \left| \dfrac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=\xi} \| y_k^* - y(x_k) \| \leqslant$ $\leqslant \sup\limits_{x \in I} \left| \dfrac{\partial f}{\partial x} \right| \| y_k^* - y(x_k) \| = M \| y_k^* - y(x_k) \| = M \| \varepsilon_k \|$. Rezultă $\| \varepsilon_{k+1} \| \leqslant \| \varepsilon_k \| +$ $+ hM \| \varepsilon_k \| + o(h^2)$ sau $\| \varepsilon_{k+1} \| \leqslant (1 + hM) \| \varepsilon_k \| + o(h^2)$. După N paşi se obţine $\| \varepsilon_N \| \leqslant \| \varepsilon_{N-1} \| (1 + hM) + o(h^2) \leqslant \| \varepsilon_{N-2} \| (1 + hM)^2 + o(h^2) +$ $+ (1 + hM) o(h^2) \leqslant \dots \leqslant \| \varepsilon_0 \| (1 + hM)^N + o(h^2) [1 + (1 + hM) + (1 + hM)^2 +$ $+ \dots + (1 + hM)^{N-1}]$, unde $\varepsilon_0 = y_0^* - y(x_0) = 0$. Deci $\| \varepsilon_N \| \leqslant$ $\leqslant \dfrac{(1 + hM)^N - 1}{hM} o(h^2)$ şi observăm că pentru x fixat şi $h = x/N$ avem $\lim\limits_{h \to 0} (1 + hM)^N = \lim\limits_{h \to 0} (1 + hM)^{x/h} = e^{Mx}$. De aceea

$$\| \varepsilon(x) \| \leqslant \frac{e^{Mx} - 1}{hM} o(h^2) \leqslant e^{Mx} \frac{o(h^2)}{hM} \leqslant e^{Mx} o(h).$$

Dăm următoarea schemă logică pentru metoda Euler modificată (predictor—corector).



Exemple. 1) Să se calculeze, cu o eroare $\varepsilon = \frac{1}{100}$, valoarea soluţiei $x \to y(x)$ a problemei Cauchy

$$y' = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} xy^2, \quad y(0) = 0,$$

în punctul $x = \frac{1}{400}$.

Soluţie. Ecuaţia diferenţială este de tip Riccati şi nu dispunem de un procedeu pentru aflarea soluţiei exacte deşi se verifică condiţiile de existenţă şi unicitate a soluţiei. Într-adevăr

— funcţia $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} xy^2$ este de clasă C^∞,

— funcţia parţială $y \to f(x, y) = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} xy^2$ este de clasă C^∞.

Cu notaţiile din § 2, fie $J = [-1, 1]$, $V = [-1, 1]$. Deoarece

$$(x, y),(x, z) \in J \times V \Rightarrow |f(x, y) - f(x, z)| = \frac{1}{3} |x|\,|y - z|\,|y + z| \leqslant \frac{2}{3} |y - z|,$$

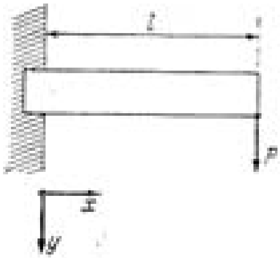


Fig. 2

rezultă $c = \frac{2}{3}$ şi deci $r < \frac{3}{2}$. Punem $r = 1$. Conform teoriei, ecuaţia admite soluţia $y : [-1, 1] \to \mathbb{R}$. Fixînd $h = \frac{1}{800}$, găsim $y\left(\frac{1}{400}\right) = 0{,}00125$.

2) *Bară supusă la încovoiere.*

Fie o bară de lungime l, încastrată la un capăt şi supusă la capătul liber unei sarcini P (fig. 2). Alegînd reperul cartezian ca în figură, capătul încastrat este caracterizat de ecuaţia $x = 0$. Variabila y va măsura încovoierea barei. Dacă E este modulul lui Young, iar I este momentul de inerţie al secţiunii transversale a barei în raport cu o dreaptă care trece prin centrul de greutate al secţiunii şi este perpendiculară pe planul xOy, . : poate arăta că deformaţia la încovoiere satisface ecuaţia diferenţială $y'' = \frac{P}{EI}(1 - x)(1 + y'^2)^{3/2}$ în ipoteza că tensiunile din bară rămîn în domeniul elastic, adică $P \leqslant P_0$. Întrucît bara este încastrată în $x = 0$ se impun valorile $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$. Dacă P este relativ mic, atunci panta y' a încovoierii este mică aşa încît y'^2 poate fi neglijat şi ecuaţia devine $y'' = \frac{P}{EI}(l - x)$ cu soluţia $y(x) = \frac{P}{6EI}x^2(3l - x)$.

Dacă P este mare atunci y cît şi y' devin mari în comparaţie cu unitatea, iar termenul y'^2 nu mai poate fi neglijat aşa încît, în acest caz, pentru obţinerea soluţiei vom aplica o metodă numerică. Anume, reducem ecuaţia la un sistem de ecuaţii diferenţiale de ordinul întîi $y' = z$, $z' = k(l - x)(1 + z^2)^{3/2}$, $K = P/EI$, cu condiţiile iniţiale $y(0) = 0$, $z(0) = 0$. Algoritmul metodei numerice pe care o folosim se compune din următorii paşi: (1) notăm $f(x, z) = k(l - x) \cdot (1 + z^2)^{3/2}$, (2) utilizăm metoda Euler pentru a calcula y_1^* şi z_1^* reţinînd că $y_0^* = y(0) = 0$, $z_0^* = z(0) = 0$; deci $y_1^* = klh^2/2$, $z_1^* = \frac{h}{2}[kl + f(h, klh)]$, (3) se prezic valorile y_{k+1}^*, z_{k+1}^* luînd $y_{k+1}^{*(0)} = y_{k-1}^* + 2hz_k^*$, $z_{k+1}^{*(0)} = z_{k-1}^* + 2hf(x_k^*, z_k^*)$ pentru $k = 1, 2, 3, \ldots$, (4) se corectează y_{k+1}^*, z_{k+1}^* luînd $y_{k+1}^{*(i)} = y_k^* + \frac{h}{2}[z_k^* + z_{k+1}^{*(i-1)}]$, $z_{k+1}^{*(i)} = z_k^* + \frac{h}{2}[f(x_k, z_k^*) + f(x_{k+1}, z_{k+1}^{*(i-1)})]$, $i = 1, 2, 3 \ldots$; iteraţiile se opresc de îndată ce $|z_{k+1}^{*(i)} - z_{k+1}^{*(i-1)}| < \varepsilon$, ε impus iniţial, (5) se face o ultimă corecţie a lui z_{k+1}^*, estimînd eroarea de trunchiere folosind $e_T = \frac{1}{5}(z_k^{*(0)} - z_k^{*(i)})$ şi luînd apoi $z_{k+1}^* = z_k^{*(i)} + e_T = z_k^{*(i)} + \frac{1}{5}(z_k^{*(0)} - z_k^{*(i)})$, (6) înlocuim în expresia lui $y_{k+1}^{*(i)}$, pe $z_{k+1}^{*(i-1)}$ cu valoarea z_{k+1}^* şi obţinem $y_{k+1}^* = y_k^* + \frac{h}{2}(z_k^* + z_{k+1}^*)$.

Pentru calcule s-a ales $l = 100$ m, $E = 10^7$, $I = 0{,}128$, bara fiind din duraluminiu. S-a rulat un program FORTRAN, pentru algoritmul descris mai sus, în care P a luat diferite valori, iar $h = 2$ şi $h = 4$. Rezultatele obţinute s-au trecut în tabelul din pagina următoare.

Sarcina (P)	Deformația (y)	Eroarea
10	2,605	0,03
20	5,219	0,21
30	7,850	0,48
40	10,505	0,84
50	13,195	1,32
60	15,929	1,91
70	18,719	2,62
80	21,575	3,44
90	24,512	4,38
100	27,546	5,46

§4. Metoda Runge-Kutta

Pentru simplificare considerăm un sistem autonom de ecuații diferențiale $y' = f(y)$, cu condiția inițială $y(x_0) = y_0$, unde x_0, y_0 sînt date. Admitem, f de clasă C^2 într-un domeniu $\mathbb{D} \subset \mathbb{R}^m$. Fie $h > 0$ un pas de integrare fixat, fie formula Taylor $y(x+h) = y(x) + hy'(x) + \frac{h^2}{2}y''(x) + o(h^2)$ sau $y(x+h) = y(x) + hf(y(x)) + \frac{h^2}{2} f'(y(x)) \cdot f(x) + o(h^2)$ și $k_1 = hf(y)$, $k_2 = hf(y + \lambda_{21}k_1)$, $k_3 = hf(y + \lambda_{31}k_1 + \lambda_{32}k_2)$, $k_4 = hf(y + \lambda_{41}k_1 + \lambda_{42}k_2 + \lambda_{43}k_3), \ldots$, în care λ_{ij} sînt constante deocamdată nedeterminate.

Ideea metodei Runge-Kutta constă în a determina parametrii λ_{ij} și α_i astfel încît coeficienții puterilor lui h, din membrul drept al lui $y(x+h)$ și din suma $y + \sum_{i=1}^{s} \alpha_i k_i$, să coincidă pînă la puteri cît mai mari, adică să putem adopta aproximarea,

$$y(x+h) \simeq y(x) + \sum_{i=1}^{s} \alpha_i k_i.$$

Pentru ușurință vom efectua calculele în cazul $s = 2$. Ținînd seama de formula Taylor găsim $k_2 = hf(y) + h\lambda_{21}k_1 \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}y} + h\frac{\lambda_{21}^2}{2} k_1^2 \frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}y^2} + o(k_1^2) = hf(y) + \lambda_{21}h^2 f(y) \cdot f'(y) + \lambda_{21}^2 \frac{h^3}{2} f^2(y) \cdot f''(y) + o(h^4)$, unde $k_1 = hf(y)$.

Atunci

$$y + \alpha_1 k_1 + \alpha_2 k_2 = y + h(\alpha_1 + \alpha_2) f(y) + h^2 \alpha_2 \lambda_{21} f(y) f'(y) + \\ + \frac{h^3}{2} \alpha_2 \lambda_{21}^2 f^2(y) f''(y) + o(h^4).$$

Comparînd cu membrul al doilea al lui $y(x+h)$, din egalitatea coeficienților lui h și h^2 obținem $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$, $\alpha_2 \cdot \lambda_{21} = 1/2$. Notînd $\alpha_2 = \lambda$ găsim $\alpha_1 = 1 - \lambda$, $\alpha_2 = \lambda$, $\lambda_{21} = \frac{1}{2\lambda}$. Rezultă sistemul cu diferențe finite

$$y_{k+1}^* = y_k^* + (1 - \lambda) k_1 + \lambda k_2,$$

unde $y_0^* = y_0$, $k_1 = hf(y_k^*)$, $k_2 = hf\left(y_k^* + \frac{1}{2\lambda} k_1\right)$ care aproximează $y' = f(y)$ cu o precizie pînă la termenii de gradul doi, inclusiv, în raport cu h. Acest sistem a fost obținut prin alegerea unei diviziuni $x_0, x_1, \ldots, x_n$ a intervalului $[x_0, T]$, în care este definită funcția necunoscută y, $x_1 = x_0 + h$, $x_2 = x_0 + 2h, \ldots$, iar $y_k^* \simeq y(x_k)$.

Un caz des întîlnit în aplicații este cazul $s = 4$ definit de sistemul

$$y_{k+1}^* = y_k^* + \frac{1}{6}[k_1 + 2(k_2 + k_3) + k_4], \tag{1}$$

unde $k_1 = hf(y_k^*)$, $k_2 = hf(y_k^* + 1/2k_1)$, $k_3 = hf(y_k^* + 1/2k_2)$, $k_4 = hf(y_k^* + k_3)$.

Pentru $s = 4$, sistemul diferențial $y' = f(x, y)$, cu condiția inițială $y(x_0) = y_0$, se reduce la sistemul cu diferențe finite (1) dar în care $k_1 = hf(x_k, y_k^*)$, $k_2 = hf\left(x_k + h/2, y_k^* + \frac{k_1}{2}\right)$, $k_3 = hf\left(x_k + h/2, y_k^* + \frac{k_2}{2}\right)$, $k_4 = hf(x_k + h, y_k^* + k_3)$.

Observații. (1) Metodele de tip Runge-Kutta sînt metode cu *un singur pas* dar care necesită calculul de s ori a valorii funcției f la fiecare pas al procesului de integrare. Spre deosebire de metodele de aproximații succesive (Euler) care necesită calculul anterior al punctelor de pornire, metodele Runge-Kutta au autostart.

(2) Metodele Runge-Kutta pot fi exprimate prin sistemul cu diferențe finite de forma

$$y_{k+1}^* = y_k^* + hg(y_k^*, h), \tag{2}$$

unde $g(y_k^*, h) = \alpha_1 f(y_k^*) + \alpha_2 f(y_k^* + \lambda_{21} hf(y_k^*) + \ldots) + \ldots$

4.1. *Definiție. Metoda Runge-Kutta dată prin* (2) *se numește consistentă dacă* $g(y, 0) = f(y)$.

4.2. Teoremă. Presupunem că funcția $(y, h) \to g(y, h)$, $h > 0$, $y \in \mathbb{R}^n$, este continuă, iar $y \to g(y, h)$ este lipschitziană, adică $\|g(y_1, h) - g(y_2, h)\| \leqslant M\|y_1 - y_2\|$, M = constant. Metoda Runge-Kutta este *convergentă* dacă și numai dacă este consistentă.

Întrucît condiția de consistență este satisfăcută, adică $\sum_{i=1}^{s} \alpha_i = 1$, rezultă că metodele Runge-Kutta sînt convergente.

4.3. Teoremă. Dacă $\varepsilon_k = \| y(x_k) - y_k^* \|$ este eroarea prin metoda Runge-Kutta, exprimată de sistemul (2), atunci $\varepsilon_k \leqslant \frac{e^{khM} - 1}{M} o(h^s)$, unde s este ordinul metodei.

Demonstrație. Din sistemul (2) în care substituim soluția exactă y avem $y(x_{k+1}) = y(x_k) + hg(y(x_k), h) + o(h^{s+1})$. Scăzînd pe (2) din această egalitate și avînd în vedere că g este o funcție lipschitziană obținem $\varepsilon_{k+1} \leqslant (1 + Mh)\varepsilon_k + Lo(h^{s+1})$, unde $L > 0$ este o constantă pozitivă, iar M este constanta lui Lipschitz. Prin inducție se arată că

$\varepsilon_k \leqslant (1 + hM)^k \varepsilon_0 + \dfrac{(1 + Mh)^k - 1}{hM} Lo(h^{s+1})$ şi, cum $\varepsilon_0 = 0$, rezultă inegalitatea din enunţul teoremei.

O b s e r v a ţ i e. Evaluarea erorii prin teorema 4.3 este neconvenabilă în practică, deoarece necesită cunoaşterea constantelor M şi M^*. Pentru a evita această situaţie se poate construi o formulă semiempirică pentru estimarea erorii, care se produce într-un singur pas al integrării. Anume dacă presupunem $y(x_k) \simeq y_k^* + Ah^s$, $A =$ = constantă, şi dacă executăm un pas al integrării de lungime h şi doi paşi de lungime $h/2$, începînd de la acelaşi punct x_k, atunci $y(x_{k+1}) \simeq y_{k+1}^* + Ah^s \simeq y_{k+2}^* + 2A\left(\dfrac{h}{2}\right)^s$. De aici $A \simeq \dfrac{y_{k+1}^* - y_{k+2}^*}{h^s\left(\dfrac{1}{2^{s-1}} - 1\right)}$.

Însumînd erorile locale $|A|\, h^s$, după efectuarea unui anumit număr de paşi, obţinem *estimarea aproximativă a erorii.*

Schema logică şi o variantă de program FORTRAN pentru metoda Runge-Kutta de ordinul patru ($s = 4$) sînt date în figura 3 şi respectiv în figura 4.

Variantă de program

```
  DIMENSION X(100), Y(100)
  DATA H/0.01/, X(1)/0.01, Y(1)/1.0/
  READ (105,1) N
1 FORMAT (7X,I2)
  DO 2 K = 2,N
  X(K) = X(K - 1) + H
  RK1 = H*F(X(K - 1), Y(K - 1))
  RK2 = H*F(X(K - 1)+H/2,Y(K-1)+
      + RK1/2)
  RK3 = H*F(X(K-1)+H/2, Y(K-1)+
      +RK2/2)
  RK4 = H*F(X(K - 1)+H, Y(K - 1)+
      +RK3)
  Y(K) = Y(K-1)+1./6.*(RK1+
*     +2*RK2+2*RK3+RK4)
2  CONTINUE
   WRITE (108,3) Y(K)
3  FORMAT (3X, E14.6)
   STOP
   END
```

Fig. 3

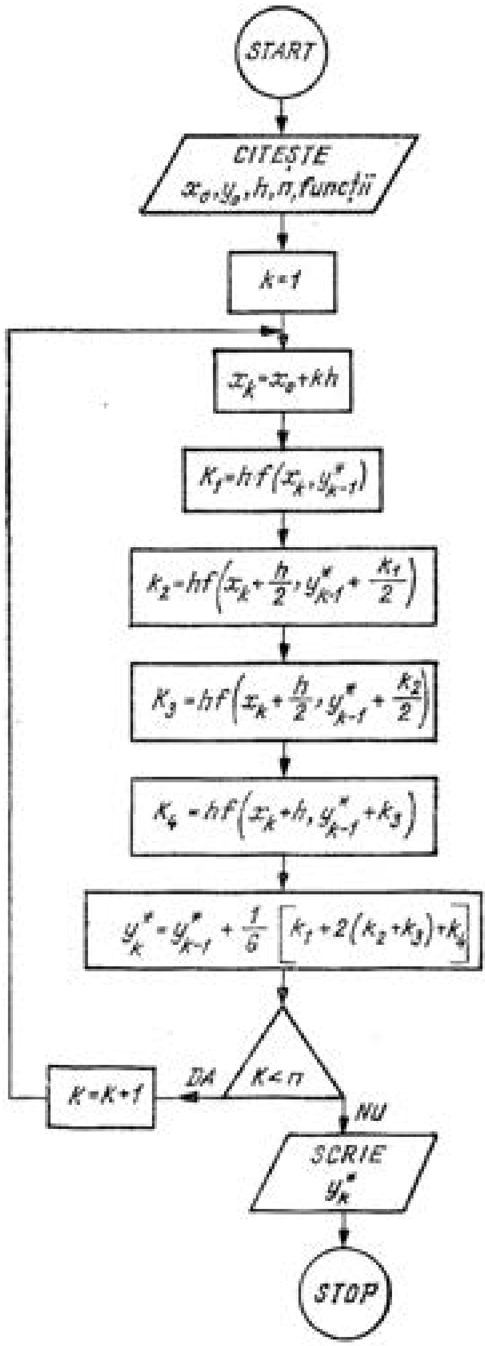


Fig. 4

§5. Stabilitatea soluţiilor

O problemă practică importantă este aceea a determinării comportării unui sistem fizic în vecinătatea unei stări de echilibru. Dacă sistemul revine la această stare după ce a fost supus unor perturbaţii mici, atunci el se numeşte *stabil*; dacă nu revine, se numeşte *instabil*. De obicei sistemele instabile conduc la catastrofe.

Verificarea stabilităţii unui sistem fizic se poate face pe cale experimentală, dar acest lucru este costisitor şi reclamă o mare durată de timp. De aceea, în proiectarea sistemelor sînt de preferat criteriile matematice pentru stabilitate.

Să considerăm un sistem fizic a cărui comportare în timp este descrisă de *sistemul autonom* (nu conţine explicit variabila independentă)

$$(1) \qquad \frac{dy}{dt} = f(y),\ y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{D} \subset \mathbb{R}^n,\ \ f = (f_1, \ldots, f_n),$$

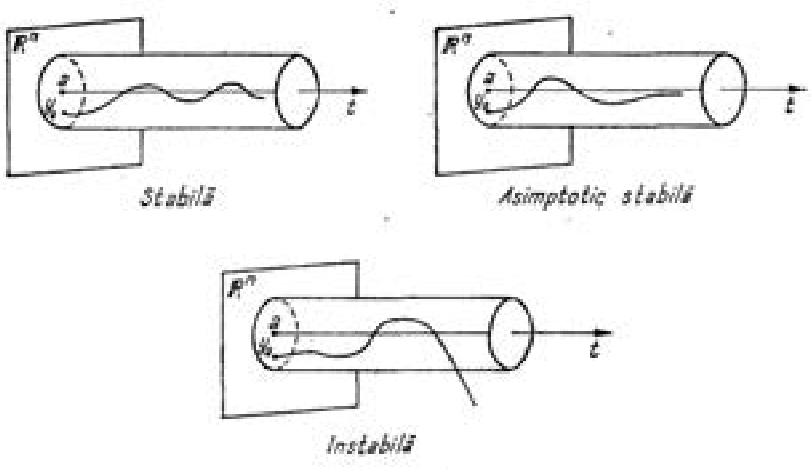
f fiind de fapt un cîmp vectorial pe $\mathbb{D}$.

Dacă a este un punct pentru care $f(a) = 0$, atunci $y = a$ este o soluţie a sistemului (1) care verifică condiţiile iniţiale $y(t_0) = a$. O astfel de soluţie se numeşte *poziţie (punct) de echilibru*. Din punct de vedere intuitiv spunem că poziţia de echilibru a este stabilă dacă orice soluţie a lui (1) ce pleacă la $t = t_0$ dintr-un punct suficient de apropiat de a rămîne pentru $t > t_0$ într-o vecinătate a lui a. Presupunem că f este de clasă C^1 pe $\mathbb{D}$ şi notăm cu $t \to y(t, y_0)$ soluţia lui (1) care verifică condiţiile iniţiale $y(t_0, y_0) = y_0$.

5.1. *Definiţie*

Poziţia de echilibru a sistemului (1) *se numeşte* (fig. 5): (i) *stabilă, dacă există o vecinătate V a lui a astfel încît* $y_0 \in V$ *să implice existenţa soluţiei* $t \to y(t, y_0)$, $t \in [t_0, \infty)$ *şi dacă* $\lim\limits_{y_0 \to a} y(t, y_0) = a$, $\forall t \in [t_0, \infty)$;

(ii) *asimptotic stabilă, dacă este stabilă şi dacă există o vecinătate* $U \subset V$ *a lui a astfel încît* $y_0 \in U$ *să implice* $\lim\limits_{t \to \infty} y(t, y_0) = a$.



Graficul soluţiei

Fig. 5

Definițiile precedente se pot extinde și la sisteme neautonome, iar teoria stabilității dă răspunsuri la asemenea probleme utilizînd informațiile pe care le avem despre cîmpul vectorial $f = (f_1, \ldots, f_n)$. Noi vom formula teorema numai pentru unele cazuri particulare (vezi cap. 1, § 3; cap. 3, § 6; cap. 4, § 5; cap. 5, § 2).

Exemplu. Sistemul autonom $\frac{dx}{dt} = y$, $\frac{dy}{dt} = -x$ admite poziția de echilibru $(0, 0)$. Derivînd prima ecuație în raport cu t și ținînd seama de a doua obținem ecuația $\frac{d^2x}{dt^2} + x = 0$ (ecuația oscilațiilor mici ale pendulului în vecinătatea poziției inferioare de echilibru) cu soluția generală $x(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t$. Deci $y(t) = c_2 \cos t - c_1 \sin t$.

Fie condițiile inițiale $t = 0, x(0) = x_0, y(0) = y_0$. Soluția care le satisface este $x(t) = x_0 \cos t + y_0 \sin t$, $y(t) = y_0 \cos t - x_0 \sin t$. Ipoteza $|x_0| < \delta$, $|y_0| < \delta$ implică $|x(t)| \leqslant |x_0| + |y_0| < 2\delta$, $|y(t)| \leqslant |x_0| + |y_0| \leqslant 2\delta$. Notînd $2\delta = \varepsilon$ putem scrie $|x(t)| < \varepsilon$, $|y(t)| < \varepsilon$, $\forall t > 0$. Astfel poziția de echilibru $(0, 0)$ este stabilă. Ea nu este asimptotic stabilă deoarece $\lim\limits_{t \to \infty} x(t)$ nu există.

§6. Probleme la limită

Ecuațiile diferențiale la care se pun asemenea probleme trebuie să fie cel puțin de ordinul doi.

Fie $y'' = f(x, y, y')$, $x \in [a, b]$. Găsirea soluției $y : [a, b] \to \mathbb{R}$ în condițiile (la limită) $\varphi(y(a), y'(a)) = 0$, $\varphi(y(b), y'(b)) = 0$ se numește *problemă la limită* (bilocală). Pentru rezolvarea numerică a unei asemenea probleme este potrivită *metoda diferențelor finite* pe care o explicităm pe cazul particular

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x),$$

$$\alpha_0 y(a) + \alpha_1 y'(a) = A, \quad \beta_0 y(b) + \beta_1 y'(b) = B,$$

soluția y fiind presupusă de clasă C^4. Se fac notațiile $x_0 = a$, $x_n = b$, $h = \frac{b - a}{n}$, $x_i = x_0 + ih$, $p_i = p(x_i)$, $q_i = q(x_i)$, $f_i = f(x_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n - 1$. Admițînd aproximările

$$y'_i \approx \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h}, \quad y''_i \approx \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2}$$

obținem sistemul algebric liniar

$$\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + p_i \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} + q_i y_i = f_i, \; i = 1, 2, \ldots, n - 1$$

$$\alpha_0 y_0 + \alpha_1 \frac{y_1 - y_0}{h} = A, \quad \beta_0 y_n + \beta_1 \frac{y_n - y_{n-1}}{h} = B$$

de $n+1$ ecuaţii cu $n+1$ necunoscute $y_0, y_1, \ldots, y_n$. Dacă acesta este compatibil, atunci soluţia sa procură valori ale soluţiei problemei la limită

x	$x_0 = a$	$x_1 \ldots$	$x_n = b$
y	y_0	$y_1 \ldots$	y_n

Pentru evaluarea erorii se utilizează formula

$$|y_i - y_i(x)| \leqslant \frac{h^2 M}{96}(b-a)^2,$$

unde $M = \max\limits_{x \in [a,b]} |y^{(4)}(x)|$, iar $y(x_i)$ este valoarea exactă.

Pentru a pune în evidenţă modul în care se formulează o problemă la limită pentru ecuaţii de ordin superior lui doi considerăm un exemplu din rezistenţa materialelor.

Dacă rigiditatea la încovoiere EI şi sarcina transversală q sînt constante, atunci ecuaţia diferenţială de echilibru şi condiţiile la limită pentru grinda solicitată la încovoiere cu forţă axială constantă P sînt

$$y^{(4)} + k^2 y^{(2)} = \frac{q}{EI}, \quad k^2 = \frac{P}{EI}$$

$$y(0) = 0, \; y(l) = 0$$

$$y^{(2)}(0) = -\frac{M_0}{EI}, \quad y^{(2)}(l) = -\frac{M_l}{EI},$$

unde M_0, M_l sînt momentele concentrate la capete, iar y reprezintă săgeata (fig. 6). Soluţia generală a ecuaţiei este (vezi Cap. 3, § 5, 6)

$$y = c_1 \cos kx + c_2 \sin kx + \frac{qx^2}{2EIk^2} + c_3 x + c_4,$$

iar soluţia care satisface condiţiile la limită este

$$y = \frac{1}{k^2 EI}\left\{\left(M_0 + \frac{q}{k^2}\right)(\cos kx - 1) + \frac{\sin kx}{\sin kl}\left[M_l - M_0 \cos kl + \frac{q}{k^2}(1 - \cos kl)\right] - \right.$$

$$\left. - \left[M_l - M_0 + \frac{ql}{2}(l - x)\right]\frac{x}{l}\right\}.$$

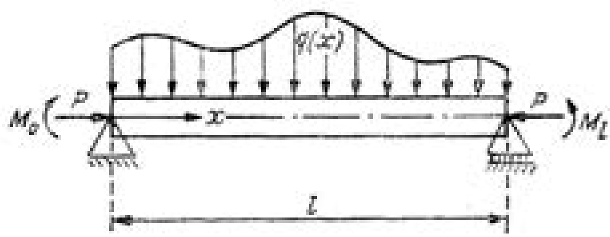


Fig. 6

§7. Probleme

1. Să se găsească soluții pentru următoarele ecuații

$$y'^2 - (x^2 + y^2)y' + x^2y^2 = 0,\ x^2 + y'^2 = 1,\ \ x = yy' + y'^2.$$

2. Să se cerceteze valabilitatea teoremei de existență și unicitate pentru

$$y' = -\sqrt[3]{y-2},\quad y^{(4)} = e^{-x},\ \begin{cases} 2x\dfrac{dx}{dt} = \ln y - x^2 \\ 2\dfrac{dy}{dt} = x^2y + y\ln y \end{cases},\ x \in \mathbb{R},\ \ y > 0.$$

3. Se consideră ecuația diferențială $y' = \dfrac{2y^2 + x}{3y^2 + 5}$.

1) Să se găsească locul geometric al punctelor critice ale soluțiilor acestei ecuații.

2) Să se verifice dacă $x = 0$ este sau nu punct de extrem local pentru soluția care satisface condițiile inițiale $x = 0$, $y = 0$.

4. Fie o funcție reală care verifică ecuația diferențială

$$xf''(x) + 3x(f'(x))^2 = 1 - e^{-x},\ x \in \mathbb{R}.$$

1) Să se arate că dacă x_0 este un punct de extrem local al lui f, atunci x_0 este un punct de minim (cazul $x_0 = 0$ se va discuta separat).

2) Presupunem $f(0) = f'(0)$. Să se determine cea mai mică constantă a astfel încît $f(x) \leqslant ax^2$, $\forall x \geqslant 0$.

5. Să se rezolve următoarele probleme Cauchy:

$$x^2 - y^2 = 5xyy',\ y(1) = 0\,;$$

$$y'\cos x + y\sin x + 4\cos^3 x = 0,\ \ y(\pi) = 1\,;$$

$$y''' = e^x,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 0,\ y''(0) = -1.$$

6. Să se aproximeze soluția, prin metoda Euler, în fiecare din cazurile

1) $y' = y^2$, $y(0) = 1$, $x \in [0, 1]$

2) $y' = \sqrt{1 - x^2y^2}$, $y(0) = 0$, $x \in [0, 1]$

3) $y' = x + y^4$, $y(0) = 1$, $x \in [0, 2]$.

7. Să se aproximeze soluția, prin metoda Runge-Kutta, în fiecare din cazurile

1) $y' = y^2 - x$, $y(0) = 1$, $x \in [0, 1]$, $h = 0{,}1$

2) $y' = \sqrt{x + y}$, $y(0) = 2$, $x \in [0, 10]$, $h = 0{,}2$

3) $y' = e^{-y} + x^2$, $y(0) = 1/2$, $x \in [0, 1]$, $h = 0{,}05$.

8. Să se cerceteze stabilitatea pozițiilor de echilibru pentru

$$1)\ \frac{dx}{dt} = x\,;\quad 2)\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x \\ \dfrac{dy}{dt} = -y \end{cases};\quad 3)\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y \\ \dfrac{dy}{dt} = -\sin x. \end{cases}$$

9. Să se rezolve problemele la limită

1) $y'' + xy' = 0$, $y(0) = y(1) = 1$

2) $y'' + y' \sin x = 0$, $y(0) = y\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$.

Capitolul 3

ECUAȚII DIFERENȚIALE LINIARE

§1. Generalități

O ecuație diferențială de forma

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f(x),\ y^{(k)} = \frac{\mathrm{d}^k y}{\mathrm{d}x^k},$$

unde $a_i, f \in C^0(I)$, $i = 0, 1, \ldots, n$, $a_0 \neq 0$, iar $y \in C^n(I)$ este funcția necunoscută, se numește *ecuație diferențială liniară de ordinul n*. Dacă $f = 0$, ecuația se numește *omogenă*, iar dacă $\exists x \in I$ astfel încît $f(x) \neq 0$, atunci ecuația se numește *neomogenă*. Funcțiile a_i se numesc *coeficienții ecuației*.

Considerăm funcția

$$\mathscr{L} : C^n(I) \to C^0(I),\quad \mathscr{L}(y) = a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}\, y' + a_n y.$$

Prin calcule directe se dovedește că $\mathscr{L}$ este un operator liniar, adică

$$\mathscr{L}(y_1 + y_2) = \mathscr{L}(y_1) + \mathscr{L}(y_2),\ \mathscr{L}(cy) = c\mathscr{L}(y),\ c \in \mathbb{R}.$$

Denumirea completă a lui $\mathscr{L}$ este de *operator diferențial liniar de ordinul n* și deseori este mai convenabilă notația

$$\mathscr{L} = a_0 D^n + a_1 D^{n-1} + \ldots + a_{n-1} D + a_n,$$

unde $D = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ este *operatorul de derivare*.

Cu ajutorul lui $\mathscr{L}$ ecuația diferențială se scrie

$$\mathscr{L}(y) = f.$$

Punctele $x \in I$ în care $a_0(x) = 0$ se numesc *puncte singulare ale ecuației* $\mathscr{L}(y) = f$. Pentru a ocoli complicațiile impuse de prezența unor asemenea puncte presupunem $a_0(x) \neq 0$, $\forall x \in I$. În această ipoteză existența și unicitatea soluțiilor problemelor Cauchy sînt garantate de teorema care urmează, caz particular al teoremei din Cap. 2, § 2.

1.1. Teorema de existență și unicitate. Fie $a_i, f \in C^0(I)$ și $a_0(x) \neq 0$, $\forall x \in I$. Pentru orice $x_0 \in I$ și $y_0, y'_0, \ldots, y_0^{(n-1)} \in \mathbb{R}$, ecuația $\mathscr{L}(y) = f$ admite soluția unică $x \to y(x)$, definită pe o vecinătate a lui x_0, care verifică condițiile

$$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y'_0, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}.$$

Se poate arăta că orice soluție a ecuației $\mathscr{L}(y) = f$ se poate prelungi pînă la extremitățile intervalului I, inclusiv aceste extremități dacă I este închis [35].

§2. Spațiul vectorial al soluțiilor unei ecuații diferențiale liniare omogene

Ne situăm în ipotezele teoremei de existență și unicitate a soluției pentru ecuația liniară omogenă

$$\mathscr{L}(y) = 0 \text{ pe } I.$$

Mulțimea soluțiilor acestei ecuații este Ker $\mathscr{L}$, subspațiu vectorial al spațiului vectorial real $C^n(I)$. Cu toate că $C^n(I)$ este infinit dimensional, subspațiul Ker $\mathscr{L}$ este întotdeauna finit dimensional.

2.1. Teoremă. Dacă $\mathscr{L}$ este un operator diferențial liniar de ordinul n, atunci dimensiunea spațiului vectorial al soluțiilor ecuației liniare omogene $\mathscr{L}(y) = 0$ este n.

Demonstrație. Fie Ker $\mathscr{L}$ spațiul vectorial real al soluțiilor ecuației date. Fiecărei funcții $y \in$ Ker $\mathscr{L}$ îi putem atașa punctul $(y(x_0), y^{(1)}(x_0), \ldots, y^{(n-1)}(x_0)) \in \mathbb{R}^n$. Obținem funcția $\mathscr{T}$: Ker $\mathscr{L} \to \mathbb{R}^n$, $\mathscr{T}(y) = (y(x_0), y^{(1)}(x_0), \ldots, y^{(n-1)}(x_0))$. Această funcție este o transformare liniară și are ca imagine întreg spațiul $\mathbb{R}^n$. Liniaritatea lui $\mathscr{T}$ este evidentă; surjectivitatea decurge din teorema de existență care precizează că pentru orice condiții inițiale $(y(x_0), y^{(1)}(x_0), \ldots, y^{(n-1)}(x_0))$ există o soluție $y \in$ Ker $\mathscr{L}$, iar injectivitatea este asigurată de teorema de unicitate a soluției y. În concluzie $\mathscr{T}$ este un izomorfism și deci Ker $\mathscr{L} = n$.

Deoarece spațiul vectorial al soluțiilor unei ecuații liniare omogene are dimensiunea n, orice mulțime ordonată formată din n soluții liniar independente este o bază a acestui spațiu. Din această observație și din teorema precedentă rezultă:

2.2. Consecință. Dacă $\mathscr{L}$ este un operator diferențial liniar de ordinul n și dacă $y_1, \ldots, y_n$ sînt n soluții liniar independente ale ecuației omogene $\mathscr{L}(y) = 0$ pe I, atunci orice soluție y pe I poate fi exprimată în forma

$$y = \sum_{k=1}^{n} c_k y_k,$$

unde c_k sînt constante.

Soluția $\sum_{k=1}^{n} c_k y_k$, unde c_k sînt constante arbitrare, se numește *soluția generală* a ecuației $\mathscr{L}(y) = 0$. Ea este acea soluție care poate lua, prin particularizarea constantelor, valori prestabilite pentru $y(x), y'(x), \ldots, y^{(n-1)}(x)$ în

$x = x_0$. Această afirmație decurge din teoremele precedente precum și din cele ce urmează.

2.3. *Definiție. Fie $y_1, \ldots, y_n$, n soluții ale ecuației liniare omogene $\mathscr{L}(y) = 0$. Determinantul*

$$w = \begin{vmatrix} y_1 \cdots & y_n \\ y_1' \cdots & y_n' \\ \cdots \; \cdots & \cdots \\ y_1^{(n-1)} \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

se numește wronskian al acestor soluții.

2.4. Teoremă. (Abel-Liouville) Wronskianul are expresia

$$w(x) = w(x_0)\mathrm{e}^{-\int_{x_0}^{x} \frac{a_1}{a_0}(x)\mathrm{d}x}, \quad x_0, \; x \in I.$$

Demonstrație. Ținind seama de formula de derivare a unui determinant, avem

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x} = \underbrace{\begin{vmatrix} y_1' & \cdots & y_n' \\ y_1' & \cdots & y_n' \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} + \cdots +}_{=0} \begin{vmatrix} y_1 & \cdots & y_n \\ y_1' & \cdots & y_n' \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{(n)} & \cdots & y_n^{(n)} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 & \cdots & y_n \\ y_1' & \cdots & y_n' \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{(n)} & \cdots & y_n^{(n)} \end{vmatrix}.$$

Înlocuind ultima linie cu $y_k^{(n)} = A_1 y_k^{(n-1)} + \ldots + A_n y_k$, $A_1 = -\dfrac{a_1}{a_0}$, desfacem in sumă de determinanți și observăm că numai primul este nenul. Deci

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x} = A_1 w,$$

adică este adevărată formula din teoremă.

2.5. Teoremă. Soluțiile $y_1, \ldots, y_n$ ale ecuației diferențiale $\mathscr{L}(y) = 0$ sint liniar independente dacă și numai dacă $w(x) \neq 0$, $\forall x \in I$.

Demonstrație. Mai intii observăm că $w(x) \neq 0$, $\forall x \in I \Leftrightarrow w(x_0) \neq 0$. Apoi fie izomorfismul $\mathscr{T} : \mathrm{Ker}\, \mathscr{L} \to \mathbb{R}^n$, $(y(x_0), \; y^{(1)}(x_0), \ldots, y^{(n-1)}(x_0)) = \mathscr{T}(y)$. Rezultă

$$\begin{cases} (y_1(x_0), \; y_1^{(1)}(x_0), \ldots, y_1^{(n-1)}(x_0)) = \mathscr{T}(y_1) \\ \cdots \quad \cdots \; \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ (y_n(x_0), \; y_n^{(1)}(x_0), \ldots, y_n^{n-1}(x_0)) = \mathscr{T}(y_n) \end{cases}$$

Deoarece $\mathscr{T}$ este un izomorfism vectorii y_k, $k = 1, \ldots, n$, din $\mathrm{Ker}\, \mathscr{L}$ sint liniar independenți dacă și numai dacă vectorii $(y_k(x_0), \; y_k^{(1)}(x_0), \ldots$

$\ldots, y_k^{(n-1)}(x_0)), k = 1, \ldots, n$, din $\mathbb{R}^n$ sînt liniar independenţi, adică $w(x_0) \neq 0$ (determinantul vectorilor din $\mathbb{R}^n$).

§3. Metoda variaţiei constantelor

Ne situăm în ipotezele teoremei de existenţă şi unicitate. Considerăm ecuaţia diferenţială liniară neomogenă $\mathscr{L}(y) = f$ şi ecuaţia diferenţială liniară omogenă asociată $\mathscr{L}(y) = 0$, ambele pe intervalul I. Stabilim legătura între soluţiile generale ale celor două ecuaţii.

3.1. Teoremă. Soluţia generală a ecuaţiei neomogene, este suma dintre o soluţie particulară a ecuaţiei neomogene şi soluţia generală a ecuaţiei omogene.

Demonstraţie. Fie ecuaţia $\mathscr{L}(y) = f$ şi y_p o soluţie particulară a sa. Punem $y = u + y_p$, unde u este noua necunoscută. Utilizînd liniaritatea lui $\mathscr{L}$ găsim $\mathscr{L}(u) + \mathscr{L}(y_p) = f$ şi aceasta împreună cu $\mathscr{L}(y_p) = f$ implică $\mathscr{L}(u) = 0$. Rezultă că u trebuie să fie soluţia generală a ecuaţiei liniare omogene.

Una dintre metodele de aflare a soluţiei particulare a ecuaţiei liniare neomogene, de îndată ce cunoaştem soluţia generală a ecuaţiei omogene, este metoda *variaţiei constantelor* al cărui conţinut se poate rezuma prin teorema următoare:

3.2. Teoremă. Dacă $y = \sum_{k=1}^{n} c_k y_k$ este soluţia generală a ecuaţiei omogene, atunci o soluţie particulară a ecuaţiei neomogene poate fi găsită sub forma $x \to y_p(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k(x) y_k(x)$, $x \in I$, unde $(c_1', \ldots, c_n')$ este soluţia sistemului

$$\begin{cases} y_1 c_1' + \ldots + y_n c_n' = 0 \\ y_1' c_1' + \ldots + y_n' c_n' = 0 \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ y_1^{(n-1)} c_1' + \ldots + y_n^{(n-1)} c_n' = \dfrac{f}{a_0}. \end{cases}$$

Demonstraţie. Determinantul sistemului liniar algebric este wronskianul $w(x) \neq 0$. De aceea sistemul are o soluţie unică $(c_1', \ldots, c_n')$, de unde prin integrare se găsesc funcţiile $x \to c_i(x)$, $x \in I$ (constantele arbitrare sînt omise).

În ipotezele din teoremă funcţia $x \to y_p(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k(x) y_k(x)$ satisface

$$\begin{aligned} y_p &= \sum c_k y_k \\ y_p' &= \sum c_k y_k' \\ \ldots & \quad \ldots \quad \ldots \\ y_p^{(n-1)} &= \sum c_k y_k^{(n-1)} \\ y_p^{(n)} &= \sum c_k y_k^{(n)} + \sum c_k' y_k^{(n-1)} = \sum c_k y_k^{(n)} + \frac{f}{a_0}. \end{aligned}$$

Înlocuind în $\mathscr{L}(y) = f$ găsim o identitate.

Exemplu. În studiul încovoierii unei plăci subțiri, circulare, încastrată pe contur și supusă unei sarcini concentrate în centrul ei intervine ecuația diferențială

$$x^2\frac{d^2\varphi}{dx^2}+x\frac{d\varphi}{dx}-\varphi=kx,\ x\in(0,r],$$

unde $k=$ const. Să se determine soluția care satisface $\lim\limits_{x\to 0}\varphi(x)=0$, $\varphi(r)=0$, știind că ecuația liniară omogenă admite soluția particulară $\varphi_1=x$.

Soluție. Atașăm ecuația omogenă

$$x^2\frac{d^2\varphi}{dx^2}+x\frac{d\varphi}{dx}-\varphi=0.$$

Facem substituția $\varphi=xv$. Găsim $xv''+3v'=0$. Notăm $v'=z$ și deducem $xz'+3z=0$. Aceasta admite soluția particulară $z=-2/x^3$. Deci $v=1/x^2$, adică $\varphi_2=1/x$.

Cu ajutorul wronskianului deducem că φ_1 și φ_2 sînt liniar independente. Rezultă soluția generală a ecuației omogene $\varphi=c_1x+c_2\dfrac{1}{x}$.

Căutăm o soluție particulară a ecuației neomogene utilizînd metoda variației constantelor. Rezolvînd sistemul

$$\begin{cases} xc_1'+\dfrac{1}{x}c_2'=0\\[2ex] c_1'-\dfrac{1}{x^2}c_2'=\dfrac{k}{x}\end{cases}$$

rezultă $c_1(x)=\dfrac{k}{2}\ln x$, $c_2(x)=-\dfrac{k}{4}x^2$.

Soluția generală a ecuației neomogene este

$$\varphi=\left(\frac{k}{2}\ln x+c_1\right)x+\left(-\frac{k}{4}x^2+c_2\right)\frac{1}{x},$$

iar condițiile la limită implică $c_2=0$, $c_1=-\dfrac{k}{2}\ln r+\dfrac{k}{4}$.

§4. Metoda seriilor de puteri

Soluțiile particulare ale unor ecuații liniare pot fi obținute sub formă de serii de puteri de tipul

$$y=\sum_{k=0}^{\infty}a_k(x-x_0)^k,\quad y=(x-x_0)^{\alpha}\sum_{k=0}^{\infty}a_k(x-x_0)^k.$$

Constantele a_k și α se determină prin înlocuirea în ecuație și identificarea cu zero a seriei de puteri care se obține trecînd totul în partea stîngă. Cea mai dificilă problemă, în acest caz, este aceea de a ști dacă o ecuație liniară dată admite sau nu o asemenea soluție.

Avînd în vedere problemele concrete ne vom mărgini la enunțul următoarelor teoreme:

4.1. Teoremă. Dacă f şi g sînt reprezentabile prin serii Taylor în vecinătatea punctului $x = x_0$, atunci orice soluţie a ecuaţiei

$$y'' + f(x)y' + g(x)y = 0$$

se poate scrie sub forma

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k.$$

4.2. Teoremă. Dacă funcţiile f_1 şi f_2 sînt reprezentabile prin serii Taylor în vecinătatea lui $x = x_0$, atunci cel puţin una dintre soluţiile ecuaţiei

$$(x - x_0)^2 y'' + (x - x_0) f_1(x) y' + f_2(x) y = 0$$

se poate reprezenta în forma

$$y = (x - x_0)^\alpha \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k.$$

În acest caz x_0 este un punct singular.

Exemplu. Pentru ecuaţia $xy'' - 2y' - xy = 0$, punctul $x = 0$ este punct singular. De aceea căutăm soluţii de tipul $y = x^\alpha \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^{\alpha+n}$. Prin derivare deducem $y' = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (\alpha + n) a_n x^{\alpha+n-1}$, $y'' = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (\alpha + n)(\alpha + n - 1) a_n x^{\alpha+n-2}$ şi deci $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (\alpha + n)(\alpha + n - 1) a_n x^{\alpha+n-1} + \sum\limits_{n=0}^{\infty} 2(\alpha + n) a_n x^{\alpha+n-1} - \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^{\alpha+n+1} = 0$,

adică

$$\alpha(\alpha + 1) a_0 x^{\alpha-1} + (\alpha + 1)(\alpha + 2) a_1 x^\alpha + \sum_{n=0}^{\infty} ((\alpha + n + 1)(\alpha + n + 2) a_{n+2} +$$
$$+ 2(\alpha + n + 2) a_{n+2} - a_n) x^{\alpha+n+1} = 0.$$

Prin identificare găsim

$$\alpha(\alpha + 1) a_0 = 0, \ (\alpha + 1)(\alpha + 2) a_1 = 0, \ (\alpha + n + 2)(\alpha + n + 3) a_{n+2} = a_n.$$

Pentru $\alpha = 0$ rezultă $a_1 = 0$ şi $a_{n+2} = \dfrac{a_n}{(n + 2)(n + 3)}$. Deci $a_{2p} = \dfrac{a_0}{(2p + 1)!}$, $a_{2p+1} = 0$,

adică

$$y = a_0 \sum_{p=0}^{\infty} \frac{x^{2p}}{(2p + 1)!} = \begin{cases} a_0 \dfrac{\operatorname{sh} x}{x}, & x \neq 0 \\ a_0, & x = 0 \end{cases} \text{ este o soluţie a ecuaţiei.}$$

Fie $\alpha = -1$. Găsim $a_{n+2} = \dfrac{a_n}{(n + 1)(n + 2)}$ şi deci $a_{2p} = \dfrac{a_0}{(2p)!}$, $a_{2p+1} = \dfrac{a_1}{(2p + 1)!}$.

Astfel

$$y = a_0 x^{-1} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{x^{2p}}{(2p)!} + a_1 x^{-1} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{x^{2p+1}}{(2p + 1)!} = a_0 \frac{\operatorname{ch} x}{x} + a_1 \frac{\operatorname{sh} x}{x}, \quad x \neq 0$$

este soluţia generală a ecuaţiei propuse (liniar independenţa soluţiilor particulare este evidentă).

Cazul $\alpha = -2$ conduce tot la soluţia generală.

§5. Ecuaţii diferenţiale liniare omogene cu coeficienţi constanţi

Fie $\mathrm{D}: C^{\infty}(I) \to C^{\infty}(I)$ operatorul de derivare şi $\mathscr{L}: C^{\infty}(I) \to C^{\infty}(I)$ un operator diferenţial liniar cu coeficienţi constanţi (reali), de ordinul n, definit prin

$$\mathscr{L} = a_0\mathrm{D}^n + a_1\mathrm{D}^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\mathrm{D} + a_n,\ a_0 \neq 0.$$

Mulţimea $\boldsymbol{V}$ a tuturor operatorilor diferenţiali liniari cu coeficienţi constanţi este un spaţiu vectorial real infinit dimensional. De asemenea orice doi operatori diferenţiali liniari cu coeficienţi constanţi sint comutabili ca urmare a faptului $\mathrm{D}^m\mathrm{D}^n = \mathrm{D}^n\mathrm{D}^m = \mathrm{D}^{n+m}$, $\forall m, n \in \mathbb{N}$.

Fie $\boldsymbol{P}$ spaţiul vectorial real al tuturor funcţiilor polinomiale reale. Fiecărui operator $\mathscr{L} \in \boldsymbol{V}$ îi asociem acel polinom l din $\boldsymbol{P}$ care are aceiaşi coeficienţi cu $\mathscr{L}$, polinom ce poartă numele de *polinomul caracteristic* ataşat lui $\mathscr{L}$; deci

$$l(r) = a_0r^n + a_1r^{n-1} + \ldots + a_{n-1}r + a_n.$$

În acest fel obţinem un izomorfism $\mathscr{T}: \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{P}$, $\mathscr{T}(\mathscr{L}) = l$.

5.1. Teoremă. 1) Izomorfismul $\mathscr{T}: \boldsymbol{V} \to \boldsymbol{P}$, $\mathscr{T}(\mathscr{L}) = l$, păstrează descompunerea în factori, adică $\mathscr{T}(\mathscr{L}_1\mathscr{L}_2) = \mathscr{T}(\mathscr{L}_1)\cdot\mathscr{T}(\mathscr{L}_2)$, $\forall \mathscr{L}_1, \mathscr{L}_2 \in \boldsymbol{V}$.

2) Orice operator $\mathscr{L}$ poate fi factorizat ca un produs de factori de forma $D - \alpha$; $(D - \alpha)^m$, $m = 2, 3, \ldots$; $D^2 - 2\alpha D + \alpha^2 + \beta^2$; $(D^2 - 2\alpha D + \alpha^2 + \beta^2)^m$, $m = 2, 3, \ldots$

Demonstraţie. 1) Verificare directă.

2) Se ştie că orice polinom cu coeficienţi reali poate fi scris ca un produs de polinoame de gradul întii sau/şi gradul al doilea cu coeficienţi reali. Mai precis, se consideră ecuaţia (1) $l(r) = 0$, în $\mathbb{C}$, numită *ecuaţia caracteristică* a lui $\mathscr{L}$. La o soluţie α, reală, simplă a ecuaţiei (1) îi corespunde factorul $r - \alpha$ al polinomului $l(r)$ şi deci factorul $D - \alpha$ al lui $\mathscr{L}$; la o soluţie α, reală, multiplă de ordinul m a ecuaţiei (1) îi corespunde factorul $(r - \alpha)^m$ al lui $l(r)$ şi deci factorul $(D - \alpha)^m$ al lui $\mathscr{L}$; la o pereche de rădăcini complexe conjugate simple $\alpha + i\beta$, $\alpha - i\beta$, ale ecuaţiei (1) îi corespunde factorul $r^2 - 2\alpha r + \alpha^2 + \beta^2$ al lui $l(r)$ şi deci factorul $D^2 - 2\alpha D + \alpha^2 + \beta^2$ al lui $\mathscr{L}$; la o pereche de rădăcini complexe conjugate, multiple de ordinul m, $\alpha + i\beta$, $\alpha - i\beta$ ale ecuaţiei (1) îi corespunde factorul $(r^2 - 2\alpha r + \alpha^2 + \beta^2)^m$ al lui $l(r)$ şi deci factorul $(D^2 - 2\alpha D + \alpha^2 + \beta^2)^m$ al lui $\mathscr{L}$.

Fie $\mathscr{L} = \mathscr{L}_1\mathscr{L}_2\ldots\mathscr{L}_k$ o descompunere a lui $\mathscr{L}$ ca un produs de operatori (ireductibili) cu coeficienţi reali (produs de operatori de ordinul întii şi doi). Deoarece factorii sint comutabili rezultă $\mathrm{Ker}\,\mathscr{L}_j \subset \mathrm{Ker}\,\mathscr{L}$, adică spaţiul soluţiilor ecuaţiei $\mathscr{L}(y) = 0$ conţine subspaţiile definite prin $\mathscr{L}_j(y) = 0$. Avînd în vedere că subspaţiile $\mathrm{Ker}\,\mathscr{L}_j$ sint finit dimensionale şi două cîte două disjuncte rezultă

$$\mathrm{Ker}\,\mathscr{L} = \mathrm{Ker}\,\mathscr{L}_1 \oplus \mathrm{Ker}\,\mathscr{L}_2 \oplus \ldots \oplus \mathrm{Ker}\,\mathscr{L}_k.$$

Cu alte cuvinte pentru a obţine soluţia generală a ecuaţiei $\mathscr{L}(y) = 0$ este suficient să explicităm baze ale subspaţiilor $\mathrm{Ker}\,\mathscr{L}_j$ şi să scriem elementul generic al acoperirii liniare a tuturor subspaţiilor $\mathrm{Ker}\,\mathscr{L}_j$. Pentru aceasta ne servim de următoarea teoremă.

5.2. Teoremă. Fie $\mathscr{L}(y) = 0$ o ecuaţie liniară omogenă cu coeficienţi constanţi şi $l(r) = 0$ ecuaţia caracteristică asociată.

1) La o soluţie α, reală, simplă, a ecuaţiei caracteristice îi corespunde o singură soluţie liniar independentă $e^{\alpha x}$ a ecuaţiei $\mathscr{L}(y) = 0$.

2) La o soluţie α, reală, multiplă de ordinul m, a ecuaţiei caracteristice îi corespund m soluţii liniar independente

$$e^{\alpha x},\ xe^{\alpha x}, \ldots, x^{m-1}e^{\alpha x}$$

ale ecuaţiei $\mathscr{L}(y) = 0$.

3) La o pereche de rădăcini complexe conjugate simple $\alpha + i\beta$, $\alpha - i\beta$ ale ecuaţiei caracteristice îi corespunde o pereche de soluţii liniar independente $e^{\alpha x}\cos \beta x$, $e^{\alpha x}\sin \beta x$ ale ecuaţiei $\mathscr{L}(y) = 0$.

4) La o pereche de rădăcini complexe conjugate $\alpha + i\beta$, $\alpha - i\beta$, multiple de ordinul m, îi corespund $2m$ soluţii liniar independente

$$e^{\alpha x} \cos \beta x,\ xe^{\alpha x} \cos \beta x, \ldots, x^{m-1} e^{\alpha x} \cos \beta x$$

$$e^{\alpha x} \sin \beta x,\ xe^{\alpha x} \sin \beta x, \ldots, x^{m-1} e^{\alpha x} \sin \beta x$$

ale ecuaţiei $\mathscr{L}(y) = 0$.

Demonstraţie. 2) Liniar independenţa funcţiilor $1, x, \ldots, x^{m-1}$ implică liniar independenţa funcţiilor din teoremă.

Pentru a arăta că funcţiile definite prin $u_1(x) = e^{\alpha x}$, $u_2(x) = xe^{\alpha x}, \ldots$ $\ldots, u_m(x) = x^{m-1}e^{\alpha x}$ satisfac ecuaţia $(D - \alpha)^m u = 0$ folosim inducţia.

Se observă că $(D - \alpha)e^{\alpha x} = 0$. Apoi presupunem că $u_1, u_2, \ldots, u_{m-1}$ sînt soluţii ale ecuaţiei $(D - \alpha)^{m-1} u = 0$. Să arătăm că $u_1, u_2, \ldots, u_m$ sînt soluţii ale ecuaţiei $(D - \alpha)^m u = 0$. Într-adevăr, $u_1, u_2, \ldots, u_{m-1}$ satisfac $(D - \alpha)^m u = 0$ deoarece $(D - \alpha)^m = (D - \alpha)(D - \alpha)^{m-1}$, iar u_m satisface $(D-\alpha)^m u_m(x) = (D - \alpha)^{m-1}(D-\alpha) \circ (x^{m-1} e^{\alpha x}) = (D-\alpha)^{m-1}((m-1)x^{m-2}e^{\alpha x}) =$ $= (m-1)(D - \alpha)^{m-1} u_{m-1}(x) = 0$.

Exemple. 1) Să găsim soluţia generală a ecuaţiei

$$y''' - 8y = 0.$$

Ecuaţia caracteristică $r^3 - 8 = 0$ are rădăcinile $r_1 = 2$, $r_{2,3} = -1 \pm i\sqrt{3}$. Rezultă

$$y = c_1e^{2x} + e^{-x}(c_2\cos\sqrt{3}x + c_3 \sin \sqrt{3}x).$$

2) Ecuaţiei $y''' + y'' = 0$ i se ataşează ecuaţia caracteristică $r^3+r^2 = 0$ care admite rădăcinile $r_{1,2} = 0$, $r_3 = -1$. Corespunzător, soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale este $y =$ $= c_1 + c_2x + c_3e^{-x}$.

§6. Cvasipolinoame

Cvasipolinoamele sînt combinaţii liniare ale funcţiilor de forma

$$x^{m-1}e^{\alpha x},\ x^{m-1} e^{\alpha x} \cos\beta x,\ x^{m-1} e^{\alpha x} \sin\beta x,$$

unde $m = 1, 2, \ldots$, iar α, β sînt constante reale. Rezultatele din § 5 arată că soluţiile ecuaţiilor diferenţiale liniare omogene cu coeficienţi constanţi sînt cvasipolinoame.

Ţinind seama de principiul reducerii (orice ecuaţie diferenţială de ordinul n poate fi scrisă ca un sistem de n ecuaţii de ordinul intii), de definiţia din § 5 Cap. 2 şi de forma soluţiilor unei ecuaţii liniare omogene cu coeficienţi constanţi rezultă următoarea teoremă de stabilitate.

6.1. Teoremă. Fie poziţia de echilibru $y = y' = \ldots = y^{(n-1)} = 0$.

1) Dacă toate rădăcinile ecuaţiei caracteristice au partea reală strict negativă, atunci poziţia de echilibru este stabilă şi asimptotic stabilă.

2) Dacă unele rădăcini ale ecuaţiei caracteristice sint pur imaginare simple, iar toate celelalte au partea reală negativă, atunci poziţia de echilibru este stabilă dar nu asimptotic stabilă.

3) Dacă o rădăcină a ecuaţiei caracteristice are partea reală strict pozitivă sau dacă există o rădăcină pur imaginară cel puţin dublă, atunci poziţia de echilibru nu este stabilă.

Demonstraţie. Soluţia generală,

$$y(x) = f(x\,;\, c_1, \ldots, c_n) = c_1 y_1(x) + \ldots + c_n y_n(x),\ x \in \mathbb{R},$$

a unei ecuaţii diferenţiale liniare omogene de ordinul n cu coeficienţi constanţi este un cvasipolinom. Din aceasta se obţine soluţia cu proprietăţile

$$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_0', \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}.$$

În particular putem presupune $\max\{|y_0|, |y_0'|, \ldots, |y_0^{(n-1)}|\} < \varepsilon$. Notind $C = {}^t[c_1, \ldots, c_n]$, $Y_0 = {}^t[y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)}]$ rezultă $W(x_0)\,C = Y_0$, unde $W(x_0)$ este matricea wronski ataşată soluţiilor particulare $y_1, \ldots, y_n$ in punctul x_0. Deoarece $\det W(x_0) \neq 0$ (soluţiile particulare sint liniar independente) matricea Y_0 tinde la matricea zero dacă şi numai dacă matricea C tinde la matricea zero.

1) Fiecare termen al soluţiei generale conţine factori de tipul $e^{\alpha x}$, $\alpha < 0$. Relaţia $\lim\limits_{x\to\infty} e^{\alpha x} = 0$ implică

$$(*)\qquad \lim_{C\to 0} f^{(k)}(x\,;\ c_1, \ldots, c_n) = f^{(k)}(x\,;\ 0, \ldots, 0) = 0, \qquad \forall x \in [x_0, \infty)$$

$$(**)\qquad \lim_{x\to\infty} f^{(k)}(x\,;\ c_1, \ldots, c_n) = 0,\ \ k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

2) Şi in acest caz au loc relaţiile (*). Dar cvasipolinomul $c_1 y_1(x) + \ldots + c_n y_n(x)$ conţine şi termeni de tipul $c_j \sin \beta x$, iar $\lim\limits_{x\to\infty} c_j \sin \beta x$ nu există. De aceea relaţiile (**) nu au loc.

3) Există termeni ai cvasipolinomului $c_1 y_1(x) + \ldots + c_n y_n(x)$ care conţin factori de tipul $e^{\alpha x}$, $\alpha > 0$ şi $\lim\limits_{x\to\infty} e^{\alpha x} = \infty$ sau factori nemărginiţi de tipul $x \sin x$ şi $\lim\limits_{x\to\infty} x \sin x$ nu există. De aceea relaţiile (*) nu pot avea loc (fiind vorba de limite uniforme in raport cu x).

Exemple. Ecuaţiei diferenţiale $y'' + 3y' + 2y = 0$ îi corespunde ecuaţia caracteristică $r^2 + 3r + 2 = 0$ cu rădăcinile $r_1 = -1$, $r_2 = -2$. De aceea $y = 0$ este o soluţie stabilă şi asimptotic stabilă.

Fie $y''' + y'' + y' + y = 0$. Deoarece $r^3 + r^2 + r + 1 = 0$ admite soluțiile $r_1 = -1$, $r_2 = i$, $r_3 = -i$ rezultă că $y = 0$ este o soluție stabilă, dar nu asimptotic stabilă.

Ecuația diferențială $y^{IV} + 2y'' + y = 0$ are polinomul caracteristic $l(r) = (r^2 + 1)^2$ ale cărui rădăcini sînt $r_{1,2} = -i$, $r_{3,4} = i$. Rezultă că poziția de echilibru $y = 0$ nu este stabilă.

Fie $\mathscr{L}(y) = f$, $f \in C^0(I)$, o ecuație liniară neomogenă cu coeficienți constanți și $\mathscr{L}(y) = 0$ ecuația liniară omogenă asociată. Se știe deja că soluția generală a ecuației neomogene este suma dintre o soluție particulară a ecuației neomogene și soluția generală a ecuației omogene. Soluția generală a ecuației omogene se poate afla după procedeul explicat in § 5 și este un evasipolinom, iar soluția particulară a ecuației neomogene se poate afla prin metoda variației constantelor (§ 3).

În cazul in care f este un evasipolinom, soluția particulară a ecuației neomogene se poate afla și prin *metoda coeficienților nedeterminați*. Această metodă derivă din observația că dacă $\mathscr{A}$ este operatorul diferențial cu coeficienți constanți cu proprietatea $\mathscr{A}(f) = 0$, atunci $\mathscr{L}(y_p) = f$ implică $\mathscr{A}\mathscr{L}(y_p) = 0$ și deci $y_p \in \operatorname{Ker}(\mathscr{A}\mathscr{L})$. De aceea etapele determinării lui y_p sint următoarele: 1) se notează cu $\mathscr{A}$ operatorul diferențial de ordin minim cu coeficienți constanți pentru care $\mathscr{A}(f) = 0$,

2) se rezolvă ecuația cu coeficienți constanți $\mathscr{A}\mathscr{L}(y) = 0$,

3) din soluția generală a ecuației $\mathscr{A}\mathscr{L}(y) = 0$ lăsăm de o parte soluția generală a ecuației $\mathscr{L}(y) = 0$, iar din ce rămine fixăm o funcție particulară care satisface ecuația $\mathscr{L}(y) = f$.

Exemplu. Considerăm ecuația

$$y''' - y'' - y' + y = 3e^x + 5x\sin x.$$

Deoarece $f(x) = 3e^x + 5x\sin x$ este un evasipolinom, pentru determinarea unei soluții particulare a acestei ecuații putem aplica metoda coeficienților nedeterminați.

Funcția f este o soluție a ecuației

$$(D - 1)(D^2 + 1)^2 y = 0$$

și deci orice soluție a ecuației

$$(D^3 - D^2 - D + 1)y = 3e^x + 5x\sin x$$

este o soluție a ecuației

$$(D - 1)(D^2 + 1)^2(D - 1)^2(D + 1)y = 0.$$

Rădăcinile ecuației caracteristice sint $r_{1,2,3} = 1$, $r_4 = -1$, $r_{5,6,7,8} = \pm i$, adică soluția generală a ultimei ecuații este

$$y = c_1e^x + c_2xe^x + c_3e^{-x} + c_4x^2e^x + c_5 \sin x + c_6 \cos x + c_7\, x\sin x + c_8\, x\cos x.$$

Să alegem pe c_i astfel încît $\mathscr{L}(y) = 3e^x + 5x\sin x$, unde $\mathscr{L} = D^3 - D^2 - D + 1 = (D - 1)^2(D + 1)$. Deoarece $c_1e^x + c_2xe^x + c_3e^{-x}$ este soluția generală a ecuației $\mathscr{L}(y) = 0$, putem lua $c_1 = c_2 = c_3 = 0$. Rămine să găsim pe c_4, c_5, c_6, c_7, c_8 astfel încît

$$\mathscr{L}(c_4x^2e^x + c_5\sin x + c_6\cos x + c_7x\sin x + c_8x\cos x) = 3e^x + 5x\sin x.$$

Rezultă $c_4 = \frac{3}{4}$, $c_5 = -\frac{5}{7}$, $c_6 = \frac{10}{7}$, $c_7 = \frac{5}{7}$, $c_8 = \frac{5}{7}$ şi deci

$$y_p = \frac{3}{4} x^2 e^x + \frac{5}{7} [(x + 2)\cos x + (x - 1)\sin x].$$

Pentru aplicarea cu succes a metodei precedente este necesar să se reţină tabelul următor împreună cu observaţia că dacă $\mathscr{A}(f_1) = 0$, $\mathscr{B}(f_2) = 0$, atunci $\mathscr{A}\mathscr{B}(c_1 f_1 + c_2 f_2) = 0$.

Funcţia f	Operatorul $\mathscr{A}$ cu proprietatea $\mathscr{A}(f) = 0$.
x^{m-1}	D^m
$e^{\alpha x}$	$D - \alpha$
$x^{m-1}e^{\alpha x}$	$(D - \alpha)^m$
$\cos \beta x$ sau $\sin \beta x$	$D^2 + \beta^2$
$x^{m-1} \cos \beta x$ sau $x^{m-1} \sin \beta x$	$(D^2 + \beta^2)^m$
$e^{\alpha x} \cos \beta x$ sau $e^{\alpha x} \sin \beta x$	$D^2 - 2\alpha D + (\alpha^2 + \beta^2)$
$x^{m-1}e^{\alpha x} \cos \beta x$ sau $x^{m-1}e^{\alpha x} \sin \beta x$	$[D^2 - 2\alpha D + (\alpha^2 + \beta^2)]^m$

§7. Ecuaţii Euler

O ecuaţie liniară de tipul

$$a_0 x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} x y' + a_n y = f(x),$$

unde a_i = const. reale, $a_0 \neq 0$ se numeşte *ecuaţie Euler*.

Punctul $x = 0$ este un punct singular al ecuaţiei Euler, existenţa sa implicînd cercetarea separată a cazurilor $x < 0$ respectiv $x > 0$. Se observă însă că este suficient să ne referim la ipoteza $x > 0$ întrucît $x < 0$ se reduce la primul caz prin schimbarea $x = -u$.

Pentru $x > 0$ ecuaţia Euler se reduce la o ecuaţie cu coeficienţi constanţi prin schimbarea de variabilă $x = e^t$, $t = \ln x$.

Într-adevăr,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}\frac{dy}{dt}, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{x^2}\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right)$$

şi prin inducţie

$$\frac{d^ky}{dx^k} = \frac{1}{x^k}E_k\left(\frac{d^ky}{dt^k}, \ldots, \frac{dy}{dt}\right),$$

unde E_k sînt operatori diferenţiali liniari cu coeficienţi constanţi. Prin înlocuire în ecuaţia Euler se găseşte o ecuaţie diferenţială cu coeficienţi constanţi

$$b_0\frac{d^ny}{dt^n} + b_1\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} + \ldots + b_{n-1}\frac{dy}{dt} + b_ny = g(t).$$

Exemplu. 1) Să se găsească soluţia generală a ecuaţiei

$$x^2y'' - 6y = 0.$$

Soluţie. (I) Pentru $x > 0$, punem $x = e^t$ şi ecuaţia propusă se reduce la ecuaţia diferenţială cu coeficienţi constanţi $\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} - 6y = 0$. Deoarece ecuaţia caracteristică $r^2 - r - 6 = 0$ are soluţiile $r_1 = -2$, $r_2 = 3$, găsim $y(e^t) = c_1e^{-2t} + c_2e^{3t}$ şi deci $y(x) = \frac{c_1}{x^2} + c_2x^3$, $x > 0$. Această soluţie se prelungeşte şi pentru $x < 0$.

(II) Se caută soluţii particulare de forma $y = x^s$. Introducînd în ecuaţia iniţială obţinem $s(s-1) - 6 = 0$ cu rădăcinile $s_1 = -2$, $s_2 = 3$. Deci $y_1 = x^{-2}$, $x \in \mathbb{R} - \{0\}$ şi $y_2 = x^3$, $x \in \mathbb{R}$ sînt soluţii ale ecuaţiei Euler. Utilizînd wronskianul se constată că funcţiile y_1 şi y_2, $x \in \mathbb{R} - \{0\}$, sînt liniar independente. Deci $y = \frac{c_1}{x^2} + cx^3$, $x \in \mathbb{R} - \{0\}$, este soluţia generală căutată.

2) Să determinăm soluţia generală a ecuaţiei

$$x^2y'' + xy' + y = 0.$$

Pentru $x > 0$, punem $x = e^t$. Ecuaţia Euler se reduce la o ecuaţie cu coeficienţi constanţi, $\frac{d^2y}{dt^2} + y = 0$. Aceasta din urmă are soluţia generală $y(e^t) = c_1\cos t + c_2\sin t$ şi deci $y(x) = c_1\cos\ln x + c_2\sin\ln x$ defineşte soluţia generală a ecuaţiei Euler pe $(0, \infty)$.

Pentru $x < 0$ soluţia generală este definită prin $y(x) = c_1\cos\ln(-x) + c_2\sin\ln(-x)$.

§8. Probleme

1. Se dau

(1) $y_1(x) = x^2$, $y_2(x) = e^x$; $(2x - x^2)y'' + (x^2 - 2)y' + 2(1 - x)y = 0$

(2) $y_1(x) = \sin x$, $y_2(x) = \sin^2 x$; $y'' + (\text{tg}\, x - 2\text{ctg}\, x)y' + 2y\,\text{ctg}^2 x = 0$.

Pentru fiecare caz în parte, să se verifice că funcțiile sînt soluții liniar independente ale ecuației diferențiale liniare.

2. Să se determine soluțiile generale ale următoarelor ecuații diferențiale liniare, funcțiile date fiind soluții particulare:

(1) $y'' - xy' + y = 0, \quad y_1(x) = x$

(2) $y''' - x^2y'' + 2xy' - 2y = 0, \; y_1(x) = x, \; y_2(x) = x^2$

3. Se dau ecuațiile diferențiale neomogene și soluțiile generale ale ecuațiilor diferențiale omogene atașate:

(1) $y'' + y = 2\sec^3 x, \quad y = c_1\cos x + c_2\sin x$

(2) $y''' - 9y' = \cos x, \; y = c_1 + c_2e^{-3x} + c_3e^{3x}$.

Utilizînd metoda variației constantelor să se găsească soluțiile generale ale ecuațiilor neomogene.

4. Să se găsească soluții pentru

$$(1 - x^2)y'' - xy' + y = 0, \; y(0) = 1, \; y'(0) = 0;$$

$$(1 + x^2)y'' + xy' - y = 0, \; y(0) = 1, \; y'(0) = -1;$$

$$x(x + 1)y'' + (x + 2)y' - y = (1 + x^2)e^x,$$

cu ajutorul seriilor de puteri.

5. Să se găsească soluțiile generale ale următoarelor ecuații diferențiale:

$$y'' - 4y' = 0, \; y''' + 8y = 0,$$

$$y^{IV} + y'' = 0, \; y''' - y'' = 0,$$

$$(D^3 - 2D^2)(y) = 0, \; (D^2 + 3D)(y) = 0$$

și pentru fiecare caz în parte să se cerceteze stabilitatea poziției de echilibru.

6. Să se rezolve problemele la limită

(1) $y'' + 2y' - 3y = 0, \; y(0) = -1, \; y(-1) = 0$

(2) $y'' - 2y' + 5y = 0, \; y(0) = 1, \; y(\pi/2) = 0.$

7. Să se găsească soluțiile generale ale următoarelor ecuații diferențiale

$$y'' + 2y' - 3y = 3e^{-3x}$$

$$y'' - 2y' + 5y = 2xe^x + e^x \cos 2x$$

$$y''' - 6y'' + 12y' - 8y = 4xe^{2x}$$

$$y''' - y'' - y' + y = 3e^x + 5x\cos x$$

$$x^2y''' + 5xy' + 4y' = \ln x$$

$$x^2y'' - 6y = 5x^3 + 8x^2.$$

Capitolul 4

SISTEME DIFERENȚIALE LINIARE DE ORDINUL ÎNTÎI

§1. Generalități

Un sistem de ecuații diferențiale de forma

$$\frac{\mathrm{d}y_i}{\mathrm{d}t} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t)y_j + f_i(t), \quad i = 1, \ldots, n,$$

unde $a_{ij}, f_i \in C^0(I)$, iar $y_1, \ldots, y_n \in C^1(I)$ sînt funcții necunoscute, se numește *sistem diferențial liniar de ordinul întîi*. Dacă $f_1 = \ldots = f_n = 0$, sistemul se numește *omogen*; în caz contrar sistemul se numește *neomogen*. Funcțiile a_{ij} se numesc *coeficienții sistemului*.

Un sistem liniar de ordinul întîi satisface condițiile din teorema de existență și unicitate pentru soluțiile problemelor Cauchy (vezi Cap. 2, § 2). De aceea $\forall (t_0, y_0) \in I \times \mathbb{R}^n$ există o soluție unică $t \to (y_1(t), \ldots, y_n(t))$ definită pe o vecinătate a lui t_0 care verifică condițiile $y_i(t_0) = y_{i0}$, $i = 1, \ldots, n$. De asemenea se poate demonstra că orice asemenea soluție se poate prelungi pînă la extremitățile intervalului I, inclusiv aceste extremități dacă I este închis. Din punct de vedere fizic aceasta înseamnă că sistemele liniare cu coeficienți continui nu au soluții care tind la infinit în timp finit.

Geometric, soluțiile $(y_1, \ldots, y_n)$ sînt *curbe* în $\mathbb{R}^n$. Ele se reprezintă uneori prin *curbele integrale* din $\mathbb{D} = I \times \mathbb{R}^n$ (fig. 7).

Pentru simplificarea prezentării proprietăților generale ale sistemelor liniare se utilizează notațiile matriceale și tehnica de calcul adecvată funcțiilor matriceale. Din aceasta reamintim că noțiunile de limită, continuitate, diferențiabilitate și integrabilitate pentru funcțiile matriceale se reduc la noțiunile respective pentru elementele matricei. Notînd

$$Y = {}^t[y_1, \ldots, y_n], \quad A = [a_{ij}], \quad F = {}^t[f_1, \ldots, f_n],$$

sistemul liniar de ordinul întîi se transcrie sub forma unei ecuații matriceale

$$\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}t} = A(t)Y + F(t),$$

iar condițiile inițiale se scriu $Y(t_0) = Y_0$.

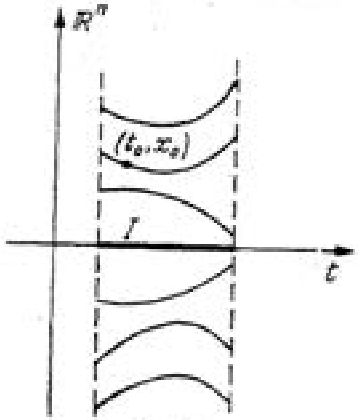


Fig. 7

§2. Spațiul vectorial al soluțiilor unui sistem diferențial liniar omogen

Considerăm sistemul liniar omogen

$$\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}t} = A(t)Y, \quad t \in I,$$

în ipotezele din § 1, și notăm cu V mulțimea tuturor soluțiilor definite pe intervalul I. Să arătăm că V este un subspațiu vectorial finit dimensional al spațiului vectorial real infinit dimensional $C^1(I)$.

2.1. Teoremă. Dacă A este o matrice de ordinul n, atunci V este un spațiu vectorial izomorf cu $\mathbb{R}^n$.

Demonstrație. Fie Y_1 și Y_2 două soluții ale sistemului, adică

$$\frac{dY_i}{dt} = A(t)Y_i, \ i = 1, 2.$$

Rezultă

$$\frac{d}{dt}(c_1Y_1 + c_2Y_2) = c_1\frac{dY_1}{dt} + c_2\frac{dY_2}{dt} = c_1A(t)Y_1 + c_2A(t)Y_2 = A(t)(c_1Y_1 + c_2Y_2),$$

c_i = const. reale, adică $c_1Y_1 + c_2Y_2$ este o soluție. Aceasta inseamnă că V este un spațiu vectorial real.

Fie $t_0 \in I$. Fiecărei soluții $Y \in V$ îi putem atașa punctul $Y(t_0) \in \mathbb{R}^n$, regulă ce definește o transformare liniară $\mathcal{T} : V \to \mathbb{R}^n$. Transformarea liniară $\mathcal{T}$ este un izomorfism. Într-adevăr, imaginea lui $\mathcal{T}$ este intregul $\mathbb{R}^n$ deoarece teorema de existență asigură că $\forall Y_0 \in \mathbb{R}^n$, există o soluție Y cu condiția inițială $Y(t_0) = Y_0$; injectivitatea lui $\mathcal{T}$ decurge din teorema de unicitate conform căreia singura soluție cu condiția inițială $Y(t_0) = 0$ este $Y = 0$ și deci $\operatorname{Ker} \mathcal{T} = \{0\}$.

Teorema precedentă asigură că dimensiunea spațiului vectorial al soluțiilor unui sistem liniar omogen este n (ordinul matricei A). Rezultă că orice mulțime ordonată formată din n soluții liniar independente este o bază a acestui spațiu.

2.2. Consecință. Fie A o matrice de ordinul n. Dacă $Y_1, \ldots, Y_n$ sint n soluții liniar independente ale sistemului omogen, atunci orice soluție Y poate fi exprimată în forma

$$Y = \sum_{k=1}^{n} c_k Y_k,$$

unde c_k sint constante reale.

Soluția $\sum_{k=1}^{n} c_k Y_k$, unde c_k sint constante arbitrare, se numește *soluția generală* a sistemului liniar omogen. Din ea se obține orice soluție a sistemului, pentru aceasta fiind suficient să particularizăm constantele.

2.3. *Definiție. Fie n soluții ale sistemului liniar omogen, să zicem $Y_1, \ldots, Y_n$. Matricea $W = [Y_1, \ldots, Y_n]$ se numește matrice wronski, iar $w = \det W$ se numește wronskian.*

Dacă notăm $C = {}^t[c_1, \ldots, c_n]$, atunci soluția generală a sistemului omogen se scrie $Y = WC$. De asemenea matricea W satisface ecuația diferențială

$$\frac{dW}{dt} = AW.$$

2.4. Teoremă. Wronskianul are expresia

$$w(t) = w(t_0)\, e^{\int_{t_0}^{t} \operatorname{tr} A(t)\, dt}.$$

Demonstrație. Ținînd seama de regula de derivare a unui determinant, găsim

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}=\left|\frac{\mathrm{d}Y_1}{\mathrm{d}t},\ Y_2,\ldots,Y_n\right|+\ldots+\left|Y_1,\ldots,Y_{n-1},\frac{\mathrm{d}Y_n}{\mathrm{d}t}\right|=$$

$$=|AY_1,\ Y_2,\ldots,Y_n|+\ldots+|Y_1,\ldots,Y_{n-1},AY_n|=(\text{temă !})\ldots=w(\operatorname{tr}A).$$

O simplă integrare conduce la expresia din teoremă.

2.5. Teoremă. Soluțiile $Y_1,\ldots,Y_n$ sînt liniar independente dacă și numai dacă $w(t)\neq 0$, $\forall t\in I$.

Demonstrație. Se observă că $w(t)\neq 0, \forall t\in I$ dacă și numai dacă $w(t_0)\neq 0$. Fie izomorfismul $\mathscr{T}:V\to\mathbb{R}^n$, $Y_0=\mathscr{T}(Y)$. Rezultă

$$Y_{10}=\mathscr{T}(Y_1),\ldots,Y_{n0}=\mathscr{T}(Y_n).$$

Deoarece $\mathscr{T}$ este un izomorfism, vectorii $Y_1,\ldots,Y_n$ din V sînt liniar independenți dacă și numai dacă vectorii $Y_{10},\ldots,Y_{n0}$ din $\mathbb{R}^n$ sînt liniar independenți, adică $w(t_0)\neq 0$.

Exemplu. Sistemul liniar omogen

$$\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}t}=A(t)Y,\quad A(t)=\begin{bmatrix}\frac{4}{t} & -\frac{4}{t^2}\\ 2 & -\frac{1}{t}\end{bmatrix},\ t>0$$

admite soluțiile particulare

$$Y_1(t)=\begin{bmatrix}1\\ t\end{bmatrix},\quad Y_2(t)=\begin{bmatrix}2t^2\\ t^3\end{bmatrix}.$$

Deoarece

$$w(t)=\begin{vmatrix}1 & 2t^2\\ t & t^3\end{vmatrix}=-t^3<0,$$

soluțiile Y_1 și Y_2 sînt liniar independente și deci soluția generală a sistemului este $Y=c_1Y_1+c_2Y_2$.

§3. Metoda variației constantelor

Fie sistemul liniar neomogen

$$\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}t}=A(t)Y+F(t)$$

și sistemul liniar omogen asociat

$$\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}t}=A(t)Y,$$

ambele pe intervalul I. Legătura între soluțiile generale ale celor două sisteme este dată de

21 — c. 838 33

3.1. Teoremă. Soluţia generală a sistemului neomogen este suma dintre o soluţie particulară a sistemului neomogen şi soluţia generală a sistemului omogen.

Demonstraţie. Dacă Y_p este o soluţie a sistemului neomogen, atunci putem pune $Y = U + Y_p$, unde U este noua necunoscută. Înlocuind în sistemul neomogen deducem

$$\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t} = A(t)U.$$

Astfel U trebuie să fie soluţia generală a sistemului omogen.

Dacă cunoaştem soluţia generală a sistemului omogen, atunci soluţia particulară a sistemului neomogen poate fi aflată prin metoda variaţiei constantelor. Mai precis este adevărată următoarea

3.2. Teoremă. Dacă $Y(t) = W(t)C$ este soluţia generală a sistemului omogen, atunci soluţia particulară a sistemului neomogen poate fi găsită sub forma $Y(t) = W(t)C(t)$, unde $\dfrac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}t} = W^{-1}F$ pe I.

Demonstraţie. Prin ipoteză

$$\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} = AW, \quad \frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}t} = W^{-1}F.$$

Rezultă

$$\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(WC) = \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t}C + W\frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}t} = (AW)C + W(W^{-1}F) =$$

$$= A(WC) + F = AY + F,$$

adică $Y(t) = W(t)C(t)$ defineşte o soluţie a sistemului neomogen.

Observaţie. Mulţimea soluţiilor unui sistem liniar neomogen este convexă.

Exemplu. Fie sistemul

$$\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}t} = A(t)Y + F(t), \quad A(t) = \begin{bmatrix} \frac{4}{t} & -\frac{4}{t^2} \\ 2 & -\frac{1}{t} \end{bmatrix}, \quad F(t) = \begin{bmatrix} \frac{1}{t} \\ t \end{bmatrix}, \quad t > 0.$$

Sistemul omogen ataşat admite soluţia generală (vezi § 2).

$$Y(t) = W(t)C, \quad W(t) = \begin{bmatrix} 1 & 2t^2 \\ t & t^3 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}.$$

Căutăm pentru sistemul neomogen o soluţie particulară de forma $Y(t) = W(t)C(t)$, unde

$$\frac{dC}{dt} = W^{-1}F, \quad W^{-1}(t) = \begin{bmatrix} -1 & \frac{2}{t} \\ \frac{1}{t^2} & -\frac{1}{t^3} \end{bmatrix}, \quad t > 0.$$

Rezultă

$$\frac{dC}{dt} = \begin{bmatrix} 2 & -\frac{1}{t} \\ \frac{1}{t^3} & -\frac{1}{t^3} \end{bmatrix}, \quad C(t) = \begin{bmatrix} 2t & -\ln t \\ \frac{1}{t} & -\frac{1}{2t^2} \end{bmatrix}$$

şi deci soluţia generală a sistemului neomogen este definită de

$$Y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 2t^2 \\ t & t^3 \end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2t & -\ln t \\ \frac{1}{t} & -\frac{1}{2t^2} \end{bmatrix}\right), \quad t > 0.$$

§4. Matricea exponenţială

Se ştie că, $\forall A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$, seria

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} = I + \frac{A}{1!} + \frac{A^2}{2!} + \ldots, \; I = \text{matricea unitate},$$

este absolut convergentă şi deci convergentă. Ea este uniform convergentă pe fiecare submulţime $\{A \mid \|A\| \leqslant a, \; a \in \mathbb{R}_+\}$, unde $\|A\|$ este norma matricei A. Suma acestei serii se numeşte *matricea exponenţială* şi se notează cu e^A.

Dacă notăm cu $\mathcal{O}$ matricea zero, atunci definiţia precedentă implică $e^{\mathcal{O}} = I$. De asemenea absolut convergenţa implică faptul că dacă $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$ sînt matrice comutabile, atunci $e^{A+B} = e^A \cdot e^B$.

Să considerăm acum funcţia $\varphi : \mathbb{R} \to \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$ definită prin

$$\varphi(t) = e^{tA}.$$

4.1. Teoremă. Matricea φ satisface ecuaţia diferenţială

$$\frac{d\varphi}{dt} = A\varphi.$$

Demonstraţie. Seriile

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!}, \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d}{dt}\left(\frac{t^k A^k}{k!}\right) = A \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!}$$

converg absolut şi uniform în orice domeniu din $\mathbb{R} \times \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$ caracterizat prin $|t| \leqslant b$, $\|A\| \leqslant a$. De aceea există derivata sumei seriei iniţiale şi este egală cu suma seriei formată din derivate.

Observații. 1) Teorema Cayley-Hamilton asigură că matricea exponențială,

$$e^{tA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!},$$

se reduce la un polinom de gradul $n-1$ în A, unde n este ordinul matricei A.

2) Matricele A și e^{tA} sînt comutabile. Această observație intervine în demonstrația teoremei care urmează.

4.2. Teoremă. Inversa matricei e^{tA} este e^{-tA}.

Demonstrație.

Fie $E(t) = e^{tA}e^{-tA}$, $t \in \mathbb{R}$. Prin derivare găsim

$$\frac{dE}{dt}(t) = Ae^{tA}e^{-tA} + e^{tA}(-A)e^{-tA} = \mathcal{O}, \ \forall t \in \mathbb{R}.$$

Rezultă $E(t) = E(0) = I$.

În cele ce urmează ne interesează calculul efectiv al lui e^{tA}. În acest scop dăm întîi două exemple în care putem utiliza direct definiția. Să presupunem că D este o matrice diagonală, adică

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \dots 0 \\ 0 & \lambda_2 \dots 0 \\ \dots & \dots \dots \\ 0 & 0 \dots \lambda_n \end{bmatrix}.$$

Atunci

$$D^k = \begin{bmatrix} \lambda_1^k & 0 \dots 0 \\ 0 & \lambda_2^k \dots 0 \\ \dots & \dots \dots \\ 0 & 0 \dots \lambda_n^k \end{bmatrix}$$

și deci

$$e^{tD} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & \dots 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & \dots 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}.$$

Fie J_p o celulă Jordan de ordinul n_p,

$$J_p = \begin{bmatrix} \lambda_p & 1 & 0 & \dots 0 \\ 0 & \lambda_p & 1 & \dots 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots \lambda_p \end{bmatrix} = \lambda_p I_p + E_p,$$

unde I_p este matricea unitate de ordinul n_p, iar matricea

$$E_p = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & & \dots & & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

este nilpotentă de ordinul n_p. Ținînd seama că I_p și E_p sînt comutabile și avînd în vedere puterile lui E_p, rezultă

$$e^{tJ_p} = e^{\lambda_p t I_p} e^{tE_p} = e^{\lambda_p t}\left[I_p + \frac{tE_p}{1!} + \frac{t^2E_p^2}{2!} + \ldots + \frac{t^{n_p-1}E_p^{n_p-1}}{(n_p-1)!}\right] =$$

$$= e^{\lambda_p t}\begin{bmatrix} 1 & \frac{t}{1!} & \frac{t^2}{2!} & \ldots & \frac{t^{n_p-1}}{(n_p-1)!} \\ 0 & 1 & \frac{t}{1!} & \ldots & \frac{t^{n_p-2}}{(n_p-2)!} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{bmatrix}.$$

Mai general, dacă

$$J = \begin{bmatrix} J_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & J_2 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & J_k \end{bmatrix}$$

unde J_p, $p = 1, \ldots, k$; sînt celule Jordan de ordinul n_p, $n_1 + \ldots + n_k = n$, atunci se verifică relația

$$e^{tJ} = \begin{bmatrix} e^{tJ_1} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & e^{tJ_2} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & e^{tJ_k} \end{bmatrix}.$$

În general calculul lui e^{tA} pornind de la definiția ca sumă a unei serii este complicat. De aceea s-au găsit diferite alternative care să simplifice pe cît posibil un asemenea calcul.

4.3. Teoremă. Dacă S este o matrice nesingulară și dacă notăm $S^{-1}AS = B$, atunci $e^{tA} = Se^{tB}S^{-1}$.

Demonstrație. Relația $A = SBS^{-1}$ implică $A^k = SB^kS^{-1}$. Rezultă

$$e^{tA} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^kA^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k(SB^kS^{-1})}{k!} = S\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^kB^k}{k!}\right)S^{-1}.$$

4.4. Consecință. 1) Dacă A este o matrice diagonalizabilă, iar D este matricea diagonală atașată lui A, atunci

$$e^{tA} = Se^{tD}S^{-1},$$

unde S este matricea vectorilor proprii.

2) Dacă A are valori proprii multiple şi se reduce la forma canonică Jordan, atunci

$$e^{tA} = Se^{tJ}S^{-1},$$

unde S este matricea vectorilor proprii şi principali.

Exemplu. Să se calculeze e^{tA} pentru

$$1)\ A = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad 2)\ A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Soluţie. 1) Valorile proprii ale lui A sînt $\lambda_1 = 6$, $\lambda_2 = 1$. Utilizînd vectorii proprii deducem

$$S = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad S^{-1} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$$

astfel încît

$$D = S^{-1}AS, \quad D = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Rezultă

$$e^{tA} = Se^{tD}S^{-1} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e^{6t} & 0 \\ 0 & e^{t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 4e^{6t} + e^{t} & 4e^{6t} - 4e^{t} \\ e^{6t} - e^{t} & e^{6t} + 4e^{t} \end{bmatrix}.$$

2) Valorile proprii ale lui A sînt $\lambda_{1,2} = 3$. Din $AX = \lambda X$ găsim vectorul propriu $X = {}^t[1,1]$. Relaţia $AY = \lambda Y + X$ conduce la vectorul principal $Y = {}^t[0, 1]$. Găsim

$$S = [X, Y] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad S^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad J = S^{-1}AS = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Rezultă

$$e^{tA} = Se^{tJ}S^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} e^{3t}\begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-t & t \\ -t & 1+t \end{bmatrix}.$$

§ 5. Sisteme diferenţiale liniare cu coeficienţi constanţi

Considerăm un sistem diferenţial liniar omogen cu coeficienţi constanţi

$$\frac{dY}{dt} = AY,$$

unde $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$. Observăm că în mod necesar $Y \in C^\infty(\mathbb{R})$. Într-adevăr, $Y \in C^1(\mathbb{R}) \Rightarrow \dfrac{dY}{dt} \in C^1(\mathbb{R}) \Rightarrow Y \in C^2(\mathbb{R})$ etc.

I. Soluţia generală a unui sistem liniar omogen cu coeficienţi constanţi poate fi găsită sub formă explicită cu ajutorul matricei exponenţiale.

5.1. Teoremă. Soluția problemei Cauchy

$$\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}t} = AY, \quad Y(t_0) = Y_0$$

este definită prin $Y(t) = e^{(t-t_0)A}Y_0$, $t \in \mathbb{R}$.

Demonstrație. Conform teoremei de existență și unicitate, precum și a teoremei de prelungire (§ 1), problema Cauchy are o soluție unică. De aceea este suficient să facem doar verificări,

$$\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}t} = Ae^{(t-t_0)A}Y_0 = A\ Y, \ \ Y(t_0) = e^{(t-t_0)A}Y_0 = Y_0.$$

Exemplu. Să se rezolve problema Cauchy

$$Y' = AY, \quad A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ -3 & -6 & -6 \end{bmatrix}, \quad Y(0) = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Soluție. Ecuația caracteristică $\det(A - \lambda I) = 0$ are rădăcinile $\lambda_1 = -3$, $\lambda_2 = -2$, $\lambda_3 = 0$. Vectorii proprii corespunzători sînt

$$e_1 = {}^t[1, 0, -1], \ \ e_2 = {}^t[2, -1, 0], \ \ e_3 = {}^t[0, 1, -1].$$

Matricea vectorilor proprii

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

este matricea diagonalizatoare pentru A, adică

$$D = S^{-1}AS = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Obținem

$$Y(t) = Se^{tD}S^{-1}Y(0) = \begin{bmatrix} -3e^{-3t} + 2e^{-2t} \\ -e^{-2t} + 3 \\ 3e^{-3t} - 3 \end{bmatrix},$$

adică $y_1(t) = -3e^{-3t} + 2e^{-2t}$, $y_2(t) = 3 - e^{-2t}$, $y_3(t) = 3e^{-3t} - 3$.

II. Explicitarea matricei exponențiale este destul de dificilă și uneori face apel la tehnici speciale. Dacă nivelul de pregătire nu permite abordarea acestor tehnici, atunci pentru găsirea soluției generale a sistemului liniar omogen cu coeficienți constanți se poate proceda în felul următor.

Prin calcul direct se observă că

$Y(t) = He^{\lambda t}$, H = vector coloană cu coordonate constante, $t \in \mathbb{R}$, este o soluție a sistemului liniar omogen cu coeficienți constanți dacă și numai dacă H este un vector propriu, iar λ este valoarea proprie corespunzătoare a matricei A în $\mathbb{C}$. Implicit soluțiile se caută de fapt în complexificatul spațiului vectorial $C^\infty(I)$.

Cazul unu. Să presupunem că valorile proprii $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ ale matricei A sînt diferite și că $H_1, \ldots, H_n$ sînt vectorii proprii corespunzători. Acestora le corespund soluțiile liniar independente

$$Y_k = H_k e^{\lambda_k t}, \quad k = 1, \ldots, n$$

și deci soluția generală a sistemului diferențial este

$$Y = c_1 Y_1 + \ldots + c_n Y_n.$$

Evident unele λ_k-uri pot fi complexe și se grupează în perechi. În acest caz, partea reală sau partea imaginară din Y sînt soluții generale reale.

Practic. Se determină rădăcinile ecuației caracteristice atașate matricei A. În ipoteza că acestea sînt simple se caută soluții de forma $Y(t) = He^{\lambda t}$, unde H este un vector real sau complex după cum este λ. Dacă λ este un număr complex nu este necesară și utilizarea rădăcinii complex conjugate.

Exemplu. Fie sistemul

$$Y' = AY, \; A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Valorile proprii ale matricei A sînt $\lambda_{1,2} = 1 \pm i$.

Căutăm soluții de forma

$$Y(t) = \begin{bmatrix} a + ib \\ c + id \end{bmatrix} e^{(1+i)t}.$$

Introducem în sistem și găsim $b = c$, $a = -d$. Astfel

$$Y(t) = \begin{bmatrix} a + ib \\ b - ia \end{bmatrix} e^{(1+i)t}$$

este soluția generală. Evident $\operatorname{Re} Y(t)$ sau $\operatorname{Im} Y(t)$ este soluția generală reală a sistemului.

Cazul doi. Să presupunem că ecuația caracteristică posedă o valoare proprie λ multiplă de ordinul m și că $H_1, \ldots, H_m$ sînt vectorii atașați lui λ astfel încît

$$AH_1 = \lambda H_1, \; AH_2 = \lambda H_2 + H_1, \ldots, AH_m = \lambda H_m + H_{m-1}.$$

Construim funcțiile vectoriale

$$P_j(t) = \frac{t^{j-1}}{(j-1)!} H_1 + \frac{t^{j-2}}{(j-2)!} H_2 + \ldots + H_j, \; j = 1, \ldots, m.$$

Să arătăm că funcțiile definite prin

$$Y_j(t) = P_j(t) e^{\lambda t}$$

sînt soluţii ale sistemului omogen. Mai întîi observăm că

$$\frac{\mathrm{d}P_j}{\mathrm{d}t} = P_{j-1}, \ AP_j = \lambda P_j + P_{j-1}, \ j = 1, \ldots, m.$$

Introducînd pe Y_j în

$$\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}t} = AY$$

obţinem o identitate.

Astfel unei valori proprii multiplă de ordinul m îi corespund m soluţii liniar independente de tipul precedent. Partea din soluţia generală corespunzătoare acestor soluţii este de forma $Y(t) = P(t)\mathrm{e}^{\lambda t}$, unde $P(t)$ este o matrice de polinoame de gradul $m-1$.

Practic. Dacă λ este o valoare proprie multiplă de ordinul m, atunci se încearcă o soluţie de tipul $Y(t) = P(t)\mathrm{e}^{\lambda t}$, unde $P(t)$ este o matrice coloană ale cărei elemente sînt polinoame de gradul $m-1$ cu coeficienţi reali sau complecşi după cum este λ.

Dacă soluţia generală găsită este complexă, atunci se separă partea reală sau partea imaginară care sînt soluţii generale reale.

Exemplu. Sistemului

$$\frac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}t} = y_2 + y_3, \ \frac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}t} = y_3 + y_1, \ \frac{\mathrm{d}y_3}{\mathrm{d}t} = y_1 + y_2$$

i se ataşează matricea

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

care admite valorile proprii $\lambda_1 = 2$, $\lambda_{2,3} = -1$.

Pentru $\lambda_1 = 2$ căutăm $y_1 = a\mathrm{e}^{2t}$, $y_2 = b\mathrm{e}^{2t}$, $y_3 = c\mathrm{e}^{2t}$.
Introducînd în sistem rezultă $a = b = c = c_1$. Pentru $\lambda_{2,3} = -1$ căutăm $y_1 = (\alpha_1 t + \beta_1)\mathrm{e}^{-t}$, $y_2 = (\alpha_2 t + \beta_2)\mathrm{e}^{-t}$, $y_3 = (\alpha_3 t + \beta_3)\mathrm{e}^{-t}$. Înlocuind în sistem găsim $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$, $\beta_1 = c_2$, $\beta_2 = c_3$, $\beta_3 = -(c_2 + c_3)$.

Soluţia generală a sistemului este

$$Y = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \mathrm{e}^{2t} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \mathrm{e}^{-t} + c_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \mathrm{e}^{-t}.$$

III. O cale şi mai simplă pentru găsirea soluţiei generale a sistemelor liniare omogene cu coeficienţi constanţi şi cu puţine funcţii necunoscute se bazează pe observaţia că orice necunoscută a sistemului verifică în acelaşi timp şi o ecuaţie liniară omogenă cu coeficienţi constanţi avînd ordinul cel mult egal cu ordinul matricei sistemului. Tehnica de lucru se numeşte *metoda eliminării*.

Exemplu. Sistemul $x' = y$, $y' = z$, $z' = x$ implică ecuația $x''' - x = 0$. Aceasta are soluția generală

$x(t) = c_1e^t + e^{-1/2t}\left[c_2 \cos \frac{\sqrt{3}}{2} t + c_3 \sin \frac{\sqrt{3}}{2} t\right]$. Din $y = x'$ deducem $y(t) = c_1e^t -$ $- 1/2\, e^{-1/2t}\left[(c_3 + 3c_2) \sin \frac{\sqrt{3}}{2} t - (\sqrt{3}\, c_3 - c_2) \cos \frac{\sqrt{3}}{2} t\right]$ și din $z = y'$ rezultă $z(t) = c_1e^t -$ $-1/2 e^{-1/2t}\left[(c_2 + \sqrt{3}\, c_3) \cos \frac{\sqrt{3}}{2} t + (c_3 - \sqrt{3}\, c_2) \sin \frac{\sqrt{3}}{2} t\right]$.

IV. Se observă că soluțiile sistemului diferențial liniar omogen cu coeficienți constanți se exprimă cu ajutorul cvasipolinoamelor. Ținind seama de acest lucru și de definiția din Cap. 2, § 5, rezultă teorema de stabilitate.

5.2. Teoremă. *Fie poziția de echilibru* $y_1 = \ldots = y_n = 0$.

1) *Dacă toate valorile proprii ale matricei* A *au partea reală strict negativă, atunci poziția de echilibru este stabilă și asimptotic stabilă.*

2) *Dacă valorile proprii ale matricei* A *sînt reale strict negative sau complexe cu partea reală negativă, rădăcinile pur imaginare existînd și avînd fiecare în parte proprietatea că dimensiunea subspațiului propriu atașat este egală cu ordinul de multiplicitate al valorii proprii, atunci poziția de echilibru este stabilă dar nu asimptotic stabilă.*

3) *Dacă o valoare proprie a matricei* A *are partea reală strict pozitivă sau dacă există o rădăcină pur imaginară astfel încît dimensiunea subspațiului propriu atașat să fie mai mică decît ordinul de multiplicitate al valorii proprii, atunci poziția de echilibru nu este stabilă.*

V. Să considerăm sistemul liniar neomogen cu coeficienți constanți

$$\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}t} = AY + F(t),\ t \in I,$$

unde $A \in \mathscr{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$, căruia i se atașează sistemul omogen

$$\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}t} = AY.$$

Soluția generală a sistemului neomogen este suma dintre o soluție particulară a sistemului neomogen și soluția generală a sistemului omogen. După explicațiile precedente soluția generală a sistemului omogen se exprimă cu ajutorul matricei exponențiale, matrice ale cărei elemente sînt cvasipolinoame. Soluția particulară a sistemului neomogen se poate afla prin metoda variației constantelor.

În cazul în care F este o matrice de cvasipolinoame, soluția particulară a sistemului neomogen se poate afla și prin metoda coeficienților nedeterminați.

§6. Probleme

1. Se dă sistemul diferențial liniar omogen $Y' = AY$, unde

$$A = \begin{bmatrix} 2\operatorname{ctg} t & -1 \\ -2 & \operatorname{tg} t \end{bmatrix},\quad Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}.$$

Să se arate că vectorii $Y_1(t) = {}^t\left[\sin t,\ 2\sin t \ln \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{t}{2}\right) + \sin t\right]$, $Y_2(t) = {}^t\left[\cos t,\ 2\cos t \ln \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{t}{2}\right) + \cos t + 2\operatorname{tg} t\right]$, $t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) - \{0\}$ constituie o bază în spaţiul vectorial al soluţiilor sistemului. Să se scrie soluţia generală a sistemului.

2. Se dau sistemele diferenţiale liniare neomogene şi soluţiile generale ale sistemelor omogene ataşate:

1) $$\frac{dY}{dt} = A(t)Y + F(t), A(t) = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad F(t) = \begin{bmatrix} \sin t \\ \cos t \end{bmatrix};$$

$$Y(t) = c_1 \begin{bmatrix} e^{4t} \\ e^{4t} \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} te^{4t} \\ (t-1)e^{4t} \end{bmatrix}.$$

2) $$\frac{dY}{dt} = A(t)Y + F(t), \quad A(t) = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad F(t) = \begin{bmatrix} e^t \\ \cos t \\ 0 \end{bmatrix};$$

$$Y(t) = c_1 \begin{bmatrix} e^{-t} \\ 0 \\ e^{-t} \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} \sin t \\ \sin t + \cos t \\ \cos t \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} -\cos t \\ \sin t - \cos t \\ \sin t \end{bmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Utilizînd metoda variaţiei constantelor să se găsească soluţiile generale ale sistemelor neomogene.

3. Să se calculeze e^{tA} pentru

1) $A = \begin{bmatrix} -7 & 1 \\ -2 & -5 \end{bmatrix}$, 2) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & -3 & -1 \end{bmatrix}$, 3) $A = \begin{bmatrix} -2 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -6 \\ -1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$.

4. Să se rezolve problemele Cauchy

1) $$Y' = AY, \ A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad Y(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

2) $$Y' = AY, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix}, \quad Y(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

5. Se dau sistemele

1) $x' = y,\ y' = z,\ z' = -x$
2) $x' + y - z = 0,\ y' - z = 0,\ z' + x - z = 0$
3) $x' = y + z,\ y' = z + x,\ z' = x + y.$

Să se găsească soluţiile generale şi pentru fiecare caz în parte să se cerceteze stabilitatea poziţiei de echilibru.

6. Să se determine soluțiile generale ale următoarelor sisteme:

1) $x' = x\cos t,\ y' = xe^{-\sin t}$

2) $2x' + y' = 3t,\ x'' + y' - 2y = e^{2t}$

3) $x' + y' = y + e^t,\ 2x' + y' = -2y + \cos t.$

Capitolul 3

LINII ȘI HIPERSUPRAFEȚE DE CÎMP

§1. Linii de cîmp și sisteme simetrice

Fie $\mathbb{D} \subset \mathbb{R}^n$ o mulțime deschisă și conexă, iar X un cîmp vectorial de clasă C^1 pe $\mathbb{D}$. O curbă $\alpha : I \to \mathbb{D}$ de clasă C^1 cu proprietatea $\alpha'(t) = X(\alpha(t)),\ \forall t \in I$, se numește *linie de cîmp*. Altfel spus α are proprietatea că pentru fiecare $t \in I$ vectorul tangent la α în punctul $\alpha(t)$ coincide cu $X(\alpha(t))$, adică cîmpul vectorial tangent la α coincide cu $X \circ \alpha$ (fig. 8). De asemenea se observă că ecuația diferențială $\alpha'(t) = X(\alpha(t)),\ t \in I$, este echivalentă cu ecuația integrală $\alpha(t) = \alpha(t_0) + \int_{t_0}^{t} X(\alpha(t))\,\mathrm{d}t$.

1.1. Teoremă. Dacă X este un cîmp vectorial de clasă C^1 pe o mulțime deschisă $\mathbb{D} \subset \mathbb{R}^n$, atunci pentru fiecare $x_0 \in \mathbb{D}$ există un interval deschis I care conține pe t_0 și o linie de cîmp $\alpha : I \to \mathbb{D}$ a lui X astfel încît

1) $\alpha(t_0) = x_0$,

2) orice altă linie de cîmp $\beta : J \to \mathbb{D}$ a lui X cu $\beta(t_0) = x_0$ are proprietatea $J \subseteq I$ și $\beta(t) = \alpha(t),\ \forall t \in J$.

α se numește *linie de cîmp maximală a lui X prin x_0*.

Demonstrație. Aici avem de-a face cu o reformulare a teoremei de existență și unicitate pentru soluțiile unui sistem diferențial de ordinul întîi (vezi Cap. 2, § 2). Într-adevăr, utilizînd notațiile

$$X(x) = (X_1(x), \ldots, X_n(x)),\quad X_i : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$$

$$\alpha(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t)),\quad x_i : I \to \mathbb{R},$$

$$\alpha'(t) = \left(\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t}(t), \ldots, \frac{\mathrm{d}x_n}{\mathrm{d}t}(t)\right),$$

ecuația diferențială vectorială $\alpha'(t) = X(\alpha(t)),\ \forall t \in I$, se transcrie sub forma unui *sistem diferențial autonom*

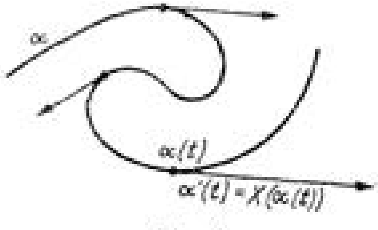


Fig. 8

$$(1)\qquad \begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} = X_1(x_1, \ldots, x_n) \\ \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \\ \dfrac{\mathrm{d}x_n}{\mathrm{d}t} = X_n(x_1, \ldots, x_n). \end{cases}$$

Teorema de existență arată că există o vecinătate I_1 a lui t_0 și n funcții : $x_i : I_1 \to \mathbb{R}$

de clasă C^1 care satisfac sistemul (1) şi condiţiile iniţiale $x_i(t_0) = x_{i0}$, $i = 1, \ldots, n$, $x_0 = (x_{10}, \ldots, x_{n0})$. Ansamblul $\beta_1(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))$ defineşte o linie de cimp $\beta_1 : I_1 \to \mathbb{D}$ a lui X cu $\beta_1(t_0) = x_0$.

Teorema de unicitate arată că dacă $\tilde{x}_i : I_2 \to \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, n$, este o altă soluţie a sistemului (1) care satisface condiţiile iniţiale $\tilde{x}_i(t_0) = x_{i0}$, atunci $\tilde{x}_i(t) = x_i(t)$, $\forall t \in I_1 \cap I_2$. Echivalent, dacă $\beta_2 = (\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_n) : I_2 \to \mathbb{D}$ este o altă linie de cimp a lui X cu $\beta_2(t_0) = x_0$, atunci $\beta_1(t) = \beta_2(t)$, $\forall t \in I_1 \cap I_2$.

Din acestea rezultă : (i) există o singură linie de cimp maximală α a lui X cu $\alpha(t_0) = x_0$, definită pe reuniunea domeniilor de definiţie ale liniilor de cimp ale lui X care aplică pe t_0 in x_0; (ii) orice altă linie de cimp $\beta : J \to \mathbb{D}$ a lui X cu $\beta(t_0) = x_0$ este o restricţie a lui α.

Observaţie. Soluţiile sistemului algebric $X_1(x_1, \ldots, x_n) = 0, \ldots, X_n(x_1, \ldots, x_n) = 0$ generează poziţiile de echilibru ale sistemului (1).

Exemplu: Fie $X(x_1, x_2) = (-x_2, x_1)$. Liniile sale de cimp sint soluţiile sistemului

$$\frac{dx_1}{dt} = -x_2, \quad \frac{dx_2}{dt} = x_1,$$

adică

$$x_1(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t, \quad x_2(t) = c_1 \sin t - c_2 \cos t$$

Linia de cimp maximală care trece prin punctul $x_1(0) = a$, $x_2(0) = b$ este

$$\alpha(t) = (a \cos t - b \sin t,\ a \sin t + b \cos t),\ t \in \mathbb{R}.$$

Evident, $\|\alpha(t)\|^2 = a^2 + b^2$, $\forall\, t \in \mathbb{R}$, şi deci α este un cerc de rază $\sqrt{a^2 + b^2}$ (fig. 9).

Un cimp vectorial de clasă C^1 pe o mulţime deschisă şi conexă $\mathbb{D} \subset \mathbb{R}^n$ cu proprietatea că pentru fiecare $x_0 \in \mathbb{D}$ linia de cimp maximală a lui X prin x_0 are domeniul de definiţie egal cu $\mathbb{R}$ se numeşte *complet*.

1.2. Teoremă. Fie X un cimp vectorial de clasă C^1 pe o mulţime deschisă şi conexă $\mathbb{D} \subset \mathbb{R}^n$, fie $x_0 \in \mathbb{D}$ şi $\alpha : I \to \mathbb{D}$ o linie de cimp maximală a lui X prin x_0. Dacă $\beta : J \to \mathbb{D}$ este o altă linie de cimp a lui X cu $\beta(t_1) = x_0$ pentru $t_1 \in J$, atunci $\beta(t) = \alpha(t + t_0 - t_1)$, $\forall\, t \in J$.

Demonstraţie. Notăm $s = t_0 - t_1$ şi observăm că dacă $t \to \alpha(t)$ este o linie de cimp, atunci şi $t \to \alpha(t + s)$ este tot linie de cimp. Într-adevăr,

$$\frac{d\alpha}{dt}(t + s)\bigg|_{t=t_0} = \frac{d\alpha}{dt}(t)\bigg|_{t=t_0+s} = $$
$$= X(\alpha(t_0 + s)) = X(\alpha(t + s))\bigg|_{t=t_0}.$$

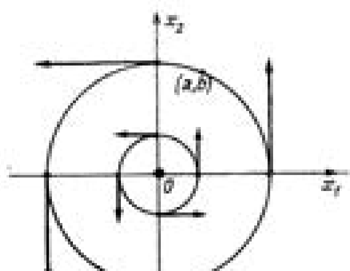


Fig. 9

1.3. Consecinţă. Prin fiecare punct $x_0 \in \mathbb{D}$ trece o singură linie de cimp maximală.

Fie X un cimp vectorial de clasă C^1 pe $\mathbb{D} \subset \mathbb{R}^n$. Discuţia precedentă arată că diversele linii de cimp ale lui X nu se intersectează. Uneori însă există linii de cimp care se autointersectează, adică sint curbe închise. În particular, pozițiile de echilibru ale sistemului (1) fac parte din această categorie de curbe.

1.4. Teoremă. Fie X un cimp vectorial de clasă C^1 pe $\mathbb{D} \subset \mathbb{R}^n$. Dacă $\alpha : I \to \mathbb{D}$ este o linie de cimp a lui X cu $\alpha(t_1) = \alpha(t_2)$, $t_1, t_2 \in I$, $t_1 < t_2$ (adică α este închisă), atunci α se poate prelungi la întreaga axă $\mathbb{R}$, prelungirea $\tilde{\alpha} : \mathbb{R} \to \mathbb{D}$ fiind periodică de perioadă $T \in (0, t_2 - t_1]$.

Demonstrație. Orice $s \in \mathbb{R}$ se poate reprezenta univoc în forma $s = t + n(t_2 - t_1)$, $t \in [t_1, t_2]$, $n \in \mathbb{Z}$. Funcția $\tilde{\alpha} : \mathbb{R} \to \mathbb{D}$, definită prin $\tilde{\alpha}(s) = \alpha(t)$ este periodică și are perioada $\min\{T \mid \tilde{\alpha}(s + T) = \tilde{\alpha}(s)\} \in (0, t_2 - t_1]$. Pe de altă parte, în baza teoremei 1.2, $\tilde{\alpha} : \mathbb{R} \to \mathbb{D}$ este o linie de cimp. În plus $\tilde{\alpha}(t_1) = \alpha(t_1)$.

Se știe că pentru o funcție continuă periodică, mulțimea perioadelor coincide sau cu dreapta reală (caz în care funcția este constantă) sau cu mulțimea multiplilor întregi ai celei mai mici perioade [3]. De aceea o linie de cimp care se autointersectează este sau o poziție de echilibru sau o curbă propriu zis închisă.

Uneori pentru sistemul de tipul (1) se folosește scrierea

$$\frac{dx_1}{X_1(x_1, \ldots, x_n)} = \ldots = \frac{dx_n}{X_n(x_1, \ldots, x_n)} (= dt), \tag{2}$$

cu denumirea de *sistem simetric*. Pentru aceasta se convine că dacă un numitor este funcția zero, atunci numărătorul respectiv trebuie egalat cu zero. Punctele în care se anulează toți numitorii generează pozițiile de echilibru.

O funcție $f : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$ de clasă C^1 se numește *integrală primă* a sistemului simetric dacă $D_X f = 0$, unde D_X este operatorul de derivare în raport cu cimpul vectorial $X = (X_1, \ldots, X_n)$. Relația de definiție $D_X f = 0$ este echivalentă cu fiecare dintre următoarele două proprietăți :

— funcția f este constantă de-a lungul oricărei soluții $\alpha : I \to \mathbb{D}$ a sistemului (2), adică $f \circ \alpha = \text{const}$; indicație, $D_X f \circ \alpha = \frac{d}{dt}(f \circ \alpha)$;

— fiecare linie de cimp $\alpha : I \to \mathbb{D}$ este conținută în una și numai una dintre mulțimile de nivel constant ale funcției f (fig. 10).

Exemplu. Hamilton a arătat că unele probleme de mecanică, optică, calcul variațional etc. pot fi modelate cu ajutorul sistemului de ecuații

$$\frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad i = 1, \ldots, n,$$

unde $H : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$ este o funcție de clasă C^2 de $2n$ variabile $p_1, \ldots, p_n : q_1, \ldots, q_n$. Legea conservării energiei este echivalentă cu faptul că H este o integrală primă a sistemului precedent. Într-adevăr, dacă notăm

$$X_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \ X_{n+i} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \ X = (X_i, X_{n+i}),$$

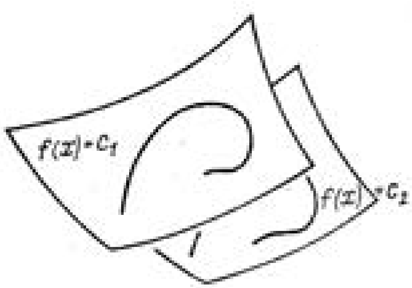


Fig. 10

atunci

$$\mathrm{D}_X H = \sum_{i=1}^{n} X_i \frac{\partial H}{\partial p_i} + \sum_{i=1}^{n} X_{n+i} \frac{\partial H}{\partial q_i} = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial q_i}\frac{\partial H}{\partial p_i} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial q_i} = 0.$$

Funcţia H este un exemplu de integrală primă globală, caz întîlnit destul de rar. În general nu există integrale prime globale ci locale.

1.5. Teoremă. Dacă X este un cîmp de clasă C^1 pe $\mathbb{D}$ şi $x_0 \in \mathbb{D}$ este un punct în care $X(x_0) \neq 0$, atunci există o vecinătate U a lui x_0 astfel încît sistemul simetric admite $n-1$ integrale prime $f_1, \ldots, f_{n-1}$ funcţional independente pe U şi orice altă integrală primă este o funcţie de clasă C^1 de acestea. În aceste condiţii soluţia generală a sistemului (2) pe U poate fi scrisă în forma

$$f_1(x_1, \ldots, x_n) = c_1, \ldots, f_{n-1}(x_1, \ldots, x_n) = c_{n-1}.$$

Demonstraţie. Continuitatea lui X împreună cu $X(x_0) \neq 0$ asigură existenţa unei vecinătăţi a lui x_0 pe care X este nenul, adică o restricţie a soluţiei $\alpha : J \to \mathbb{D}$ care satisface condiţia $\alpha(t_0) = x_0$ este curbă regulată,

$$\alpha(t) = (\alpha_1(t), \ldots, \alpha_n(t)), \quad \left(\frac{\mathrm{d}\alpha_1}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{\mathrm{d}\alpha_n}{\mathrm{d}t}\right)^2 > 0, \quad t \in (a, b) \subset I.$$

Fie $\frac{\mathrm{d}\alpha_n}{\mathrm{d}t}(t_0) = X_n(x_0) \neq 0$. Conform teoremei funcţiei inverse, într-o vecinătate a lui t_0, funcţia definită prin $x_n = \alpha_n(t)$ admite inversa $t = \alpha_n^{-1}(x_n)$. Funcţiile definite prin

$$f_i(x) = x_i - \alpha_i \circ \alpha_n^{-1}(x_n), \quad i = 1, \ldots, n-1, \ x \in U$$

sînt $n-1$ integrale prime ale sistemului (2). Într-adevăr,

$$\mathrm{D}_X f_i = \sum_{j=1}^{n} X_j \frac{\partial f_i}{\partial x_j} = X_i - X_n \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x_n}(\alpha_i \circ \alpha_n^{-1}(x)) =$$

$$= X_i - X_n \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\alpha_i(t)\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x_n} = 0.$$

Acestea sînt funcţional independente pe U deoarece matricea Jacobian

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \ldots 0 & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ 0 & 1 \ldots 0 & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 \ldots 1 & \frac{\partial f_{n-1}}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

are rangul $n-1$.

Fie $f_1, \ldots, f_{n-1}$ integrale prime independente ale sistemului (2). Dacă f este o altă integrală primă, atunci

$$X_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \ldots + X_n \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0$$

$$X_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \ldots + X_n \frac{\partial f_1}{\partial x_n} = 0$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$X_1 \frac{\partial f_{n-1}}{\partial x_1} + \ldots + X_n \frac{\partial f_{n-1}}{\partial x_n} = 0.$$

Dar acesta este un sistem liniar omogen de n ecuaţii care admite prin ipoteză soluţia nebanală $(X_1, \ldots, X_n)$. Rezultă că determinantul sistemului trebuie să fie nul,

$$\frac{D(f, f_1, \ldots, f_{n-1})}{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)} = 0, \ \forall\, x \in U$$

şi deci $f, f_1, \ldots, f_{n-1}$ sînt funcţional dependente, adică există $\varnothing$ astfel încît

$$f = \varnothing(f_1, \ldots, f_{n-1}).$$

Reciproc, orice funcţie de clasă C^1 de tipul $f = \varnothing(f_1, \ldots, f_{n-1})$ este o integrală primă a sistemului (2). Într-adevăr,

$$D_X f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \varnothing}{\partial f_i} D_X f_i = 0.$$

Pentru determinarea integralelor prime ale unor sisteme simetrice particulare se utilizează *metoda combinaţiilor integrabile*. În ipoteza că există funcţiile $\lambda_j : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$, $j = 1, \ldots, n$, de clasă C^1, astfel încît $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \mathrm{d}x_j = \mathrm{d}f$ şi $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j X_j = 0$, din

$$\frac{\mathrm{d}x_1}{X_1} = \ldots = \frac{\mathrm{d}x_n}{X_n} = \frac{\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \mathrm{d}x_j}{\sum_{j=1}^{n} \lambda_j X_j} = \frac{\mathrm{d}f}{0}$$

rezultă $\mathrm{d}f = 0$ şi deci $f(x_1, \ldots, x_n) = c$, în punctele x din $\mathbb{D}$ caracterizate de sistemul simetric, adică $f : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$, $(x_1, \ldots, x_n) \to f(x_1, \ldots, x_n)$ este o integrală primă a sistemului simetric. Expresia $\sum_j \lambda_j \mathrm{d}x_j = \mathrm{d}f$, cu condiţia $\sum_j \lambda_j X_j = 0$, se numeşte *combinaţie integrabilă*.

Exemplu.

$$\frac{\mathrm{d}x}{bz - cy} = \frac{\mathrm{d}y}{cx - az} = \frac{\mathrm{d}z}{ay - bx} = \frac{a\mathrm{d}x + b\mathrm{d}y + c\mathrm{d}z}{0} = \frac{x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y + z\mathrm{d}z}{0}.$$

Rezultă $a\mathrm{d}x + b\mathrm{d}y + c\mathrm{d}z = 0$, $x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y + z\mathrm{d}z = 0$ şi deci $ax + by + cz = c_1$, $x^2 + y^2 + z^2 = c_2$. Fie integralele prime definite prin $f_1(x, y, z) = ax + by + cz$ respectiv $f_2(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ şi

$$J = \begin{bmatrix} a & b & c \\ 2x & 2y & 2z \end{bmatrix}$$

matricea Jacobian ataşată lui (f_1, f_2). Deoarece

$$\operatorname{rang} J = \begin{cases} 1 & \text{pe } A = \{(x, y, z) \mid ay - bx = 0,\ az - cx = 0,\ bz - cy = 0\} \\ 2 & \text{pe } \mathbb{R}^3 - A \end{cases}$$

rezultă că soluţia generală a sistemului pe $\mathbb{R}^3 - A$ este familia de cercuri $ax + by + cz = c_1$, $x^2 + y^2 + z^2 = c_2$. Se observă că A este mulţimea poziţiilor de echilibru.

O b s e r v a ţ i i. 1) $k (\leq n - 1)$ integrale prime funcţional independente determină o subvarietate a lui $\mathbb{R}^n$ cu $n - k$ dimensiuni, iar liniile de cîmp se află complet incluse în această subvarietate.

2) Dacă găsim $n - 2$ integrale prime funcţional independente $f_1, \ldots, f_{n-2}$ ale sistemului (2), atunci găsirea soluţiei generale se reduce la găsirea soluţiei generale a unei ecuaţii diferenţiale de ordinul întîi.

Pentru a justifica afirmaţia precedentă, fie subvarietatea bidimensională

$$f_1(x_1, \ldots, x_n) = c_1, \ldots, f_{n-2}(x_1, \ldots, x_n) = c_{n-2}.$$

Avem un sistem de $n - 2$ ecuaţii care definesc pe $x_1, \ldots, x_{n-2}$ în funcţie de x_{n-1}, x_n:

$$x_k = \varphi_k(x_{n-1}, x_n ; c_1, \ldots, c_{n-2}),\ k = 1, \ldots, n - 2.$$

Dar

$$\frac{\mathrm{d}x_{n-1}}{X_{n-1}} = \frac{\mathrm{d}x_n}{X_n}.$$

Înlocuind pe x_k obţinem o ecuaţie de ordinul unu cu soluţia

$$\Theta(x_{n-1}, x_n ; c_1, \ldots, c_{n-2}) = c_{n-1}.$$

Punînd $c_k = f_k$ rezultă $f_{n-1}(x) = c_{n-1}$, o nouă integrală primă funcţional independentă de celelalte.

Exemplu. Fie sistemul

$$\frac{\mathrm{d}x}{x^2} = \frac{\mathrm{d}y}{-xy} = \frac{\mathrm{d}z}{y^2},\ x > 0,\ y > 0.$$

Din $\dfrac{\mathrm{d}x}{x} = \dfrac{\mathrm{d}y}{-y}$ rezultă $xy = c_1$. Din $\dfrac{\mathrm{d}y}{-xy} = \dfrac{\mathrm{d}z}{y^2}$ găsim

$$\frac{\mathrm{d}y}{c_1} + \frac{\mathrm{d}z}{y^2} = 0 \text{ sau } \frac{y^3}{3} + c_1 z = c_2. \text{ Deci } xy = c_1,\ y^3 + 3xyz = c_2,\ x > 0,$$

$y > 0$ este soluţia generală a sistemului.

3) Avînd în vedere principiul reducerii, o *integrală primă* a unei ecuații diferențiale (sau sistem) de ordin arbitrar este, prin definiție, o integrală primă a sistemului de ordinul întîi la care aceasta (acesta) se reduce.

4) În cazul spațiului cu trei dimensiuni, se utilizează și notațiile $\vec{V}(x, y, z) = v_1(x, y, z)\vec{i} + v_2(x, y, z)\vec{j} + v_3(x, y, z)\vec{k}$, $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, $d\vec{r} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$. Sistemul simetric

$$\frac{dx}{v_1(x, y, z)} = \frac{dy}{v_2(x, y, z)} = \frac{dz}{v_3(x, y, z)}$$

este echivalent cu ecuația vectorială $\vec{V} \times d\vec{r} = \vec{0}$.

Exemplu. Fie

$$\vec{E} = \frac{1}{\varepsilon} \frac{q_0}{\|\vec{r}\|^3} \vec{r}, \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 - \{0\},$$

cîmpul electrostatic produs de sarcina q_0. Liniile de cîmp sînt soluțiile sistemului $\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z}$ adică familia de semidrepte $x = c_1 y$, $x = c_2 z$; $y = 0$, $z = 0$; $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 - \{0\}$.

§2. Stabilitatea pozițiilor de echilibru

Considerăm sistemul autonom

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i(x_1, \ldots, x_n), \quad i = 1, \ldots, n.$$

Din punct de vedere fizic un asemenea sistem se interpretează ca fiind legea locală de evoluție a unui proces. Punctele x în care se anulează X generează pozițiile de echilibru ale sistemului. Stabilitatea acestor poziții ne interesează în mod deosebit.

Cazul sistemelor liniare cu coeficienți constanți a fost deja discutat în § 5, Cap. 4. Acest caz este important prin sine însuși, dar și prin faptul că situații mult mai generale se reduc tot la el.

Presupunem $X = (X_1, \ldots, X_n) \in C^2(\mathbb{D})$ și $x = 0$ ca fiind o poziție de echilibru. Avem $X_i(0) = 0$ și diferențiabilitatea lui X implică

$$X_i(x) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial X_i}{\partial x_j}(0) x_j + \|x\| F_i(x), \quad \lim_{x \to 0} F_i(x) = 0.$$

Notăm $A = \left[\frac{\partial X_i}{\partial x_j}(0) \right]$ și utilizăm notațiile matriceale. Sistemului

$$\frac{dx}{dt} = Ax + \|x\| F(x)$$

i se atașează sistemul liniar omogen cu coeficienți constanți

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = Ax.$$

Teorema care urmează arată că perturbația $\|x\| F(x)$ nu distruge stabilitatea asimptotică a poziției de echilibru a sistemului liniar omogen.

2.1. Teoremă. Dacă toate valorile proprii ale matricei A au părțile reale strict negative, atunci poziția de echilibru $x = 0$ a sistemului

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = Ax + \|x\| F(x)$$

este asimptotic stabilă (și deci stabilă).

Demonstrația este destul de complicată și de aceea o ocolim. Ne mulțumim cu un exemplu care pune în evidență modul concret de folosire a teoremei.

Exemplu. Se consideră sistemul

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -10x + 4e^{y} - 4\cos y^2$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 2e^{x} - 2 - y + x^4, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Deoarece în jurul originii $e^{x} \simeq 1 + x$, $\cos y^2 \simeq 1$ sistemul liniar atașat este

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -10x + 4y \\[2mm] \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 2x - y. \end{cases}$$

Matricea

$$A = \begin{bmatrix} -10 & 4 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

are valorile proprii strict negative. De aceea poziția de echilibru $(0, 0)$ a sistemului liniar omogen este asimptotic stabilă. În consecință această poziție este asimptotic stabilă și pentru sistemul inițial.

§ 3. Hipersuprafețe de cîmp și ecuații liniare cu derivate parțiale

Fie $X = (X_1, \ldots, X_n)$ un cîmp vectorial de clasă C^1 pe o mulțime deschisă și conexă $\mathbb{D} \subset \mathbb{R}^n$. Fie $f : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$ o funcție de clasă C^1 și $M : f(x) = c$ o hipersuprafață de nivel constant c. Dacă X este un cîmp vectorial tangent

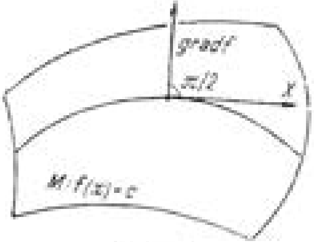


Fig. 11

la M (fig. 11), adică $(X, \operatorname{grad} f)=0$ sau $D_X f=0$, atunci M se numește *hipersuprafață de cîmp* a lui X. Explicit, hipersuprafețele de cîmp sînt caracterizate prin ecuația diferențială

$$(3) \quad X_1(x)\frac{\partial f}{\partial x_1}(x) + \ldots + X_n(x)\frac{\partial f}{\partial x_n}(x) = 0,$$

care poartă numele de *ecuație liniară omogenă cu derivate parțiale de ordinul întîi.*

O hipersuprafață de cîmp mai poate fi privită și ca fiind o hipersuprafață generată de linii de cîmp ale lui X. Pe de altă parte, liniile de cîmp ale lui X sînt soluții ale sistemului simetric (vezi § 1)

$$(4) \qquad \frac{dx_1}{X_1(x)} = \ldots = \frac{dx_n}{X_n(x)},$$

numit *sistemul caracteristic* atașat ecuației (3).

Parafrazînd discuția integralelor prime și proprietățile acestora rezultă că:

— orice integrală primă a sistemului (4) este o soluție a ecuației (3) și reciproc, orice soluție a ecuației (3) este o integrală primă a sistemului (4);

— fie $f_1, \ldots, f_{n-1}$ cele $n-1$ integrale prime funcțional independente definite de sistemul (2) într-o vecinătate U a unui punct $x_0 \in D$ în care $X(x_0) \neq 0$. O funcție f de clasă C^1 este o soluție a ecuației (3) dacă și numai dacă ea este de tipul $f = \Phi(f_1, \ldots, f_{n-1})$. Cu alte cuvinte *soluția generală* a ecuației (3) este o funcție arbitrară de clasă C^1 de cele $n-1$ integrale prime funcțional independente ale sistemului (4).

Aceste considerații împreună cu faptul că dacă $f_1, \ldots, f_{n-1}$ sînt integrale prime funcțional independente ale sistemului (4), atunci soluția generală a sistemului se poate scrie în forma

$$f_1(x_1, \ldots, x_n) = c_1, \ldots, f_{n-1}(x_1, \ldots, x_n) = c_{n-1}$$

conduc la următoarele concluzii:

— pentru găsirea soluției generale a ecuației (3) este suficient să determinăm soluția generală a sistemului (4);

— pentru obținerea soluției generale a sistemului (4) este suficient să găsim $n-1$ soluții funcțional independente ale ecuației (3).

Exemplu. Să găsim soluția generală a ecuației

$$(x-a)\frac{\partial f}{\partial x} + (y-b)\frac{\partial f}{\partial y} + (z-c)\frac{\partial f}{\partial z} + (t-d)\frac{\partial f}{\partial t} = 0, \quad x \neq a.$$

Atașăm sistemul

$$\frac{dx}{x-a} = \frac{dy}{y-b} = \frac{dz}{z-c} = \frac{dt}{t-d}.$$

Rezultă

$$\frac{y-b}{x-a}=c_1,\ \frac{z-c}{x-a}=c_2,\ \frac{t-d}{x-a}=c_3$$

şi deci

$$f(x,y,z)=\emptyset\left(\frac{y-b}{x-a},\ \frac{z-c}{x-a},\ \frac{t-d}{x-a}\right),\quad x\neq a.$$

Fie $f=\emptyset(f_1,\ldots,f_{n-1})$ soluţia generală a ecuaţiei (3) şi $M_c:\emptyset(f_1(x),\ldots,f_{n-1}(x))=c$ familia hipersuprafeţelor de cîmp.

Problema lui Cauchy pentru o ecuaţie de tipul (3) constă în determinarea hipersuprafeţei de cîmp care să conţină o subvarietate cu $n-2$ dimensiuni $\Gamma: g(x_1,\ldots,x_n)=0,\ h(x_1,\ldots,x_n)=0$. În anumite condiţii problema lui Cauchy admite soluţie unică [19]. Pentru cazurile particulare se observă că hipersuprafaţa căutată poate fi privită ca fiind generată de liniile de cîmp determinate de sistemul (4), $f_1(x)=c_1,\ldots,f_{n-1}(x)=c_{n-1}$, care intîlnesc pe Γ. Ecuaţiile $f_1(x)=c_1,\ldots,f_{n-1}(x)=c_{n-1},\ g(x)=0,\ h(x)=0$ formează un sistem algebric de $n+1$ ecuaţii cu n necunoscute $x_1,\ldots,x_n$. Eliminînd pe $x_1,\ldots,x_n$ obţinem condiţia de compatibilitate $\emptyset(c_1,\ldots,c_{n-1})=0$ şi apoi eliminînd parametrii $c_1,\ldots,c_n$ găsim hipersuprafaţa de cîmp $M:\emptyset(f_1(x),\ldots,f_{n-1}(x))=0$.

Exemplu. Se dă ecuaţia

$$(x^2+y^2)\frac{\partial f}{\partial x}+2xy\frac{\partial f}{\partial y}+xz\frac{\partial f}{\partial z}=0,\ x+y>0,\ x-y<0,\ z>0.$$

Să se determine suprafaţa de cîmp care se sprijină pe curba $\Gamma: x=a,\ y^2+z^2=a^2$.

Soluţie. Relaţiile $x+y>0,\ x-y<0$ implică $y>0$. Asociem sistemul simetric

$$\frac{dx}{x^2+y^2}=\frac{dy}{2xy}=\frac{dz}{xz}.$$

Rezultă

$$\frac{dy}{2y}=\frac{dz}{z},\quad \frac{d(x+y)}{(x+y)}=\frac{d(x-y)}{(x-y)^2},$$

de unde

$$\frac{z^2}{y}=c_1,\quad \frac{1}{x-y}-\frac{1}{x+y}=\frac{2}{c_2}.$$

Integralele prime sînt funcţional independente pe mulţimea specificată în enunţ, iar condiţia de compatibilitate a sistemului

$$x=a,\ y^2+z^2=a^2,\ \frac{z^2}{y}=c_1,\ \frac{1}{x-y}-\frac{1}{x+y}=\frac{2}{c_2},\quad x+y>0,\ x-y<0,\ z>0$$

este $c_1=c_2$. Deci $M: y^2+z^2-x^2=0,\ x+y>0,\ x-y<0,\ y>0,\ z>0$.

Ecuațiile liniare neomogene cu derivate parțiale de ordinul întîi au forma

$$X_1(x, f)\frac{\partial f}{\partial x_1} + \ldots + X_n(x, f)\frac{\partial f}{\partial x_n} = F(x, f),$$

unde f este funcția necunoscută. În acest caz f se caută sub formă implicită $\Theta(x, f) = 0$, ecuația diferențială reducîndu-se la o ecuație de tipul (3) căreia îi corespunde sistemul simetric

$$\frac{\mathrm{d}x_1}{X_1(x, f)} = \ldots = \frac{\mathrm{d}x_n}{X_n(x, f)} = \frac{\mathrm{d}f}{F(x, f)}.$$

Se află soluția generală a acestui sistem, apoi soluția generală Θ a ecuației diferențiale corespunzătoare (liniară omogenă) și din $\Theta(x, f) = 0$ rezultă f.

Exemplu. Să găsim soluția generală a ecuației

$$xz\frac{\partial z}{\partial x} - yz\frac{\partial z}{\partial y} = x^2 + y^2.$$

Sistemul

$$\frac{\mathrm{d}x}{xz} = \frac{\mathrm{d}y}{-yz} = \frac{\mathrm{d}z}{x^2 + y^2}$$

admite soluția generală $xy = c_1$, $x^2 - y^2 - z^2 = c_2$, pe $\mathbb{R}^3 - Oz$. De aceea soluția generală a ecuației liniare neomogene pe $\mathbb{R}^3 - Oz$ este definită prin $\Theta(xy, x^2 - y^2 - z^2) = 0$. Punctele axei Oz sînt poziții de echilibru.

§ 4. Metoda rețelei de integrare a ecuațiilor cu derivate parțiale

Pentru simplificare fie ecuația cu derivate parțiale de ordinul întîi $a\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} = F(x, y)$, unde f este funcția necunoscută de clasă C^1 pe $[a, b] \times [0, T]$ care satisface condiția inițială $f(x, 0) = g(x)$. Constanta a este dată, iar F și g sînt funcții de clasă C^1 cunoscute. Această problemă are soluția exactă $f(x, y) = g(x - ay) + \int_0^y F(at - ay + x, t)\,\mathrm{d}t$. Metoda numerică de integrare, numită *metoda rețelei*, constă în următoarele: se înlocuiește domeniul de integrare printr-o rețea *dreptunghiulară de pas dublu* h, k ($h > 0$, $k > 0$ convenabil alese, fig. 12),

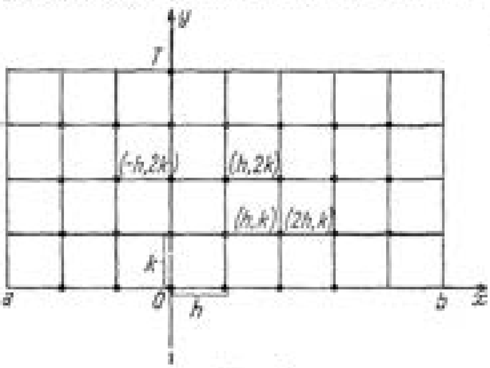


Fig. 12

adică printr-o mulţime *discretă de puncte* $M_{p,q}$ de coordonate $x_p = ph$ şi $y_q = qk$, $p, q \in \mathbb{Z}$, $q \geq 0$, numite nodurile reţelei ; se acoperă domeniul de integrare $[a, b] \times [0, T]$ cu o reţea de dreptunghiuri cu laturile paralele cu axele şi de lungimi egale cu multiplii întregi de h şi respectiv k şi apoi se determină valorile funcţiei f în nodurile reţelei. Algoritmul este următorul : se fixează h şi k, se notează $F_{p,q} = F(ph, kq)$, $g_p = g(ph)$, $f_{p,q} = f(ph, qk)$ şi se înlocuieşte problema Cauchy $a\dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial y} = F(x, y)$, $f(x, 0) = g(x)$ prin sistemul de ecuaţii cu *diferenţe finite* $\dfrac{f_{p,q+1} - f_{p,q}}{k} + a\dfrac{f_{p+1,q} - f_{p,q}}{h} = F_{p,q}$; $f_{p,0} = g_p$, în care a, $F_{p,q}$, g_p sînt numere reale cunoscute, iar

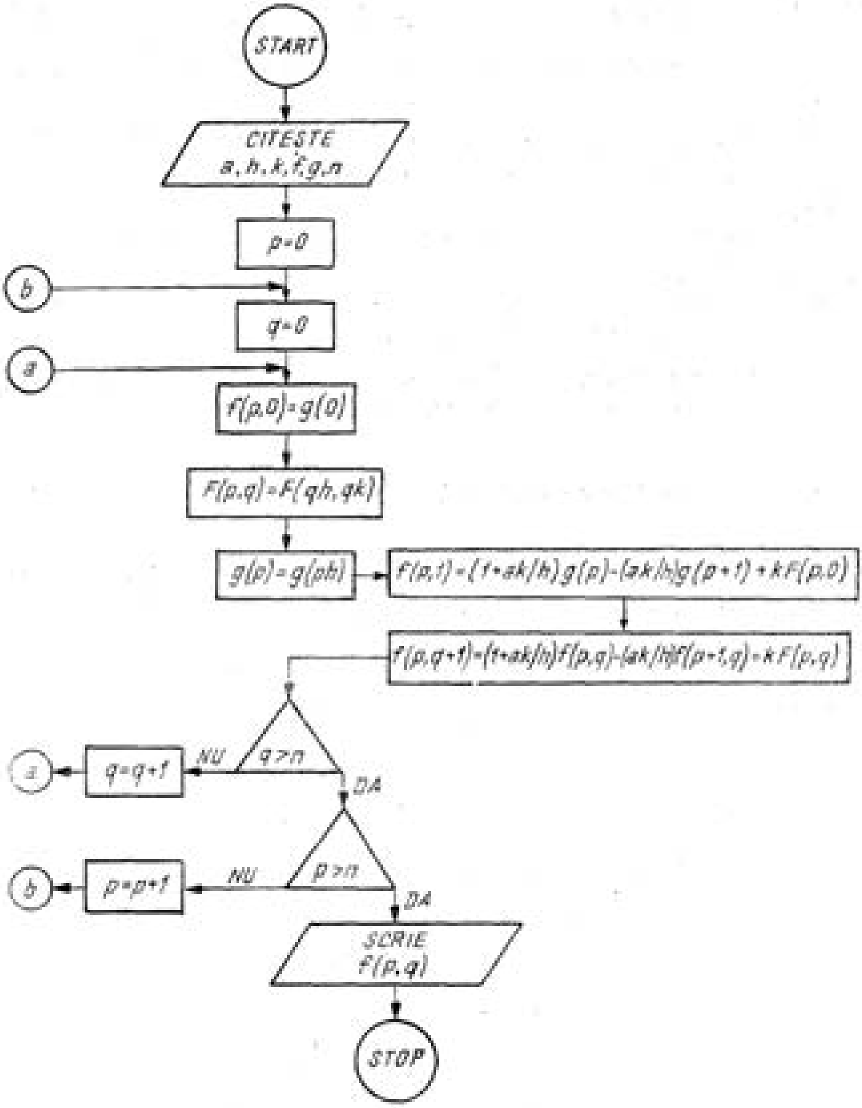


Fig. 13

şirul $(f_{p,q})$, $p, q \in \mathbb{Z}$, $q \geq 0$, este un şir dublu de numere reale care se determină. Primul raport din acest sistem aproximează pe $\frac{\partial f}{\partial y}$, iar al doilea raport aproximează derivata $a\frac{\partial f}{\partial x}$. Prima ecuaţie a sistemului se scrie şi sub forma $f_{p,q+1} = (1 + ak/h)f_{p,q} - a\frac{k}{h}f_{p+1,q} + kF_{p,q}$. Luînd $q = 0$ obţinem $f_{p,1} = (1 + ak/h)f_{p,0} - a\frac{k}{h}f_{p+1,0} + F_{p,0} = (1 + ak/h)g_p - a\frac{k}{h}g_{p+1} + kF_{p,0}$, care dă valoarea $f_{p,1}$ deoarece membrul drept al acestei egalităţi este cunoscut. Mai departe, pentru $q = 1$, avem $f_{p,2} = (1 + ak/h)f_{p,1} - a\frac{k}{h}f_{p+1,1} + kF_{p,1}$ care are membrul drept cunoscut deoarece pe $f_{p,1}$ îl ştim de la pasul anterior.

4.1. Teoremă. Dacă paşii reţelei h şi k satisfac condiţia $0 \leq -ak/h \leq 1$, atunci $\sup\limits_{p \in \mathbb{Z}} | f_{p,q} - f(ph, qk) | \leq nk \,|\, \eta(h, k) \,|$, unde $\lim\limits_{h, k \to 0} \eta(h, k) = 0$, $n \in \mathbb{N}$, $n =$ fixat.

Această inegalitate constituie o evaluare a erorii în formula aproximativă $f(ph, kq) \simeq f_{p,q}$.

În concluzie teorema afirmă că dacă $h, k \to 0$ şi n este suficient de mare determinat de condiţia $nk =$ constant, atunci $\lim\limits_{h, k \to 0} \sup | f_{p,q} - f(ph, qk) | = 0$ şi deci metoda numerică a reţelei este convergentă. Schema logică pentru algoritmul metodei este dată în fig. 13.

§ 5. Hipersuprafeţe ortogonale liniilor de cîmp şi ecuaţii Pfaff

Fie $X = (X_1, \ldots, X_n)$ un cîmp vectorial de clasă C^1 pe o mulţime deschisă şi conexă $\mathbb{D} \subset \mathbb{R}^n$. Fie $f : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$ o funcţie de clasă C^2 şi $M : f(x) = c$ o hipersuprafaţă de nivel constant c. Dacă X este coliniar cu grad f, adică $\exists\, \lambda : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$ de clasă C^1 astfel încît $X = \lambda$ grad f (fig. 14), atunci M se numeşte *hipersuprafaţă ortogonală liniilor de cîmp* ale lui X. Deoarece $(dx_1, \ldots, dx_n)$ este un vector din planul tangent la M în punctul x, rezultă că o hipersuprafaţă ortogonală liniilor de cîmp ale lui X satisface ecuaţia

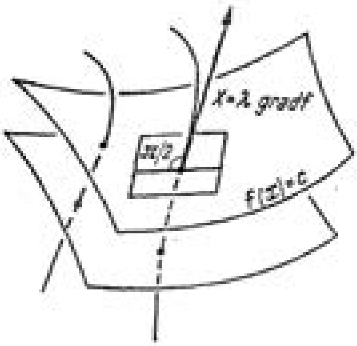


Fig. 14

$$(5) \qquad X_1(x)dx_1 + \ldots + X_n(x)\,dx_n = 0,$$

numită *ecuaţie Pfaff*.

Uneori în loc de cîmpul vectorial $X = (X_1, \ldots, X_n)$ este preferată utilizarea 1-formei diferenţiale ataşate $\omega = X_1(x)\,dx_1 + \ldots + X_n(x)dx_n$ context în care ecuaţia Pfaff se scrie simplu $\omega = 0$.

Precizare. Soluţiile unei ecuaţii Pfaff sînt mulţimi de puncte din $\mathbb{D}$ (hipersuprafeţe *olonome* sau *neolonome*).

5.1. Teoremă. Dacă $\mathbb{D}$ este un interval n-dimensional şi dacă $\frac{\partial X_i}{\partial x_j}(x) = \frac{\partial X_j}{\partial x_i}(x), \forall x \in \mathbb{D}, i, j = 1, \ldots, n$, atunci funcţia $f: \mathbb{D} \to \mathbb{R}$ definită prin

$$f(x) = \int_{x_{10}}^{x_1} X_1(x_1, \ldots, x_n)\mathrm{d}x_1 + \int_{x_{20}}^{x_2} X_2(x_{10}, x_2, \ldots, x_n)\mathrm{d}x_2 + \ldots +$$

$$+ \int_{x_{n0}}^{x_n} X_n(x_{10}, \ldots, x_{n-1,0}, x_n)\,\mathrm{d}x_n,$$

$x_0 = (x_{10}, \ldots, x_{n0}) \in \mathbb{D}$, are proprietatea $\mathrm{d}f = X_1\mathrm{d}x_1 + \ldots + X_n\mathrm{d}x_n$ şi deci soluţia generală a ecuaţiei Pfaff este definită prin $f(x) = c$.

Demonstraţie. Se observă că

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x) = X_1(x), \frac{\partial f}{\partial x_2}(x) = \frac{\partial}{\partial x_2}\int_{x_{10}}^{x_1} X_1(x_1, \ldots, x_n)\mathrm{d}x_1 + X_2(x_{10}, x_2, \ldots, x_n) =$$

$$= \int_{x_{10}}^{x_1} \frac{\partial X_1}{\partial x_2}(x_1, \ldots, x_n)\mathrm{d}x_1 + X_2(x_{10}, x_2, \ldots, x_n) = \int_{x_{10}}^{x_1} \frac{\partial X_2}{\partial x_1}(x_1, \ldots, x_n)\mathrm{d}x_1 +$$

$+ X_2(x_{10}, x_2, \ldots, x_n) = X_2(x)$ etc. De aceea ecuaţia (5) este echivalentă cu $\mathrm{d}f(x) = 0$, iar aceasta este echivalentă cu ecuaţia $f(x) = c$.

5.2. Teoremă. Dacă $\mathbb{D}$ este o mulţime convexă şi dacă $\frac{\partial X_i}{\partial x_j}(x) = \frac{\partial X_j}{\partial x_i}(x), \forall x \in \mathbb{D}, i, j = 1, \ldots, n$, atunci funcţia $f: \mathbb{D} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \int_0^1 (X(x_0 + t(x - x_0)), x - x_0)\,\mathrm{d}t$, $x_0 = (x_{10}, \ldots, x_{n0}) \in \mathbb{D}$, are proprietatea $\mathrm{d}f = X_1\mathrm{d}x_1 + \ldots = X_n\mathrm{d}x_n$ şi deci soluţia generală a ecuaţiei (5) este definită prin $f(x) = c$.

Demonstraţie. Notăm $u_i(t) = x_{i0} + t(x_i - x_{i0})$, $i = 1, \ldots, n$, $u(t) = (u_1(t), \ldots, u_n(t))$. Rezultă

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(x) = \int_0^1 \left(\frac{\partial}{\partial x_k} X(u(t)),\ x - x_0\right) + X_k(u(t))\,\mathrm{d}t =$$

$$= \int_0^1 \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial X}{\partial u_j}(u(t))\ \frac{\partial u_j}{\partial x_k}(t),\ x - x_0\right) + X_k(u(t))\,\mathrm{d}t =$$

$$=\int_0^1 t\left(\frac{\partial X}{\partial u_k}(u(t)),\ x-x_0\right)\mathrm{d}t+\int_0^1 X_k(u(t))\mathrm{d}t=\int_0^1 t\sum_{i=1}^n \frac{\partial X_i}{\partial u_k}(u(t))\,(x_i-x_{i0})\mathrm{d}t+$$

$$+\int_0^1 X_k(u(t))\mathrm{d}t=\left(\text{ţinem seama că } \frac{\partial X_i}{\partial u_k}=\frac{\partial X_k}{\partial x_i}\right),$$

$$=\int_0^1 t\sum_{i=1}^n \frac{\partial X_k}{\partial u_i}(u(t))\,(x_i-x_{i0})\mathrm{d}t+\int_0^1 X_k(u(t))\mathrm{d}t=\int_0^1 t\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}X_k(u(t))\mathrm{d}t+$$

$$+\int_0^1 X_k(u(t))\mathrm{d}t \text{ (integrăm prin părţi), } X_k(u(1))=X_k(x).$$

Cu aceasta teorema devine evidentă.

Ecuaţiile Pfaff pentru care mulţimea $\mathbb{D}$ este conexă şi simplu conexă, iar $\frac{\partial X_i}{\partial x_j}(x)=\frac{\partial X_j}{\partial x_i}(x)$, $\forall x\in\mathbb{D}$, adică X este un cimp potenţial sau echivalent forma ω este exactă, se numesc *ecuaţii diferenţiale exacte*.

Fie $\mathbb{D}$ o mulţime deschisă conexă şi simplu conexă. Uneori există o funcţie nenulă $\mu:\mathbb{D}\to\mathbb{R}$ de clasă C^1 astfel incit

$$\mu(x)X_1(x)\mathrm{d}x_1+\ldots+\mu(x)\,X_n(x)\mathrm{d}x_n=0$$

să fie o ecuaţie diferenţială exactă. Funcţia μ se numeşte *factor integrant* şi satisface sistemul cu derivate parţiale

$$\frac{\partial(\mu X_i)}{\partial x_j}(x)=\frac{\partial(\mu X_j)}{\partial x_i}(x).$$

Ecuaţiile diferenţiale exacte şi ecuaţiile Pfaff care admit un factor integrant se numesc *ecuaţii complet integrabile*. Soluţia unor asemenea ecuaţii depinde de o constantă arbitrară. Cu alte cuvinte cimpurile vectoriale corespunzătoare unor ecuaţii complet integrabile admit o familie cu un parametru de hipersuprafeţe ortogonale liniilor de cimp.

O ecuaţie Pfaff in două variabile este complet integrabilă (vezi Cap. 1, § 6). În general, ecuaţia $\omega=0$ este complet integrabilă dacă şi numai dacă $\omega\wedge \mathrm{d}\omega=0$[41] (bineinţeles, se presupune că mulţimea pe care lucrăm este conexă şi simplu conexă).

Presupunem că ecuaţia Pfaff nu este complet integrabilă, adică X nu posedă o familie cu un parametru de hipersuprafeţe ortogonale liniilor de cimp. O asemenea ecuaţie Pfaff defineşte o infinitate de curbe integrale al căror ansamblu se numeşte *hipersuprafaţă neolonomă*.

Exemplu. În $\mathbb{R}^3$, ecuaţiile $\omega_1=z\mathrm{d}x-y\mathrm{d}y=0$, $\omega_2=x\mathrm{d}y-z\mathrm{d}z=0$ reprezintă respectiv suprafeţe neolonome. Într-adevăr ele nu sint complet integrabile

$$\omega_1\wedge \mathrm{d}\omega_1=-y\mathrm{d}x\wedge \mathrm{d}y\wedge \mathrm{d}z,\quad \omega_2\wedge \mathrm{d}\omega_2=-z\mathrm{d}x\wedge \mathrm{d}y\wedge \mathrm{d}z.$$

Intersecția celor două suprafețe neolonome constă din soluțiile sistemului simetric (echivalent, sistem liniar cu coeficienți constanți)

$$\frac{dx}{y} = \frac{dy}{z} = \frac{dz}{x},$$

adică din liniile de cîmp ale lui $y\vec{i} + z\vec{j} + x\vec{k}$.

Observație. Revenim la ecuația Pfaff $X_1(x)dx_1 + \ldots + X_n(x)dx_n = 0$ și presupunem $X_n(x) \neq 0$. Înlocuind pe $x_1, \ldots, x_{n-1}$ cu $u_1, \ldots, u_{n-1}$ și pe x_n cu z ecuația precedentă se poate transcrie sub forma $dz = f_1(u_1, \ldots, u_{n-1}, z)du_1 + \ldots + f_{n-1}(u_1, \ldots, u_{n-1}, z)du_{n-1}$, $f_i = \frac{X_i}{X_n}$, $i = 1, \ldots, n-1$. De aceea o ecuație Pfaff este echivalentă cu sistemul

$$\frac{\partial z}{\partial u_i} = f_i(u_1, \ldots, u_{n-1}, z), \quad i = 1, \ldots, n-1.$$

Dacă mulțimea $\mathbb{D}$ este deschisă, conexă și simplu conexă, atunci condițiile de complet integrabilitate ale sistemului sînt

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u_i \partial u_j} = \frac{\partial^2 z}{\partial u_j \partial u_i}$$

sau echivalent

$$\frac{\partial f_j}{\partial u_i} + \frac{\partial f_j}{\partial z} f_i = \frac{\partial f_i}{\partial u_j} + \frac{\partial f_i}{\partial z} f_j, \quad i, j = 1, \ldots, n-1.$$

Presupunem că există două cîmpuri scalare λ și f astfel încît $X = \lambda \operatorname{grad} f$. Dacă λ și f sînt funcțional independente, atunci cîmpul vectorial X se numește *biscalar*. Dacă λ și f sînt funcțional dependente, atunci se dovedește că X este un cîmp potențial. Discuția precedentă arată că X este un cîmp biscalar sau potențial dacă și numai dacă admite o familie cu un parametru de hipersuprafețe ortogonale liniilor de cîmp.

5.3. Teoremă. Fie $\mathbb{D}$ o mulțime deschisă, conexă și simplu conexă din $\mathbb{R}^3$ și $X = (X_1, X_2, X_3)$ un cîmp vectorial pe $\mathbb{D}$ de clasă C^1. O condiție necesară și suficientă ca X să fie biscalar, adică ecuația Pfaff $X_1(x, y, z)dx + X_2(x, y, z)dy + X_3(x, y, z)dz = 0$ să admită un factor integrant, este $(X, \operatorname{rot} X) = 0$.

Demonstrație. Fie $X = \lambda \operatorname{grad} f$. Rezultă $\operatorname{rot} X = \operatorname{grad} \lambda \times \operatorname{grad} f$ și deci $(X, \operatorname{rot} X) = 0$.

Presupunem $(X, \operatorname{rot} X) = 0$. Această relație arată că suprafețele ortogonale liniilor de cîmp ale lui X trebuie căutate printre suprafețele de cîmp ale lui $\operatorname{rot} X$ (suprafețe de vîrtej). Fie $\varphi_1(x, y, z) = c_1$, $\varphi_2(x, y, z) = c_2$ liniile de cîmp ale lui $\operatorname{rot} X$ (linii de vîrtej). Avem $(\operatorname{grad} \varphi_1, \operatorname{rot} X) = 0$, $(\operatorname{grad} \varphi_2, \operatorname{rot} X) = 0$, care împreună cu ipoteza implică „coplanaritatea" cîmpurilor vectoriale X, $\operatorname{grad} \varphi_1$, $\operatorname{grad} \varphi_2$, adică $X = \alpha \operatorname{grad} \varphi_1 + \beta \operatorname{grad} \varphi_2$, $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$. Aceasta permite transcrierea ecuației Pfaff sub forma $\alpha\, d\varphi_1 + \beta\, d\varphi_2 = 0$.

Să arătăm că $\frac{\alpha}{\beta}$, bineînțeles pentru $\beta \neq 0$, depinde numai de funcțiile φ_1 și φ_2. Într-adevăr, relațiile $X = \alpha \operatorname{grad} \varphi_1 + \beta \operatorname{grad} \varphi_2$, $(X, \operatorname{rot} X) = 0$ implică $\left(\operatorname{grad} \frac{\alpha}{\beta}, \operatorname{grad} \varphi_1 \times \operatorname{grad} \varphi_2\right) = 0$, iar acest produs mixt reprezintă Jacobianul funcțiilor $\frac{\alpha}{\beta}$, φ_1 și φ_2. Rezultă $\frac{\alpha}{\beta} = \mathrm{E}(\varphi_1, \varphi_2)$ și deci $\frac{\mathrm{d}\varphi_2}{\mathrm{d}\varphi_1} + \mathrm{E}(\varphi_1, \varphi_2) = 0$. Soluția generală a acestei ecuații, $\varnothing(\varphi_1, \varphi_2) = c$, reprezintă familia suprafețelor ortogonale liniilor de cîmp ale lui X. Cînd este cazul, din identitatea $X = \lambda \operatorname{grad} \varnothing$ se găsește λ.

Exemplu. $X(x, y, z) = (yz, x(z - x), -xy)$, $x > 0$, $y > 0$, este un cîmp biscalar. Într-adevăr

$$\operatorname{rot} X(x, y, z) = \left(\frac{\partial}{\partial y}(-xy) - \frac{\partial}{\partial z}(x(z - x)),\ \frac{\partial}{\partial z}(yz) - \frac{\partial}{\partial x}(-xy),\ \frac{\partial}{\partial x}(x(z - x)) - \right.$$

$$\left. - \frac{\partial}{\partial y}(yz)\right) = (-2x, 2y, -2x)$$

și deci $(X, \operatorname{rot} X) = 0$.

Familia liniilor de vîrtej ale lui X este soluția generală a sistemului

$$\frac{\mathrm{d}x}{-x} = \frac{\mathrm{d}y}{y} = \frac{\mathrm{d}z}{-x},$$

adică $xy = c_1$, $x - z = c_2$. Rezultă

$$X(x, y, z) = \alpha \operatorname{grad}(xy) + \beta \operatorname{grad}(x - z) = \alpha(y, x, 0) + \beta(1, 0, -1)$$

și prin identificare găsim $\alpha = z - x$, $\beta = xy$, adică $X(x, y, z) = (z - x) \operatorname{grad}(xy) + xy \operatorname{grad}(x - z)$.

Ecuația $yz\mathrm{d}x + x(z - x)\mathrm{d}y - xy\mathrm{d}z = 0$ se transcrie $(z - x)\,\mathrm{d}(xy) + xy\mathrm{d}(x - z) = 0$ și deci $xy = c(x - z)$ reprezintă familia suprafețelor ortogonale liniilor de cîmp ale lui X.

Din identitatea

$$X = \lambda \operatorname{grad} \frac{xy}{x - z}$$

rezultă $\lambda = -(x - z)^2$.

§6. Probleme

1. Să se cerceteze care dintre următoarele cîmpuri vectoriale sînt complete

1) $X(x_1, x_2) = (1, 0)$, $\qquad (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$

2) $X(x_1, x_2) = (1, 0)$, $\qquad (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$

3) $X(x_1, x_2) = (-x_2, x_1), \quad (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$

4) $X(x_1, x_2) = (1 + x_1^2, 0), \quad (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$.

2. Considerăm cîmpul vectorial definit pe $\mathbb{R}^2$ prin $X(x_1, x_2) = (1, 0)$. Pentru $t \in \mathbb{R}$ și $p \in \mathbb{R}^2$, notăm $\varphi_t(p) = \alpha_p(t)$, unde α_p este linia de cîmp maximală a lui X prin p.

1) Să se arate că $\varphi_t : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ este bijectivă. Ce semnificație geometrică are φ_t?

2) Să se verifice relațiile

$$\varphi_0 = \mathrm{id},$$

$$\varphi_{t+s} = \varphi_t \circ \varphi_s, \qquad \forall t, s \in \mathbb{R}$$

$$\varphi_{-t} = \varphi_t^{-1}, \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

(Rezultă că $t \to \varphi_t$ este un homomorfism de la grupul aditiv al numerelor reale în grupul bijecțiilor planului).

Aceeași problemă pentru $X(x_1, x_2) = (x_2, x_1)$, $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$.

3. Se dau cîmpurile vectoriale definite respectiv prin:

1) $\vec{V}(x, y, z) = xz\vec{i} + z(2x - y)\vec{j} - x^2\vec{k}, \ x \neq 0, \ z \neq 0$;

2) $\vec{V}(x, y, z) = x^2(y + z)\vec{i} - y^2(z + x)\vec{j} + z^2(y - x)\vec{k}, \ xyz \neq 0$;

3) $\vec{V}(x, y, z) = xz\vec{i} + yz\vec{j} - (x^2 + y^2)\vec{k}, \ x > 0, \ y > 0, \ z > 0$.

Să se determine familiile liniilor de cîmp.

4. Să se cerceteze stabilitatea pozițiilor de echilibru pentru

1) $x' = \sin(x + y), \ y' = e^x - 1$;

2) $x' = 1 - xy, \ y' = x - y^2$.

5. Fie V spațiul vectorial real al funcțiilor reale de clasă C^∞ pe $D \subset \mathbb{R}^3$ și fie $\mathcal{T} : V \to V$ funcția definită prin

$$\mathcal{T}(f) = \frac{\partial f}{\partial x} - (y + 2z)\frac{\partial f}{\partial y} + (3y + 4z)\frac{\partial f}{\partial z}.$$

1) Să se arate că $\mathcal{T}$ este o transformare liniară.

2) Să se determine $\operatorname{Ker} \mathcal{T}$.

3) Să se rezolve ecuația $\mathcal{T}(f) = f$.

6. Pentru fiecare dintre următoarele cîmpuri vectoriale să se determine suprafața de cîmp ce trece prin curba specificată.

1) $\vec{V}(x, y, z) = xy^2\vec{i} + x^2y\vec{j} + z(x^2 + y^2)\vec{k}, \ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 - \{(0, 0, 0)\}, \ C : x^2 + y^2 = 4, \ z = 1$.

2) $\vec{V}(x, y, z) = x(1 - 2y^2)\vec{i} + y(1 + 2x^2)\vec{j} + 2z(x^2 + y^2)\vec{k}, \ \dfrac{xy}{a} > 0, \ \dfrac{z}{b} > 0, \ C : xy = a$, $z = b$.

7. Să se determine soluțiile generale ale următoarelor ecuații:

$$xy^2\frac{\partial z}{\partial x} + x^2y\frac{\partial z}{\partial y} = z(x^2 + y^2), \ z \neq 0;$$

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + 3y\frac{\partial z}{\partial y} = 4\frac{y^2}{x^2}, \ x \neq 0.$$

8. Folosind metoda rețelei să se aproximeze soluțiile ecuațiilor:

1) $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y}$, $f(x, 0) = \sin \pi x$, $(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1]$, $h = k = 0{,}2$;

2) $2\frac{\partial f}{\partial x} - 3\frac{\partial f}{\partial y} = x + y$, $f(x, 0) = x(2 - x)$, $(x, y) \in [0, 2] \times [0, 2]$, $h = k = 0{,}1$;

3) $7\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} = y \sin x$, $f(x, 0) = \cos x$, $(x, y) \in [0, 1] \times [0, \pi/2]$, $h = 0{,}05$; $k = 0{,}1$.

9. Să se găsească soluțiile generale ale următoarelor ecuații Pfaff:

1) $x_1(x_1^2 + x_2^2 - a^2)dx_1 + x_2(x_1^2 + x_2^2 + a^2)dx_2 = 0$, $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$

2) $(e^{x_1x_2} + 1)dx_1 + \frac{x_1x_2 - 1}{x_2^2} e^{x_1x_2} dx_2 = 0$, $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 - 0x_2$

3) $\sum \left[\frac{\ln(x_1x_2x_3)}{x_1 + x_2 + x_3} + \frac{1}{x_1} \right] dx_1 = 0$, $x_1, x_2, x_3 > 0$.

10. Fie $\vec{V}(x, y, z) = 2z(x\vec{i} + y\vec{j}) - (x^2 + y^2)\vec{k}$.

1) Să se determine suprafețele ortogonale liniilor de cîmp și să se scrie $\vec{V}$ sub forma $\vec{V} = \lambda \operatorname{grad} f$.

2) Să se găsească funcțiile φ pentru care $\vec{X}(x, y, z) = 2z(x\vec{i} + y\vec{j}) + \varphi(x, y, z)\vec{k}$ admite suprafețe ortogonale liniilor de cîmp.

BIBLIOGRAFIE

1. J. Acher, J. Gardelle, *Algèbre linéaire et programmation linéaire*, Dunod, Paris, 1970.
2. T. M. Apostol, *Calculus*, vol. II, Blaisdell Publishing Company, 1969.
3. V. I. Arnold, *Ecuaţii diferenţiale ordinare*, Editura ştiinţifică şi enciclopedică, Bucureşti, 1978.
4. Gh. Atanasiu, *Geometrie diferenţială*, Litografia Univ. Braşov, 1979.
5. N. Bakhvalov, *Methodes numeriques*, Editions Mir Moscou, 1976.
6. V. Boju, *Geometrie pe varietăţi*, Editura Scrisul românesc, Craiova, 1978.
7. M. Berger, B. Gostiaux, *Géométrie différentielle*, Armand Colin, Paris, 1972.
8. R. M. Bowen, C. C. Wang, *Introduction to vectors and tensors*, vol. 1, 2, Plenus Press, New York, London, 1976.
9. M. Craiu, M. Roşculeţ, *Ecuaţii diferenţiale*, Editura didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1971.
10. I. Creangă şi colectiv, *Algebră liniară*, Editura didactică şi pedagogică, 1970.
11. V. Cruceanu, *Elemente de algebră liniară şi geometrie*, Editura didactică şi pedagogică, 1973.
12. Gh. Dodescu, M. Toma, *Metode de calcul numeric*, Editura didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1976.
13. P. Dragomir, A. Dragomir, *Structuri algebrice*, Editura Facla, 1975.
14. N. Efimov, *Formes quadratiques et matrices*, Editions Mir Moscou, 1976.
15. Gh. Galbură, F. Rado, *Geometrie*, Editura didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1979.
16. Noël Gastinel, *Linear numerical analysis*, Academic Press, 1970.
17. Gh. Gheorghiev, V. Oproiu, *Varietăţi diferenţiale finit şi infinit dimensionale*, Editura Academiei R.S.R., 1976.
18. Gh. Th. Gheorghiu, *Algebră liniară, geometrie analitică şi diferenţială şi programare*, Editura didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1977.
19. A. Halanay, *Ecuaţii diferenţiale*, Editura didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1972.
20. S. Ianuş, *Curs de geometrie diferenţială*, Litografia Univ. Bucureşti, 1981.
21. Ion D. Ion, R. Nicolae, *Algebră*, Editura didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1981.
22. N. Jacobson, *Lectures in abstract algebra*, II. Linear algebra, Springer-Verlag, 1975.
23. M. Jurchescu, *Introducere în analiza pe varietăţi*, Litografia Univ. Bucureşti, 1980.
24. N. V. Kopchenova, I. Maron, *Computational mathematics*, Editions Mir, Moscou, 1975.
25. J. F. Lelong, J. M. Arnaudiès, *Equations différentielles, intégrales multiples, fonctions holomorphes*, Dunod, Paris, 1974.
26. N. Mihăileanu, *Geometrie analitică, proiectivă şi diferenţială*, Editura didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1972.
27. C. Mihu, *Metode numerice în algebra liniară* Editura tehnică, Bucureşti, 1977.
28. R. Miron, *Introducere în geometria diferenţială*, Litografia Universităţii Iaşi, 1971; *Geometrie analitică*, Editura didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1976.

29. I. M o r r i s, W. H i r s c h, S. S m a l e, *Differential equations, dynamical systems and linear algebra*, Academic Press, 1974.
30. V. O b ă d e a n u, *El. de alg. liniară și geom. analitică*, Editura Facla, Timișoara, 1981.
31. V. O l a r i u, *Analiză matematică și matematici speciale*, Litografia I.P.B., 1979–1980; *Analiză matematică*, Editura didactică și pedagogică, București, 1981.
32. V. O p r o i u, *Geometrie*, Litografia Univ. Iași, 1980.
33. B. O' N e i l l, *Elementary differential geome ry*, Academic Press, 1970.
34. D. I. P a p u c, A. C. A l b u, *Elemente de geometrie diferențială globală*, Editura didactică și pedagogică, București, 1973.
35. L. S. P o n t r i a g h i n, *Obiknovenie diferențialnie urovnenie*, Nauka, 1974.
36. I. P. P o p e s c u, *Lecții de geometrie diferențială*, Litografia Univ. Timișoara, 1973, *Elemente de geometrie analitică*, Litografia Univ. Timișoara, I, 1978; II, 1979.
37. C. R a d u, *Algebră și geometrie*, Litografia I.P.B., 1976.
38. C. R a d u, E. C i o a r ă, *Programarea în FORTRAN, metode numerice de calcul*, Litografia IPB, 1979.
39. L. S m i t h, *Linear algebra*, Springer-Verlag, 1978.
40. N. T e o d o r e s c u, V. O l a r i u, *Ecuații diferențiale și cu derivate parțiale* I, II, III, Editura tehnică, București, 1972.
41. C. T e l e m a n, *Geometria diferențială și globală*, Editura Tehnică, 1974.
42. J. A. T h o r p e, *Elementary Topics in differential geometry*, Springer-Verlag, 1979.
43. C. U d r i ș t e, *Probleme de algebră liniară, geometrie analitică și diferențială*, Editura didactică și pedagogică, București, 1972.
44. C. U d r i ș t e, *Curbe și suprafețe*, Litografia I.P.B., 1975.
45. C. U d r i ș t e, *Analiză matematică*, Litografia I.P.B., 1978.
46. C. U d r i ș t e, C. B u c u r, *Probleme de matematici și observații metodologice*, Editura Facla, Timișoara, 1980.
47. C. U d r i ș t e, E. T ă n ă s e s c u, *Minime și maxime ale funcțiilor reale de variabile reale*, Editura tehnică, București, 1980.
48. C. U d r i ș t e, C. R a d u, C. D i c u, O. M ă l a n c i o i u, *Probleme de algebră, geometrie și ecuații diferențiale*, Editura didactică și pedagogică, București, 1981.
49. C. U d r i ș t e, V. T o m u l e a n u, *Geometrie analitică*, manual pentru clasa a XI-a, Editura didactică și pedagogică, București, 1981.
50. V. V o i e v o d i n e, *Algèbre linéaire*, Editions Mir, Moscou, 1976.
51. Gh. Gh. V r î n c e a n u, G. M ă r g u l e s c u, *Geometrie analitică*, Editura didactică și pedagogică, București, 1973.

Plan editură Nr. 9189
Coli de tipar: 21,75
Bun de tipar: 19.10.82

c. 625 – I. P. INFORMAȚIA
Str. Brezoianu Nr. 23–25
București