MARTIN GARDNER

ALTE AMUZAMENTE MATEMATICE

MARTIN GARDNER

Alte amuzamente matematice

EDITURA ŞTIINŢIFICĂ
Bucureşti, 1970

TRADUCEREA DE ALEX. BUTUCELEA
COPERTA DE VAL MUNTEANU

Evolv met
TO L. R. AHCROF,
emitero meno*

* Citiți în sens invers:
One more time, for Charlotte, my love
— Încă o dată, Charlottei, dragostea mea

„O glumă matematică bună — scria matematicianul englez John Edensor Littlewood în Introducerea la cartea sa Mathematician's Miscellany[1] *— valorează mai mult decît o duzină de lucrări mediocre și este totodată și matematica cea mai bună".*

Aceasta este o carte de glume matematice, dacă dăm cuvîntului „glumă" un sens mai larg, incluzînd în el orice problemă matematică în care intră un procent considerabil de amuzament. Sînt foarte mulți matematicieni care savurează o astfel de distracție, bineînțeles fără să depășească o limită rezonabilă. Există în recreațiile matematice un fel de fascinație, care, la unii, devine un fel de intoxicație. Eroul renumitului roman despre șah al lui Vladimir Nabokov, The Defense *(Apărarea), este un astfel de om. El a permis șahului (care este o formă de joc matematic) să-i domine atît de complet mintea, încît în cele din urmă a pierdut contactul cu lumea reală și și-a sfîrșit viața nenorocită prin ceea ce șahiștii înșiși numesc un automat — s-a aruncat pe fereastră. Nu lipsit de legătură cu lenta descompunere a eroului lui Nabokov este faptul că la școală acesta fusese chiar și la matematică un elev slab, dar în același timp „complet absorbit de culegerea de probleme* Matematica fericită, *de fantastica și ciudata comportare a numerelor și de zburdălnicia capricioasă a liniilor geometrice, de tot ceea ce lipsea din manual".*

---

[1] J. E. Littlewood, *Varietăți matematice*, Editura Enciclopedică Română, București, 1969. — *N.R.*

Morala: amuzați-vă cu jocuri matematice, dacă vă simțiți tentat de ele — dar nu le savurați prea intens; permiteți-le să vă procure doar vacanțe ocazionale. Folosiți-le pentru a vă stimula interesul pentru știința solidă și matematica serioasă. Dar țineți-le sub control sever.

Iar dacă nu le puteți ține sub control, amintiți-vă de nuvela lordului Dunsany[2]. Jucătorul de șah, afaceristul și altul. *Un om de afaceri își amintește de un prieten cu numele Smoggs, care fusese cîndva pe cale să devină un strălucit om de afaceri, pînă cînd s-a lăsat captivat de șah. „La început totul s-a petrecut treptat: pe vremea cînd lucrau amîndoi la aceeași firmă obișnuia să joace șah cu un prieten la ora prînzului. După un timp, a început să-și bată partenerul... Apoi a intrat într-un club de șah și părea cuprins de un fel de fascinație: ceva în felul beției, sau mai curînd ca poezia sau muzica... Ar fi putut fi om de afaceri! Se spune că asta nu e mai greu decît să joci bine șah, deși șahul nu duce la nimic. N-am văzut niciodată un creier irosit mai pe degeaba.*

— Mai sînt și oameni din ăștia. E păcat..., zise gardianul închisorii. După care zăvorî din nou ușa celulei omului de afaceri".

Mulțumesc încă o dată revistei „Scientific American" pentru permisiunea de a retipări cele 20 de articole cuprinse în carte. Ca și în precedentul volum, articolele au fost adăugite, erorile au fost corectate și a fost introdus destul de mult material nou, trimis de cititori. Sînt recunoscător, de asemenea, soției mele pentru ajutorul dat în revederea șpalturilor și editorului, Nina Bourne. Și mai presus de toate, echipei mereu în creștere de cititori, răspîndiți pe tot cuprinsul țării și al lumii, ale căror scrisori binevenite au îmbogățit atît de mult materialul retipărit aici.

MARTIN GARDNER

---

[2] Dramaturg, poet și eseist irlandez, 1878—1957. — *N.T.*

CAPITOLUL I

Sistemul binar

O hîrtiuţă roşie stătea prinsă între parbriz şi ştergătorul de parbriz; am rupt-o meticulos în două, patru, opt bucăţi.

Vladimir Nabokov, *Lolita*

Sistemul numeric folosit astăzi în lumea civilizată este un sistem zecimal, bazat pe puterile succesive ale lui 10. Cifra din extrema dreaptă a oricărui număr reprezintă un multiplu al lui 10^0, adică al lui 1. A doua cifră din dreapta indică multiplii lui 10^1; a treia — un multiplu al lui 10^2 şi aşa mai departe. Prin urmare, numărul 777 exprimă de fapt suma $(7 \times 10^0) + (7 \times 10^1) + (7 \times 10^2)$. Răspîndirea largă a numărului 10 ca bază a sistemului de numărare se datorează fără doar şi poate faptului că avem 10 degete la mîini; chiar şi denumirea cifrei în limba engleză, şi anume *digit*, reflectă această origine. Iar dacă pe Marte trăiesc fiinţe inteligente cu cîte 12 degete, am putea paria cu multe şanse de succes că aritmetica marţiană foloseşte o notaţie bazată pe puterile lui 12.

Cel mai simplu dintre toate sistemele numerice care folosesc poziţia cifrelor este sistemul binar, bazat pe puterile lui 2. Există unele triburi primitive care socotesc după sistemul binar, iar vechii matematicieni chinezi ştiau şi ei multe lucruri despre acest sistem; se pare că marele matematician german Gottfried Wilhelm von Leibniz este cel care a dezvoltat mai detaliat sistemul. Pentru el, sistemul reprezenta un adevăr metafizic profund: Leibniz considera cifra 0 ca pe un simbol al non-existenţei, al nefiinţei, iar pe 1 ca pe un simbol al existenţei, ambele necesare Creatorului, fiindcă un Cosmos care ar conţine numai substanţă pură n-ar putea fi deosebit de unul absolut gol, lipsit complet de „zgomot şi furie"[1], şi simbolizat de cifra 0. Leibniz socotea că aşa cum în sistemul binar orice întreg poate fi exprimat printr-o înşiruire adecvată de cifre 0 şi 1, tot aşa şi structura matematică a întregii lumi create devine posibilă ca o consecinţă a împărţirii binare primordiale între existenţă şi non-existenţă.

Începînd de la Leibniz şi pînă aproape de zilele noastre, sistemul binar nu a reprezentat altceva decît o curiozitate, fără valoare practică. Dar iată că şi-au făcut apariţia calculatoarele electronice! Conductorii electrici conduc sau nu conduc curentul electric, un întrerupător este în poziţia „închisă" sau „deschisă", un magnet poate fi orientat nord-sud sau sud-nord, iar un circuit *flip-flop*[2] de memorizare nu poate avea decît două stări alternative. Pentru aceste motive, construind calculatoare care prelucrează date codificate sub formă binară, se obţin viteze de calcul enorme şi precizii uluitoare. „Vai! — exclama Tobias Dantzig în cartea sa *Numărul — limbajul ştiinţei* — ceea ce altă dată reprezenta un monument înălţat monoteismului s-a transformat astăzi în măruntaiele unui robot".

Multe amuzamente matematice se bazează pe sistemul binar: jocul Nim, unele jocuri mecanice, ca Turnul din Hanoi sau Inelele lui Cardan, precum şi nenumărate trucuri cu cărţi sau enigme distractive. Ne vom mărgini atenţia aici la o serie familiară de trucuri de „ghicire" a cărţilor, precum şi la un joc înrudit, cu cartele perforate, cu care se pot realiza cîteva performanţe binare remarcabile.

Confecţionarea cartelelor „de ghicit numere" este clară din fig. 1. În partea stîngă se înscriu în sistemul binar toate numerele de la 0 la 31. Fiecare cifră dintr-un număr binar reprezintă o putere a lui 2, începînd cu 2^0 (adică 1) la extremitatea din dreapta, şi continuînd apoi spre stînga cu 2^1 (adică 2), 2^2, 2^3 etc. Puterile lui 2 sînt indicate la capătul de sus al fiecărei coloane. Pentru a transforma un număr binar în echivalentul său zecimal, se însumează pur şi simplu puterile lui 2 care sînt indicate de poziţia cifrei 1. Astfel, 10101 reprezintă $16 + 4 + 1$, adică 21. Pentru a-l scrie din nou pe 21 sub formă binară, se foloseşte procedeul invers. Se împarte 21 la 2; rezultatul este 10, iar restul 1; acest rest este prima cifră de la dreapta numărului binar; se împarte apoi 10 cu 2; în acest caz nu rămîne nici un rest — aşa că următoarea cifră binară este 0; după aceasta se împarte 5 prin 2 şi aşa mai departe pînă ce se scrie întreg numărul binar 10101. În ultimul pas, 2 se cuprinde în 1 de zero ori, cu restul 1.

[1] Aluzie la romanul *The Sound and the Fury* al scriitorului american William Faulkner (1929). — *N.T.*

[2] Circuit *flip-flop* — un circuit electronic care are două condiţii stabile, fiecare corespunzînd unuia din cele două semnale de intrare alternative. — *N.T.*

Tabelul numerelor binare este transformat într-un set de cărți „de ghicit numere”, înlocuind pur și simplu fiecare cifră 1 cu numărul zecimal care corespunde numărului binar în care apare acest 1. Rezultatul este trecut în partea dreaptă a figurii. Fiecare coloană de numere este copiată pe o carte separată. Înmînați cuiva cele cinci cărți, cerîndu-i să se gîndească la oricare număr cuprins între 0 și 31 și apoi să vă dea înapoi toate cărțile în care apare acest număr. Veți putea găsi numărul fără a sta prea mult pe gînduri: pentru a-l afla, nu aveți decît să adunați numerele din partea de sus a cărților pe care vi le-a dat înapoi.

Care este esența acestui „truc”? Fiecare număr apare pe singura combinație de cărți, iar această combinație este echivalentă cu notația binară a numărului. Atunci cînd adunați numerele din partea de sus a cărților, adunați de fapt puterile lui 2 care sînt indicate de cifrele 1 din varianta binară a numărului ales. Mecanismul jocului poate fi ascuns și mai bine folosind cărți de cinci culori diferite. În acest caz, ați putea sta de partea cealaltă a camerei, rugînd pe partener să introducă toate cărțile pe care se află numărul ales într-unul din bu-

NUMERE BINARE

	16	8	4	2	1
0					0
1					1
2				1	0
3				1	1
4			1	0	0
5			1	0	1
6			1	1	0
7			1	1	1
8		1	0	0	0
9		1	0	0	1
10		1	0	1	0
11		1	0	1	1
12		1	1	0	0
13		1	1	0	1
14		1	1	1	0
15		1	1	1	1
16	1	0	0	0	0
17	1	0	0	0	1
18	1	0	0	1	0
19	1	0	0	1	0
20	1	0	1	0	0
21	1	0	1	0	1
22	1	0	1	1	0
23	1	0	1	1	1
24	1	1	0	0	0
25	1	1	0	0	1
26	1	1	0	1	0
27	1	1	0	1	1
28	1	1	1	0	0
29	1	1	1	0	1
30	1	1	1	1	0
31	1	1	1	1	1

CARȚILE DE «GHICIT»

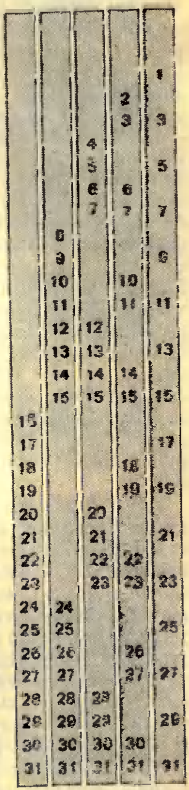


Fig. 1 Numerele înscrise pe un set de cartele, „de ghicit numere” (dreapta) se bazează pe sistemul binar (stînga).

zunare, iar pe toate celelalte în alt buzunar. Fără îndoială, va trebui să vă amintiți cu care culoare a fost asociată fiecare putere a lui 2. O altă variantă ar fi să aranjați cele cinci cărți (de aceeași culoare, de data aceasta) într-un singur rînd pe masă. Treceți în partea cealaltă a camerei și cereți partenerului să întoarcă cu fața în jos acele cărți pe care se află înscris numărul ales. Deoarece ați avut grijă să aranjați cărțile într-o anumită ordine a numerelor lor din partea superioară, pentru a „ghici" numărul ales nu aveți decît să observați care dintre cărți au fost întoarse.

Fundamentul binar al sistemului de sortare pentru cartele perforate este ilustrat în mod amuzant în fig. 2. Cele 32 de cartele pot fi confecționate ușor din fișe de bibliotecă. Găurile trebuie să fie ceva mai mari decît diametrul unui creion. Este recomandabil ca după ce au fost practicate cinci găuri în una din fișe, aceasta să fie folosită ca un șablon pentru fixarea poziției găurilor la toate celelalte fișe. Dacă nu aveți la îndemînă o mașină de găurit de birou, puteți folosi un foarfece, tăind dintr-o dată cîte trei fișe. Colțul tăiat ajută la păstrarea cartelelor cu o orientare dată. După ce în fiecare cartelă au fost practicate cele cinci găuri, marginea acestora din urmă este tăiată în anumite poziții, ca în figură. Aceste găuri deschise vor reprezenta cifra 1, pe cînd cele închise, cifra 0. În felul acesta, fiecare cartelă este purtătoarea echivalentului unui număr binar. Numerele sînt de la 0 la 31, însă pe figură cartelele sînt distribuite la întîmplare. Cu acest arsenal se pot executa trei „scamatorii" ; chiar dacă par oarecum greu de făcut, ele nu vor amuza mai puțin pe fiecare membru al familiei.

Prima dintre scamatorii constă în a sorta rapid cartelele, în așa fel încît numerele să apară într-o ordine serială. Amestecați cartelele în orice mod preferați, apoi adunați-le pachet ; introduceți un creion prin gaura E și ridicați-l cu cîțiva centimetri. Jumătate dintre cărți se vor ridica o dată cu creionul, iar cealaltă jumătate vor rămîne pe masă ; scuturați creionul de cîteva ori ca să fiți siguri că toate cartelele pe care se contează să cadă au căzut, apoi ridicați mai departe creionul pînă cînd cartelele se separă în două jumătăți. Scoateți cartelele de pe creion și așezați pachetul astfel format *deasupra* celuilalt pachet. Repetați operația cu fiecare dintre găuri, de la dreapta la stînga. După cea de a cincea operație de sortare, s-ar putea să vă surprindă chiar și pe dumneavoastră găsind că numerele binare se află acum în ordine serială, începînd cu 0 pe cartela din față. Nu vă mai rămîne decît să răsfoiți acum cartelele una cîte una și să citiți un anumit mesaj dinainte scris acolo !

Cea de-a doua scamatorie folosește cartelele în același fel ca un calculator programat să selecteze un anumit număr dintr-un set

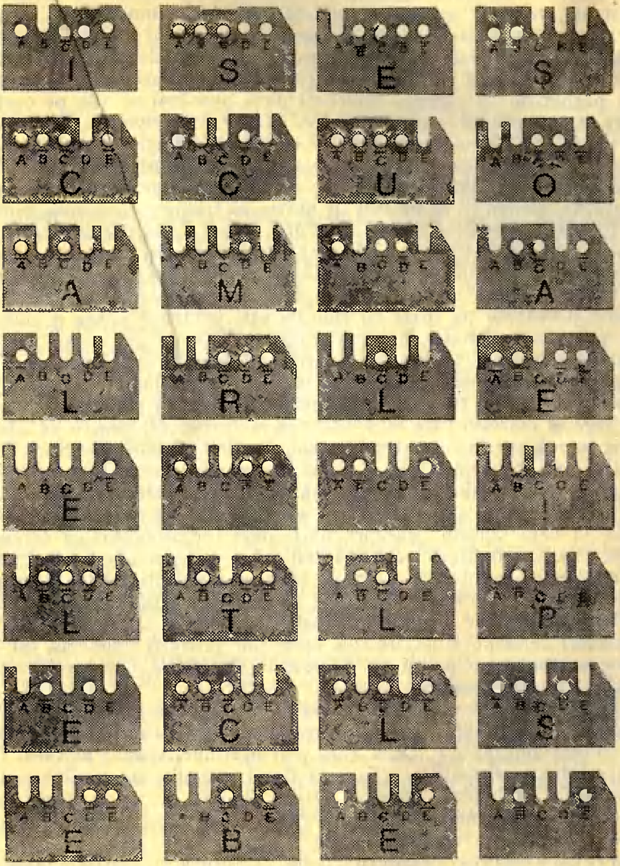


Fig. 2 Un set de cartele perforate, care pot ajuta la descifrarea unui mesaj, la ghicitul unui număr sau la rezolvarea unor probleme de logică.

de cartele „de ghicit numere". Începeți cu amestecarea cartelelor. Inserati creionul în gaura E și întrebați dacă numărul ales se află sau nu pe cartela care are în partea de sus numărul 1. Dacă răspunsul este Da, ridicați creionul și înlăturați toate cartelele care sînt ridicate o dată cu el. Dacă Nu, înlăturați toate cartelele care cad. Aveți acum un pachet de 16 cartele. Intrebați dacă numărul se află pe cartela care are numărul 2 în partea de sus, apoi repetați operația cu creionul în gaura D. Continuați în acest fel cu cartelele și găurile rămase. Veți sfîrși cu o singură cartelă perforată — iar numărul ei binar este tocmai numărul ales. Dacă doriți, însemnați numere zecimale pe toate cartelele, pentru ca să nu mai fie nevoie să traduceți numerele binare.

În sfîrșit, cea de-a treia scamatorie, dacă o mai putem numi așa, folosește cartelele în același fel ca un calculator logic, după un procedeu descris pentru prima oară de William Stanley Jevons, un economist și logician englez. „Abaca logică" a lui Jevons folosea piese plate de lemn, prevăzute pe spate cu cuie de oțel pentru a putea fi ridicate de pe masă; cartelele perforate operează exact în același fel, dar sînt cu mult mai simplu de construit. Jevons a mai inventat și un instrument mecanic complex, numit de el „pianul logic", care funcționează pe aceleași principii, dar tot ce știe să facă pianul lui, reușesc să facă și cartelele; de fapt, chiar ceva mai mult, pentru că pianul ține seama numai de patru termeni, pe cînd cartelele de cinci.

Cei cinci termeni A, B, C, D și E sînt reprezentați de cele cinci găuri care, la rîndul lor, reprezintă cifre binare. Fiecare 1 (sau gaură deschisă) corespunde unui termen adevărat, iar fiecare 0, unui termen fals. O bară trasată deasupra unei litere indică faptul că termenul este fals, iar o literă nebarată indică un termen adevărat. Fiecare cartelă este o combinație unică de termeni adevărați și falși, și întrucît cele 32 de cartele epuizează toate combinațiile posibile, ele sînt echivalentul a ceea ce a căpătat numele de „tabel al adevărului" pentru cei cinci termeni. Funcționarea cartelelor poate fi explicată cel mai bine arătînd cum pot fi ele folosite la rezolvarea unei probleme de logică cu două valori.

Într-o cărticică publicată recent de firma „Litton Industries" din Beverly Hills (California), *Alte recreații ambigue*, a apărut următoarea problemă amuzantă: „Dacă Sara n-ar fi, atunci Wanda ar vrea. Este imposibil ca afirmațiile: «Sara ar fi» și «Camille n-ar putea» să fie adevărate amîndouă simultan. Dacă Wanda ar vrea, atunci Sara ar fi și Camille ar putea. Prin urmare Camille ar putea. Este oare această concluzie valabilă?"

Pentru a rezolva această problemă, să pornim cu cartelele perforate aranjate într-o ordine oarecare. Întrucît sînt implicați numai trei termeni, ne vom preocupa numai de găurile A, B și C.

A = Sara ar fi
$\bar{A}$ = Sara n-ar fi
B = Wanda ar vrea
$\bar{B}$ = Wanda n-ar vrea
C = Camille ar putea
$\bar{C}$ = Camille n-ar putea

Problema are trei premise. Prima — „Dacă Sara n-ar fi, atunci Wanda ar vrea" — ne spune că combinația $\bar{A}$ împreună cu $\bar{B}$ nu este admisă, așa că va trebui să eliminăm toate cartelele care poartă această combinație. Aceasta se face în felul următor. Inserați creionul în A și ridicați-l. Toate cartelele care rămîn pe creion poartă $\bar{A}$; păstrați-le ca un grup separat, scoateți creionul, inserați-l în B și ridicați-l. El va ridica toate cartelele purtînd atît $\bar{A}$ cît și $\bar{B}$, combinație neadmisă, așa că aceste cartele trebuie înlăturate. Toate cartelele care rămîn sînt adunate din nou pachet (ordinea nu contează nici de data asta) și sînteți acum gata pentru cea de-a doua premisă.

Aceasta spune că afirmațiile „Sara ar fi" și „Camille n-ar putea" nu pot fi amîndouă adevărate simultan. Cu alte cuvinte, nu putem admite combinația $A\bar{C}$. Inserați creionul în A și ridicați cartelele purtînd $\bar{A}$. Acestea *nu* sînt cartelele pe care le dorim, așa că le punem pentru moment deoparte și continuăm cu grupul A care rămîne. Introduceți creionul în C și ridicați cartelele $\bar{C}$. Acestea poartă combinația nevalabilă $A\bar{C}$, așa că le puteți îndepărta de-a binelea. Adunați din nou cartelele rămase.

Ultima premisă ne spune că dacă Wanda ar vrea, atunci Sara ar fi și Camille ar putea. Un strop de gîndire vă va arăta că această afirmație elimină două combinații: $\bar{A}B$ și $B\bar{C}$. Inserați creionul în A, ridicați și continuați operațiile cu cărțile ridicate. Inserați creionul în B și ridicați. Nici o cartelă nu va fi ridicată. Aceasta înseamnă că cele două premise dinainte au eliminat deja combinația $\bar{A}\bar{B}$. Întrucît toate cartelele poartă combinația nevalabilă $\bar{A}B$, întregul pachet este înlăturat definitiv. Ultima operație care mai rămîne este de a elimina $B\bar{C}$ dintre cartelele rămase. Creionul introdus în B va ridica cartelele $\bar{B}$, care se pun deocamdată la o parte. Introducînd creionul în gaura C a cartelelor care rămîn, veți constata că nici o cartelă nu se ridică, ceea ce înseamnă că $B\bar{C}$, o combinație nevalabilă, a fost eliminată încă din etapele anterioare.

Ne rămîn așadar opt cartele, purtînd fiecare cîte o combinație de valori adevărate pentru A, B și C, care este compatibilă cu toate cele trei premise. Aceste combinaţii constituie rîndurile valabile ale unui tabel al adevărului pentru toate premisele combinate. Examinarea carteleior arată că C este adevărată pe toate opt — aşa că este pe deplin justificat să conchidem: *Camille ar putea.* Am mai putea trage şi alte concluzii pe baza premiselor enunţate. Putem afirma, de pildă, că Sara ar fi. Dar deosebit de interesantele probleme: Ar vrea Wanda, sau nu? Sau: Ce anume ar vrea? rămîn, cel puţin în limitele informaţiei de care dispunem, un mister binar de nepătruns.

Pentru cei care doresc să folosească cartelele pentru rezolvarea altor probleme, dăm aici una foarte simplă.

Dl. Abner, soţia sa Beryl şi cei trei copii, Cleo, Dale şi Ellsworth stau împreună într-o seară de iarnă.

1. Dacă dl. Abner priveşte la televizor, la fel face şi soţia sa;
2. Fie Dale, fie Ellsworth, fie amîndoi, privesc la televizor;
3. Fie Beryl, fie Cleo, dar nu amîndoi, privesc la televizor;
4. Dale şi Cleo, fie că privesc, fie că nu privesc — dar asta numai împreună.
5. Dacă Ellsworth priveşte la televizor, atunci dl. Abner şi Dale privesc şi ei.

Cine priveşte la televizor, şi cine nu?

ADAOS

E. B. Grossman, din New York, mi-a scris pentru a-mi comunica că pe piaţă au apărut între timp o mare varietate de cartele comerciale pentru îndosarierea şi sortarea binară. Găurile sînt gata perforate, dar sînt prea mici pentru un creion; se pot totuşi folosi andrele, cuie, sîrme sau vergele special făcute, care pot fi şi ele cumpărate.

Giuseppe Aprile, profesor la Universitatea din Palermo (Italia), mi-a trimis cele două fotografii din fig. 3. O separare rapidă şi lipsită de erori a cartelelor se poate face prevăzînd un al doilea rînd, complementar, de găuri şi de găuri tăiate la partea inferioară a acestora. Ancorînd găurile complementare de la partea de jos, putem uşura sortarea atunci cînd tragem cartelele cu ajutorul găurilor de sus.

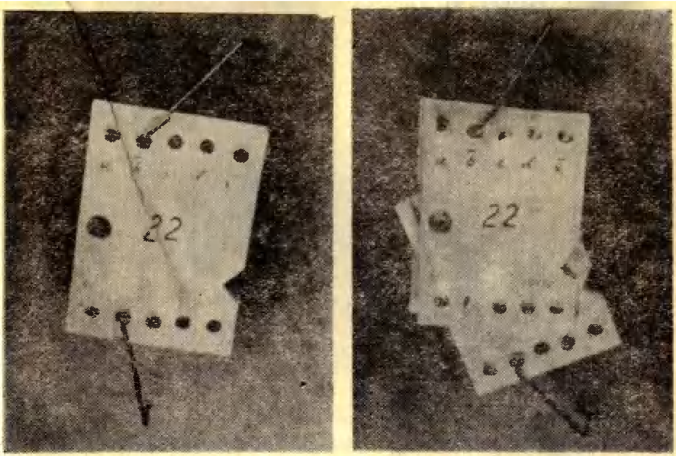


Fig. 3 Un rînd suplimentar de găuri în partea inferioară a cartelelor permite sortarea fără greşeli.

RĂSPUNSURI

Problema logică poate fi rezolvată cu ajutorul cartelelor perforate după cum urmează : Să presupunem că literele A, B, C, D şi E reprezintă, respectiv pe dl. Abner, Beryl, Cleo, Dale şi Ellsworth. Un termen este considerat adevărat atunci cînd persoana respectivă priveşte la televizor şi fals în caz contrar. Premisa 1 elimină toate cartelele care poartă $A\bar{B}$; premisa 2 elimină $\bar{D}\bar{E}$; premisa 3 elimină BC şi $\bar{B}\bar{C}$; premisa 4 elimină $\bar{C}D$ şi $C\bar{D}$; iar premisa 5 elimină $\bar{A}E$ şi $\bar{D}E$. Rămîne o singură cartelă — aceea care poartă combinaţia $\bar{A}\bar{B}CD\bar{E}$. Conchidem deci că Cleo şi Dale privesc la televizor, pe cînd ceilalţi îşi văd de treburi.

Teoria grupurilor şi împletiturile

Noţiunea de „grup" — una dintre marile idei unificatoare ale algebrei moderne şi o unealtă indispensabilă în fizică — a fost asemuită de James R. Newman cu surîsul pisicii din Cheshire[1]. Corpul pisicii (adică algebra în forma în care este învăţată de obicei) dispare, lăsînd în urmă doar un surîs abstract. Dar, un surîs implică ceva amuzant. De aceea, poate că dacă n-o vom lua prea în serios vom reuşi să facem teoria grupurilor ceva mai puţin misterioasă.

Trei programatori de la un calculator electronic, Ames, Baker şi Coombs, doresc să hotărască cine va plăti berea pe care o vor bea la terminarea lucrului. Desigur, ar putea arunca cu banul, însă ei preferă o decizie mai complicată, bazată pe următorul principiu. Pe o foaie de hîrtie se trag trei linii verticale. Unul dintre programatori, ţinînd hîrtia astfel încît colegii săi să nu vadă ce face, etichetează la întîmplare cele trei linii cu A, B şi C (vezi fig. 4, stînga). Apoi îndoaie partea de sus a foii în aşa fel, încît să ascundă aceste litere. Al doilea programator desenează o serie de linii orizontale întîmplătoare — să le numim traverse — care leagă liniile verticale două cîte două (vezi cel de-al doilea desen al figurii). În sfîrşit, cel de-al treilea programator mai adaugă şi el cîteva traverse, apoi marchează cu un X capătul de jos al uneia din liniile verticale (al treilea desen).

---

[1] „A zîmbi ca o pisică din Cheshire" — a zîmbi enigmatic. Expresia, foarte răspîndită, îşi trage originea de la pisica veşnic zîmbitoare din cartea lui Lewis Carroll, *Alice în ţara minunilor*. — *N.T.*

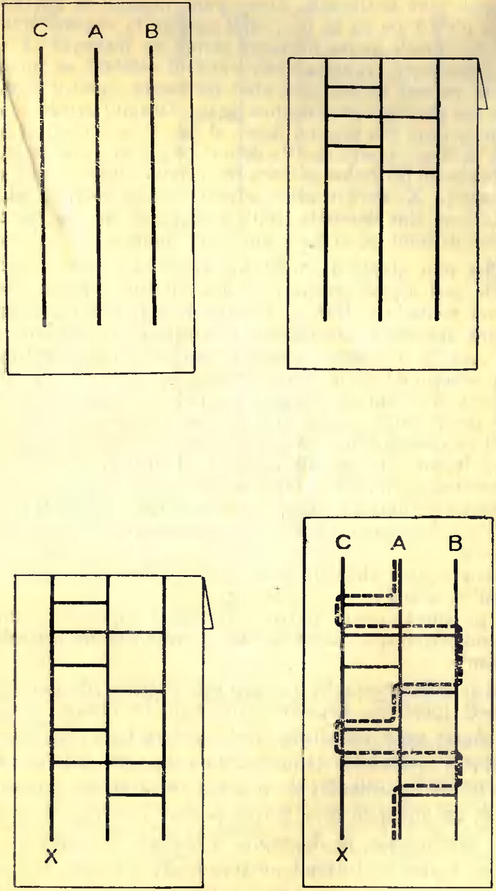


Fig. 4 Un joc cu linii.

Foaia este apoi desfăcută. Ames pune degetul la partea de sus a liniei A și pleacă pe ea în jos; cînd ajunge la capătul unei traverse (ignorînd traversele peste mijlocul cărora se întîmplă să treacă), se întoarce, urmărește traversa către capătul celălalt, se întoarce iarăși și continuă mersul în jos pînă cînd întîlnește capătul altei traverse. O tot ține așa pînă atinge marginea de jos. Drumul urmat de el (ilustrat de linia întreruptă din ultimul desen al fig. 4) nu se termină la semnul X — așa că Ames poate răsufla ușurat că nu va avea de plătit berea. Acum este rîndul lui Baker și Coombs. Primul dintre ei este ghinionist, căzînd exact pe X. Pentru orice număr de linii verticale și indiferent de felul în care sînt desenate liniile orizontale, fiecare dintre jucători va termina drumul pe o linie verticală diferită.

O privire mai atentă la acest joc arată că el este bazat pe unul dintre cele mai simple grupuri — așa-numitul grup al permutărilor pentru trei simboluri. Dar ce înseamnă, mai exact, un grup? Este o structură abstractă, cuprinzînd o mulțime de elemente nedefinite (a, b, c, ...) și o singură operație binară nedefinită (reprezentată aici prin semnul $\natural$), care împerechează un element oarecare cu un altul pentru a da un al treilea. O astfel de structură nu constituie un grup decît dacă posedă următoarele patru proprietăți:

1. Cînd se combină două elemente ale mulțimii prin operația grupului, rezultatul este un alt element al aceleiași mulțimi. Această proprietate este denumită „închidere".
2. Operația actuală de „legea asociativității" : $(a \natural b) \natural c = a \natural (b \natural c)$.
3. Există un element e (denumit „identitate"), astfel încît $a \natural e = e \natural a = a$.
4. Pentru fiecare element a există un element „invers" a', astfel încît $a \natural a' = a' \natural a = e$.

Dacă, pe lîngă aceste patru proprietăți, operația ascultă și de „legea comutativității" ($a \natural b = b \natural a$), grupul se numește comutativ, sau abelian[2].

Cel mai familiar exemplu de grup este furnizat de mulțimea numerelor întregi (pozitive, negative sau zero), în raport cu operația de adunare. Acest grup este închis (orice întreg plus orice întreg dă tot un întreg); este asociativ (adunînd 2 cu 3 și apoi adunînd 4 obținem același rezultat ca adunînd 2 cu suma lui 3 cu 4); identitatea este numărul 0, iar inversul unui întreg pozitiv este negativul numărului respectiv; grupul este, pe deasupra, și abelian, deoarece 2 plus 3 este tot una cu 3 plus 2. Întregii nu formează însă grup în raport și cu

[2] Niels Henrik Abel, matematician norvegian (1802—1829). — N.T.

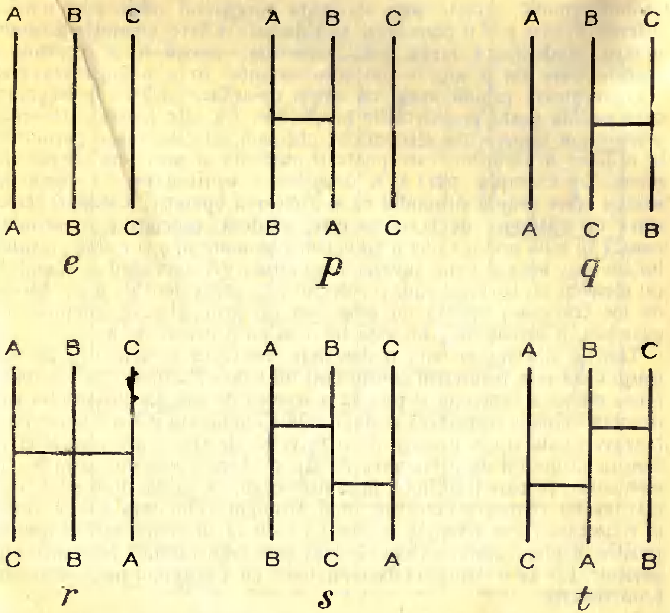


Fig. 5 Cele şase elemente ale grupului jocului cu linii.

împărţirea: 5 împărţit prin 2 este 2 $^1/_2$, care nu mai este un element al mulţimii întregilor.

Să vedem acum în ce fel jocul cu liniile de mai înainte are o structură de grup. Fig. 5 ilustrează cele şase „transformări" fundamentale care sînt tocmai elementele grupului nostru finit. Transformarea p schimbă între ele drumurile A şi B, astfel încît cele trei drumuri se succed în ordinea BAC. Transformarea e nu este de fapt o schimbare, dar matematicienii se încăpăţînează totuşi să o numească „transformare", tot aşa cum şi o clasă nulă sau vidă este numită tot clasă. Această transformare constă pur şi simplu în a nu desena nici o traversă, ea fiind astfel transformarea „identică" — care de fapt nu schimbă nimic. Aceste șase elemente corespund celor șase moduri diferite în care pot fi permutate trei simboluri date. Operația grupului nostru, simbolizată iarăși prin semnul $\natural$, constă în a continua o transformare cu o alta — cu alte cuvinte, în a adăuga traverse.

O verificare rapidă arată că avem de-a face aici cu o structură care posedă toate proprietățile grupurilor. Ea este închisă, deoarece, oricum am împerechea elementele, obținem întotdeauna o permutare în ordinea drumurilor, care poate fi obținută și printr-un singur element. De exemplu, $p \natural t = r$, deoarece p continuat cu t are exact același efect asupra drumului ca și aplicarea operației r singure. Operația de adăugare de traverse este, evident, asociativă. Identitatea constă în a nu adăuga nici o traversă. Elemente p, q și r sînt propriile lor inverse, iar s și t sînt inverse unul altuia. (Atunci cînd se combină, un element cu inversul său, rezultatul este echivalent cu a nu desena de loc traverse.) Acesta nu este însă un grup abelian, întrucît, de exemplu, p urmat de q nu este tot una cu q urmat de p.

Tabelul din fig. 6 redă o descriere completă a structurii acestui grup. Care este rezultatul continuării lui r cu s? Căutăm pe r la marginea stîngă a tabelului și pe s la marginea de sus. La intersecția rîndului cu coloana respectivă găsim o celulă etichetată p. Cu alte cuvinte, o traversă de tip r, urmată de o traversă de tip s, are același efect asupra drumului ca o traversă de tip p. Acesta este un grup foarte elementar, pe care îl întîlnim în multe ocazii. De pildă, dacă etichetăm într-un fel oarecare colțurile unui triunghi echilateral, apoi rotim și reflectăm acest triunghi în așa fel încît el să ocupe mereu aceeași poziție în plan, găsim că există doar șase transformări fundamentale posibile. Ele au o structură asemănătoare cu a grupului pe care tocmai l-am descris.

Nu este nevoie să intrăm în prea multe detalii ale teoriei grupurilor pentru a vedea că jocul cu linii nu permite niciodată ca doi jucători să-și sfîrșească drumurile pe aceeași linie verticală. Pur și simplu, imaginați-vă că aceste trei linii sînt trei șnururi. O traversă are exact același efect asupra ordinii drumurilor ca o încrucișare a două șnururi, ca formarea unei împletituri. Evident, indiferent de felul în care se face împletitura, sau de cît de lungă este aceasta, vor exista întotdeauna trei capete inferioare distincte.

Să ne imaginăm că împletim trei șuvițe din părul unei fete. Putem înregistra permutările succesive ale șuvițelor cu ajutorul diagramelor cu linii, dar această diagramă nu ne va arăta felul în care șuvițele trec unele peste sau pe sub altele. Dacă ținem seama de acest factor topologic care complică lucrurile, mai este oare posibil să facem apel la teoria grupurilor pentru a descrie operația pe care o facem? Răs-

	e	*p*	*q*	*r*	*s*	*t*
e	*e*	*p*	*q*	*r*	*s*	*t*
p	*p*	*e*	*s*	*t*	*q*	*r*
q	*q*	*t*	*e*	*s*	*r*	*p*
r	*r*	*s*	*t*	*e*	*p*	*q*
s	*s*	*r*	*p*	*q*	*t*	*e*
t	*t*	*q*	*r*	*p*	*e*	*s*

Fig. 6 Rezultatul cuplării elementelor din grupul jocului cu linii

punsul este Da, iar cel care a demonstrat pentru prima dată aceasta a fost Emil Artin, un distins matematician german, care a murit în 1962. În eleganta sa teorie a împletiturilor, elementele grupului sînt denumite „forme de țesături" (infinite ca număr), iar operația constă, ca și la jocul cu linii, în a continua o formă cu alta. Ca și înainte, elementul identitate este o formă care constă din șuvițe drepte — rezultatul operației comode de a nu face nimic. Inversa unei forme de țesătură este imaginea ei într-o oglindă. Fig. 7 reprezintă un exemplu de formă urmată de inversa ei. Teoria grupurilor ne spune că atunci cînd unui element i se adaugă inversul său rezultatul este identitatea. În mod vizibil, cele două forme de țesături combinate se dovedesc a fi, din punct de vedere topologic, echivalente cu identitatea. Este suficient să tragem puțin de capetele împletiturii din ilustrație și toate șuvițele se separă. (Multe dintre trucurile cu coarde sînt bazate pe această interesantă proprietate a grupurilor. Pentru un exemplu foarte bun, vezi capitolul 7 din cartea *Amuzamente matematice* a lui M. Gardner[3].) Teoria împletiturilor a lui Artin nu numai că a furnizat pentru prima oară un sistem care clasifică toate tipurile de împletituri, ea a oferit totodată și o metodă prin care se poate determina dacă două forme de țesături, indiferent cît de complicate ar fi ele, sînt sau nu topologic echivalente.

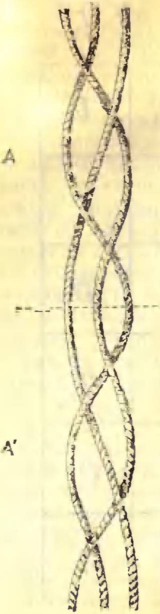


Fig. 7 Împletitura A este imaginea în oglindă a împletiturii A'.

Teoria împletiturilor este implicată într-un joc neobișnuit, imaginat de poetul, scriitorul și matematicianul danez Piet Hein. Tăiați dintr-un carton gros o bucată de forma unui ecuson, așa cum se arată în fig. 8, pe care o vom denumi pe scurt placă. Cele două fețe ale sale trebuie să fie ușor de deosebit, așa că este bine să colorați sau să însemnați cu un X una dintre ele. Faceți trei găuri în marginea de sus. De fiecare gaură legați cîte o bucată de sfoară grea, dar flexibilă, cam de jumătate de metru. Celelalte capete ale sforilor se leagă de un obiect fix, cum ar fi spătarul unui scaun.

Veți descoperi imediat că placa poate fi rotită complet în șase moduri diferite, pentru a forma șase împletituri diferite. Astfel, ea poate fi rotită lateral, spre dreapta sau spre stînga; poate fi rotită înainte și înapoi printre sforile A și B; poate fi rotită înainte și înapoi printre sforile B și C. Cel de-al doilea desen al fig. 8 arată împletitura obținută printr-o rotație înainte printre B și C. Se pune următoarea problemă: este oare posibil să deznodăm această împletitură prin simpla „țesere" a plăcii printre sfori, adică ținînd placa întotdeauna orizontal, cu partea marcată cu X în sus și cu partea ascuțită îndreptată mereu spre noi? Răspunsul este Nu. Dar dacă dați plăcii o a doua rotație, în unul oarecare dintre cele șase moduri, rezultatul este o împletitură care *poate* fi desfăcută prin țeserea plăcii printre fire, fără rotirea ei.

---

[3] M. Gardner, *Amuzamente matematice*, Editura Științifică, București, 1968, p. 224. — *N.R.*

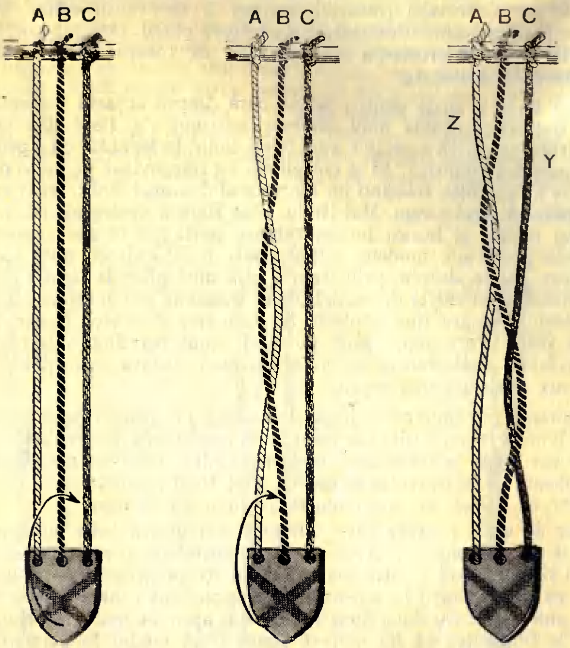


Fig. 8 O rotație produce împletitura din centru; o a doua rotație — împletitura din dreapta.

Pentru a lămuri acest lucru, să presupunem că cea de-a doua rotație este înainte, printre A și B, ceea ce duce la împletitura din cel de-al treilea desen al figurii. Pentru a dezlega această împletitură fără rotirea plăcii, ridicați mai întîi coarda C din locul însemnat cu Y și treceți placa pe sub el, de la dreapta la stînga. Trageți de sfori pînă se întind, apoi ridicați coarda A din locul marcat cu Z și treceți placa pe sub el de la stînga spre dreapta. Rezultatul este că sforile vor fi perfect întinse.

Pentru orice număr de coarde mai mare decît doi se demonstrează următoarea teoremă surprinzătoare. Orice împletitură rezultată dintr-un număr *par* de rotaţii (rotaţiile putînd fi făcute în orice direcţie) poate fi întotdeauna dezlegată prin ţeserea plăcii, fără rotaţie; împletiturile produse printr-un număr *impar* de rotaţii complete nu pot fi niciodată dezlegate.

Piet Hein a auzit pentru prima oară despre această teoremă prin anii treizeci cu ocazia unui seminar susţinut de Paul Ehrenfest la Institutul de fizică teoretică a lui Niels Bohr, în legătură cu o problemă de mecanică cuantică. El şi colegii săi au improvizat pe loc o demonstraţie a teoremei, folosind un foarfece al doamnei Bohr, legat cu sfori de spătarul unui scaun. Mai tîrziu, Piet Hein a descoperit că, întrucît corpul rotitor şi lumea înconjurătoare participă în mod simetric la această problemă, modelul iniţial poate fi înlocuit cu unul simetric, realizat, foarte simplu, prin legarea cîte unei plăci la *fiecare* capăt al coardei. Cu un astfel de model, două persoane pot juca un fel de joc topologic. Fiecare ţine o placă, iar cele trei sfori sînt ţinute întinse între plăci. Partenerii joacă pe rînd, unul formînd o împletitură, iar celălalt dezlegînd-o, şi cronometrează durata operaţiei. Cîştigă cel care dezleagă mai repede.

Teorema par-impar se aplică şi la acest joc pentru două persoane. Este bine ca începătorii să se limiteze la împletituri de cîte două rotaţii, apoi vor trece la un număr mai mare (dar par!) de rotaţii, numai pe măsură ce îşi dezvoltă iscusinţa. Piet Hein a numit acest joc *Tangloid*[4]; el a fost un timp foarte popular în Europa.

Dar de unde provine oare diferenţa categorică între numerele de rotaţii pare şi impare? Aceasta este o întrebare grea, care nu poate primi răspuns fără a intra mai adînc în teoria grupurilor. O sugestie ar fi că două rotaţii în sensuri exact opuse sînt echivalente, evident, cu o non-rotire. Iar dacă două rotaţii sînt aproape opuse — elementul care le împiedică să fie perfect opuse fiind modul în care anumite coarde trec prin placă — atunci împletitura poate fi desfăcută, dezlegînd aceleaşi coarde în sens invers în jurul plăcii. Într-un articol publicat în 1942, într-o revistă matematică londoneză, M. H. A. Newman spunea că P. A. M. Dirac, renumitul fizician de la Universitatea din Cambridge, folosea de mulţi ani varianta solitară a acestui joc ca un model pentru „ilustrarea faptului că grupul fundamental al grupului rotaţiilor în spaţiul tridimensional are un singur generator cu perioada 2". Newman recurge apoi la teoria împletiturilor a lui Artin, pentru a demonstra că sforile nu pot fi dezlegate dacă numărul de rotaţii este impar.

---

[4] *To tangle* — a înnoda (lb. engleză). — *N.T.*

Realizînd înpletituri prin rotirea la întîmplare a plăcii de un număr par de ori, şi văzînd apoi cît de repede puteţi dezlega coardele vă oferiţi o distracţie captivantă. În fig. 9 sînt desenate trei împletituri simple, formate fiecare din cîte două rotaţii. Împletitura din partea stîngă a fost făcută rotind placa înainte de două ori, printre B şi C; cea din mijloc — rotind placa mai întîi înainte prin B şi C, apoi înapoi printre A şi B; împletitura din dreapta — rotind placa de două ori lateral spre dreapta. Cititorii sînt invitaţi să găsească cea mai bună metodă de dezlegare a fiecăreia dintre aceste împletituri.

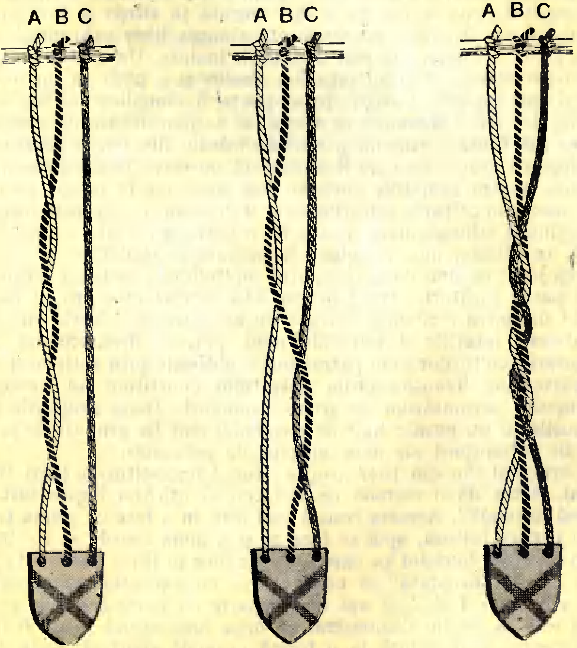


Fig. 9 Trei probleme de desfacere a împletiturilor.

Pentru a construi dispozitivul pentru jocul *Tangloid* al lui Piet Hein, este preferabil, fireşte, să folosiţi plăci nu din carton, ci din lemn sau din material plastic. În loc de trei coarde separate, Piet Hein recomanda folosirea unei singure coarde mai lungi. Porniţi cu ea de la prima gaură a unei plăci (înnodîndu-i capătul ca să nu iasă), introduceţi-o apoi prin prima gaură a celei de-a doua plăci, mergeţi cu coarda în lungul acestei plăci, treceţi-o prin gaura din mijloc, apoi prin gaura din mijloc a primei plăci, în lungul acesteia spre gaura a treia, şi înapoi spre a treia gaură a plăcii a doua, şi înnodaţi capătul după ce coarda a fost trecută în sfîrşit şi prin această ultimă gaură. Deoarece coarda poate aluneca liber prin găuri, acum placa poate fi manevrată mai uşor decît înainte. Un cititor mi-a scris că a legat cele două plăci prin fire *elastice* şi a găsit că manevrarea este şi mai uşoară. Desigur jocul poate fi complicat adăugînd noi coarde, dar chiar şi numai cu trei el ni se pare destul de complicat.

Este suficientă o singură privire la tabelul din fig. 6 pentru a ne convinge că grupul pe care îl reprezintă nu este abelian (comutativ). Tabelele pentru grupurile abeliene sînt simetrice în raport cu o axă care trece prin colţurile din stînga-sus şi dreapta-jos. Aceasta înseamnă că secţiunile triunghiulare situate de o parte şi de alta a acestei diagonale constituie, una, imaginea în oglindă a celeilalte.

Dacă jocul cu linii de la începutul capitolului este jucat nu de trei, ci de patru jucători, atunci grupul său asociat este grupul de permutări de patru simboluri. Acesta nu este, totuşi, identic cu grupul care descrie rotaţiile şi reflexiile unui pătrat, deoarece nu toate permutările colţurilor unui pătrat pot fi obţinute prin rotirea şi reflexia pătratului. Transformările pătratului constituie un „subgrup" al grupului permutărilor de patru simboluri. Toate grupurile finite (grupurile cu un număr finit de elemente) sînt fie grupuri de permutări, fie subgrupuri ale unor grupuri de permutări.

În articolul său din 1947 asupra teoriei împletiturilor (vezi Bibliografia), Artin dă o metodă de reducere a oricărei împletituri la o „formă normală". Aceasta constă mai întîi în a face ca prima coardă să fie perfect întinsă, apoi se face ca şi a doua coardă să fie întinsă — cu excepţia buclelor pe care le poate face în jurul coardei 1 ; după aceea este „îndreptată" şi coarda 3 — cu excepţia unor bucle în jurul coardelor 1 şi 2, şi aşa mai departe cu toate celelalte coarde. „Deşi este pe deplin demonstrat că orice împletitură poate fi deformată pentru a fi redusă la o formă normală similară, scrie Artin, utorul este convins că orice încercare de aplicare a acestei reduceri la o persoană în viaţă ar duce numai la proteste violente şi la acţiuni discriminatorii împotriva matematicii".

Într-o scurtă scrisoare pe care am primit-o de la Dirac — prea tîrziu însă pentru a o putea include şi comenta în text — acesta spune că s-a gîndit pentru prima oară la problema coardelor cam prin 1929 şi că de atunci a folosit-o de multe ori pentru a ilustra că două rotaţii ale unui corp în jurul unei axe pot fi deformate în mod continuu, printr-o serie de mişcări, care sfîrşesc fiecare în poziţia de plecare, ajungînd astfel la non-mişcare. „Faptul că un corp care se roteşte poate poseda exact o jumătate — şi nici o altă fracţiune — dintr-o cuantă de moment cinetic, scria Dirac, este o consecinţă a acestei proprietăţi a rotaţiilor".

RĂSPUNSURI

Cele trei probleme cu împletituri se rezolvă în modul următor: 1. Treceţi placa pe sub coarda C de la dreapta spre stînga, apoi pe sub coardele A şi B de la stînga la dreapta. 2. Treceţi placa pe sub mijlocul coardei B de la stînga spre dreapta. 3. Treceţi placa de la stînga spre dreapta, pe sub toate coardele.

CAPITOLUL III

Opt probleme

1. ÎMPĂRȚIREA ÎN TRIUNGHIURI ASCUȚITUNGHICE

Fiind dat un triunghi cu un unghi obtuz, este oare posibil să se împartă triunghiul în triunghiuri mai mici, cu condiția ca fiecare dintre ele să fie triunghi ascuțitunghic? (Se spune că un triunghi este ascuțit atunci cînd are toate unghiurile ascuțite. Un unghi drept nu este, firește, nici obtuz, nici ascuțit.) Dacă împărțirea nu se poate face, dați o demonstrație a imposibilității; dacă se poate face, care este numărul minim de triunghiuri ascuțitunghice în care poate fi împărțit orice triunghi obtuzunghic?

Fig. 10 ilustrează o încercare tipică, care duce la impas. Triunghiul a fost împărțit în trei triunghiuri ascuțitunghice — dar al patrulea este obtuzunghic, așa că nu s-a cîștigat nimic prin împărțirile precedente.

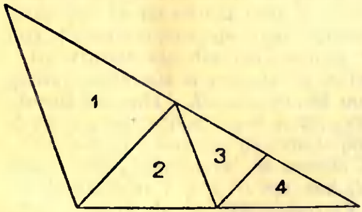


Fig. 10 Poate fi împărțit acest triunghi obtuzunghic în triunghiuri ascuțite?

Problema (care mi-a fost comunicată de Mel Stover, din Winnipeg) este amuzantă, deoarece are șanse să inducă în eroare chiar și pe cel mai bun matematician și să-l facă să ajungă la o concluzie falsă. Plăcerea cu care am lucrat la ea m-a făcut să-mi propun o problemă înrudită: care este numărul minim de triunghiuri ascuțitunghice în care poate fi împărțit un *pătrat*? Zile întregi am fost convins că răspunsul este nouă; apoi, dintr-o dată, am văzut că numărul poate fi redus la opt. Mă întreb cîți cititori vor putea descoperi o soluție cu opt triunghiuri, sau poate chiar și una mai bună. Nu sînt în stare să demonstrez că opt este numărul minim, deși bănuiesc că așa trebuie să fie.

2. CÎT MĂSOARĂ UN „LUNAR"?

În cartea lui H. G. Wells *Primul om pe Lună* se descoperă că satelitul nostru natural este locuit de niște insecte inteligente, care trăiesc în caverne subterane. Să presupunem că aceste creaturi au o unitate de măsură pentru lungimi pe care o vom numi „lunar". Ea a fost adoptată din cauză că aria Lunii, exprimată în lunari pătrați, este exact egală (numeric) cu volumul Lunii exprimat în lunari cubici. Diametrul Lunii este de 2160 mile[1]. Cîte mile măsoară un lunar?

3. JOCUL GOOGOL

În 1958, John H. Fox, jr., de la Minneapolis-Honeywell Regulator Company și L. Gerald Marnie, de la Institutul tehnologic din Massachusetts, au născocit un neobișnuit joc de pariat, pe care l-au numit Googol[2]. El se joacă după cum urmează: cereți cuiva să ia cîte foi de hîrtie dorește și pe fiecare foaie să scrie cîte un număr pozitiv distinct. Numerele pot merge de la fracțiuni foarte mici ale lui 1 și pînă la numere de ordinul unui „googol". Foile sînt întoarse cu fața în jos și amestecate pe suprafața unei mese. Întoarceți cu fața în sus, rînd pe rînd, cîte o foaie. Scopul este de a vă opri cînd ați ajuns la numărul pe care îl bănuiți că este cel mai mare din serie. Nu vă puteți întoarce și alege o foaie întoarsă mai înainte. Dacă ați întors toate foile, trebuie să acceptați numărul de pe ultima foaie întoarsă.

Cei mai mulți vor presupune că probabilitatea de a *nu* nimeri numărul cel mai mare este de cel puțin 5 la 1. În realitate, dacă folosiți

[1] 1 milă (terestră) $\approx$ 1,6 km. — *N.T.*

[2] Googol — un număr egal cu 1 urmat de 100 de zerouri, scris ca $10^{10^{10}}$. Matematicianul american Edward Kasner (1878—1955) a bătut în glumă o monedă cu acest nume. — *N.T.*

strategia cea mai bună, şansa de a cîştiga este ceva mai mare de 1 la 3. Se nasc însă două întrebări. Mai întîi, care este strategia cea mai bună? (Observaţi că nu este acelaşi lucru cu a cere o strategie care să facă maximă *valoarea* numărului ales.) În al doilea rînd, dacă urmaţi această cea mai bună strategie, cum se poate calcula şansa de cîştig?

Dacă există numai două foi, şansa dv. de cîştig este, evident, de 1 la 2, indiferent ce foaie aţi alege. Pe măsură ce numărul foilor creşte, probabilitatea de a cîştiga (presupunînd că folosiţi strategia cea mai bună) descreşte, dar curba se aplatizează rapid şi dincolo de 10 foi, scăderea este foarte mică. Probabilitatea nu scade niciodată sub 1/3. Mulţi jucători vor presupune că vă fac sarcina cu mult mai grea alegînd numere extrem de mari, dar un moment de gîndire vă va arăta că ordinul de mărime al numerelor este cu totul lipsit de importanţă. Singura condiţie este ca pe foi să fie înscrise numere care pot fi aranjate în ordine crescătoare.

Jocul are multe aplicaţii interesante. De pildă, o fată hotărăşte să se mărite înainte de sfîrşitul anului. Ea îşi face socoteala că pînă atunci va întîlni zece bărbaţi care ar putea fi convinşi să-i ceară mîna şi că, o dată refuzat, nici unul din ei nu va mai încerca şi a doua oară. Ce strategie trebuie ea să urmeze pentru a-şi face maximă şansa de a accepta pe cel mai bun dintre cei 10, şi care este probabilitatea de a reuşi?

Strategia constă în a refuza un anumit număr de foi de hîrtie (sau de propuneri de căsătorie) şi în a alege apoi primul număr care îl depăşeşte pe cel mai mare din cele cuprinse în foile refuzate. Tot ceea ce va trebui este o formulă cu care să determinaţi cîte foi trebuie refuzate, în funcţie de numărul total de foi.

4. DEFILAREA REGIMENTULUI ŞI CÎINELE PLIMBĂREŢ

O formaţie pătrată de soldaţi, avînd latura de 50 de picioare[3], defilează cu pas constant, mergînd numai înainte (fig. 11). Mascota regimentului, un mic terrier, pleacă din centrul rîndului din urmă al formaţiei (poziţia A pe desen), aleargă înainte în linie dreaptă pînă ajunge la centrul rîndului de soldaţi din frunte (poziţia B), apoi aleargă înapoi tot în linie dreaptă către centrul ultimului rînd. În clipa cînd

[3] Un picior ≈ 0,3 m. — *N.T.*

a reajuns în poziția A, formația a avansat cu exact 50 de picioare. Presupunînd că viteza cîinelui este constantă și că acesta nu pierde timp cînd își schimbă direcția, care este distanța pe care o parcurge?

Dacă rezolvați problema aceasta, care nu cere decît cunoștințe de algebră elementară, poate că vă încumetați să încercați varianta mult mai dificilă, propusă de faimosul problemist Sam Loyd (vezi cartea *Mathematical Puzzles of Sam Loyd* (Enigme matematice) vol. 2, Dover, 1960, p. 103). În loc să alerge înainte și înapoi printre soldați, mascota aleargă cu viteză constantă de-a lungul perimetrului pătratului, și cît mai aproape de acesta. Ca și înainte, se presupune că formația a înaintat 50 de picioare, în timp ce cîinele se reîntoarce în poziția A. Ce distanță parcurge cîinele?

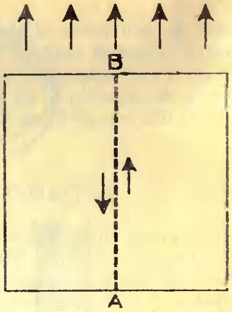


Fig. 11 Ce distanță parcurge cîinele?

5. CORDONUL D-LUI BARR

Stephen Barr, din Woodstock, statul New York, declară că la halatul său are un cordon lung de stofă, ale cărui capete sînt tăiate ca în fig. 12. Cînd pleacă în călătorie și își împachetează cordonul, îi place să-l răsucească sul cît mai strîns cu putință, începînd de la un capăt — însă capetele tăiate oblic îi irită simțul de simetrie. Pe de altă parte, dacă îndoaie capetele în așa fel încît să le facă drepte, la rulare, grosimea inegală a stofei produce ghemotoace. Dl. Barr a experimentat și procedee mai complicate de îndoire preliminară, dar oricît s-a străduit n-a reușit să obțină un dreptunghi de grosime uniformă. De exemplu, procedeul arătat în figură duce la un dreptunghi cu grosimea trei în porțiunea A și doi în porțiunea B.

„Nimic nu este perfect, înăuntru sînt prea multe așchii", spunea unul dintre filozofii din cartea lui James Stephens, *Vaza cu aur*. Cu toate acestea, Barr a reușit în cele din urmă să-și împăturească cordonul în așa fel, încît și capetele să fie drepte și să facă parte

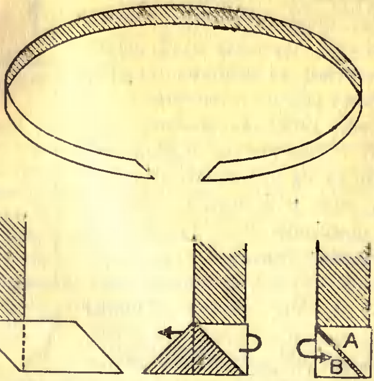


Fig. 12 Cordonul lui Barr (sus) și un mod nesatisfăcător de a-l răsuci (jos).

dintr-un dreptunghi cu grosime uniformă. După aceea, cordonul poate fi înfășurat frumos și fără ghemotoace. Cum a reușit Barr? Pentru rezolvarea problemei, puteți folosi o fîșie de hîrtie tăiată în mod adecvat.

6. ALB, NEGRU ȘI CAFENIU

Profesor Merle White, de la catedra de matematică, profesor Leslie Black, de la filozofie, și Jean Brown, din administrație[4], iau masa împreună la cantina Universității.

— Nu este interesant, zise doamna, că numele noastre de familie sînt Black, Brown și White, iar unul dintre noi are părul negru, unul cafeniu și celălalt alb?

— Adevărat! remarcă persoana cu păr negru. Dar ai observat oare că nici unul dintre noi nu are părul de culoarea care să corespundă numelui?

— Dumnezeule, așa e! exclamă White.

Dacă părul doamnei este cafeniu, ce culoare are părul profesorului Black?

---

[4] *White* — alb, *black* — negru și *brown* — cafeniu. Toate prenumele alese sînt atribuite, în țările de limbă engleză, atît bărbaților cît și femeilor. — *N.T.*

7. AVIONUL ÎN FURTUNĂ

Un avion zboară în linie dreaptă de la aeroportul A către aeroportul B, apoi înapoi de la B la A, tot în linie dreaptă. Viteza lui este constantă și nu bate vîntul. Dacă presupunem acum că pe durata ambelor zboruri bate un vînt constant de la A înspre B, atunci durata zborului va fi mai mare, mai mică sau egală cu cea din primul caz? (Viteza motoarelor rămîne neschimbată.)

8. CÎT COSTĂ ANIMALELE FAVORITE?

Proprietarul unei prăvălii de animale favorite a cumpărat un anumit număr de șoareci albi și jumătate pe atîtea perechi de papagali. El a plătit 2 dolari pentru fiecare șoarece alb și un dolar pentru fiecare papagal. Prețul de vînzare l-a fixat cu 10% mai mare decît prețul pe care l-a plătit, atît pentru șoareci, cît și pentru papagali. După ce a vîndut toate animalele, în afară de șapte, negustorul constată că a încasat pentru ele exact suma totală plătită de el la cumpărare. Cîștigul său este reprezentat de prețul total de vînzare al celor șapte animale încă nevîndute. Cît este acest cîștig?

RĂSPUNSURI

1. Un număr de cititori mi-au trimis „demonstrații" după care un triunghi obtuzunghic *nu* poate fi împărțit în triunghiuri ascuțitunghice — dar împărțirea poate fi totuși realizată. Fig. 13 arată o soluție-tip, care se aplică oricărui triunghi obtuzunghic și care duce la șapte triunghiuri ascuțitunghice.

Este ușor de văzut că numărul minim este șapte. Unghiul obtuz trebuie divizat printr-o linie. Această linie nu poate însă merge pînă la latura cealaltă, pentru că atunci ar forma un alt triunghi obtuzunghic, care la rîndul lui ar trebui împărțit, așa că soluția nu ar fi minimală pentru triunghiul de la început. Așadar, linia care imparte unghiul obtuz trebuie să se termine într-un punct din *interiorul*

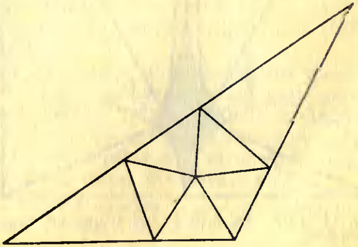


Fig. 13 Un triunghi obtuzunghic poate fi împărțit în șapte triunghiuri ascuțitunghice.

triunghiului. În acest punct trebuie însă să se întîlnească cel puțin cinci linii, pentru că în caz contrar unghiurile formate între ele nu ar fi toate ascuțite. Acest aranjament formează un pentagon intern de cinci triunghiuri — ceea ce duce la un total de șapte triunghiuri. Această demonstrație a fost dată ca soluție la problema E1406, propusă în revista „American Mathematical Monthly", noiembrie 1960, p. 923, de către Wallace Manheimer, pe atunci profesor la un liceu din Brooklyn. Tot el a arătat cum trebuie construită soluția pentru orice triunghi obtuzunghic.

Se ridică o întrebare: Oare orice triunghi obtuzunghic poate fi împărțit în șapte triunghiuri ascuțitunghice *isoscele*? Răspunsul este Nu. Verner E. Hoggatt, jr., și Russ Denman au demonstrat („American Mathematical Monthly", noiembrie 1961, pp. 912—913) că opt asemenea triunghiuri sînt suficiente pentru orice triunghi obtuzunghic, iar Free Jamison (*ibid.*, iunie-iulie 1962, pp. 550—552) a arătat că opt sînt și necesare. Pentru detalii în legătură cu condițiile în care sînt posibile soluții cu mai puțin de opt triunghiuri, trebuie consultate aceste articole. Un triunghi dreptunghic sau un triunghi ascuțitunghic neisoscel pot fi împărțite, fiecare, în cîte nouă triunghiuri ascuțitunghice isoscele, iar un triunghi ascuțitunghic isoscel — în patru triunghiuri ascuțitunghice isoscele congruente[5] între ele și asemenea cu originalul.

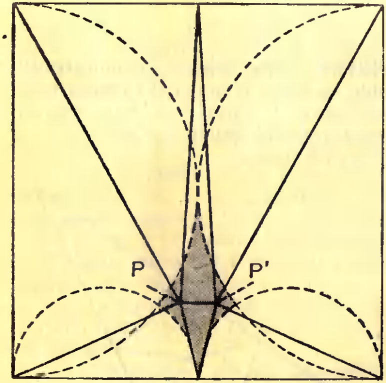


Fig. 14 Pătrat împărțit în opt triunghiuri ascuțitunghice.

Un pătrat poate fi tăiat în opt triunghiuri ascuțitunghice, așa cum se vede din fig. 14. Dacă împărțirea prezintă simetrie bilaterală, punctele P și P' trebuie să fie situate în interiorul suprafeței umbrite, determinate de cele patru semicercuri. Într-o scrisoare, Donald L. Vanderpool arată că sînt posibile deformări asimetrice ale acestui tipar, cu punctul P situat oriunde în afara suprafeței umbrite, cu condiția ca el să rămînă în afara celor două semicercuri mari.

[5] Două figuri geometrice sînt congruente atunci cînd, suprapuse, coincid în toate punctele. — *N.T.*

Aproximativ 25 de cititori mi-au trimis demonstrații — mai mult sau mai puțin formale — ale faptului că împărțirea în opt este minimală. Una dintre ele, datorată lui Harry Lindgren, a apărut în revista „Australian Mathematics Teacher", vol. 18, pp. 14—15, 1962. Demonstrația sa mai arată că, abstracție făcînd de deplasările punctelor P și P', menționate mai înainte, soluția este și unică. H. S. M. Coxeter a demonstrat faptul surprinzător, și anume, că pentru orice dreptunghi, chiar dacă laturile sale diferă ca lungime printr-o cantitate arbitrar de mică, segmentul de dreaptă PP' poate fi deplasat la centru, în așa fel încît să dea tiparului simetrie atît orizontală, cît și verticală.

Două întrebări au rămas fără răspuns: Terence C. Terman a împărțit pătratul în 11 triunghiuri ascuțitunghice isoscele, și se întreabă dacă acesta este numărul minim. Iar Alan Sutcliffe întreabă dacă există un patrulater care să nu poată fi împărțit în opt sau mai puține triunghiuri ascuțitunghice.

Fig. 15 arată cum pot fi împărțite în numărul minim de triunghiuri steaua regulată cu cinci colțuri și „crucea grecească".

2. Volumul unei sfere se obține înmulțind cu $4\pi/3$ cubul razei iar aria, înmulțind cu 4π pătratul razei. Dacă exprimăm raza Lunii în „lunari" și presupunem că suprafața în lunari pătrați este numeric egală cu volumul în lunari cubici, putem determina lungimea razei punînd pur și simplu semnul egal între cele două expresii și rezolvînd pentru valoarea razei. Numărul π se simplifică în ambii membri, și găsim că raza este de trei lunari. Raza Lunii este de 1 080 de mile, așa că un lunar trebuie să măsoare 360 de mile.

3. Indiferent de numărul de foi care intră în jocul Googol, probabilitatea de a alege foaia pe care este înscris numărul cel mai mare nu scade niciodată sub 0,367879 (cu condiția să se folosească strategia cea mai bună). Numărul acesta este inversul numărului e[6] — și reprezintă limita către care tinde probabilitatea de a cîștiga jocul cînd numărul foilor tinde către infinit.

Dacă numărul foilor este zece (un număr convenabil din punct de vedere practic), probabilitatea de a alege numărul cel mai mare este de 0,398. Strategia constă în a întoarce trei foi, în a nota numărul cel mai mare de pe ele, apoi în a alege primul număr următor care îl va depăși pe acesta. Dacă jocul este repetat de foarte multe ori, vă puteți aștepta să cîștigați cam două jocuri din fiecare cinci.

În cele ce urmează voi relata succint analiza completă a jocului dată de Leo Moser și J. R. Pounder, de la Universitatea din Alberta

[6] *e* — număr transcendent, egal cu 2,7182818. . . folosit ca bază a logaritmilor naturali. — *N.T.*

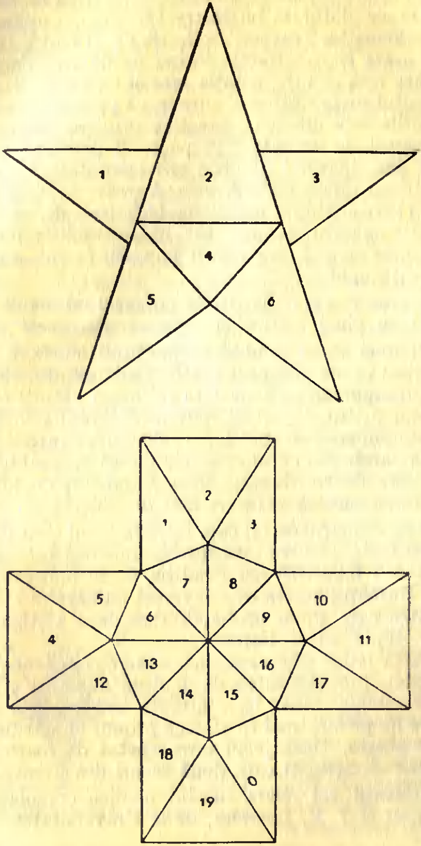


Fig. 15 Numărul minim de împărțiri pentru pentagramă (sus) și pentru crucea grecească (jos).

(Canada). Fie n numărul total de foi și p numărul de foi refuzate înainte de a alege primul număr mai mare decît toate numerele cuprinse în primele p foi. Numerotăm foile una după alta de la 1 la n. Fie $k+1$ numărul de ordine al foii care poartă numărul cel mai mare; acest număr va putea fi ales numai dacă k este egal sau mai mare decît p (în caz contrar numărul maxim va fi refuzat printre primele p foi), dar și atunci, numai dacă numărul cel mai mare de pe filele de la 1 la k este în același timp și numărul cel mai mare de pe filele de la 1 și p (fiindcă în caz contrar numărul acela va fi ales înainte de a se fi ajuns la numărul maxim de pe ansamblul foilor). Dacă numărul cel mai mare se află pe foaia $k+1$, probabilitatea de a-l găsi este p/k, iar probabilitatea ca acest număr cel mai mare să se afle efectiv pe foaia $k+1$ este $1/n$. Întrucît numărul cel mai mare nu se poate afla decît pe o singură foaie, putem scrie următoarea relație pentru probabilitatea de a-l găsi:

$$\frac{p}{n}\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{p+1}+\frac{1}{p+2}+\cdots+\frac{1}{n-1}\right).$$

La o valoare dată a lui n (numărul de foi), putem determina numărul optim de refuzuri alegînd acel p care face maximă valoarea expresiei de mai sus. Pe măsură ce n tinde spre infinit, p/n tinde spre $1/e$, așa că o bună estimare a lui p este pur și simplu întregul cel mai apropiat de n/e. Prin urmare, dacă se joacă cu n foi, strategia generală constă în a lăsa să treacă primele n/e numere care ies și în a alege apoi primul număr care este mai mare decît cel mai mare număr înscris pe cele n/e foi refuzate.

Aceasta presupune, desigur, că jucătorul nu știe cît de mari pot fi numerele înscrise pe foi și, prin urmare, nu are nici un reper cu care să aprecieze că un număr ales este mare sau mic în cadrul intervalului ales. Dacă cineva *are* un asemenea reper, analiza nu se mai aplică. De exemplu, dacă jocul este jucat cu numerele de serie înscrise pe zece bancnote de cîte un dolar, iar prima dumneavoastră încercare este o bancnotă al cărei număr de serie începe cu 9, strategia cea mai bună ar fi să alegeți chiar acea bancnotă. Din motive asemănătoare, strategia jocului Googol nu se aplică nici la problema fetei nemăritate, așa cum au remarcat mulți cititori, fiindcă fata cunoaște probabil destul de bine gama valorilor eventualilor pretendenți și are în minte o imagine despre ceea ce consideră drept soț ideal. Dacă primul bărbat care o cere în căsătorie se apropie foarte mult de idealul pe care și l-a făurit și totuși nu-l acceptă imediat, îmi scria Joseph P. Robinson, „înseamnă că ea are tărîță în cap". După cît se pare, inventînd jocul, Fox și Marnie, au ajuns independent la o problemă care fusese abordată şi de alţii cu cîţiva ani mai înainte. Mai mulţi cititori mi-au scris că au auzit de această problemă încă înainte de 1958 — unul dintre ei îşi aminteşte chiar că lucrase el însuşi la ea prin 1955 — dar în publicaţii nu am putut găsi nici o referire la ea pînă în 1958. Problema maximalizării *valorii* obiectului ales — şi nu a şansei de a alege obiectul cu valoarea cea mai mare — se pare că a fost propusă pentru prima oară de celebrul matematician Arthur Cayley[7] în 1875 (vezi articolul *Asupra unei probleme a lui Cayley* de Leo Moser, în „Scripta Mathematica", septembrie-decembrie 1956, pp. 289—292).

4. Să presupunem că atît lungimea laturii careului de soldaţi, cît şi timpul necesar careului să avanseze cu această lungime sînt amîndouă egale numeric cu 1. Viteza formaţiei va fi prin urmare tot 1. Fie x distanţa totală parcursă de cîine şi, totodată, viteza acestuia. Cît timp cîinele aleargă înainte, viteza lui faţă de cea a soldaţilor este $x-1$, iar la întoarcere, $x+1$. Faţă de formaţia de soldaţi fiecare cursă a cîinelui înainte sau înapoi se face pe o distanţă egală cu 1, iar cursa dus şi întors durează unitatea de timp, aşa că se poate scrie următoarea ecuaţie:

$$\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+1}=1.$$

Ea poate fi exprimată sub formă pătratică:

$$x^2-2x-1=0,$$

a cărei rădăcină pozitivă este $1+\sqrt{2}$. Dacă înmulţim această valoare cu 50, obţinem rezultatul final, 120,7 picioare. Cu alte cuvinte, cîinele parcurge o distanţă totală egală cu latura pătratului, plus aceeaşi lungime înmulţită cu rădăcina pătrată a lui 2.

Cealaltă versiune a problemei, dată de Loyd, în care cîinele aleargă *în jurul* careului în mişcare, poate fi abordată în exact acelaşi mod. Voi parafraza o soluţie scurtă şi clară, care mi-a fost trimisă de Robert F. Jackson, de la Centrul de calcul al Universităţii din Delaware.

Ca şi înainte, fie 1 latura careului şi tot 1 timpul necesar soldaţilor ca să parcurgă 50 de picioare; aşadar, viteza lor va fi tot 1. Fie x distanţa străbătută şi, totodată, viteza cîinelui. Viteza acestuia în raport cu viteza careului va fi $x-1$ cînd el aleargă înainte, $\sqrt{x^2-1}$ cînd aleargă lateral şi $x+1$ atunci cînd aleargă înapoi. Întreaga rută este parcursă în unitatea de timp, aşa că putem scrie ecuaţia:

$$\frac{1}{x-1}+\frac{2}{\sqrt{x^2-1}}+\frac{1}{x+1}=1.$$

[7] Arthur Cayley, matematician englez (1821—1895). — *N.T.*

Aceasta poate fi rescrisă ca o ecuație de gradul patru:

$$x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 4x + 5 = 0.$$

Ea are o singură rădăcină reală pozitivă, și anume 4,18112...; înmulțind-o cu 50, obținem răspunsul dorit: 209,056... picioare.

Theodore W. Gibson, de la Universitatea din Virginia, a găsit că, prima formă a ecuației de mai sus poate fi scrisă și după cum urmează, luînd rădăcina pătrată a fiecărui membru:

$$\frac{1}{\sqrt{x-1}} + \frac{1}{\sqrt{x+1}} = 1.$$

Această formă este remarcabil de asemănătoare cu ecuația stabilită pentru prima variantă a problemei.

Mai mulți cititori au trimis analize ale unor variante ale acestei probleme: o formație în pătrat care avansează într-o direcție paralelă cu diagonala pătratului; formații în poligoane regulate cu mai mult de patru laturi; formații circulare; formații care se rotesc etc. Thomas J.Meehan și David Salsburg au observat că problema este de fapt identică cu cea a unui vas de război care navigînd în jurul unui vapor în mișcare execută o cursă de recunoaștere, de forma unui pătrat, și au arătat că problema poate fi ușor rezolvată cu ajutorul diagramelor vectoriale.

5. Modul cel mai simplu de a împături cordonul d-lui Barr în așa fel încît fiecare capăt al acestuia să fie drept și să facă parte dintr-un dreptunghi de grosime uniformă este arătat în fig. 16. Această împăturire permite o înfășurare în sul fără ghemotoace (îndoiturile transversale de la capete uniformizează îndoitura în lung) și este valabilă indiferent de lungimea centurii sau de unghiurile sub care sînt tăiate capetele.

6. Presupunerea că Jean Brown ar fi „doamna"[8] duce evident la contradicție. Într-adevăr, remarca „doamnei" de la începutul discuției este urmată de o replică a persoanei cu păr negru — prin urmare părul lui Jean Brown, dacă ea este „doamna", nu poate fi negru.

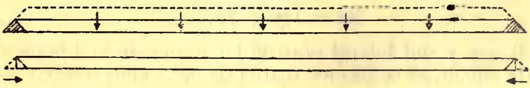


Fig. 16 Așa și-a împăturit in cele din urmă Barr cordonul.

[8] Numele Jean este, totuși, mai răspîndit printre femei, așa că această ipoteză pare firească. — *N.T.*

Dar el nu poate fi nici cafeniu, pentru că s-ar potrivi cu numele. Prin urmare, trebuie să fie alb. Aceasta lasă cafeniul pentru culoarea părului profesorului Black și negrul pentru cea a profesorului White. Dar o afirmație a persoanei cu păr negru atrage după sine o exclamație din partea lui White, așa că aici nu poate fi vorba de una și aceeași persoană.

Este necesar să admitem, prin urmare, că Jean Brown este bărbat. Părul profesorului White nu poate fi alb (pentru că s-ar potrivi cu numele), dar nici negru, pentru că el (sau ea) răspunde la un moment dat persoanei cu părul negru. Prin urmare, trebuie să fie cafeniu. Dacă părul doamnei nu este cafeniu, atunci profesorul White nu este o femeie. Brown este bărbat, așa că profesorul Black trebuie să fie femeie. Părul ei nu este negru sau cafeniu — așa că neapărat trebuie să fie... blond platinat.

7. Deoarece vîntul mărește viteza avionului pe drumul de la A la B și o micșorează la întoarcere, ați fi tentat să presupuneți că aceste influențe se compensează, așa că durata totală a călătoriei rămîne neschimbată. Dar lucrurile nu stau așa, deoarece durata pe care viteza avionului este mărită este mai scurtă decît cea pe care ea este micșorată — așa că efectul de ansamblu este o întîrziere. Durata totală a unei călătorii efectuate pe vreme de vînt cu viteză și direcție constante, indiferent de viteză și direcție, va fi întotdeauna mai mare decît pe vreme liniștită.

8. Fie x numărul de șoareci albi cumpărați și, totodată, numărul de papagali. Fie y numărul de șoareci albi printre cele șapte animale încă nevîndute. Numărul de papagali printre ele va fi $7 - y$. Numărul de șoareci vînduți (la un preț de 2,20 dolari bucata) va fi $x - y$, iar numărul de papagali vînduți (cu 1,10 dolari bucata) va fi $x - 7 + y$.

Costul animalelor este deci $2x$ dolari pentru șoareci și x pentru papagali — în total $3x$ dolari. Șoarecii vînduți au dus la încasarea a $2{,}2(x - y)$ dolari, pe cînd papagalii vînduți — la încasarea a $1{,}1(x - 7 + y)$ dolari — în total $3{,}3x - 1{,}1y - 7{,}7$ dolari.

Ni se spune că aceste două totaluri sînt egale, așa că pur și simplu le egalăm și, simplificîndu-le, obținem următoarea ecuație diofantică[9] cu două necunoscute numere întregi:

$$3x = 11y + 77.$$

Întrucît x și y sînt întregi pozitivi iar y nu este mai mare decît 7, este foarte simplu să se încerce toate cele opt valori posibile (inclusiv

[9] Ecuație diofantică — o ecuație matematică care implică mai mult decît o variabilă, în care coeficienții variabilelor sînt numere întregi și pentru care se caută soluții numere întregi. Numită astfel după Diofant, matematician grec care a trăit în secolul al III-lea î.e.n. — *N.T.*

zero) ale lui y, cu scopul de a determina care dintre ele îl face și pe x întreg. Există numai două astfel de valori : 5 și 2. Fiecare dintre aceste valori ar putea constitui o soluție a problemei — dacă n-ar fi faptul că papagalii au fost cumpărați în perechi ! Această circumstanță elimină pe 2 ca valoare posibilă pentru y, deoarece ea ar duce pentru x (numărul de papagali cumpărați) la valoarea impară 33. Conchidem deci că y este 5.

Să rezumăm : vînzătorul a cumpărat 44 de șoareci albi și 22 de perechi de papagali, plătind în total 132 de dolari. A vîndut apoi 39 de șoareci și 21 perechi de papagali, încasînd în total 132 de dolari. I-au rămas 5 șoareci, în valoare de 11 dolari, și 2 papagali, în valoare de 2,20 dolari — un total de 13,20 dolari, care reprezintă răspunsul la problemă.

Jocurile şi enigmele lui Lewis Carroll

Reverendul Charles L. Dodgson, care a scris poveşti şi fantezii nemuritoare sub pseudonimul Lewis Carroll, era un matematician obscur, care ţinea cursuri încîlcite la Oxford şi scria tratate la fel de încîlcite în domeniile geometriei sau algebrei determinanţilor. Subiectele şi felul său de a scrie au căpătat interes şi trăinicie abia cînd i-a venit ideea să abordeze matematica dintr-un unghi mai puţin serios. Bertrand Russell spunea că singurele descoperiri însemnate ale lui Carroll au fost două paradoxuri logice, publicate ca glume în revista „Mind". Carroll a mai scris două cărţi de logică pentru tineret, fiecare dintre ele tratînd subiecte care sînt astăzi demodate, dar conţinînd exerciţii şi probleme atît de stranii şi de absurde, încît ambele cărţi, reunite recent într-o ediţie de buzunar, cîştigă din ce în ce mai mulţi cititori. Tratatele sale serioase nu au mai fost de mult retipărite, dar cele două volume ale sale de enigme originale, *A Tangled Tale* (Poveste încîlcită) şi *Pillow Problems* (Probleme pentru la noapte), au fost şi ele reeditate într-un volum de buzunar.

Fără a ne atinge de subiectul nici uneia dintre aceste patru cărţi sau a interfera cu materialul recreativ din excelentul articol al lui Warren Weaver *Lewis Carroll, matematicianul* („Scientific American", aprilie 1956), să trecem în revistă cîteva dintre incursiunile mai puţin cunoscute ale reverendului Dodgson în ţara jocurilor şi a enigmelor.

În *Sylvie and Bruno Concluded* (Sylvie şi Bruno, finalul), cea de-a doua parte a acum aproape uitatei fantezii a lui Carroll *Sylvie and Bruno*, un profesor german întreabă un grup de oaspeţi ai casei dacă

LEWIS CARROLL. Un desen de Harry Furniss, ilustratorul cărții lui Carroll *Silvia și Bruno.*

le este cumva cunoscut curiosul inel de hîrtie care poate fi format dintr-o fîșie răsucită o dată, căreia i se lipesc capetele:

— Am văzut unul tocmai ieri, spuse contele. Muriel, dragă, nu făceai tu cumva unul ieri, ca să distrezi copiii veniți în vizită?

— Ba da, cunosc jocul, spuse Lady Muriel. Inelul are *o singură* suprafață și *o singură* muchie. Fără îndoială, e ceva foarte misterios!

Profesorul se apucă atunci să demonstreze strînsa legătură dintre banda Moebius[1] și o altă remarcabilă monstruozitate topologică,

[1] August-Ferdinand Moebius, matematician german (1790—1868). — *N.T.*

planul proiectiv: o suprafață cu o singură față și fără nici o muchie. Mai întîi îi ceru Lady-ei Muriel trei batiste. Două dintre ele sînt puse una peste alta și ținute de cele două colțuri de sus. Marginile de sus sînt cusute împreună, apoi uneia dintre batiste i se dă o jumătate de răsucire, după care se cos și marginile de jos. Rezultatul este desigur o suprafață Moebius, cu o singură muchie care constă din cele patru muchii ale batistelor.

Batista a treia are și ea patru muchii, care formează o buclă închisă. Dacă aceste patru muchii sînt acum cusute cu cele patru muchii ale benzii Moebius, rezultatul — explică profesorul — va fi o suprafață închisă și fără muchii, asemănătoare sferei — cu excepția faptului că are o singură parte.

— Înțeleg! întrerupe entuziastă Lady Muriel. Suprafața ei *externă* se va continua cu cea *internă*. Dar cere timp. O s-o cos după cină. Dar spuneți-mi, domnule profesor, de ce numiți asta Punga Norocosului?

Profesorul zîmbi înțelegător.

— Dar nu vezi, draga mea? Ceea ce este *în* pungă este și *în afara* ei; iar ceea ce este *afară* este și *înăuntru*. Așa că în ea poți strînge toate bogățiile pămîntului.

Nu mai este cazul să spunem că Lady Muriel nu a reușit niciodată să coasă și cea de-a treia batistă. Coaserea nu poate fi făcută fără autoîntretăierea fețelor — dar construcția propusă dă o idee destul de sugestivă asupra structurii planului proiectiv.

Admiratorii contelui Alfred Korzybski — care a fundamentat semantica generală — își citează deseori maestrul, spunînd că „harta nu este același lucru cu teritoriul". Dar profesorul german al lui Carroll explică foarte clar cum în țara sa harta și teritoriul pot deveni în cele din urmă identice. Pentru a crește precizia, cartografii au mărit treptat scara hărților lor, mai întîi la trei metri la kilometru, apoi la o sută de metri la kilometru.

— Și atunci ne-a venit ideea cea mai măreață dintre toate, spuse *Herr Professor*. În cele din urmă am reușit să facem o hartă a țării la scara de *un kilometru la kilometru!*

— Ați folosit-o mult? îl întrebai.

— Nu, încă nu am desfășurat-o, spuse profesorul. Au existat proteste din partea fermierilor; ei spuneau că harta ar acoperi întreaga țară și ar opri lumina Soarelui! Așa că pentru moment folosim țara însăși drept propria sa hartă — și vă asigur că e aproape la fel de bună.

Acesta este desigur modul lui Carroll de a lua peste picior ceea ce credea că ar fi un respect excesiv al englezilor pentru erudiția germană. „În zilele acestea — scria el în altă parte — nici un om de știință care își respectă numele nu mai poate tuși altfel decît prin *Ach! Fuch! Auch!*"

Preocuparea constantă a lui Carroll pentru matematica recreațională este dovedită și de numeroasele paragrafe dedicate acestui subiect în *Jurnalul* său, publicat de Oxford University Press, în 1954. Astfel, la 19 decembrie 1898, Carroll scria: „Stat astă noapte pînă la 4 dimineața asupra unei probleme care-mi fusese trimisă de la New York: să se găsească trei triunghiuri dreptunghice egale (ca suprafață) și cu laturi numere raționale. Am găsit *două*, ale căror laturi sînt 20, 21, 29; 12, 35, 37, dar nu am reușit să dau de al treilea". Poate că unii cititori vor găsi interesant să verifice dacă nu cumva vor avea succes acolo unde Carroll a capitulat. De fapt, nu există nici o limită pentru numărul de triunghiuri dreptunghice cu laturi numere întregi și arii egale — deși pentru mai mult de trei triunghiuri ariile sînt exprimate totdeauna prin numere cu mai mult de șase cifre.

Carroll s-a apropiat foarte mult de găsirea celui de-al treilea triunghi, așa cum se va arăta în paragraful consacrat răspunsurilor de la sfîrșitul capitolului. Există o soluție, la care aria triunghiului, deși mai mare decît ariile fiecăruia dintre cele două triunghiuri găsite de Carroll, nu depășește totuși 1000.

„În ultimele cîteva zile — scria Carroll la 27 mai 1894 — am rezolvat cîteva probleme curioase asupra dilemei „minciunii". De pildă, A spune că B minte; B spune că C minte; C spune că A și B mint. Problema este: Cine minte și cine spune adevărul?"

Dintre cele cîteva jocuri neobișnuite cu cuvinte inventate de Carroll cel cunoscut sub numele de *Dubleții*, care se joacă de unul singur, a devenit foarte popular în zilele sale, probabil datorită concursurilor organizate de revista engleză „Vanity Fair". El constă, în esență, în a alege două cuvinte convenabile, de aceeași lungime, și în a schimba apoi pe unul în celălalt printr-o serie de cuvinte intermediare, fiecare diferind de cel precedent printr-o singură literă. Este interzis să se folosească drept cuvinte intermediare nume proprii sau care nu pot fi găsite într-un dicționar uzual.

Istețimea constă, desigur, în a efectua schimbarea cu cel mai mic număr posibil de cuvinte intermediare. Pentru cei interesați, iată tema primului concurs organizat de „Vanity Fair":

Dovediți că IARBA este VERDE
Și că MAIMUȚA a dus la OMENIRE.
Faceți din UNU DOI.
Schimbați ROZ-ul în ALB.
Puneți ROUGE pe OBRAZ.
Faceți să fie VARA FRIG.

Ca şi multor alţi matematicieni, lui Carroll îi plăceau tot felul de jocuri de cuvinte; el a compus anagrame[2] pentru numele diferiţilor oameni celebri (una dintre cele mai bune: William Ewart Gladstone — Wild agitator! Means well[3]), a scris acrostihuri[4] pe nume de fete, a născocit ghicitori şi şarade[5] şi a făcut calambururi[6]. Scrisorile către prietenii săi copii sînt pline de lucruri de felul acesta.

De altfel, toate scrierile lui Carroll abundă în calambururi — deşi ele sînt de cele mai multe ori mai mult isteţe decît răutăcioase. Virtuozitatea sa în materie de calambururi a atins punctul culminant într-un pamflet politic, intitulat *Dinamica unei Particule*, care începe cu următoarele definiţii:

„Se numeşte Superficialitate Completă[7] caracterul unui discurs în care date fiind două puncte oarecare, vorbitorul este descoperit minţind[7] oriunde în raport cu aceste două puncte. Furia Vizibilă[7] este înclinarea a doi alegători unul faţă de altul, atunci cînd se întîlnesc, dar ale căror vederi nu sînt îndreptate în aceeaşi direcţie. Atunci cînd un alegător întîlneşte un alt alegător şi face ca argumentele dintr-o parte să fie egale cu argumentele din cealaltă, sentimentele fiecăreia dintre părţi poartă numele de Furie Dreaptă[7]. Atunci cînd două partide, fuzionînd, simt o Furie Dreaptă, se spune că sînt Complementare (deşi aceasta se întîmplă rareori în practică). O Furie Oarbă[7] este cea care este mai mare decît o Furie Dreaptă".

Tot calamburul matematic furnizează cea mai mare parte a umorului altui pamflet, *O nouă metodă de evaluare a lui* π. În fragmentul pe care îl redau mai jos, π ţine locul salariului lui Benjamin Jowett[8], profesor de limba greacă şi traducător al lui Platon, pe care mulţi îl suspectau de vederi religioase neortodoxe. Fragmentul satirizează eşe-

---

[2] Anagramă — transpunerea literelor unui cuvînt sau ale unei propoziţii, în scopul de a forma un alt cuvînt sau propoziţie. — *N.T.*

[3] William Ewart Gladstone — Instigator sălbatic! Vrea numai binele. Aluzie la politica omului de stat britanic W. E. Gladstone (1809—1898), de patru ori prim-ministru, între 1868 şi 1894. — *N.T.*

[4] Acrostih — serie de versuri în care prima, ultima sau alte litere anumite formează un cuvînt, o propoziţie etc. — *N.T.*

[5] Şaradă — tip de enigmă foarte răspîndit, în care trebuie să se ghicească un cuvînt sau o propoziţie pe baza definirii fiecăreia dintre silabele sale. — *N.T.*

[6] Calambur — mod umoristic de a folosi un cuvînt, în aşa fel încît să se scoată în evidenţă diferite înţelesuri sau aplicaţii, sau folosirea unor cuvinte care sînt asemănătoare sau aproape asemănătoare ca sunet, dar diferite ca înţeles. — *N.T.*

[7] Jocuri de cuvinte intraductibile: *Plain superficiality* (superficialitate completă) — *Plane surface* (suprafaţă plană); *To lie* — a minţi şi a fi situat; *Plain anger* (furie vizibilă) — *Plane angle* (unghi plan); *Right anger* (furie dreaptă) — *Right angle* (unghi drept); *Obtuse anger* (furie oarbă) — *Obtuse angle* (unghi obtuz). — *N.T.*

[8] 1817—1893. — (*N.T.*)

cul oficialităţilor de la Universitatea Oxford în a cădea de acord asupra salariului profesorului Jowett. (J reprezintă pe Jowett):

„Se ştie de mult că obstacolul principal în evaluarea numărului π a fost prezentat lui J; în perioada mai de început a matematicii J ar fi fost, probabil, investigat cu ajutorul unor axe[9] rectangulare şi ar fi fost împărţit în două părţi neegale — un procedeu arbitrar de eliminare care în zilele noastre nu mai este considerat strict legal".

Aproape că auzi ţipătul Reginei de cupă[10]: „Să i se taie capul!"

Marii scriitori care se lasă antrenaţi din cînd în cînd în jocurile de cuvinte se declară mai întotdeauna admiratori ai lui Carroll. Există multe referinţe Carrolliene în romanul lui James Joyce *Finnegans Wake*, inclusiv o aluzie uşor ironică la Carroll însuşi: „Dodgfather, Dodgson & Coo."[11]. Nu este surprinzător să afli că Vladimir Nabokov, al cărui roman *Lolita* este remarcabil nu numai prin subiectul său şocant, dar şi prin acrobaţiile sale verbale, a tradus în limba rusă, în 1923, *Alice în ţara minunilor* (nu prima traducere). Mai există şi alte legături Carroll-Nabokov. Ca şi Carroll, Nabokov este îndrăgostit de şah (unul dintre romanele sale *Apărarea*, are ca erou un jucător de şah maniac), iar povestitorul din *Lolita*, Humbert Humbert, seamănă leit cu Carroll în entuziasmul său pentru fetiţe. Trebuie să ne grăbim a adăuga că în mod sigur Carroll ar fi fost şocat, totuşi, de *Lolita*.

Dodgson se considera un om fericit, dar se simte o oarecare umbră de tristeţe trecînd peste majoritatea fanteziilor sale: singurătatea unui burlac timid şi inhibat, care stătea treaz nopţile luptînd împotriva a ceea ce el numea „gînduri nesfinte", inventînd complicate „probleme pentru la noapte" şi rezolvîndu-le pînă dimineaţă.

„Şi ce fel de bucurie mai poate fi şi asta,
Cînd mintea mi-e plină de indici şi semne?
$x^3 + 7x + 53 = 11/3$".

ADAOS

Lewis Carroll a inventat *Dubleţii* cu ocazia Crăciunului lui 1877, pentru două fetiţe care „nu aveau cu ce-şi trece timpul". A publicat un număr de articole şi note despre joc, pe care-l numise la început „Cuvinte înlănţuite". Pentru detalii asupra acestor publicaţii şi un istoric al jocului, vezi *The Lewis Carrol Handbook* (Manualul Lewis Carroll), editat de Roger L. Green, Oxford Press, pp. 94—101.

---

[9] În limba engleză, *axe* înseamnă secure. — *N.T.*
[10] Personaj din *Alice în ţara minunilor*. — *N.T.*
[11] *To coo* — a murmura amoros. — *N.T.*

Probleme de dubleţi apar în cărţi de enigme atît mai vechi, cît şi mai noi. Dmitri Borgmann, în recenta sa carte *Language on Vacation* (Limba în vacanţă), la p. 155, le numeşte „scări de cuvinte" şi atrage atenţia că scara de cuvinte ideală este aceea în care cele două cuvinte nu au litere comune în aceleaşi poziţii, iar schimbarea este îndeplinită cu acelaşi număr de trepte cîte litere conţine un cuvînt. El dă ca exemplu trecerea de la CALD la FRIG în patru trepte.

Nu este prea surprinzător că întîlnim *Dubleţi* (sub numele de „golf cu cuvinte") în romanul lui Nabokov *Pale Fire* (Foc palid). Povestitorul nebun din roman, comentînd versul 819 al poemului în jurul căruia se ţese acţiunea, vorbeşte despre trecerea de la Ură la Iubire în patru trepte[12], de la Fată la Bărbat în patru[12], iar de la Viu la Mort în cinci, cu verbul „A se adapta" la mijloc[12]. Soluţii pentru primele două au fost date de Mary McCarthy, în remarcabila sa recenzie asupra romanului. D-ra McCarthy adaugă cîţiva dubleţi proprii, bazaţi pe cuvinte din titlul romanului.

Într-un eseu asupra *Limitelor evoluţiei moleculare* (în „The Scientist Speculates", editat de I. J. Good, Basic Books, 1962, pp. 252–256), John Maynard Smith a găsit o asemănare uimitoare între dubleţi şi procesul prin care o specie trece în alta. Dacă ne imaginăm o moleculă elicoidală de ADN[13] ca un „cuvînt" enorm de lung, atunci fiecare mutaţie corespunde unei trepte din jocul de cuvinte. Aşadar transformarea de la Maimuţă la Omenire s-a realizat efectiv printr-un proces cu totul analog jocului cu *Dubleţi*[14].

RĂSPUNSURI

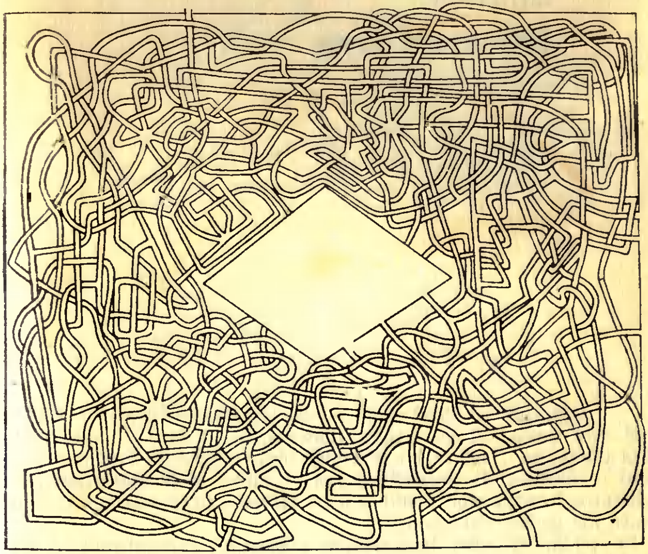
Răspunsul, cu numerele cele mai mici, la problema lui Lewis Carroll, care cere să se găsească trei triunghiuri dreptunghice cu laturi exprimate prin numere întregi şi cu arii egale, este: 40, 42, şi 58; 24, 70 şi 74; şi 15, 112 şi 113. În toate cazurile aria este 840. Dacă Lewis Carroll ar fi dublat dimensiunile celor două triunghiuri găsite de el, ar fi obţinut primele două triunghiuri menţionate mai înainte, de la care pasul spre cel de-al treilea ar fi fost uşor. În răspunsul său la problema nr. 107, autorul cărţii *Canterbury Puzzles* (Enigmele din Canterbury), Henry Ernest Dudeney, dă o formulă cu ajutorul căreia pot fi găsite uşor astfel de triunghiuri.

---

[12] În limba engleză, respectiv: HATE-LOVE, LASS-MALE şi LIVE-(LEND)-DEAD. — *N.T.*

[13] ADN este prescurtarea uzuală pentru acidul dezoxiribonucleic, care intervine în transferul caracterelor genetice şi în sinteza proteinelor. — *N.T.*

[14] În limba engleză, dubletul este APE-MAN. — *N.T.*



Un labirint desenat de Lewis Carroll cînd avea 20 de ani. Pornind din centru, trebuie să găsiți ieșirea spre exterior. Drumurile trec unul pe sub altul sau unul peste altul, iar din loc în loc sînt blocate de bariere.

Problema „minciună sau adevăr" a lui Carroll are un singur răspuns care nu duce la o contradicție logică: A și C mint, iar B spune adevărul. Problema se reduce ușor la calculul propozițional[15], alegînd cuvîntul „spune" drept conjuncția logică numită echivalență. Fără a face apel la logica simbolică, se pot înșira cele opt combinații posibile pentru „a minți" și „a spune adevărul", pentru cei trei oameni, eliminînd apoi pe cele care duc la contradicții logice.

---

[15] Calcul propozițional sau sentențial — ramură a logicii simbolice, care studiază relațiile logice dintre afirmații, în măsura în care acestea pot fi descompuse în conjuncții, disjuncții și negații ale altor afirmații mai elementare. — *N.T.*

Tăieturi din hîrtie

Capitolul 16 al cărţii lui M. Gardner *Amuzamente matematice*[1] este consacrat recreaţiilor matematice pe baza îndoirii hîrtiei, fără tăierea ei. Dacă în joc intervine şi o pereche de foarfece, se deschid o mulţime de posibilităţi noi — dintre care multe servesc la reliefarea într-un mod inedit a unor teoreme fundamentale şi importante ale geometriei plane.

De pildă, să luăm binecunoscuta teoremă care afirmă că suma unghiurilor interne ale oricărui triunghi este de 180 grade. Tăiaţi un triunghi dintr-o foaie de hîrtie. Desenaţi cîte un punct în apropierea fiecărui vîrf, apoi îndoiţi de-a lungul liniilor punctate, ca în figura 17*a*: veţi constata că cele trei unghiuri se îmbină întotdeauna perfect, formînd împreună un unghi de 180 grade. Încercaţi aceeaşi construcţie cu colţurile unui patrulater. Figura poate fi de orice formă, inclusiv de formă concavă, ca cea ilustrată în fig. 17*b*. Cele patru unghiuri îndoite formează întotdeauna, prin unire, un unghi de 360 grade. Dacă prelungim laturile unui poligon convex, ca în fig. 17*c*, unghiurile marcate cu linii punctate se numesc unghiuri externe. Indiferent de numărul laturilor poligonului, dacă unghiurile externe sînt tăiate şi reunite, ele vor forma întotdeauna un unghi de 360 grade.

Dacă două sau mai multe laturi ale unui poligon se intersectează, avem ceea ce se numeşte un poligon încrucişat. Un exemplu familiar este steaua cu cinci colţuri sau pentagrama — simbol al frăţiei vechi-

[1] Editura Ştiinţifică, Bucureşti, 1968, p. 307. — *N.R.*

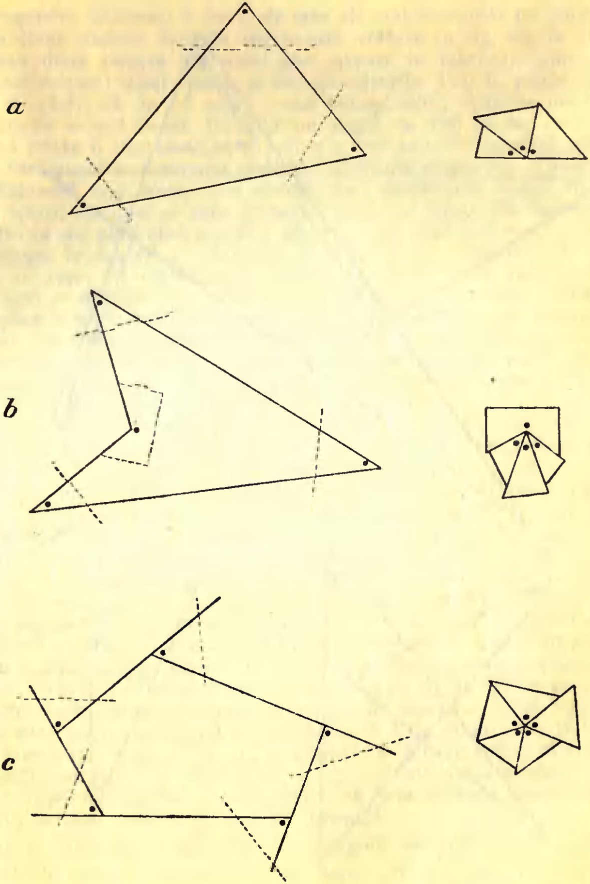


Fig. 17 Cum pot fi descoperite teoreme ale geometriei plane prin impărțirea sau tăierea poligoanelor.

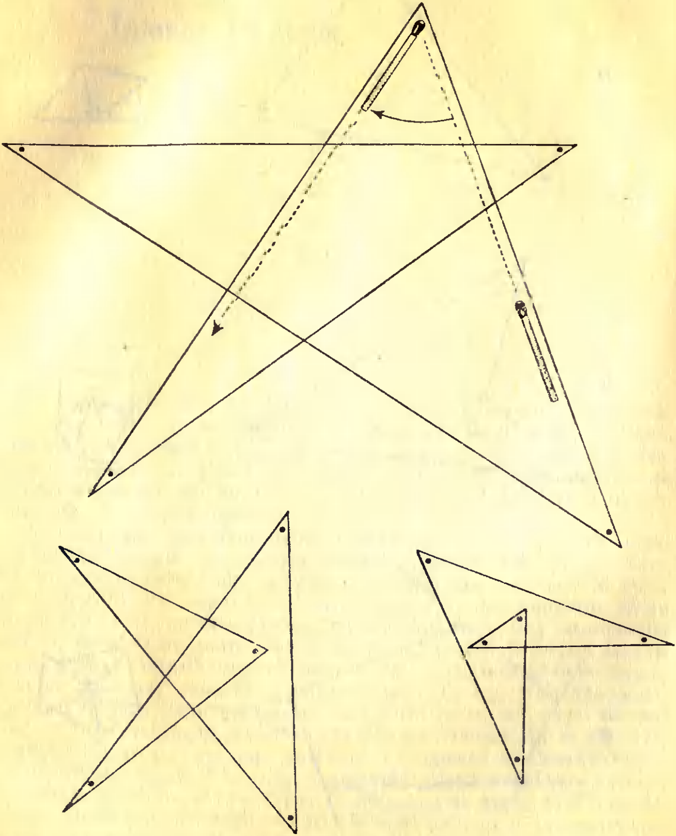


Fig. 18 Alunecarea unui chibrit de-a lungul laturilor unei pentagrame dovedește că suma unghiurilor marcate cu punct este de 180 grade.

lor pitagoreici. Desenaţi o astfel de stea cît mai neregulat cu putinţă (puteţi chiar include formele degenerate arătate în fig. 18, în care unul sau două puncte ale stelei sînt situate în interior), punctaţi cele cinci colţuri, tăiaţi steaua şi reuniţi colţurile. Veţi fi, poate, surprinşi să găsiţi că, la fel ca în cazul triunghiului, vîrfurile oricărei pentagrame se pot reuni, formînd un unghi de 180 grade. Această teoremă poate fi demonstrată şi printr-o altă metodă empirică amuzantă, care ar putea fi numită metoda chibritului alunecător. Desenaţi o pentagramă mai mare, apoi aşezaţi un chibrit de-a lungul uneia dintre laturi, aşa cum se vede în partea de sus a figurii 18. Alunecaţi chibritul în sus pînă cînd gămălia atinge vîrful, apoi înclinaţi-i coada spre stînga, în aşa fel ca chibritul să se aşeze de-a lungul celeilalte laturi. În acest fel, chibritul şi-a schimbat orientarea în plan cu un unghi egal cu unghiul de la colţul de sus al stelei. Alunecaţi chibritul în jos pînă la următorul colţ şi procedaţi la fel. Continuaţi să alunecaţi chibritul, repetînd operaţia la fiecare vîrf. Atunci cînd chibritul ajunge la poziţia de unde a plecat, el va fi cu capul în jos, deoarece a făcut pe parcurs o rotaţie de exact 180 grade. Această rotaţie este, evident, egală cu suma celor cinci unghiuri ale pentagramei.

Metoda chibritului alunecător poate fi folosită atît pentru confirmarea teoremelor deja menţionate, cît şi pentru găsirea altora noi. Este o metodă comodă pentru măsurarea unghiurilor oricărui tip de poligon, inclusiv cele cu formă de stea sau alte forme întîmplătoare. Întrucît chibritul trebuie să se întoarcă la poziţia sa de plecare, fie cu aceeaşi direcţie, fie cu sensul inversat, urmează că suma unghiurilor traversate trebuie să fie un multiplu al unui unghi de 180 grade (bineînţeles, numai dacă chibritul a fost rotit de fiecare dată într-o aceeaşi direcţie). Dacă chibritul a fost rotit în ambele direcţii în timpul alunecării — cum se întîmplă deseori în cazul poligoanelor încrucişate — nu putem obţine o sumă a unghiurilor, deşi şi în acest caz pot fi enunţate un număr de teoreme. Astfel, un chibrit alunecat în jurul perimetrului unui octogon încrucişat ca în fig. 19 se va roti în sensul acelor unui ceasornic la unghiurile marcate cu A, şi cu aceeaşi deschidere unghiulară la unghiurile B. Prin urmare, nu putem afla nimic despre suma celor opt unghiuri, dar putem spune că suma celor patru unghiuri A este egală cu suma celor patru unghiuri B. Această concluzie poate fi uşor verificată prin metoda foarfecelor, sau prin oricare metodă geometrică formală.

Chiar şi familiara teoremă a lui Pitagora se pretează la multe demonstraţii elegante cu foarfecele şi hîrtia. Iată aici una mai remarcabilă, descoperită în secolul al XIX-lea de Henry Perigal, un agent de bursă londonez şi astronom amator în orele libere. Construiţi

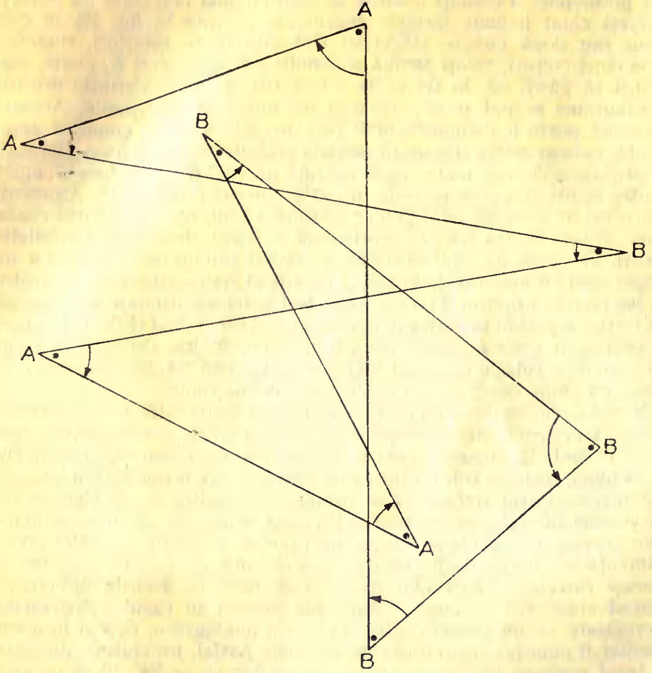


Fig. 19 În acest octogon concav, suma unghiurilor notate cu A este egală cu suma unghiurilor notate cu B.

pătrate pe cele două catete ale unui triunghi dreptunghic oarecare (fig. 20) ; împărțiți pătratul mai mare (sau unul dintre ele dacă cele două sînt egale) în patru părți identice, trasînd două linii prin centru, sub unghi drept una față de alta și cu una dintre linii paralelă cu ipotenuza triunghiului. Tăiați cele patru părți și pătratul rămas întreg. Veți constata că cele cinci piese obținute pot fi deplasate fără a le schimba orientarea în plan, în așa fel încît să puteți forma

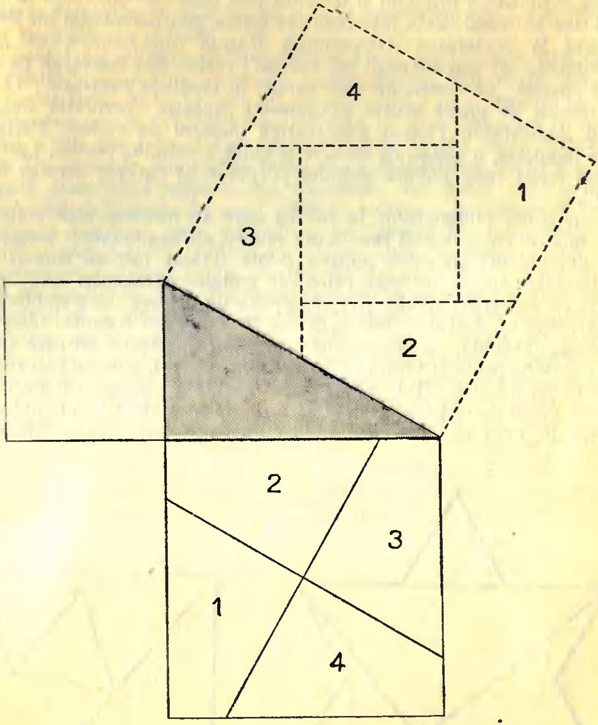


Fig. 20 Demonstraţia lui Henry Perigal, făcută cu ajutorul hîrtiei şi foarfecelor, pentru celebra propoziţie nr. 47 a lui Euclid.

un alt pătrat, mai mare, aşezat pe ipotenuză (indicat prin linii punctate).

Perigal a descoperit această demonstraţie prin 1830, dar nu a publicat-o decît în 1873. Era atît de fermecat de ea, încît purta diagrama desenată pe agenda sa de lucru; o avea astfel la îndemînă ori de cîte ori se întîlnea cu prietenii şi îi venea mai uşor să-i convingă de valabilitatea teoremei. Este interesant să aflăm, din necrologul lui Perigal păstrat la Societatea Astronomică Regală din Londra, că „ţelul astronomic cel mai mare al lui Perigal" fusese să-i convingă pe alţii, şi în special „pe tinerii nu prea înrăiţi în credinţa contrară", că este o deosebit de gravă eroare să numeşti „rotaţie" revoluţia Lunii în jurul Pămîntului. Pentru a-şi susţine punctul de vedere, Perigal a scris pamflete, a construit modele şi chiar a compus poeme, „purtînd cu un curaj eroic povara eşecului perpetuu al tuturor acestor încercări".

Împărţirea poligoanelor în bucăţi care să formeze alte poligoane este una dintre cele mai fascinante ramuri ale matematicii recreative. S-a demonstrat că orice poligon poate fi tăiat într-un număr finit de bucăţi, care să formeze orice alt poligon cu aceeaşi arie — dar astfel de împărţiri rămîn, fireşte, lipsite de interes dacă numărul de bucăţi este nu destul de mic pentru a face disecţia şocantă. Cine şi-ar închipui, de pildă, că hexagrama regulată (sau steaua cu şase colţuri a lui David) poate fi tăiată în numai cinci bucăţi, care se rearanjează într-un pătrat (fig. 21)? (Pentagrama regulată nu poate fi împărţită în mai puţin de opt bucăţi care să formeze un pătrat.) Cel mai mare expert din lume la acest gen de disecţii este probabil Harry Lindgren,

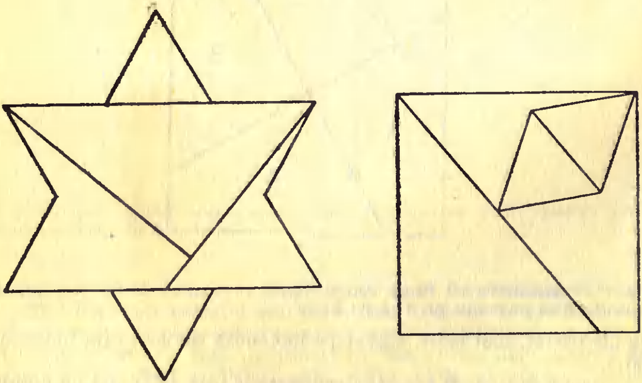


Fig. 21 F. B. Escott a descoperit această transformare a unei hexagrame regulate într-un pătrat.

de la Oficiul australian de patente. În fig. 22 sînt reprezentate frumoasa sa împărţire în şase bucăţi a unui dodecagon regulat şi rearanjarea bucăţilor în pătrat.

O clasă total diferită de recreaţii cu hîrtie tăiată, care ţine poate mai mult de scamatori decît de matematicieni, constă în îndoirea unei foi de hîrtie de mai multe ori, în practicarea unei singure tăieturi în linie dreaptă şi în desfacerea foii sau a celor două foi rezultate pentru a citi din forma tăieturii cine ştie ce fel de veste surprinzătoare. De exemplu, bucata de hîrtie după despăturire poate prezenta o figură geometrică regulată, sau un desen, sau poate avea o gaură de o astfel de formă. În anul 1955, o societate a magicienilor din Chicago a publicat, sub semnătura lui Gerald M. Loe, o cărticică numită *Paper Capers* (Euforii cu hîrtie), care se ocupă aproape în întregime cu astfel de jocuri. Cartea explică cum să îndoi o foaie de hîrtie, în aşa fel încît cu o singură tăietură să se realizeze orice literă dinainte dată a alfabetului, sau diferite tipuri de stele sau de cruci, sau forme mai complicate, ca de pildă lanţuri circulare de stele, o stea în interiorul altei stele etc. Un truc foarte răspîndit printre scamatorii americani şi care implică o singură tăietură este cel cunoscut sub numele de tăierea bicoloră. Un pătrat de hîrtie, colorată în roşu şi negru ca o tablă de şah cu cîte opt pătrăţele pe fiecare latură, este îndoit într-un anumit mod, după care se face o singură tăietură. Aceasta separă pătrăţelele roşii de cele negre şi, totodată, fiecare pătrăţel de celălalt. Folosind o hîrtie extrem de subţire, care permite observarea structurilor prin mai multe straturi, nu este greu să ela-

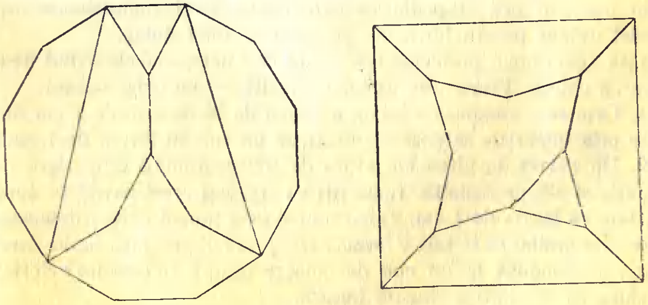


Fig. 22 Împărţirea unui dodecagon regulat şi transformarea lui în pătrat, efectuată de Harry Lindgren.

borați o metodă de a realiza acest truc, precum și metode de a obține cu o singură tăietură figuri geometrice simple; dar cu figuri mai complicate, problema este foarte dificilă.

Un joc cu hîrtie tăiată, de origine necunoscută, este ilustrat în fig. 23. El este însoțit de obicei de o istorioară despre doi lideri politici — unul admirat și celălalt urît. Ambii mor și se apropie de porțile cerului. Bineînțeles, cel Rău (R) nu posedă hîrtia necesară pentru intrare. El cere ajutorul celui Bun (B), care este lîngă el. Acesta își împăturește hîrtia lui, după cum se vede în fig. 23 *a*, *b*, *c*, *d* și *e*, apoi o taie de-a lungul liniei punctate indicate. Reține partea de la dreapta, dînd restul lui R. Sfîntul Petre deschide foaia lui R aranjează bucățile ca în partea din stînga-jos a figurii și vede cuvîntul IAD[2]. Cînd desface foaia lui B, constată că ea are forma unei cruci (partea dreaptă a figurii). Așa că decizia lui este ușoară.

Evident, este imposibil să se îndoaie hîrtia în așa fel încît cu o tăietură dreaptă să se realizeze figuri curbe, dar dacă foaia este înfășurată în formă de con, tăieri în felii plane prin acest con vor produce fîșii în formă de cercuri, elipse, parabole sau hiperbole, după unghiul de tăiere. Acestea sînt, bineînțeles, vestitele secțiuni conice studiate de vechii greci. Mai puțin cunoscut este faptul că se poate realiza rapid o curbă sinusoidală, înfășurînd o foaie de hîrtie de mai multe ori în jurul unei lumînări cilindrice și apoi tăind diagonal prin hîrtie și lumînare. Cînd este desfășurată, fiecare dintre cele două jumătăți ale hîrtiei va avea una dintre margini tăiată în formă de curbă sinusoidală — una dintre formele fundamentale de undă în fizică. Procedeul poate fi util gospodinelor care doresc să-și confecționeze un model drăguț pentru hîrtia de pe rafturile unui dulap.

Iată acum două probleme fascinante de tăiere, ambele avînd de-a face cu cuburi. Prima este ușoară; cealaltă — nu chiar ușoară.

1. Care este lungimea minimă a benzii de hîrtie late de 1 cm din care prin împărțire se poate confecționa un cub cu latura de 1 cm?

2. Un pătrat de hîrtie cu latura de trei centimetri este negru pe o parte și alb pe cealaltă. Împărțiți cu creionul acest pătrat în nouă pătrate cu latura de 1 cm. Tăind numai de-a lungul liniilor desenate, este oare posibil să se taie o formă care, prin îndoire după liniile desenate, să conducă la un cub de culoare neagră în exterior? Forma trebuie să fie dintr-o singură bucată.

[2] În limba engleză — HELL. — *N.T.*

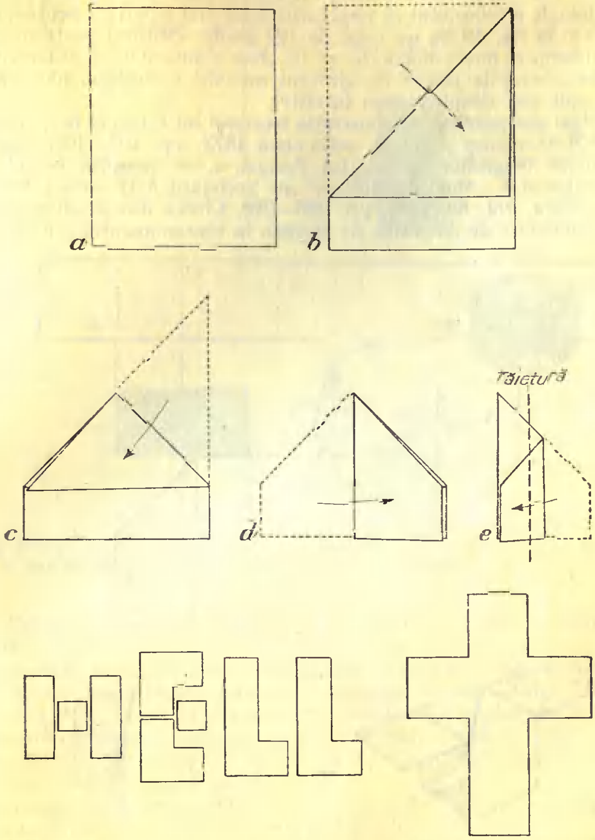


Fig. 23 Un vechi joc cu hîrtie tăiată.

Există, fără îndoială, tot felul de demonstrații geometrice tradiționale ale faptului că unghiurile celor trei tipuri de pentagrame ilustrate în fig. 18 au un total de 180 grade. Cititorul poate încerca să redescopere unele dintre ele — fie chiar și numai ca să se convingă că demonstrațiile făcute cu ajutorul metodei chibritului alunecător sînt mult mai simple și mai intuitive.

Perigal și-a publicat demonstrația teoremei lui Pitagora în „Messenger of Mathematics", vol. 2, seria nouă, 1873, pp. 103—106. Pentru informații biografice asupra lui Perigal, a se consulta necrologul său, publicat în „Monthly Notices" ale Societății Astronomice Regale din Londra, vol. 59, 1899, pp. 226—228. Cîteva din pamfletele sale sînt comentate de Augustus de Morgan în binecunoscutul său *Budget*

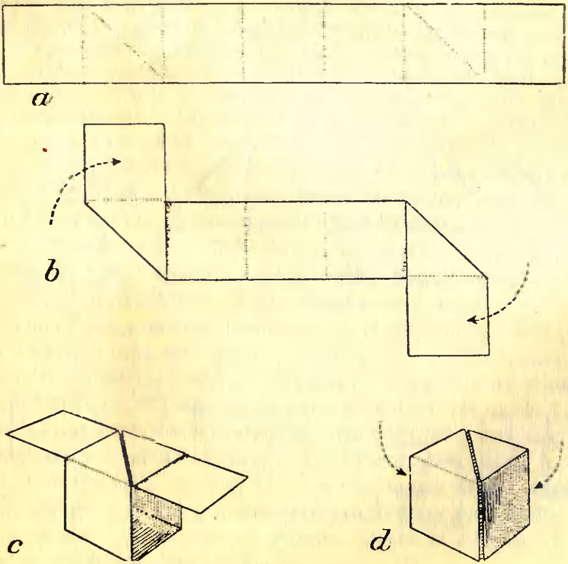


Fig. 24 Cum poate fi obținut un cub cu latura de 1 cm prin îndoirea unei benzi de hîrtie lată de 1 cm și lungă de 7 cm.

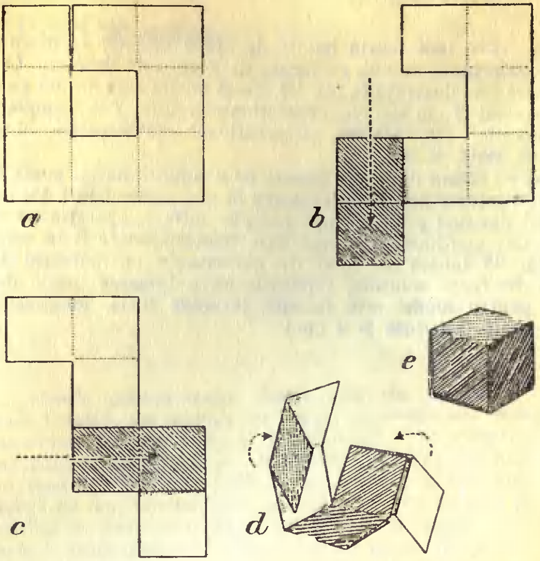


Fig. 25 Un cub complet negru poate fi obținut după acest model. Foaia de hîrtie de la care se pornește (stînga sus) este înnegrită pe partea care nu se vede.

of Paradoxes (Bugetul paradoxurilor), reeditat de editura Dover în 1954.

Eleganta împărțire a hexagramei într-un pătrat a fost descoperită, de Edward Brind Escott, un agent de asigurări din Oak Ridge (Illinois) mort în 1946. El era expert în teoria numerelor și colaborator frecvent la multe reviste matematice. Împărțirea realizată de el a fost citată ca soluție la problema nr. 109 din *Modern Puzzles*, cartea lui Henry Ernest Dudeney, publicată în 1926.

Amănunte asupra împărțirilor remarcabile reușite de Lindgren, sînt cuprinse în rubrica de Jocuri Matematice a numărului din noiembrie 1961 al revistei „Scientific American", ca și cartea lui Lindgren asupra împărțirilor (citată și în Bibliografie).

Cea mai scurtă bandă de hîrtie lată de 1 cm cu care se poate confecţiona un cub cu latura de 1 cm este de 7 cm. O metodă de îndoire este ilustrată în fig. 24. Dacă banda este neagră pe o parte, sînt necesari 8 cm pentru confecţionarea unui cub complet negru. (Un procedeu este dat în „Recreational Mathematics Magazine", februarie 1962, p. 52).

Foaia cu latura de 3 cm, neagră pe o singură parte, poate fi tăiată şi îndoită într-un cub complet negru în mai multe feluri. Cu un model constînd din mai puţin de opt pătrate unitare, operaţia nu se poate face — dar centimetrul pătrat care lipseşte poate fi în orice poziţie. Fig. 25 indică un mod de construcţie cu pătratul lipsă în mijloc. În toate soluţiile, tăieturile au o lungime totală de 5 cm. (Dacă pentru model este folosită întreaga foaie, lungimea liniilor tăiate poate fi redusă la 4 cm.)

CAPITOLUL VI

Jocuri de masă

„Jocurile posedă unele dintre calitățile operei de artă, scria Aldous Huxley. Cu regulile lor simple și precise, ele constituie insulițe ale ordinii în haosul vag și dezorganizat al experienței. Cînd jucăm, sau chiar cînd privim pe alții jucînd, trecem din lumea de neînțeles a unei realități date într-o lume mai mică, mai ordonată, o lume făcută de om, în care totul este clar, cu sens și mai ușor de înțeles. Spiritul de competiție contribuie la farmecul intrinsec al jocurilor, făcîndu-le palpitante, iar pariurile dintre spectatori și în general psihologia specifică mulțimilor adunate la competiții au, la rîndul lor, un efect excitant".

Huxley vorbește despre jocuri în general, dar observațiile sale se aplică cu deosebire jocurilor matematice de masă, în care rezultatul este determinat de gîndirea pură, neinfluențat de îndemînarea fizică sau de norocul orb (ca la zaruri, cărți sau alte jocuri bazate pe șansă). Aceste jocuri sînt la fel de vechi ca civilizația însăși și la fel de variate ca aripile fluturilor. Pe ele a fost cheltuită o cantitate fantastică de energie mintală, deoarece pînă foarte de curînd jocurile matematice au constituit aproape singurul mijloc de relaxare și de împrospătare a minții. Astăzi, ele au devenit dintr-o dată importante pentru teoria calculului. Mașini de jucat șah care pot învăța din experiență și pot manifesta inițiativă vor fi nu peste mult timp precursorii unor minți electronice, dotate cu puteri de neînchipuit.

Cele mai vechi informații despre jocuri matematice de masă se găsesc în arta vechiului Egipt, dar ele nu sînt de prea mare folos

Fig. 26 Basorelief găsit într-un mormînt egiptean din Sakara reprezentînd, în profil, un joc de masă (2500 î.e.n.) (*The Metropolitan Museum of Art, New York*).

din cauza obiceiului egiptean de a reprezenta scenele numai din profil (vezi fig. 26). În mormintele egiptene au fost găsite, este drept, anumite jocuri de masă (fig. 27), dar ele nu pot fi considerate ca jocuri de masă în sensul strict al cuvîntului, deoarece mai toate implică și un element de șansă. Ceva mai mult s-a aflat despre jocurile de masă grecești și romane, dar abia prin secolul al XIII-lea e.n. s-a considerat destul de interesant să se înregistreze regulile unui joc de masă. Primele cărți despre aceste jocuri au apărut prin secolul al XVII-lea.

Ca și organismele biologice, jocurile evoluează și dau naștere unor specii noi. Un număr mic de jocuri mai simple, cum este *Ticktacktoe*[1], pot rămîne neschimbate timp de secole; altele sînt foarte populare o vreme, ca apoi să dispară complet. Un bun exemplu în acest sens îl constituie un foarte complicat joc cu numere, denumit *Rithmomachy*, care era jucat, în Europa medievală, pe o masă de șah dublă cu opt pătrățele pe o parte și șaisprezece pe cealaltă, cu piese în formă de cercuri, pătrate și triunghiuri. El a fost foarte mult jucat începînd din secolul al XII-lea, cel puțin, pînă prin secolul al XVII-lea — cînd este citat de Robert Burton în a sa *The Anatomy of Melancholy* (Anatomia melancoliei) drept un foarte popular joc englez. Despre el

---

[1] Descrierea jocului este dată în *Amuzamente matematice*, p. 44. — *N.T.*

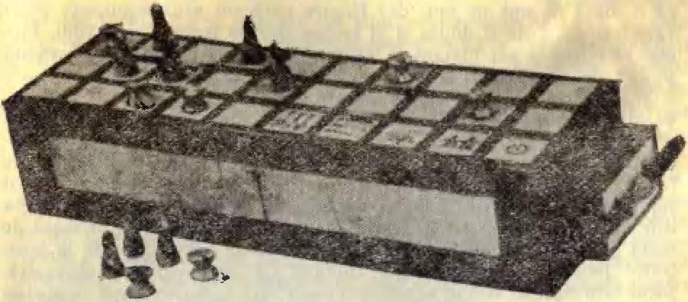


Fig. 27 Jocul de masă numit *senet* găsit într-un mormînt egiptean datînd de la 1400 î.e.n. (*The Metropolitan Museum of Art, New York*).

s-au scris multe tratate savante, dar nimeni nu-l mai joacă azi în afară de cîţiva matematicieni şi medievalişti.

În Statele Unite, cele mai populare jocuri matematice de masă sînt fără îndoială şahul şi damele. Ambele au o lungă şi fascinantă istorie, cu mutaţii neprevăzute ale regulilor de la timp la timp şi de la loc la loc. În Marea Britanie şi în Statele Unite, deşi damele au denumiri diferite (*draughts* şi, respectiv, *checkers*), jocul este aproape identic, dar în alte ţări el prezintă variaţii foarte mari. Aşa-numitele dame „poloneze" (inventate, de fapt, în Franţa) domină în momentul de faţă majoritatea Europei. Jocul este jucat pe o masă de zece pe zece, fiecare partener avînd cîte douăzeci de piese, care se pot „mînca" între ele atît pe direcţia înainte, cît şi înapoi. Piesele încoronate (numite regine, în loc de regi), se mişcă într-un fel asemănător cu nebunii de la şah, iar atunci cînd capturează o piesă adversă se aşază pe oricare pătrăţel vacant de dincolo de piesa capturată. Jocul este foarte răspîndit în Franţa (unde este cunoscut sub numele de *dames*) şi în Olanda; el constituie subiectul unei literaturi analitice foarte extinse. În provinciile de limbă franceză ale Canadei şi în anumite părţi ale Indiei, damele poloneze sînt jucate pe o masă de doisprezece pe doisprezece.

Damele jucate în Germania *(Damenspiel)* se aseamănă cu cele poloneze, dar sînt jucate pe o masă englezească de opt pe opt. O formă similară a acestui joc „redus" este foarte populară în Uniunea Sovietică, sub numele de *şaşki*. Variantele spaniolă şi italiană sînt foarte apropiate de cea engleză. În Turcia, jocul *(dama)* are loc tot pe o masă de opt pe opt, dar fiecare partener are șaisprezece piese care ocupă cel de-al doilea și al treilea rînd la începutul jocului. Piesele se mișcă și sar înainte și lateral, dar nu și diagonal; mai există și alte deosebiri față de variantele engleză și poloneză.

Și șahul s-a schimbat foarte mult în timp în ceea ce privește regulile, varianta cea mai veche fiind localizată în India, prin secolul al VI-lea e.n. Este adevărat, există astăzi un șah internațional care este standardizat, dar mai există încă multe forme neeuropene excelente, care în mod sigur împart cu șahul internațional o origine comună. Șahul japonez *(shogi)* se joacă la fel de mult ca și *go*[2], deși numai acesta din urmă este cunoscut în restul lumii. *Shogi* se joacă pe o masă de nouă pe nouă, cu douăzeci de piese de fiecare parte, așezate la începutul jocului pe primele trei rînduri. Ca și în varianta obișnuită, jocul este cîștigat făcînd șah-mat o piesă care se mișcă exact în același fel ca regele. O trăsătură interesantă a jocului este că piesele capturate pot fi folosite de jucătorul care le-a capturat.

Șahul chinezesc *(tséung k'i)* se sfîrșește și el prin șah-matul unei piese care se mișcă asemenea regelui din varianta internațională, dar regulile se deosebesc destul de mult de cele ale jocului japonez. Cele 32 de piese stau pe pătrățelele unei mese de opt pe opt, care este împărțită prin centru de un rînd orizontal gol, numit „rîu". O a treia variantă, cea coreeană *(tjyang-keui)*, este jucată pe pătrățelele unei mese care se aseamănă cu cea chinezească, cu excepția faptului că „rîul" nu mai este special marcat, astfel că masa arată ca o masă de dame de opt pe nouă. Numărul pieselor este identic ca în jocul chinezesc, cu aceleași nume, aceleași poziții la deschidere (exceptînd regele), dar altfel jocurile diferă mult ca reguli și ca putere a pieselor. Adepții fiecăreia dintre cele trei variante orientale consideră pe celelalte două, ca și șahul internațional de altfel, ca inferioare.

Șahul marțian („jetan"), explicat de Edgar Rice Burroughs în anexa la romanul său *The Chessmen of Mars* (Șahiștii de pe Marte), este o variantă amuzantă, jucată pe o masă de zece pe zece, cu piese neobișnuite și reguli ciudate. De pildă, prințesa (care în linii mari corespunde cu regele din varianta pămînteană) se bucură de privilegiul unei „mutări de salvare" în fiecare joc, care îi permite să sară la orice distanță și în orice direcție.

În afară de aceste variante regionale ale șahului, jucătorii moderni, plictisiți de jocul ortodox, au inventat și ei un bogat sortiment de variante, cunoscute ca „șah imaginar". Astfel, pe o tablă de șah obișnuită se poate juca neortodox în următoarele feluri: fiecare jucător mută, atunci cînd îi vine rîndul, cîte două piese; unul dintre jucători

[2] A se vedea *Amuzamente matematice*, pp. 47–48. — *N.T.*

nu are pioni de loc, sau are un rînd suplimentar de pioni în locul reginei; şah cilindric — în care partea dreaptă a tablei se consideră unită cu cea stîngă (iar dacă se consideră că tabla a fost răsucită cu 180 grade înainte de a uni marginile, şah Moebius); şah de transport — în care orice piesă poate fi mutată o dată cu turnul (sau aşezată pe turn). Au fost introduse zeci de piese ciudate — cum ar fi „cancelarul", care combină mişcările turnului şi ale calului, „centaurul", care combină calul cu nebunul, şi chiar piese neutre (de exemplu, o regină albastră), care pot fi folosite de ambele părţi. (În romanul ştiinţifico-fantastic *The Fairy Chessmen* (Jucătorii de şah imaginar) al lui Lewis Padgett, un război este cîştigat datorită unui matematician pasionat de şahul imaginar. Mintea sa, obişnuită să calce reguli, este destul de elastică pentru a înţelege o ecuaţie prea bizară pentru colegii săi mai străluciţi, dar mai ortodocşi.)

O specie amuzantă de şah imaginar, destul de veche dar furnizînd încă recreaţii delicioase între jocuri mai serioase, se joacă în felul următor. Unul dintre jucători îşi aşază cele şaisprezece piese în modul obişnuit, dar celălalt are o singură piesă, numită „maharajah" şi avînd mişcările combinate ale reginei şi ale calului. Maharajahul este aşezat iniţial pe oricare pătrăţel liber neameninţat de un pion, după care partea adversă face prima mişcare. Maharajahul pierde dacă este capturat şi cîştigă dacă reuşeşte să facă regele şah-mat. Pionii nu pot fi înlocuiţi cu regine sau cu alte piese dacă avansează pe ultimul rînd. Dacă se renunţă la această condiţie, maharajahul poate fi înfrînt uşor, avansînd pur şi simplu pionii din faţa turnurilor, pînă cînd pot fi înlocuiţi cu regine. Maharajahul nu poate împiedica aceşti pioni protejaţi să ajungă pe ultimul rînd. Cu trei regine şi două turnuri este deosebit de uşor să se captureze maharajahul.

Chiar *cu* această condiţie, s-ar putea crede că maharajahul are foarte slabe şanse de a cîştiga. Dar mobilitatea sa este atît de mare, încît dacă se mişcă repede şi agresiv, poate face şah-mat după numai cîteva mutări, la începutul jocului. Dacă a pierdut această ocazie, el poate curăţa masa de piese şi forţa apoi regele singuratic să ajungă într-un colţ al tablei, unde este făcut şah-mat.

S-au inventat sute de jocuri care se joacă pe mese standard de şah sau de dame, dar care nu au nimic comun cu aceste jocuri. Unul dintre cele mai bune, după părerea mea, este jocul de *reversi*, acum aproape uitat. Acesta foloseşte 64 de piese plate, care sînt vopsite în culori contrastante (de exemplu, roşu şi negru) pe cele două feţe. Piesele pot fi confecţionate dintr-o foaie de carton colorată diferit pe cele două părţi, din care se taie rondele. Cred că merită osteneala, pentru că jocul se poate dovedi foarte interesant pentru întreaga familie.

Reversi începe cu masa goală. Unul dintre jucători are 32 de piese întoarse cu fața roșie în sus, iar celălalt, 32 cu fața neagră în sus. Jucătorii pun pe rînd cîte o piesă pe tablă, după următoarele reguli:

1. Primele patru piese trebuie plasate pe cele patru pătrățele centrale. Experiența a arătat că este mai bine pentru primul jucător să plaseze cea de-a doua piesă a sa deasupra, dedesubtul sau de o parte a primei piese (un exemplu este arătat în fig. 28; piesele roșii sînt reprezentate hașurat) decît diagonal, dar nu este obligatoriu să procedeze așa. De asemenea, este înțelept pentru cel de-al doilea jucător să nu joace diagonal la prima mutare a adversarului său, mai ales dacă acesta este un începător. Aceasta dă primului jucător o sansă să execute mutarea diagonală contraindicată atunci cînd își așază cea de-a doua piesă. Între experți, jocul începe întotdeauna așa cum se află în fig. 28.

2. După ce sînt completate cele patru pătrățele centrale, jucătorii continuă să plaseze cîte o piesă. Fiecare trebuie așezată astfel ca să fie adiacentă cu o piesă adversă, transversal sau diagonal. Mai mult, ea trebuie să fie în linie dreaptă cu o altă piesă de aceeași culoare și cu una sau mai multe piese adverse, și între ele să nu fie locuri goale. Cu alte cuvinte, o piesă trebuie întotdeauna plasată astfel ca să formeze pereche cu o altă piesă prietenă, de o parte și de alta a unei piese sau a unui șir de piese adverse. Aceste piese adverse sînt considerate capturate, dar în loc să fie luate de pe masă, sînt întoarse, în așa fel ca să devină piese prietene. Ele suferă, ca să spunem așa, o „spălătură a creierului", aliindu-se cu cel care le-a capturat. Pe toată durata jocului, piesele rămîn nemișcate ca poziție, dar pot fi întoarse de pe o față pe alta de ori cîte ori.

3. Dacă așezarea unei piese capturează simultan mai mult decît un șir de piese adverse, sînt inversate piesele din ambele șiruri.

4. Piesele pot fi capturate numai prin așezarea unei piese adverse. Șirurile care devin flancate la ambele capete ca rezultat al altor cauze nu sînt capturate.

5. Dacă un jucător nu poate muta, el pierde rîndul. Continuă să piardă rîndul pînă în momentul cînd pentru el devine posibilă o mișcare legală.

6. Jocul se sfîrșește cînd toate cele 64 de pătrățele sînt umplute, sau cînd nici unul dintre jucători nu mai poate muta (fie pentru că nu are posibilități legale de a muta, fie că și-a terminat piesele). Cîștigător este cel care sfîrșește cu mai multe piese pe tablă.

Vom clarifica aceste reguli cu două exemple. În fig. 28, negrul poate juca numai pe cîmpurile 43, 44, 45 și 46. În fiecare dintre aceste cazuri, el capturează și întoarce o singură piesă adversă. În fig. 29, dacă

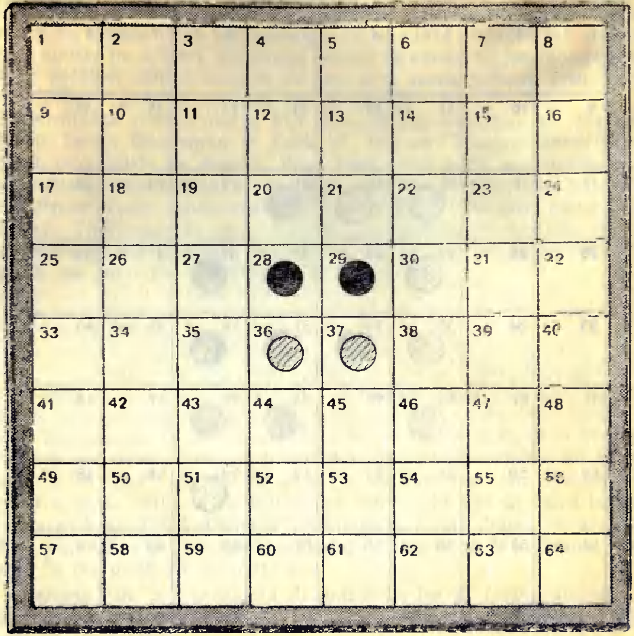


Fig. 28 O deschidere pentru jocul *reversi*. Numerele sînt indicate numai pentru orientare.

roșul joacă pe cîmpul 22, poate răsturna șase piese: 21, 29, 36, 30, 38 și 46. Ca rezultat, masa, care era pînă acum aproape neagră, devine brusc aproape roșie. Astfel de inversări dramatice de culoare sînt caracteristice acestui joc neobișnuit și deseori este foarte greu de spus cine are avantaj pînă în momentul cînd trebuie să se joace ultimele piese. De cele mai multe ori, jucătorul care are piesele cele mai puține are un avantaj pozițional însemnat.

Cîteva observații pentru începători: dacă este posibil, reduceți jocul de la început la cele șaisprezece pătrățele centrale, străduindu-vă îndeosebi să ocupați cîmpurile 19, 22, 43 și 46. Primul jucător împins

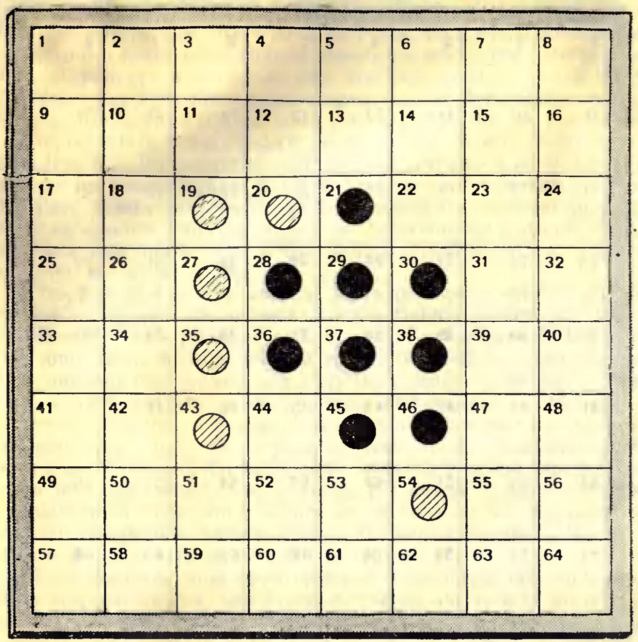


Fig. 29 Dacă cel care joacă cu piesele deschise la culoare face prima mutare, poate „captura" şase piese negre.

în afara acestei arii este de obicei plasat într-o postură dezavantajoasă. În afara celor şaisprezece cîmpuri centrale, cele mai de folos cîmpuri sînt cele din colţurile tablei. Din această cauză, este neindicat să jucaţi pe cîmpurile 10, 15, 50 sau 55, deoarece aceasta ar da adversarului posibilitatea să ocupe cîmpurile din colţuri. După colţuri, cele mai de dorit cîmpuri sînt 3, 6, 17, 24, 41, 48, 59 şi 62. Evitaţi să daţi adversarului şansa să ocupe aceste pătrăţele. Reguli strategice mai rafinate vor apărea fără îndoială celui care trece de stagiul noviciatului.

Prea puţin s-a publicat pînă acum în ceea ce priveşte analiza jocului de reversi. Este destul de greu de spus care este jucătorul cu avantaj chiar şi pe o masă mică, de patru pe patru. Iată o problemă care ar putea amuza pe cititori. Este oare posibil să existe un joc în care unul dintre jucători cîştigă înainte de cea de-a zecea mutare prin eliminarea *tuturor* pieselor adverse de pe masă?

Paternitatea reversi-ului a fost revendicată simultan de către doi englezi, Lewis Waterman şi John W. Mollett. Fiecare dintre ei l-a acuzat pe celălalt de fraudă. Prin 1880, cînd jocul se bucura de o popularitate formidabilă în Anglia, ambii pretendenţi au autorizat unor firme rivale fabricarea echipamentului şi editarea manualelor necesare. Indiferent de cine l-a inventat de fapt, reversi este un joc care combină complexitatea structurii cu reguli de o simplitate cuceritoare, un joc care nu merită uitarea.

ADAOS

Jocul *maharajahului* (pe care l-am găsit în cartea lui R. C. Bell *Board and Table Games* (Jocuri de masă)) poate fi întotdeauna cîştigat de jucătorul cu piese convenţionale dacă joacă cu grijă. Richard A. Blue, Dennis A. Keen, William Knight şi Wallace Smith mi-au trimis strategii împotriva cărora maharajahul nu se mai poate salva, dar linia de joc care mi se pare cea mai eficace mi-a fost trimisă de William E. Rudge, pe atunci student în fizică la Universitatea Yale. Dacă strategia lui Rudge este fără defect — aşa cum mi se pare că este — atunci maharajahul poate fi întotdeauna capturat în cel mult 25 de mutări.

Strategia este independentă de mişcările lui M (maharajahul), cu excepţia a trei mişcări posibile. În cele ce urmează sînt înşirate numai mutările atacantului:

1. a—4
2. a—5
3. a—6
4. a—7
5. e—3
6. C h—3
7. C f—4
8. N d—3
9. 0—0
10. D h—5
11. C c—3
12. C c—3, d—5
13. Ta—6
14. b—4

M este acum forţat să se mişte pe rîndul 7 sau 8.

15. h—3

Această mişcare trebuie făcută numai dacă M se află pe cîmpul g—7. Mişcarea îl forţează să părăsească diagonala, permiţînd mutarea următoare.

16. N b—2
17. T f—1, a—1
18. T e—6
19. T a—1, a—6
20. T e—7
M este silit să se retragă pe rîndul 8.
21. T a—6, e—6
22. N g—7
Această mutare se face numai dacă M se află pe f—8 sau g—8.
23. c—3
Această mutare trebuie făcută numai dacă M se află pe g—8.
24. D e—8
Acum maharajahul poate fi capturat în mişcarea următoare.

Mutările 1—4 pot fi interschimbate cu mutările 5—9, cu condiţia ca succesiunea din fiecare grup să fie păstrată. Această interschimbare se poate dovedi necesară dacă M blochează un pion. Mutările 15 şi 22 sînt mişcări de întîrziere, necesare numai dacă M este pe cîmpurile menţionate. Mutarea 23 este cerută numai dacă M trebuie forţat spre acea parte a tablei ocupată de regină.

Cît despre reversi, prea puţin se ştie despre istoria sa timpurie. Se pare că jocul a apărut pentru prima oară la Londra în 1870, sub numele de „Jocul anexării"; el era jucat pe o masă în formă de cruce. O a doua versiune, care folosea masa standard de şah (8 × 8), a fost botezat „Annex, un joc al inversării". Prin 1888, numele se transformase în reversi şi era în mare vogă în Anglia. Articole şi cronici despre joc apăreau în 1888 în ziarul londonez „Queen". Ceva mai tîrziu, o variantă numită „Reversi regal", care folosea cuburi cu feţe diferit colorate, era fabricată şi vîndută de o firmă „Jacques & Son". (Pentru o descriere a acestei variante „regale" şi o ilustraţie a jocului însuşi, vedeţi cartea „Profesorului Hoffman" (Angelo Lewis), *The Book of Table Games* (Cartea jocurilor de masă, pp. 621—623).

Reversi şi alte jocuri derivate din el se vînd de cîţiva ani încoace şi în Statele Unite, sub nume foarte diferite. Milton Bradley a introdus în 1938 *Cameleonul*, o variantă a reversi-ului regal. Firma „Tryne Products" a pus pe piaţă prin 1960 o variantă sub numele de *Las Vegas Backfire*[3]. *Exit*, un joc apărut în Anglia în 1965, nu este altceva decît reversi jucat pe o masă cu cîmpuri circulare. Un capac fixat pe fiecare cîmp permite, prin simplă întoarcere, să scoată la iveală culorile roşu, albastru sau alb (neutru), eliminînd astfel nevoia de piese.

---

[3] *To backfire* — a produce un rezultat opus celui aşteptat sau plănuit. — *N.T.*

Poate oare un jucător de reversi să cîştige un joc în mai puţin de zece mutări, prin eliminarea tuturor pieselor adversarului? Răspunsul este Da. În articolul meu original din „Scientific American" dădeam ceea ce credeam pe atunci a fi jocul cel mai scurt posibil, primul jucător cîştigînd la a opta mutare. Dar doi cititori au descoperit jocuri şi mai scurte.

D. H. Peregrine, de la Jesus College, Oxford, mi-a trimis următorul joc în şase mutări:

Primul jucător	*Al doilea jucător*
28	29
36	37
38	45
54	35
34	27
20	

Iar Jon Petersen, din Menlo Park (California), a găsit un joc de şase mutări uşor diferit:

Primul jucător	*Al doilea jucător*
36	28
37	29
21	30
39	44
35	45
53	

CAPITOLUL VII

Împachetarea sferelor

Sferele de dimensiuni egale pot fi împachetate împreună în multe feluri diferite, dintre care multe au trăsături recreative remarcabile. Aceste trăsături pot fi înțelese fără a avea la îndemînă modele, dar dacă cititorul poate face rost de vreo 30 de sfere, ele s-ar putea dovedi de mare folos la înțelegerea celor ce urmează. Poate că mingile de tenis de masă sînt cele mai bune în acest sens. Ele pot fi ușor lipite una de alta pentru a clădi modele rigide.

Mai întîi, să atacăm pe scurt problema bidimensională. Dacă aranjăm sferele într-o formație pătrată (vezi fig. 30, dreapta), numărul sferelor care intră în joc este fără îndoială un număr pătratic. Dacă formăm un triunghi (fig. 30, stînga), numărul sferelor este un număr triunghiular. Acestea sînt cele mai simple exemple de ceea ce anticii numeau „numere figurate". Ele au fost intensiv studiate de matematicienii mai vechi (Blaise Pascal a scris un celebru tratat asupra lor) și, deși astăzi nu mai atrag atenția prea mult, ele furnizează o înțelegere intuitivă a multor aspecte ale teoriei elementare a numerelor.

Este, astfel, suficientă o privire la fig. 30, stînga, pentru a vedea că suma oricărui număr de întregi pozitivi consecutivi, începînd cu 1, este un număr triunghiular. Fig. 30, dreapta, arată, la rîndul său, că numerele pătratice sînt formate prin adunarea întregilor *impari* consecutivi, începînd cu 1. Figura 31 relevă imediat o interesantă teoremă, cunoscută și vechilor pitagoreici: fiecare număr pătratic este suma a două numere triunghiulare consecutive. Demonstrația

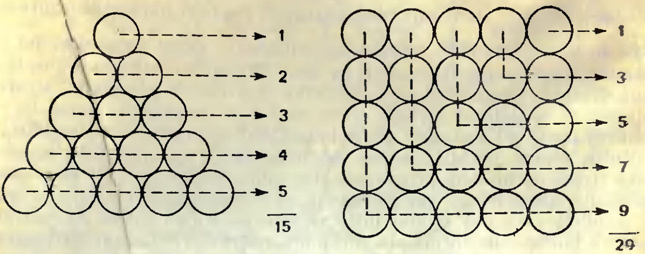


Fig. 30 Baza numerelor triunghiulare (stînga) și a numerelor pătratice (dreapta).

algebrică este simplă. Un număr triunghiular cu n unități pe o parte este suma $1 + 2 + 3 + \cdots + n$, deci poate fi exprimat prin formula $\frac{1}{2}n(n+1)$. Numărul triunghiular precedent are formula $\frac{1}{2}n(n-1)$. Dacă adunăm cele două relații și simplificăm, rezultatul este n^2. Există oare numere care să fie simultan și pătratice și triunghiulare? Da, există infinit de multe astfel de numere. Cel mai mic dintre ele (excluzînd pe 1, care aparține oricărei serii figurate) este 36; seria continuă astfel: 1225, 41 616, 1 413 721, 48 024 900, ... Nu este ușor să se găsească o formulă pentru cel de al n-lea termen al acestei serii.

Analogi tridimensionali ai numerelor figurate plane pot fi obținuți clădind, cu sferele, piramide. Piramidele triunghiulare care au toate fețele triunghiuri echilaterale pot fi considerate modele pentru ceea ce se numesc numere tetraedrice. Ele formează seria 1, 4, 10, 20, 35, 56, 84, ... și pot fi reprezentate prin formula $\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$, unde n este numărul de sfere de-a lungul unei muchii. Piramidele pătratice avînd baza un pătrat și fețele laterale triunghiuri echilaterale (fiind prin urmare jumătăți de octaedru) reprezintă numerele piramidale (pătratice) 1, 5, 14, 30, 55, 91, 140, ... Ele au formula

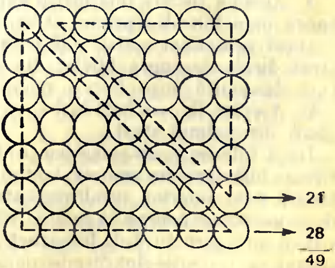


Fig. 31 Numerele triunghiulare și cele pătratice sînt înrudite.

$\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$. O piramidă pătratică poate fi împărțită printr-un plan în două piramide tetraedrice adiacente, exact în același fel în care un pătrat poate fi împărțit în două triunghiuri adiacente printr-o linie dreaptă. (Dacă veți clădi modelul unui număr piramidal, stratul inferior al modelului trebuie ținut să nu se împrăștie; acest lucru poate fi făcut plasînd rigle sau scîndurele de-a lungul laturilor bazei.)

Multe dintre vechile enigme se bazează pe proprietățile acestor două tipuri de numere piramidale. De pildă, pentru a clădi un monument din ghiulele de tun (rotunde), care este numărul cel mai mic de ghiulele care pot fi mai întîi așezate pe sol în formă de pătrat, apoi reclădite sub formă de piramidă pătratică? Lucrul surprinzător în legătură cu răspunsul la această problemă (4900) este că el este *singurul* răspuns. (Demonstrația acestui fapt este grea și nu a fost dată decît în 1918.) Un alt exemplu: un vînzător de fructe expune portocalele în forma a două piramide tetraedrice. Adunînd apoi la un loc portocalele expuse, reușește să le reclădească ca o singură piramidă tetraedrică mai mare. Care este numărul minim de portocale de care are nevoie? Dacă cele două piramide mici au aceleași dimensiuni, răspunsul unic este 20. Care este răspunsul în cazul în care piramidele mici nu sînt egale?

Să ne închipuim acum că avem o cutie foarte mare, să zicem o ladă de pian, pe care dorim să o umplem cu cît mai multe bile cu putință. Ce procedeu de împachetare vom utiliza? Mai întîi formăm un strat împachetat cum se arată în fig. 32 (cercurile neumbrite, cu circumferințe subțiri). Cel de-al doilea strat se formează așezînd alternativ bile în golurile lăsate de primul strat, așa cum se arată în figură prin cercuri umbrite și cu circumferințe îngroșate. Atunci cînd construim cel de-al treilea strat, putem alege între următoarele două procedee:

1. Așezăm fiecare bilă într-o gaură de tip A, care este situată deasupra unei bile din primul strat.

Dacă procedăm astfel, adică dacă așezăm bilele dintr-un anumit strat direct deasupra bilelor din stratul penultim, se obține o stuctură denumită împachetare compactă *hexagonală*.

2. Așezăm fiecare bilă într-o gaură de tip B, direct deasupra unei găuri din primul strat.

Dacă folosim acest procedeu pentru fiecare strat, adică dacă așezăm fiecare bilă dintr-un anumit strat direct deasupra unei bile din cel de-al treilea strat inferior, rezultatul este o structură cunoscută sub numele de împachetare compactă *cubică*. Atît piramida pătratică, cît și cea tetraedrică au o structură de împachetare de acest tip, deși într-o piramidă pătratică straturile sînt dispuse paralel cu fețele laterale și nu cu baza.

Atunci cînd construim straturile unei împachetări compacte, putem schimba ori de cîte ori vrem tipul de împachetare de la hexagonal

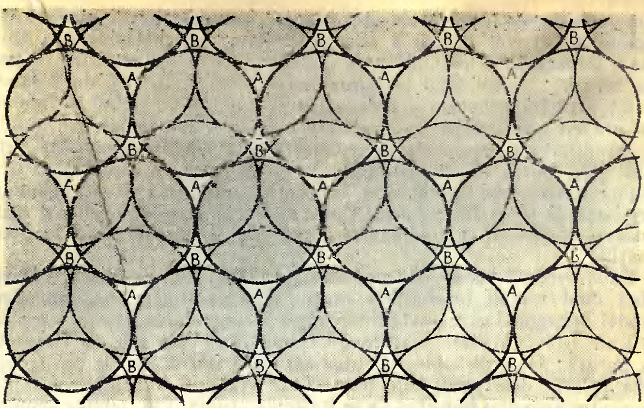


Fig. 32 La împachetarea compactă hexagonală, sferele intră în găurile notate cu A; la împachetarea cubică, ele intră în găurile notate cu B.

la cubic și înapoi, realizînd diferite forme hibride de împachetare compactă. În toate aceste forme — cubică, hexagonală și hibridă — fiecare bilă atinge alte 12 bile care o înconjură, iar densitatea împachetării (raportul dintre volumul sferelor și spațiul total) este în fiecare caz $\pi/\sqrt{18} = 0{,}740\,48\ldots$, sau aproape 75 la sută.

Este oare aceasta cea mai mare densitate care poate fi obținută? Fapt este că nu se cunoaște o densitate mai mare, dar într-un articol publicat în 1958 (asupra relației dintre împachetarea compactă și spume), H. S. M. Coxeter, de la Universitatea din Toronto (Canada), a făcut surprinzătoarea observație că este probabil că împachetarea cea mai densă nu a fost găsită încă. Este adevărat că nu pot fi plasate mai mult de douăsprezece sfere în jurul altei sfere astfel ca toate să se atingă între ele — dar o a treisprezecea sferă, care *aproape* că atinge pe cea din mijloc, are totuși loc! Spre deosebire de cazul împachetării în plan, în împachetarea în spațiu există mult loc liber, ceea ce sugerează că trebuie să fie vreo formă de împachetare neregulată care să aibă densitatea mai mare decît 0,74. Nimeni nu a putut demonstra pînă acum că nu este posibilă o împachetare mai densă, și nici măcar că contactul în douăsprezece puncte pentru fiecare sferă este necesar pentru împachetarea cea mai densă. În urma lucrărilor lui Coxeter, George D. Scott, de la aceeași Universitate, a întreprins recent cîteva experiențe asupra împachetării întîmplătoare, turnînd un mare număr de bile de oțel în rezervoare sferice, apoi cîntărind aceste rezervoare pentru a afla densitatea împachetării. El a găsit că o împachetare întîmplătoare stabilă are o densitate care variază de la aproximativ 0,59 la aproximativ 0,63. Astfel că dacă există în adevăr o împachetare mai densă decît 0,74, ea va trebui să fie construită cu grijă, după un model la care încă nimeni nu s-a gîndit.

Admițînd că împachetarea compactă este cea mai compactă, cititorii și-ar putea încerca istețimea la împachetat cu următoarea problemă extrem de înșelătoare. Interiorul unei cutii dreptunghiulare are baza de 10 × 10 cm și înălțimea de 5 cm. Care este cel mai mare număr de bile de 1 cm diametru care pot fi împachetate în acest spațiu?

Dacă cercurile compact-împachetate pe un plan se dilată uniform pînă cînd umplu interstițiile dintre ele, rezultatul este familiarul model hexagonal care poate fi văzut pe pardoseala de mozaic a multor săli de baie. (Aceasta explică de ce modelul este atît de răspîndit în natură: fagurele albinelor, pigmenții din retină, bulele din spuma aflată între două suprafețe plane care aproape se ating, suprafața anumitor alge diatomee etc.) Ce se întîmplă atunci cînd sferele compact-împachetate se dilată uniform într-un vas închis, sau cînd sînt supuse unei presiuni uniforme din afară? Fiecare sferă devine un poliedru, fețele sale corespunzînd unor plane care erau tangente în punctele sale de contact cu celelalte sfere. Împachetarea compactă cubică transformă fiecare sferă într-un dodecaedru rombic (fig. 33, sus), ale cărui 12 fețe sînt romburi congruente. Împachetarea compactă face din fiecare sferă un dodecaedru trapezo-rombic (fig. 33, jos), cu șase fețe rombice și șase trapezoidale. Dacă această figură este tăiată în două prin planul indicat în ilustrație, iar una dintre jumătăți este rotită cu 60 grade, ea devine un dodecaedru rombic.

În 1727, fiziologul englez Stephen Hales descria în cartea sa *Vegetable Staticks* (Statistica vegetalelor) cum a reușit să obțină „dodecaedre aproape regulate" punînd mazăre proaspătă într-o oală și comprimînd-o. Experiența a devenit cunoscută sub numele de „mazărea lui Buffon" (deoarece mai tîrziu o experiență similară a fost relatată de contele de Buffon[1]) și a fost acceptată fără rezerve de majoritatea biologilor, pînă cînd Edwin B. Matzke, un botanist de la Universitatea Columbia, a repetat, în cele din urmă, experiența. Din cauza dimensiunilor și formelor diferite ale boabelor de mazăre, a consistenței lor neuniforme și a împachetării întîmplătoare care rezultă atunci cînd sînt turnate în vas, formele boabelor după comprimare sînt prea diferite pentru a putea fi identificate. În experiențele sale, publi-

[1] Georges Louis Leclerc, conte de Buffon, naturalist francez (1707—1788). — *N.T.*

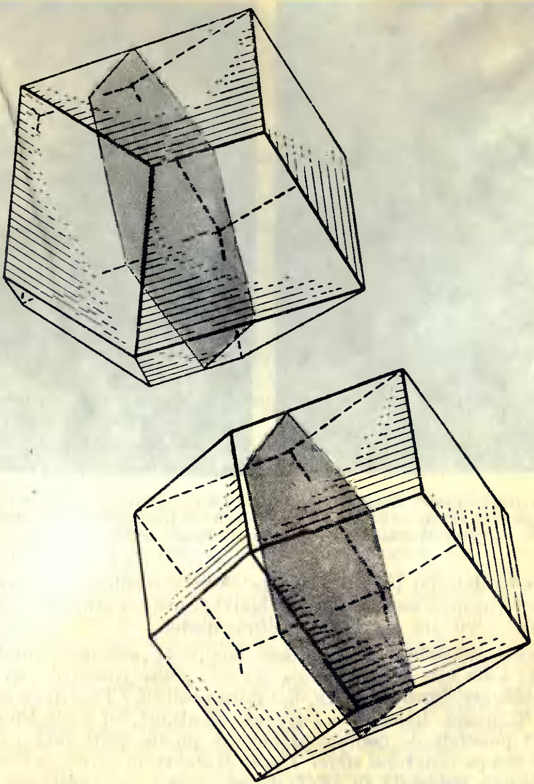


Fig. 33 Sferele compact-împachetate se deformează în dodecaedre.

cate în 1939, Matzke a comprimat alice de plumb şi a găsit că dacă sferele fuseseră împachetate compact cubic, se formează dodecaedre rombice, dar dacă împachetarea fusese întîmplătoare, predomină

Fig. 34 Împachetarea dezlînată a lui Heesch şi Laves. Mai întîi se împachetează sfere mari (stînga), apoi fiecare astfel de sferă este înlocuită cu trei sfere mai mici, obţinîndu-se modelul din dreapta. Acesta are o densitate de numai 0,055.

forme neregulate cu paisprezece feţe. Aceste rezultate au consecinţe importante, după cum a subliniat Matzke, asupra studiilor spumelor sau celulelor vii din ţesuturile nediferenţiate.

Problema împachetării celei mai compacte sugerează întrebarea contrară: Care este împachetarea *cea mai puţin compactă*? Ce structură rigidă are densitatea cea mai mică posibilă? Pentru ca o structură să fie rigidă, fiecare sferă trebuie să atingă cel puţin alte patru sfere, iar punctele de contact trebuie să nu fie toate într-o singură emisferă sau pe ecuatorul sferei. David Hilbert[2], în cartea sa *Geometria şi imaginaţia*, publicată în 1932, descrie ceea ce se credea pe atunci a fi împachetarea cea mai dezlînată: o structură cu densitatea 0,123. În anul următor însă, doi matematicieni olandezi, Heinrich Heesch şi Fritz Laves, au publicat detalii ale unei împachetări cu mult mai puţin strînse, avînd densitatea de numai 0,0555 (vezi fig. 34). Pro-

[2] Matematician german, 1862–1943. — *N.T.*

blemă dacă există sau nu alte împachetări şi mai puţin compacte este o problemă foarte interesantă, care, ca şi problema împachetării celei mai compacte, rămîne încă nerezolvată.

ADAOS

Răspunsul unic de 4900 pentru numărul de ghiulele care să formeze atît un pătrat, cît şi o piramidă cu baza pătratică, a fost găsit de G. N. Watson, în „Messenger of Mathematics", seria nouă, vol. 48, 1918, pp. 1–22. Răspunsul fusese ghicit încă din 1875 de matematicianul francez Edouard Lucas. Henry Ernest Dudeney a bănuit un rezultat similar în răspunsul la problema nr. 138 din cartea sa *Amusements in Mathematics* (Amuzamente matematice), 1917.

Există o literatură bogată asupra numerelor care sînt simultan triunghiulare şi pătratice. O mare parte din ea este citată într-o notă editorială la problema nr. E 1473 din „American Mathematical Monthly", februarie 1962, p. 169; tot acolo se dă următoarea formulă pentru cel de-al n-lea pătrat-triunghiular:

$$\frac{(17 + 12\sqrt{2})^n + (17 - 12\sqrt{2})^n - 2}{32}.$$

Problema împachetării regulate cea mai densă posibil a sferelor a fost rezolvată pentru toate spaţiile, pînă la opt dimensiuni inclusiv. (Vezi *Proceeding of Symposia in Pure Mathematics*, vol. 7, American Mathematical Society, 1963, pp. 53–71). În spaţiul tridimensional, răspunsul este împachetarea compactă regulată descrisă mai înainte, care are o densitate de 0,74. Dar atunci cînd se ajunge la spaţiul 9-dimensional, după cum observă Constance Reid în cartea sa *Introduction to Higher Mathematics* (Introducere în matematica superioară), în 1959, problema ia una dintre acele bruşte şi misterioase întorsături care apar atît de des în geometriile spaţiilor euclidiene de ordin superior. După cîte cunosc, nimeni nu ştie încă cum să împacheteze hipersfere în spaţiul cu nouă dimensiuni.

Acest spaţiu cu 9 dimensiuni este punct de întoarcere şi pentru problema înrudită a cîte sfere congruente pot fi făcute să atingă o altă sferă de acelaşi diametru. Abia în anul 1953 K. Schutte şi B. L. van der Waerden (în articolul *Problema celor treisprezece sfere*, apărut în „Mathematische Annalen", vol. 125, 1953, pp. 325–334), au demonstrat pentru prima dată că răspunsul pentru spaţiul tridimensional este 12. (Pentru o demonstraţie mai recentă, vezi articolul *Problema celor treisprezece sfere* de John Leech, în „Mathematical

Gazette" vol. 40, nr. 331, februarie 1956, pp. 22—23.) Problema corespunzătoare din plan are răspunsul evident 6 (doar 6 monede pot atinge o altă monedă de aceeaşi mărime), iar dacă ne închipuim că o „sferă" degenerată poate fi reprezentată printr-o dreaptă, răspunsul pentru spaţiul unidimensional este 2. S-a arătat că pentru patru dimensiuni, 24 de hipersfere pot atinge o a 25-a hipersferă, iar pentru spaţiile cu 5, 6, 7 şi 8 dimensiuni, numărul maxim de hipersfere este de 40, 72, 126 şi 240, respectiv. Pentru spaţiul 9-dimensional, aşa cum am spus, problema rămîne nerezolvată.

RĂSPUNSURI

Numărul minim de portocale din care se pot clădi două piramide tetraedrice neegale şi, de asemenea, o piramidă tetraedrică mai mare, este 680. Acesta este un număr tetraedric care poate fi divizat în două numere tetraedrice mai mici, 120 şi 560. Muchiile celor trei piramide vor fi de 8, 14 şi 15.

O cutie cu baza pătrată de 10 × 10 cm şi cu înălţimea de 5 cm poate fi umplută cu bile de 1 cm diametru compact-împachetate într-un surprinzător număr de feluri, fiecare dintre ele permiţînd să fie introdus un număr diferit de bile. Numărul maxim, 594, se obţine în felul următor: întoarceţi cutia pe o parte şi formaţi primul strat începînd cu un rînd de cinci, apoi de patru, apoi iarăşi de cinci şi aşa mai departe. Este posibil să formaţi unsprezece rînduri (şase rînduri de cîte cinci bile şi cinci rînduri de cîte patru bile), găzduind 50 de bile şi lăsînd un spaţiu de mai mult de 0,3 cm liber. Cel de-al doilea strat va avea şi el unsprezece rînduri, cu cîte patru şi cinci bile, alternativ, dar de data aceasta stratul va începe şi se va sfîrşi cu rînduri de cîte patru bile, astfel că numărul de bile găzduite în acest strat este de numai 49. (Ultimul rînd de patru bile va depăşi cu 0,28 cm marginea primului strat, dar întrucît acesta este cu 0,3 cm mai îngust decît cutia, este spaţiu suficient pentru el.) În cutie pot fi plasate douăsprezece straturi (cu o înălţime totală de 9,98 cm), alternînd straturi de cîte 50 de bile cu straturi de 49, pentru a da un total de 594 de bile.

Numărul transcendent Pi

Fața lui Pi era mascată și era lucru înțeles că nimeni nu o poate vedea fără a fi pedepsit cu moartea. Dar ochi pătrunzători priveau afară din mască, neînduràtori, reci și enigmatici.

Bertrand Russell, *Coșmarul matematicianului*, în *Nightmares of Eminent Persons* (Coșmarurile unor oameni însemnați)

Raportul dintre circumferința unui cerc și diametrul său, simbolizat de vechii greci prin litera Pi, se ivește neinvitat în tot felul de locuri care nu au nimic de-a face cu cercurile. Matematicianul englez Augustus de Morgan[1] scria odată despre Pi că „acest misterios 3,14159... bate la fiecare ușă sau fereastră și coboară chiar și pe coș". Pentru a da un exemplu, dacă se aleg la întîmplare două numere dintr-o mulțime de întregi pozitivi, care este probabilitatea ca ele să nu aibă un divizor comun? Răspunsul surprinzător este: șase împărțit la pătratul lui Pi. Totuși, faptul că Pi a devenit cel mai familiar element al unei clase infinite de numere transcendente se datorește mai ales legăturii sale cu cercul.

Ce este un număr transcendent? Acesta este de obicei descris ca un număr irațional care nu este soluția unei ecuații algebrice cu coeficienți raționali. Rădăcina pătrată a lui 2 este un număr irațional, dar este un „irațional algebric", deoarece este o soluție a ecuației $x^2 = 2$. Pi nu poate fi exprimat ca soluție a unei astfel de ecuații, ci numai ca limită a unui proces infinit de un anumit tip. Forma zecimală a lui Pi, ca și a tuturor numerelor iraționale, este fără sfîrșit și neperiodică.

Nici o fracție care are întregi deasupra și dedesubtul liniei nu poate fi egală exact cu Pi, dar există foarte multe fracții simple care se apropie uimitor de mult de acest număr. Cea mai remarcabilă dintre

[1] Matematician și logician englez, 1806—1871. — *N.T.*

că a fost descoperită prin secolul al V-lea e.n. de vestitul astronom chinez Ţu Ciung-Şi, dar descoperirea sa nu a devenit cunoscută în Occident decît o mie de ani mai tîrziu. Putem obţine această fracţie printr-un fel de hocus-pocus numeric. Scrieţi primii trei întregi impari în perechi: 1, 1; 3, 3; 5, 5; puneţi apoi pe ultimii trei deasupra primilor trei, formînd astfel fracţia 355/113. Greu de crezut, dar aceasta dă pe Pi cu o precizie de şase zecimale! Există şi unele rădăcini care se apropie mult de Pi. Rădăcina pătrată a lui 10 (3,162...) a fost mult folosită în locul lui Pi în antichitate, dar rădăcina cubică a lui 31 (3,1413...) este mult mai apropiată (mai mult chiar: 31 cuprinde primele două cifre ale lui Pi). Un cub cu volumul de 31 cm^3 ar avea o muchie care ar diferi de Pi cu mai puţin de o miime de centimetru. Iar suma dintre rădăcinile pătrate ale lui 2 şi 3 este 3,146..., iarăşi o aproximaţie bună.

Încercările timpurii de a găsi valoarea exactă a lui Pi au fost strîns legate de încercările de a rezolva clasica problemă a cvadraturii cercului. Folosind numai un compas şi o riglă, este oare posibil să construim un pătrat cu aria exact egală cu a unui cerc dat? Dacă Pi ar putea fi exprimat ca o fracţie raţională sau ca rădăcina unei ecuaţii de gradul unu sau doi, atunci ar fi posibil să construim cu compasul şi rigla o linie dreaptă lungă exact cît circumferinţa cercului. Transformarea cercului în pătrat ar urma imediat. Am avea doar să construim un dreptunghi cu o latură egală cu raza cercului şi cealaltă egală cu jumătatea circumferinţei. Dreptunghiul are o suprafaţă egală cu cea a cercului şi există procedee simple de a converti dreptunghiul într-un pătrat cu aceeaşi suprafaţă. Reciproc, dacă cercul ar putea fi transformat în pătrat, s-ar crea un mijloc de a construi un segment de dreaptă egal exact cu Pi. Din păcate, există probe de necontestat că Pi este transcendent şi că nu poate fi construită cu compasul şi rigla o linie dreaptă de lungime transcendentă.

Există sute de construcţii aproximative pentru Pi, dintre care cea mai exactă este bazată pe fracţia astronomului chinez, menţionată mai înainte. Într-un sfert de cerc cu raza egală cu unitatea, desenaţi liniile indicate în fig. 35, astfel ca segmentul BC să fie egal cu 7/8 din rază, DG să fie 1/2 din rază, DE să fie paralel cu AC, iar DF paralel cu BE. Se poate uşor arăta că FG este egal cu 16/113, sau 0,1415929... Întrucît 355/113 poate fi scris ca 3 + 16/113, desenaţi o linie de trei ori mai lungă decît raza, prelungiţi-o cu un segment egal cu FG şi veţi obţine o linie care diferă de Pi prin mai puţin de o milionime dintr-o unitate.

Nenumăraţi adepţi ai cvadraturii cercului şi-au închipuit că au descoperit o valoare exactă pentru Pi, dar nici unul nu l-a întrecut

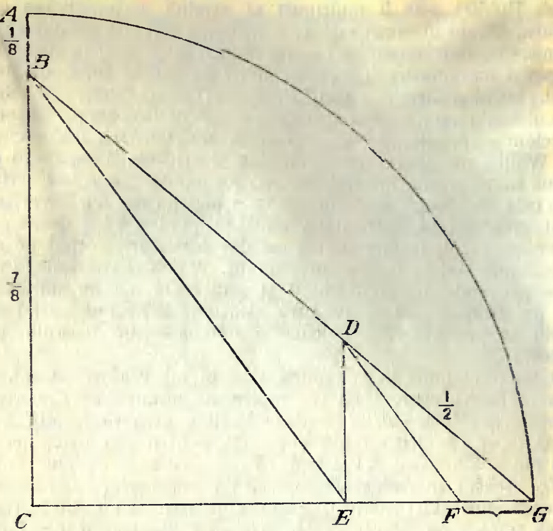


Fig. 35.

pe filozoful englez Thomas Hobbes[2] în a combina o mare înălţime a spiritului cu o profundă ignoranţă. Pe vremea aceea, matematica nu se preda în şcolile engleze, aşa că Hobbes a găsit primul prilej să arunce o privire asupra lucrărilor lui Euclid abia spre vîrsta de 40 de ani. Cînd a citit o formulare a teoremei lui Pitagora, Hobbes a exclamat: „Dumnezeule, dar asta e imposibil!" Dar după asta, el s-a străduit să parcurgă tot drumul înapoi către demonstraţie, convingîndu-se în cele din urmă că este adevărat. Pentru tot restul vieţii, Hobbes a rămas cu o pasiune pentru geometrie. „Geometria are în ea ceva în felul vinului", scria el mai tîrziu. Se spune că, atunci cînd nu avea la îndemînă suprafeţe mai potrivite, Hobbes obişnuia să deseneze tot felul de figuri geometrice pe mînecile cămăşii sau pe cearşafuri.

[2] 1588–1679. — *N.T.*

Dacă Hobbes s-ar fi mulțumit să rămînă matematician amator, cei din urmă ani ai vieții sale ar fi fost mai liniștiți — dar egotismul său imens l-a determinat să creadă despre el că ar fi în stare de mari descoperiri matematice. La vîrsta de 67 de ani, în 1655, el a publicat în limba latină o carte cu titlul *De corpore* (Despre trup), care cuprindea o ingenioasă metodă de a transforma cercul în pătrat. Metoda este o excelentă aproximație, dar Hobbes era convins că este exactă. John Wallis, un distins matematician și criptograf englez al epocii[3], a expus toate erorile lui Hobbes într-un pamflet, pornind astfel unul dintre cele mai lungi, mai amuzante și mai inutile duele verbale care a avut vreodată loc între două minți strălucite. El a durat aproape un sfert de secol, fiecare dintre cei doi adversari trecînd pe rînd de la sarcasmul abil la insulta înveninată. Wallis îl continua, în parte, pentru propriul său amuzament și, îndeosebi, ca un mijloc de a-l pune pe Hobbes într-o postură ridicolă, aruncînd astfel sămînța îndoielii asupra părerilor politice și religioase ale acestuia, pe care le detesta.

Hobbes a răspuns la cel dintîi atac al lui Wallis, republicîndu-și cartea în limba engleză cu un supliment numit *Six Lessons to the Professors of Mathematics...* (Șase lecții pentru profesorii de matematică) (sper că cititorii mă vor ierta pentru că scurtez nesfîrșitele titluri ale secolului al XVII-lea). Wallis răspunse cu *Due Correction for Mr. Hobbes in School Discipline for not saying his Lessons right* (Pedeapsă meritată pentru dl. Hobbes, pentru că nu știe lecția bine). Hobbes replică cu *Marks of the Absurd Geometry, Rural Language, Scottish Church Politics, and Barbarisms of John Wallis* (Note pentru John Wallis la Geometria absurdă, limbaj țărănesc, Politică religioasă scoțiană și Barbarisme); la aceasta, Wallis îi răspunse cu *Hobbiani Puncti Dispunctio! or the Undoing of Mr. Hobbes's Points* (Dejucarea argumentelor d-lui Hobbes). Ceva mai tîrziu (după ce își mai publicase anonim la Paris și o metodă absurdă de dublare a cubului), Hobbes scria: „Sau eu singur sînt nebun, sau ei toți (profesorii de matematică) și-au pierdut mințile; nu văd o părere de mijloc — doar dacă nu va veni altcineva care să spună că toți am înnebunit".

„Afirmația d-lui Hobbes nu poate fi combătută, răspunse Wallis. Pentru că dacă el ar fi nebun, ar fi extrem de improbabil să fie convins prin rațiune de acest lucru; pe de altă parte, dacă noi toți am fi cei nebuni, n-am avea calificarea necesară pentru a încerca să o facem".

Bătălia a continuat, cu perioade scurte de armistițiu, pînă la moartea lui Hobbes, la vîrsta de 91 de ani. „Dl. Hobbes nu a provocat niciodată pe nimeni, scria Hobbes în unul dintre ultimele sale atacuri

[3] 1616—1703. — *N.T.*


Quadratura Circuli,
Cubatio Sphæræ,
Duplicatio Cubi,
Breviter demonſtrata.

Auct. Tho. Hobbes.

LONDINI:
Excudebat J. C. Sumptibus *Andreæ Crooke*. 1669.
No. 67

Pagina de titlu a uneia dintre cărţile lui Hobbes despre cvadratura cercului.

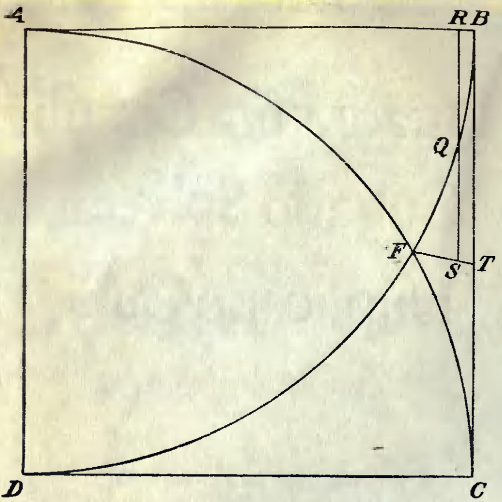


Fig. 36 Cea dintii metodă a lui Hobbes de a transforma cercul într-un pătrat.

asupra lui Wallis (în paranteză fie spus, Hobbes era extrem de timid în relaţiile sale sociale); dar, dacă este provocat, pana lui se poate dovedi la fel de ascuţită ca a dv. Tot ce aţi spus pînă acum este eroare şi răutate; altfel spus, vînt rău mirositor, asemenea celui lăsat de o mîrţoagă cu burta prea plină atunci cînd este înşeuată. Am spus ceea ce aveam de spus. Pînă acum v-am acordat toată atenţia, dar promit să nu se mai repete..."

Nu este locul aici să intrăm în amănunte asupra a ceea ce Wallis numea „incapacitatea curioasă a d-lui Hobbes de a învăţa ce nu ştie". Hobbes a publicat în total aproximativ o duzină de metode diferite de transformare a cercului în pătrat. Cea dintii dintre ele — şi una dintre cele mai bune — este arătată în fig. 36. În interiorul unui pătrat cu latura egală cu unitatea, desenaţi arcele AC şi BD. Ele sînt sferturi de arc ale unor cercuri cu raza unitară. Împărţiţi prin punctul Q arcul BF în două părţi egale. Desenaţi linia RQ paralelă cu latura pătratului şi apoi prelungiţi-o astfel ca QS = RQ.

Desenați linia FS, prelungind-o pînă cînd întîlnește în T latura pătratului. Hobbes afirma că BT este exact egal cu arcul BF. Deoarece arcul BF este 1/12 din circumferința cercului cu raza egală cu unitatea, Pi va fi de șase ori mai mare decît BT. Aceasta dă pentru Pi o valoare de 3,1419. . .

Una dintre dificultățile majore ale filozofului englez a fost incapacitatea să de a înțelege că punctele, liniile și suprafețele trebuie considerate în abstract, ca avînd mai puțin de trei dimensiuni. „Hobbes pare a fi mers la groapă cu convingerea fermă că suprafețele au atît adîncime, cît și grosime, în ciuda tuturor raționamentelor și argumentelor geometrilor timpului", scria Isaac Disraeli în cartea sa *Quarrels of Authors* (Certurile autorilor). Hobbes reprezintă cazul clasic al unui om de geniu, care se aventurează într-o ramură a științei pentru care este slab pregătit și care își cheltuiește astfel marea sa energie creatoare în tot felul de absurdități pseudoștiințifice.

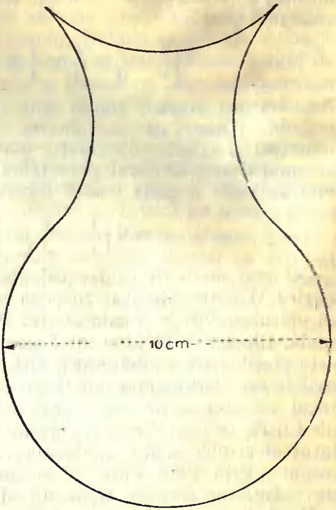


Fig. 37 Cîte pătrate conține această vază?

Deși cercul *nu* poate fi transformat în pătrat, există multe figuri mărginite de arce de cerc, care pot fi ; acest fapt întreține încă multe false speranțe în grupurile de adepți ai cvadraturii cercului. Un exemplu interesant este ilustrat în fig. 37. Partea inferioară a acestei vaze este trei sferturi din circumferința unui cerc cu un diametru de, să zicem, 10 cm. Partea superioară este mărginită de trei sferturi de arc dintr-un cerc cu aceleași dimensiuni. Cît de repede ați putea calcula lungimea exactă (pînă la ultima zecimală) a unei laturi a pătratului care are aceeași arie ca și figura dată?

Rude apropiate cu adepții cvadraturii cercului au fost și calculatorii numărului Pi — oameni care și-au închinat ani calculării cu mîna a mai multor zecimale ale lui Pi decît fuseseră înainte vreodată calculate. Acest lucru poate fi făcut, desigur, folosind oricare expresie infinită care converge către Pi. Wallis însuşi a descoperit una dintre cele mai simple:

$$\pi = 2\left(\frac{2}{1} \times \frac{2}{3} \times \frac{4}{3} \times \frac{4}{5} \times \frac{6}{5} \times \frac{6}{7} \times \frac{8}{7} \times \frac{8}{9} \times \cdots\right).$$

Numărătorii acestor fracţii sînt numere pare consecutive, luate în perechi. (Observaţi asemănarea întîmplătoare dintre primii cinci numitori şi cifrele din fracţia astronomului chinez!) Cîteva zeci de ani mai tîrziu, filozoful şi matematicianul german Gottfried Wilhelm von Leibniz[4] a găsit o altă formulă frumoasă:

$$\pi = 4\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} \cdots\right).$$

Cel mai neobosit dintre calculatorii lui Pi a fost matematicianul englez William Shanks. În ceva mai mult de 20 de ani, el a reuşit să calculeze 707 zecimale ale lui Pi. Dar vai! la cea de-a 528-a zecimală, Shanks a făcut o mică greşeală, aşa că tot restul pînă la 707 este greşit. (Acest amănunt a fost descoperit abia în 1945, aşa că zecimalele lui Shanks mai pot fi găsite în multe cărţi.) În 1949, calculatorul electronic ENIAC a calculat mai mult de 2000 de zecimale ale lui Pi, în timp de 70 de ore-maşină; ceva mai tîrziu, un alt calculator electronic a dus performanţa pînă la 3000 de zecimale, în 13 minute. Prin 1959, numărul zecimalelor a fost majorat la 10 000 de un calculator francez şi de un altul britanic.

Unul dintre cele mai stranii aspecte ale zecimalelor lui Shanks era faptul că acestea păreau să dispreţuiască cifra 7. În primele 700 de zecimale, fiecare cifră apărea cam de 70 de ori, aşa cum şi trebuie — în timp ce 7 apărea abia de 51 de ori. „Dacă toţi apocalipticii şi-ar uni forţele pînă cad de acord în legătură cu acest fenomen, nepublicînd nimic pînă nu ajung la unanimitate, atunci poate că şi-ar cîştiga în cele din urmă recunoştinţa omenirii", scria De Morgan. Mă grăbesc să adaug că valoarea corectată a lui Pi, pînă la 700 de zecimale, a restaurat pe 7 în drepturile sale. Şcoala matematică intuiţionistă, care susţine că nu se poate spune despre o afirmaţie că este „fie adevărată, fie falsă" atîta timp cît nu s-a găsit o cale de a verifica ambele posibilităţi, a folosit mult timp următorul exemplu: „Există trei cifre 7 consecutive printre zecimalele lui Pi". Acum afirmaţia trebuie reformulată, punînd în loc de trei, cinci. Cifrele recente ale lui Pi arată nu numai numărul aşteptat de tripleţi pentru fiecare cifră, dar şi cîteva grupuri de 7777 (şi chiar un neaşteptat 999999).

Pînă în momentul de faţă, Pi a trecut toate examenele statistice

---

[4] 1646–1716. — *N.T.*

pentru a fi declarat „număr întîmplător" (aleatoriu). Acest lucru poate părea inexplicabil celor care sînt de părere că o curbă atît de simplă şi de frumoasă, cum este cercul, trebuie să posede un raport dintre lungimea drumului de jur împrejur şi lungimea drumului de-a curmezişul cel puţin la fel de simplu şi frumos — dar matematicienii sînt convinşi că niciodată nu va putea fi găsită în dezvoltarea zecimală a lui Pi vreo urmă de tipic sau de ordine. Desigur, cifrele nu sînt întîmplătoare, în sensul că ele sînt aranjate astfel ca să reprezinte valoarea numărului Pi; dar în acest sens nu sînt întîmplătoare nici cele un milion de cifre publicate de Compania „Rand" din California. Şi acestea reprezintă tot un singur număr — şi încă un număr întreg!

Dacă este adevărat că cifrele lui Pi sînt întîmplătoare, poate că este justificat să susţinem un paradox oarecum similar cu afirmaţia că dacă un grup de maimuţe ar bate un timp destul de lung pe clapele unor maşini de scris, ele ar reuşi în cele din urmă să rescrie toate piesele lui Shakespeare. Stephen Barr a arătat că dacă nu este impusă o limită pentru precizia cu care pot fi construite şi măsurate două bare, atunci aceste două bare simple, fără nici un fel de marcaj pe ele, pot comunica întreaga *Encyclopaedia Britannica*[5]. Una dintre bare este luată ca unitate. Cealaltă diferă de unitate printr-o fracţie care este exprimată ca un număr zecimal foarte lung. Această formă zecimală a fracţiei codifică enciclopedia prin procedeul care constă în a atribui fiecărui cuvînt şi semn de punctuaţie al limbii cîte un număr diferit (care nu-l include pe zero ca cifră a numărului). Cifra zero este folosită la separarea numerelor de cod. În mod evident, în acest fel întreaga enciclopedie poate fi codificată printr-un singur, dar nesfîrşit de lung, număr. Puneţi virgula şi cifra 0 în faţa acestui număr şi adăugaţi 1 — şi veţi obţine lungimea celei de-a doua bare.

Dar unde intervine aici Pi? Ei bine, dacă cifrele lui Pi sînt cu adevărat întîmplătoare, atunci pe undeva prin această plăcintă infinită trebuie să se găsească o felie pe care este înscrisă, ca răvaş, şi *Encyclopaedia Britannica*; sau, la fel de probabil, orice carte care a fost vreodată scrisă, va fi scrisă, sau ar putea fi scrisă.

ADAOS

La 29 iulie 1961, adică la un an după ce materialul acestui capitol a apărut în „Scientific American", Pi a fost dus pînă la 100 265 de zecimale de către calculatorul IBM 7090 de la IBM Data Center, din New York. Lucrarea a fost făcută de Daniel Shanks (care nu este rudă cu William Shanks; este vorba de numai încă

[5] Celebră enciclopedie engleză în mai multe volume, apărută în numeroase ediţii — *N.T.*

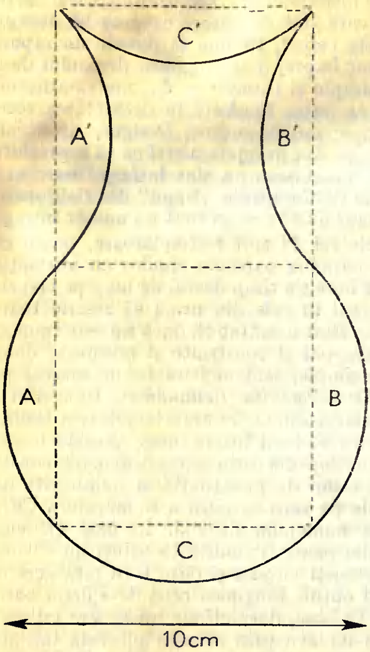


Fig. 38 Modul de împărțire a vazei în pătrate.

una dintre acele stranii coincidențe numerologice care marchează istoria lui Pi) și John W. Wrench, jr. Timpul de lucru a fost cu un minut mai lung decît opt ore, după care a mai fost nevoie de încă 42 de minute pentru a transforma rezultatul binar în formă zecimală. A calcula pe Pi cu cîteva mii de zecimale a devenit acum un procedeu obișnuit de verificare a noilor calculatoare și de instruire a programatorilor. „Misteriosul și minunatul Pi — scrie Philip J. Davis în cartea sa *The Lore of Large Numbers* (Legendele numerelor mari) — a fost acum redus la o gargară cu ajutorul căreia mașinile de calculat își curăță gîtul".

Probabil că nu va mai trece multă vreme pînă cînd Pi va fi cunoscut cu un milion de zecimale. Anticipînd aceasta, dr. Matrix, cunoscutul numerolog, mi-a trimis o scrisoare prin care mă roagă să dau publicității prezicerea sa că cea de-a milioana cifră a lui Pi va fi 5. Calculul său se bazează pe Cartea a III-a a *Bibliei Regelui Iacob*, capitolul 14, versetul 16 (care menționează numărul 7, iar cel de-al șaptelea cuvînt are cinci litere) și pe anumite calcule obscure în care intră constanta lui Euler[6] și numărul transcendent *e*.

[6] Constanta lui Euler — un număr egal cu 0,57721 și reprezentînd limita expresiei $\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \log n\right)$ atunci cînd n tinde către infinit. Numită astfel după matematicianul elvețian Leonhard Euler, 1707–1783. — *N.T.*

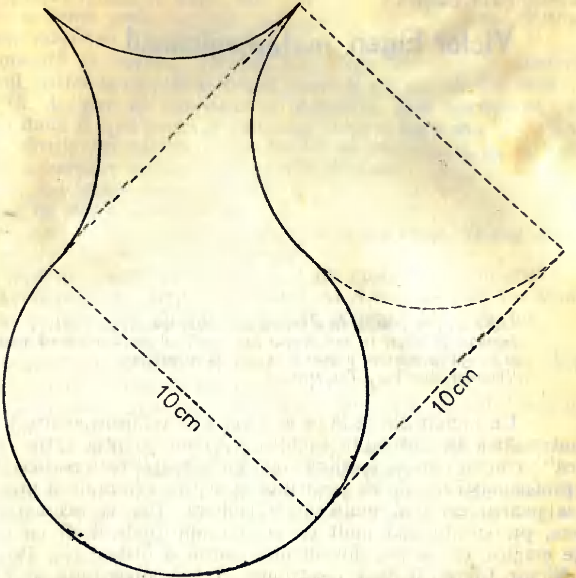


Fig. 39 Trei bucăţi din vază formează un pătrat.

Norman Gridgeman, din Ottawa (Canada), mi-a trimis observaţia că cele două bare ale lui Barr pot fi reduse la una singură prin trasarea unui semn pe una din ele. Semnul împarte bara în două lungimi, al căror raport codifică *Encyclopaedia Britannica* în acelaşi fel ca înainte.

RĂSPUNSURI

S-a sugerat ca cititorul să găsească latura unui pătrat egal ca arie cu profilul de vază din fig. 38, care este mărginit de arce dintr-un cerc cu diametrul de 10 cm. Răspunsul este tot 10 cm. Dacă desenăm pătratele punctate ca în figură, este evident că segmentele de cerc A, B, C se potrivesc în spaţiile A', B', C', formînd două pătrate cu o arie totală de 100 cm². Fig. 39 arată modul în care vaza poate fi transformată în pătrat prin tăiere în numai trei părţi, care formează un pătrat cu latura de 10 cm.

CAPITOLUL IX

Victor Eigen, matemagicianul

Lujin nu avu greutăți în a învăța mai multe trucuri cu cărți... În modul ingenios și precis în care trucul lua sfîrșit, el găsea o plăcere misterioasă și o vagă promisiune a unor bucurii încă neexplorate...
Vladimir Nabokov, *The Defense*

Un număr din ce în ce mai mare de vrăjitori amatori atrași de matematică își îndreaptă în ultima vreme atenția către „matemagică": trucuri care se sprijină solid pe principii matematice. Vrăjitorii profesioniști fug de ele pentru că sînt prea cerebrale și prea plicticoase pentru cei mai mulți dintre clienți. Dar ca scamatorii de cafenea, prezentate mai mult ca enigme spirituale decît ca performanțe magice, ele se pot dovedi interesante și distractive. Prietenul meu Victor Eigen, inginer electronist și fost președinte al Frăției americane a maeștrilor baghetei, reușește să se păstreze foarte la zi cu ultimele realizări în acest domeniu curios. Cu speranța de a găsi ceva material mai neobișnuit pentru acest capitol, i-am făcut într-o zi o vizită.

Ușa de la intrare mi-a fost deschisă chiar de Victor — un om de vreo 55 de ani, plinuț, cu părul cărunt și cute adînci în jurul ochilor.

— Te superi dacă o să stăm în bucătărie? m-a întrebat în timp ce mă conducea pe scări. Soția mea urmărește un program la televizor și ar fi mai bine să n-o deranjăm pînă nu se termină. Cum mai bei acum bourbonul?

Ne-am așezat de o parte și de alta a mesei din bucătărie și am ciocnit paharele.

— Să trecem la matemagică, i-am spus. Ce mai e nou?

Victor nu a stat mult pe gînduri, și a scos un pachet de cărți din buzunarul cămășii.

— Ultimul răcnet la cărţi, spuse el, este principiul lui Gilbreath. Este o teoremă extravagantă descoperită de Norman Gilbreath, un tînăr magician din California.

Pe măsură ce vorbea, degetele lui scurte aranjau cu dexteritate pachetul, astfel ca cele două culori, roşul şi negrul, să alterneze.

— Ştii, desigur, că amestecarea obişnuită, prin împărţirea pachetului în două şi apoi prin introducerea cărţilor dintr-una din jumătăţi printre cărţile din cealaltă, este teribil de neeficientă ca metodă de aşezare a cărţilor într-o ordine întîmplătoare?

— Nu, nu ştiam, i-am răspuns.

Victor îşi ridică sprîncenele.

— Ei bine, zise el, poate că asta o să te convingă. Te rog amestecă acest pachet în felul tău tradiţional.

Am împărţit pachetul în două şi l-am amestecat cum ştiam.

— Acum priveşte cărţile, zise Victor. Ai să vezi că aranjarea dinainte, cu cele două culori alternînd, a fost distrusă bine de tot.

— Bineînţeles!

— Acum taie, continuă el. Dar ai grijă să tai între două cărţi de aceeaşi culoare. Apoi dă-mi pachetul cu faţa în jos.

Am făcut aşa cum mi-a spus. Victor ţinu apoi pachetul sub masă, aşa ca nici unul dintre noi să nu-l vedem.

— Acum o să încerc să disting culorile numai prin pipăit, scoţînd pe masă cărţile în perechi, roşu şi negru, spuse.

Bineînţeles, prima pereche pe care a pus-o pe masă consta dintr-o carte roşie şi una neagră. La fel şi a doua. Pînă la urmă a scos vreo duzină de astfel de perechi.

— Dar cum...?

Victor întrerupse rîzînd. Scoase restul pachetului de sub masă şi începu să ia din el cărţi, două cîte două; fiecare pereche conţinea o carte roşie şi una neagră.

— Nimic mai simplu, explică el. Amestecarea şi tăierea distruge alternaţia dintre roşu şi negru, asta e drept, dar lasă cărţile foarte ordonate. Fiecare pereche mai conţine încă ambele culori. Aminteşte-ţi, te-am rugat să tai între două cărţi de aceeaşi culoare.

— Dar nu pot totuşi să cred...

— Gîndeşte-te o clipă şi ai să vezi cum merge, dar nu cred că e uşor să fac demonstraţia în numai cîteva cuvinte. Dar fiindcă veni vorba, prietenul meu Edgar N. Gilbert, de la laboratoarele Bell Telephone, a inclus o interesantă enigmă, asemănătoare cu aceasta, într-un articol încă nepublicat asupra amestecării cărţilor şi teoriei informaţiei. Iată cum arată.

Şi îmi înmînă o foaie de hîrtie pe care erau tipărite următoarele litere:

T L V E H E D I N S A G M E L R L I E N A T G O V R A R G I A N E S T Y O F O F I F F O S H H R A V E M E V S O

— Este o frază trunchiată, spuse el, luată dintr-un articol apărut acum cinci ani în „Scientific American". Gilbert a scris fiecare literă pe cîte o carte, apoi a aranjat pachetul astfel ca fraza să reiasă citind rînd pe rînd cărţile de sus în jos. A tăiat cărţile în două, le-a amestecat, apoi a copiat noua secvenţă de litere. După cum mi-a spus chiar el, unei persoane mediocre îi trebuie cam o jumătate de oră să afle care este fraza de la care s-a pornit. Esenţialul este că amestecul obişnuit este un atît de anemic distrugător al informaţiei purtate de secvenţa originală, iar redundanţa anumitor combinaţii de litere în limba engleză atît de mare, încît este extrem de improbabil ca mesajul găsit în cele din urmă să fie diferit de cel corect. De fapt, Gilbert a calculat exact această probabilitate în articolul său.

Mi-am amestecat gînditor cuburile de gheaţă din pahar.

— Înainte de a ţi-l umple din nou, spuse Victor, dă-mi voie să-ţi arăt o ingenioasă experienţă de prezicere. O să am nevoie de paharul tău şi de nouă cărţi de joc.

Aranjă cele nouă cărţi, cu valori de la unu la nouă, pe masă, sub forma binecunoscută a careului magic de trei pe trei (fig.40). Toate cărţile erau cupe, cu excepţia cinciului de pică, aşezat în mijloc. Victor scoase un plic din buzunar şi-l puse lîngă pătrat.

— Acum o să te rog să-ţi aşezi paharul pe oricare dintre aceste nouă cărţi, dar mai întîi lasă-mă să-ţi explic că în plic am pus cîteva instrucţiuni. Ele sînt bazate pe presupunerile mele în legătură cu cartea pe care o vei alege şi cu felul în care-ţi vei muta paharul de pe o carte pe alta. Dacă presupunerile mele sînt corecte, paharul îşi va sfîrşi drumul pe cartea din centru.

Lovi de cîteva ori cu degetul cinciul de pică.

— Acum pune te rog paharul pe oricare carte, inclusiv cea din centru, dacă vrei.

Îmi aşezai paharul pe doiul de cupă.

— Exact cum mă aşteptam, zîmbi Victor.

Apoi scoase din plic o fişă, pe care o ţinu aşa ca să pot citi următoarele instrucţiuni:

1. Dă deoparte şaptele.
2. Mută de şapte ori şi dă deoparte optul.
3. Mută de patru ori, dă deoparte doiul.
4. Mută de şase ori, dă deoparte patrul.
5. Mută de cinci ori, dă deoparte pe nouă.
6. Mută de două ori, dă deoparte treiul.

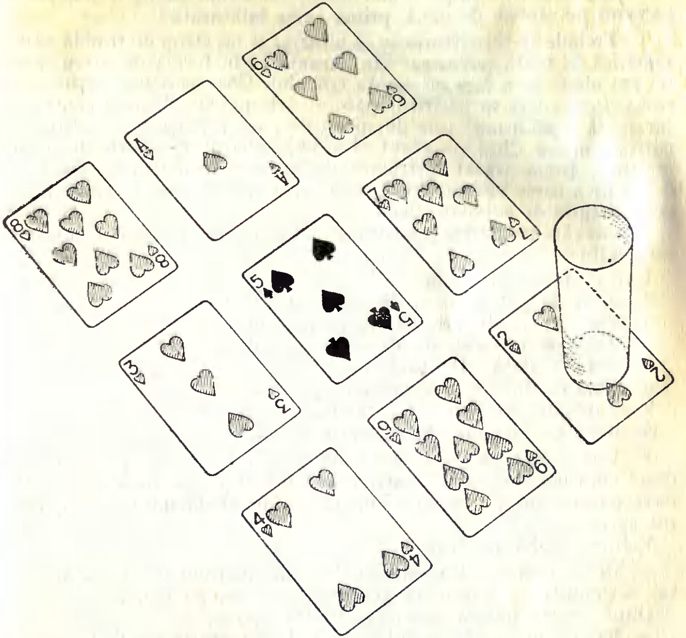


Fig. 40 Aranjarea cărților și a paharului pentru o experiență de prezicere.

7. Mută o singură dată, dă deoparte șasele.

8. Mută de șapte ori, dă deoparte asul.

O „mutare" — explică el — constă din a trece paharul pe o carte vecină, deasupra, dedesubt sau lateral, dar nu și diagonal. Urmai instrucțiunile cu grijă, mutînd cît mai la întîmplare puteam. Spre marea mea surpriză, paharul nu se oprea niciodată pe o carte care trebuia dată deoparte, iar după ce am dat opt cărți deoparte—iată și paharul meu stînd liniștit pe cinciul de pică, exact așa cum prezisese Victor!

— M-ai ameţit complet, mărturisii. Să zicem că aş fi pus iniţial paharul pe şaptele de cupă, prima carte înlăturată?

— Trebuie să-ţi mărturisesc că a intrat şi un strop de fraudă nematematică în toată povestea asta. Aranjarea în formă de careu magic nu are nimic de-a face cu esenţa trucului. Doar poziţiile cărţilor contează. Cele aflate în poziţii impare — cele patru colţuri şi centrul — formează o mulţime; cele din poziţiile pare formează o mulţime de paritate opusă. Cînd am văzut că ai pus paharul pe o carte din prima mulţime, ţi-am arătat instrucţiunile pe care le-ai urmat. Dacă l-ai fi pus pe o carte din mulţimea pară, aş fi întors plicul pe partea cealaltă înainte de a scoate foaia.

În adevăr, pe partea cealaltă a foii era scris un al doilea set de instrucţiuni:

1. Dă deoparte şasele.
2. Mută de patru ori şi dă deoparte doiul.
3. Mută de şapte ori, dă deoparte asul.
4. Mută de trei ori, dă deoparte patrul.
5. Mută o dată, dă deoparte şaptele.
6. Mută de două ori, dă deoparte pe nouă.
7. Mută de cinci ori, dă deoparte optul.
8. Mută de trei ori, dă deoparte treiul.

— Vrei să spui că aceste două seturi de instrucţiuni — unul pentru cazul cînd pornesc de la o carte aflată într-o poziţie pară, iar celălalt dacă pornesc de la o poziţie impară — vor ghida întotdeauna paharul spre centru?

Victor aprobă din cap.

— De ce n-ai publica oare ambele instrucţiuni în cartea aceea a ta, cerîndu-le cititorilor să găsească cum merge trucul?

După ce-mi umplu paharul, Victor spuse:

— Există un număr destul de mare de trucuri de tip ESP[1] care se bazează pe principiul parităţii. Iată unul care în aparenţă cere oarecare talente de prezicător.

Şi îmi întinse o foaie de hîrtie goală şi un creion.

— În timp ce eu stau întors cu spatele, aş vrea să desenezi o curbă închisă foarte complicată, care se întretaie pe sine însăşi de foarte multe ori, dar niciodată mai mult decît o dată într-un punct dat.

Apoi îşi întoarse scaunul cu faţa spre perete, iar eu desenai curba care se vede în fig. 41.

---

[1] ESP — abreviere de la „Extrasensory Perception" (percepţie extrasenzorială), percepţie sau comunicare în afara activităţii senzoriale normale, ca în telepatie sau clarviziune. — *N.T.*

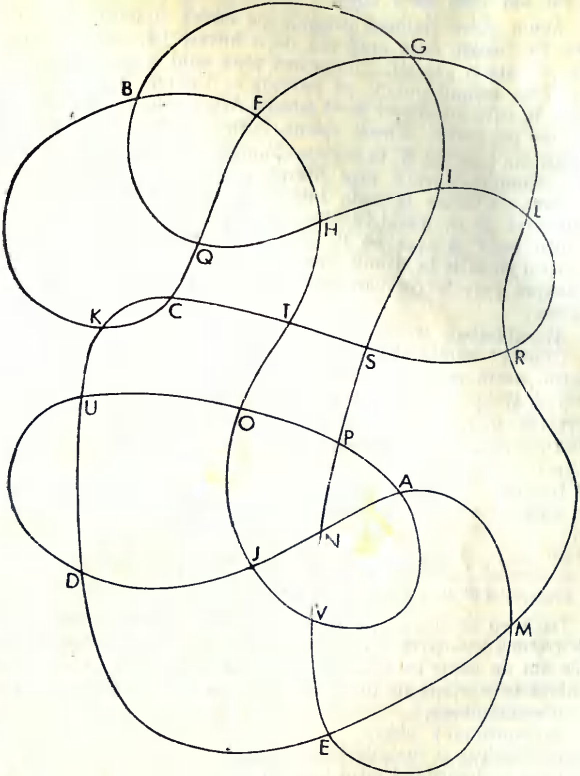


Fig. 41 Curbă închisă, desenată şi marcată la întîmplare, pentru o altă experienţă de prezicere.

— Acum notează fiecare intersecție cu o literă diferită, spuse Victor peste umăr.

Făcui așa cum mi-a spus.

— Acum pune creionul oriunde pe curbă și începe să urmărești curba. De fiecare dată cînd dai de o intersecție, spune cu glas tare litera pe care o găsești. Ține-o așa pînă cînd ai trasat toată curba, dar într-un anumit punct pe parcurs — indiferent care — schimbă ordinea în care-mi citești două litere. Aceste două litere trebuie să fie vecine pe curbă. Nu-mi spune atunci cînd le interschimbi.

Pornii din punctul N, în sus spre punctul P și continuai de-a lungul curbei, numind cu voce tare literele pe măsură ce ajungeam la ele. Am văzut că Victor le scria într-un carnețel. Cînd m-am apropiat a doua oară de B, văzui că litera de după B pe curbă era F, așa că citii întîi pe F și apoi pe B. Am făcut bineînțeles interschimbarea fără nici o variație în ritmul citirii, așa ca Victor să nu aibă vreo bănuială asupra perechii pe care am schimbat-o. De îndată ce terminai, el spuse:

— Ai schimbat B cu F.

— Uluitor! exclamai. Cum ai aflat?

Victor zîmbi și se întoarse spre mine.

— Trucul se bazează pe o teoremă topologică care este foarte importantă în teoria nodurilor. O poți găsi foarte frumos demonstrată în cartea lui Hans Rademacher și Otto Toeplitz, *Despre numere și figuri*[2].

Își întoarse spre mine carnețelul pe care scrisese literele citite de mine. Literele erau scrise deasupra și dedesubtul unei linii orizontale, astfel:

N S G Q I R T K D M L F C F H O V P U J A E

P I B H L S C U E R G Q K B T J A O D N M V

— Dacă nu se face nici o interschimbare, explică el, atunci fiecare literă trebuie să apară o dată deasupra și o dată dedesubtul liniei. Tot ce am de făcut este să caut o literă care apare de două ori sus și o literă care apare de două ori jos. Acestea vor fi literele care au fost interschimbate.

— Extraordinar! zisei.

Victor deschise o cutie de biscuiți, scoase doi dintre ei și-i puse pe masă, unul la dreapta și altul la stînga sa. Pe fiecare desenă o săgeată îndreptată spre nord (fig. 42). Apucă biscuitul din stînga între dege-

---

[2] H. Rademacher, O. Toeplitz, *Despre numere și figuri*, Editura Științifică, București, 1968. — *N.R.*

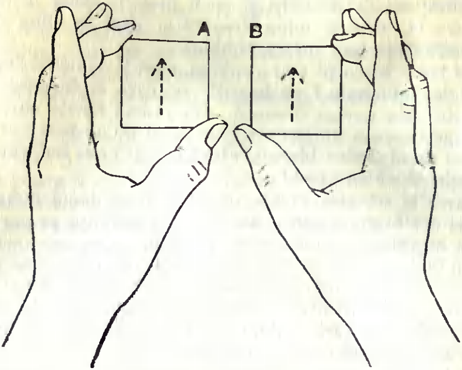


Fig. 42 Cum trebuie ținuți biscuiții în misterul celor două săgeți-

tul mare și cel mijlociu, apoi apăsă cu arătătorul de colțul A. Biscuitul se învîrti în jurul axei diagonale care trecea prin cele două colțuri ținute și se întoarse cu fața cealaltă înainte. Victor zgîrie pe această față o altă săgeată îndreptată spre nord.

Cu biscuitul din dreapta procedă la fel, cu mîna dreaptă, rotația fiind efectuată prin împingere cu arătătorul asupra colțului B. De data aceasta însă, desenă o săgeată îndreptată spre sud.

— Acum totul este gata pentru un amuzant tur de forță legat de simetria de rotație a pătratului, spuse Victor, zîmbind. Trebuie să reții că în mîna stîngă am un biscuit cu cîte o săgeată îndreptată spre nord pe ambele fețe.

Luă biscuitul cu mîna stîngă și-l învîrti de cîteva ori, ca să văd că pe ambele părți săgeata arăta spre nord.

— Iar pe biscuitul din dreapta, am două săgeți care sînt îndreptate în sensuri opuse, zise Victor, apucînd biscuitul cu mîna dreaptă și rotindu-l repede de cîteva ori.

Puse biscuitul pe masă. Apoi, lent și fără a modifica orientările lor, schimbă pozițiile celor doi biscuiți între ele.

— Acum, te rog repetă tu însuți experiența. Vreau să verifici faptul că biscuitul care are două săgeți arătînd spre nord se află acum în dreapta mea, iar celălalt în stînga.

Îmi împinse cei doi biscuiţi şi eu îi învîrtii exact în acelaşi fel în care o făcuse el, unul în mîna dreaptă şi altul în mîna stîngă. Într-adevăr, biscuiţii erau interschimbaţi.

Victor îşi trase biscuiţii mai aproape, apoi le schimbă încetişor poziţiile între ele, aducîndu-i pe locurile pe care ei fuseseră la început. Roti biscuitul din partea dreaptă. Am rămas foarte surprins să văd că acum săgeţile erau îndreptate spre nord pe ambele părţi! Iar cînd învîrti şi cel de-al doilea biscuit, săgeţile sale erau îndreptate alternativ către sud şi către nord!

— Încearcă şi tu, zise Victor. Ai să vezi că jocul merge automat. De fapt, cei doi biscuiţi sînt exact la fel. Diferenţa pe care o notaseşi în aşezarea săgeţilor depinde întru totul de mîna în care ţineam biscuitul. Cînd ceri partenerului să verifice jocul, asigură-te că ia biscuitul din dreapta ta în mîna lui stîngă, iar biscuitul din stînga ta, cu mîna lui dreaptă. Şi fii atent ca el să pună pe masă biscuitul cu săgeţi îndreptate în sensuri contrarii, astfel ca săgeata de pe partea de deasupra să fie îndreptată spre nord.

Dădui paharul pe gît. În sticlă mai rămăsese doar foarte puţin. Bucătăria părea puţin înclinată.

— Acum lasă-mă să-ţi arăt *eu* una, zisei, luînd încă un biscuit. E un fel de test de probabilitate. Voi arunca biscuitul în sus. În cazul cînd cade cu una din feţe în sus, poţi să-ţi torni restul de bourbon. În caz cînd nu cade cu nici o faţă în sus — şi ţinui biscuitul perpendicular pe masă, dar fără a face vreun comentariu — atunci *eu* sînt cel care beau ultima picătură.

Victor mă privi bănuitor.

— Bine, zise el.

Strînsei biscuitul în pumn şi aruncai fărîmele în aer. Linişte deplină. Chiar şi frigiderul părea că încetase să mai zbîrnie.

— Văd că cele mai multe din ambele feţe ţi-au căzut pe cap, zise în cele din urmă Victor, rîzînd. Şi aş mai putea să adaug că e un truc pe care nu se cuvine să-l faci unui vechi prieten.

ADAOS

Principiul lui Gilbreath şi folosirea lui în trucul descris a fost explicat pentru prima dată de Norman Gilbreath într-un articol intitulat *Culori magnetice* şi publicat în revista de magie „The Linking Ring", vol. 38, nr. 5, p. 60, iulie 1958. De atunci au mai apărut zeci de trucuri inteligente cu cărţi bazate pe acelaşi principiu. Pentru cei care-şi pot face rost de colecţiile revistelor de magie, iată cîteva referinţe:

„Linking Ring," vol. 38, nr. 11, pp. 54—58, ianuarie 1958 (Charles Hudson, Ed. Marlo).

„Linking Ring", vol. 39, nr. 3, pp. 65—71, mai 1959 (Charles Hudson, George Lord, Ron Edwards).

„Ibidem" (O revistă de magie canadiană), nr. 16, martie 1959 (Tom Ransom).

„Ibidem", nr. 26, septembrie 1962 (Tom Ransom).

„Ibidem", nr. 31, decembrie 1965 (Allan Slaight).

Principiul poate fi demonstrat într-un mod mai puțin riguros, după cum urmează. Atunci cînd pachetul de cărți este tăiat în vederea amestecării convenționale, apar două situații posibile: cele două cărți de la fundul celor două jumătăți sînt fie de aceeași culoare, fie de culori diferite. Să presupunem că sînt diferite. După ce prima carte cade, cărțile de la fundul celor două jumătăți vor fi de *aceeași* culoare, diferită de culoarea cărții căzute. Prin urmare, nu are importanță pentru cartea următoare dacă trece peste degetul mare de la mîna stîngă sau de la mîna dreaptă; în ambele cazuri, peste cartea deja căzută va cădea o carte de culoare opusă. Aceasta face ca pe masă să stea acum o pereche de cărți ale căror culori nu se potrivesc. Situația este acum exact aceeași ca înainte. Cărțile de la fundul celor două jumătăți din mînă nu se potrivesc. Indiferent care carte cade, cărțile care rămîn la fund vor avea amîndouă aceeași culoare. Și așa mai departe. Argumentația se repetă pentru fiecare pereche, pînă cînd pachetul se termină.

Să presupunem acum că pachetul este tăiat la început în așa fel ca la fundul celor două jumătăți să se afle cărți de *aceeași* culoare. Oricare carte poate cădea prima. Argumentația de mai înainte se poate aplica acum tuturor perechilor următoare de cărți. Ultima carte care rămîne trebuie să fie, evident, de culoare diferită cu a primei cărți căzute. Atunci cînd pachetul este tăiat între două cărți de aceeași culoare (adică între perechile ordonate), cărțile care se află la baza și la partea de sus a pachetului sînt aduse împreună, așa că perechile sînt intacte.

Există multe modalități de prezentare a trucului cu cărțile și paharul. Ron Edwards, din Rochester (New York), mi-a comunicat că el lucrează cu nouă cărți alese la întîmplare și așezate în careu. Spectatorul așază o tigvă miniaturală pe una din cărți. Tigva este prevăzută cu o gaură, în care Edwards pune o foaie de hîrtie răsucită, pe care și-a scris prezicerea — numele cărții din centru. Foaia cu instrucțiunile potrivite este scoasă din buzunar (Edwards avînd grijă să păstreze cele două foi în buzunare diferite.) Aceste instrucțiuni indică de preferință pozițiile (și numele) cărților care trebuie date deoparte.

După ce jocul a fost publicat în „Scientific American”, Hal Newton din Rochester, a elaborat o versiune numită „O voce de dincolo de mormînt”, în care instrucțiunile sînt date de un disc de patefon, iar spectatorul mută un obiect înainte și înapoi pe nouă cărți care poartă nume de planete. Evident, discul poate fi pus pe ambele fețe. Jocul a fost pus pe piață în 1962 de Gene Gordon, proprietarul unui magazin de magie din Buffalo.

RĂSPUNSURI

Fraza de pe cărțile amestecate suna, la început, după cum urmează: THE SMELLING ORGANS OF FISH HAVE EVOLVED IN A GREAT VARIETY OF FORMS (Organele de miros ale peștilor au evoluat spre o bogată varietate de forme). Este prima frază a ultimului paragraf (la p. 73) din articolul *Somonul călător*, de Arthur D. Hasler și James A. Larsen, publicat în „Scientific American” din august 1955.

CAPITOLUL X

Teorema hărţii în patru culori

Dintre toate marile speculaţii nedemonstrate ale matematicii, cea mai simplă — simplă în sensul că poate fi înţeleasă pînă şi de un copil — este celebra teoremă topologică a celor patru culori. Cîte culori sînt necesare pentru a colora o hartă, astfel ca ţările care au o frontieră comună să nu fie de aceeaşi culoare? Este foarte uşor să desenăm hărţi care necesită patru culori; pe de altă parte, doar cunoştinţe de matematică elementară sînt necesare pentru a demonstra riguros că cinci culori sînt suficiente. Dar sînt oare cele patru culori nu numai necesare, ci şi suficiente? Sau, altfel spus, este oare posibil să construim o hartă care să necesite cinci culori? Matematicienii preocupaţi de această problemă cred că nu, dar nu sînt de loc siguri.

Cam la fiecare cîteva luni găsesc printre scrisorile care îmi vin o „demonstraţie" lungă a teoremei celor patru culori. Dar în aproape fiecare caz se vădeşte pînă la urmă că trimiţătorul a confundat teorema cu alta, mult mai simplă, care afirmă că este imposibil să fie desenată o hartă a unui grup de cinci ţări, astfel ca fiecare ţară să fie vecină cu celelalte patru. (Două ţări, care sînt vecine doar într-un punct nu sînt considerate vecine.) Eu însumi am contribuit un pic la această confuzie, scriind mai de mult o nuvelă ştiinţifico-fantastică intitulată *Insula celor cinci culori,* despre o insulă imaginară care a fost împărţită de un topolog polonez în cinci regiuni care aveau, toate, frontiere comune. Nu este prea greu să demonstrăm că o hartă de felul acesta nu poate fi desenată. S-ar putea presupune că teorema celor patru culori pentru ori ce hartă decurge acum de la sine — dar nu este aşa.

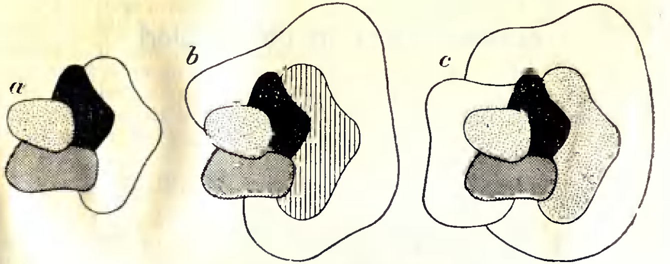


Fig. 43 Atunci cînd se desenează o hartă în patru culori, deseori este nevoie să se șteargă culorile deja puse și să se pună altele.

Pentru a vedea de ce este așa, să considerăm harta simplă desenată în fig. 43 *a*. (Forma reală a regiunilor nu are importanță; numai felul în care ele sînt legate este semnificativ. Teorema celor patru culori este o teoremă topologică tocmai pentru că are ca obiect o proprietate a figurilor plane care rămîne nemodificată de deformarea suprafeței pe care sînt așezate.) Ce culoare vom folosi pentru regiunea rămasă necolorată? Este evident că va trebui să o colorăm fie cu roșu, fie cu o a patra culoare. Să presupunem că alegem cea de-a doua variantă și o colorăm verde, așa cum se vede în fig. 43 *b*. Apoi adăugăm o altă regiune. Acum este imposibil să completăm harta fără a utiliza o a cincea culoare. Să ne întoarcem așadar la fig. 43 *a*, unde, în loc de verde, să punem roșu. Dar asta produce încurcături dacă alte două regiuni suplimentare ating pe primele patru, după cum se arată în fig. 43 *c*. Este clar că sînt necesare o a patra și o a cincea culoare pentru cele două arii albe. Dar demonstrează oare aceasta că pentru anumite hărți sînt necesare cinci culori? Desigur că nu. În ambele cazuri ne-am putea descurca cu patru culori — dar numai întorcîndu-ne înapoi și modificînd schema precedentă de colorare.

Atunci cînd avem de colorat hărți complicate, cu zeci de regiuni, putem ajunge deseori la încurcături de felul acesta, care necesită întoarceri înapoi. Prin urmare, pentru a demonstra teorema celor patru culori trebuie să arătăm că astfel de modificări pot fi întotdeauna făcute cu succes, sau să inventăm un procedeu care să elimine toate aceste modificări în cursul colorării cu patru culori a oricărei hărți. Stephen Barr a sugerat un minunat joc topologic pentru două persoane, bazat pe greutatea de a prevedea aceste încurcături de culoare. Jucătorul A desenează o regiune. Jucătorul B o colorează şi adaugă o nouă regiune. Jucătorul A o colorează şi adaugă o a treia. Jocul continuă, fiecare jucător colorînd ultima regiune desenată de oponent, pînă cînd unul dintre ei pierde, atunci cînd este forţat să folosească o a cincea culoare. Nu cunosc o altă cale mai rapidă de a lua cunoştinţă cu greutăţile care intervin în demonstrarea teoremei celor patru culori, decît angajarea în acest joc curios.

Deseori se spune că cei dintîi care şi-au dat seama că pentru nici o hartă nu este nevoie de mai mult de patru culori au fost cartografii, dar faptul a fost pus la îndoială de Kenneth O. May, un matematician de la Colegiul Carleton (din Northfield, statul Minnesota). Deşi a cercetat îndelung originile teoremei celor patru culori, May nu a putut găsi nici un fel de formulare a teoremei în vechile cărţi de cartografie, sau măcar vreo indicaţie că ea era cunoscută. Se pare că teorema a fost formulată clar pentru prima dată de Francis Guthrie, un student la Edinburgh. El a vorbit despre ea cu fratele său Frederick (care mai tîrziu a devenit chimist), iar acesta, la rîndul său, a trecut-o profesorului său de matematici, Augustus de Morgan (în 1852). Teorema a devenit larg cunoscută după ce marele Arthur Cayley a admis, în 1878, că a lucrat o vreme asupra ei, dar că nu a fost în stare să o demonstreze.

În 1879, avocatul şi matematicianul englez Sir Alfred Kempe a publicat ceea ce el credea că este o demonstraţie, iar un an mai tîrziu, a scris pentru revista „Natura" un articol cu un titlu foarte sigur şi încrezător, *Cum să colorăm o hartă cu numai patru culori*. Timp de zece ani, matematicienii au fost convinşi că problema a fost rezolvată. Dar apoi P. J. Heawood a dibuit o eroare fatală care se strecurase în demonstraţia lui Kempe. De atunci încoace, mai toate minţile iscusite ale matematicii au încercat, fără succes, să rezolve problema. Ceea ce induce în eroare la teoremă este că ea *pare* foarte uşor de demonstrat. În cartea sa autobiografică *Ex-Prodigy* (Un om obişnuit), Norbert Wiener[1] scrie că şi el a încercat, ca toţi matematicienii, să găsească o demonstraţie a teoremei, doar pentru ca în cele din urmă să constate că din toată demonstraţia nu rămîn decît fărîme, la fel ca din „aurul nebunului"[2], cum se exprimă el. Ceea ce este pe deplin stabilit în momentul de faţă este faptul că teorema este valabilă pentru hărţi cu nu mai mult de 38 de regiuni. Acesta poate părea un număr foarte mic, dar el devine mai puţin banal dacă ne gîndim că numărul hărţilor topologic-diferite cu nu mai mult de 38 de regiuni

[1] Matematician american, 1874–1964. — *N.T.*

[2] „Aurul nebunului" — nume dat piritelor feroase sau cuprifere, care pot fi uşor confundate cu aurul. — *N.T.*

care pot fi desenate se ridică la valoarea astronomică de 10^{38}. Nici măcar un calculator electronic modern nu ar fi în stare să examineze toate aceste configurații într-un timp rezonabil de scurt.

Lipsa unei demonstrații pentru teorema celor patru culori este cu atît mai exasperantă, cu cît pentru suprafețe cu mult mai complicate decît planul demonstrația a fost dată. (Din punctul de vedere al problemei de față, suprafața unei sfere este identică cu un plan; orice hartă desenată pe o sferă poate fi transformată într-o hartă plană echivalentă prin tăierea ei în una dintre regiuni și aplatizarea suprafeței.) S-a demonstrat că pe suprafețe cu o singură față, cum sînt banda Moebius, sticla lui Klein[3] sau planul proiectiv, șase culori sînt necesare și suficiente. Pe suprafața unui tor, numărul este șapte. O astfel de hartă este desenată în fig. 44. Se observă că fiecare regiune este mărginită de șase segmente de dreaptă și că este vecină cu celelalte șase regiuni. În fapt, problema colorării hărții a fost definitiv rezolvată pentru orice suprafață de ordin mai înalt care a fost studiată serios.

Abia cînd se încearcă aplicarea teoremei la suprafețe topologic-echivalente cu planul sau cu suprafața sferei, demonstrația ridică dintr-o dată probleme serioase pentru topologi. Și, ceea ce este și mai trist, nu există vreo rațiune vizibilă de ce lucrurile se întîmplă așa. Există ceva în felul apariției unor stafii în toate încercările de demonstrație care par să meargă strălucit, pentru ca un pic mai tîrziu să trădeze vreo iritantă scăpare oarecare care distruge tot lanțul logic impecabil tocmai înainte de a i se adăuga ultima verigă. Nimeni nu poate prezice ce va decide viitorul asupra acestei probleme, dar de pe acum putem spune că o faimă mondială așteaptă pe primul om care va obține una dintre următoarele trei realizări:

1. O hartă care să necesite cinci culori. „Dacă aș fi destul de curajos să fac o presupunere — scrie H. S. M. Coxeter în excelentul său articol *Problema hărții în patru culori, 1840—1890* — atunci aș presupune că o hartă care să necesite cinci culori poate fi posibilă, dar că cea mai simplă dintre toate aceste hărți are atîtea fețe (poate sute, sau chiar mii), încît nimeni nu va avea răbdarea să facă toate verificările trebuincioase pentru excluderea posibilităților de a o colora cu numai patru culori".

2. O demonstrație a teoremei — recurgînd, eventual, la vreo teh-

[3] Sticla lui Klein — figură geometrică cu o singură față, constînd dintr-un tub ascuțit spre unul dintre capete, al cărui capăt mai subțire este îndoit înapoi, introdus printr-o margine a tubului și unit prin încălzire cu capătul larg, permițînd astfel ca două puncte oarecare ale figurii să fie unite printr-o linie neîntreruptă. Numită astfel după matematicianul german Felix Klein, 1849—1925. — *N.T.*

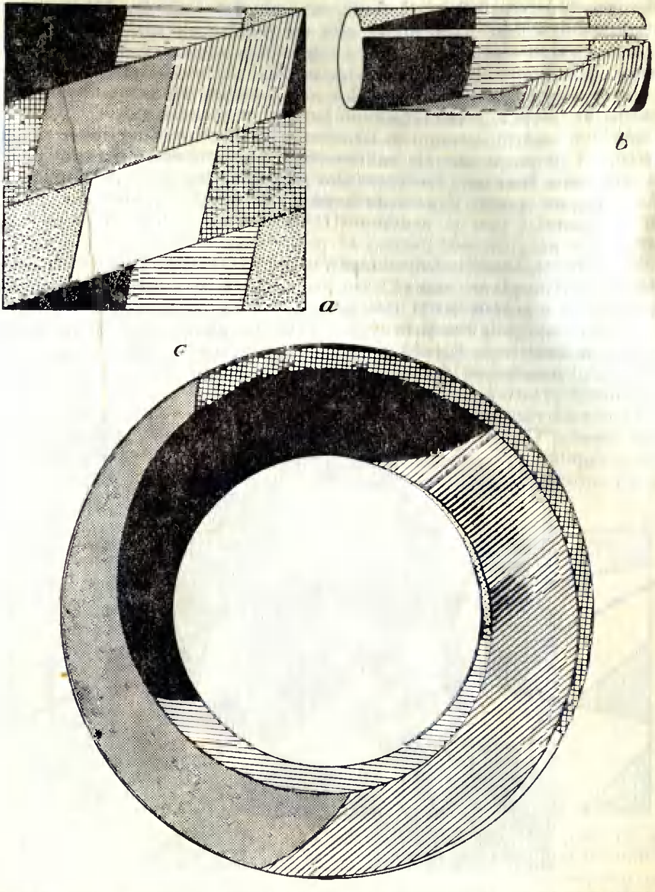


Fig. 44 Cu şapte culori se poate desena o hartă pe un tor (*c*). Foaia (*a*) este mai întîi înfăşurată într-un cilindru (*b*). Torul rezultant este mult mărit (*c*).

nică nouă; această tehnică nouă, nu mai este nevoie să o spunem, ar putea deschide brusc multe alte uşi închise ale matematicii.

3. O demonstraţie a faptului că teorema este imposibil de demonstrat. Asta poate suna ciudat, dar în 1931 Kurt Gödel[4] a stabilit că în orice sistem deductiv destul de complicat pentru a include raţionamente aritmetice, există teoreme matematice care pot fi „nerezolvabile"[5] în cadrul sistemului. Deocamdată, foarte puţine dintre marile probleme în suspensie ale matematicii s-au dovedit „nerezolvabile" în acest sens. Este oare teorema celor patru culori o astfel de problemă? Dacă Da, ea poate fi acceptată ca „adevărată" numai incluzînd-o ca un postulat nou şi nedemonstrabil al unui sistem deductiv mai larg.

Din păcate, demonstraţia faptului că cinci culori sînt suficiente pentru hărţile plane, sau că şase sau mai multe culori sînt necesare şi suficiente pentru hărţi desenate pe anumite suprafeţe de ordin mai înalt, este prea lungă pentru a fi inclusă aici. Dar poate că următoarea demonstraţie isteaţă a unei teoreme pentru două culori va da cititorului o oarecare idee despre cum trebuie procedat ca să stabileşti o teoremă relativă la colorarea hărţilor.

Să considerăm toate hărţile plane posibile care pot fi formate prin linii drepte. Un exemplu ar fi tabla de şah obişnuită. Un tipar mai puţin regulat este ilustrat în partea stîngă a fig. 45. Sînt oare două culori suficiente pentru astfel de hărţi? Răspunsul este Da, iar demon-

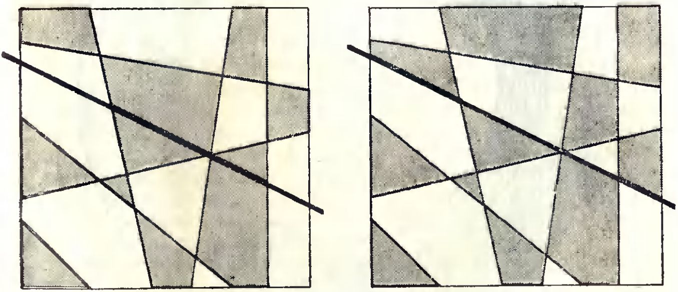


Fig. 45 Două culori sînt suficiente pentru orice hartă desenată în linii drepte care se întretaie pe întreaga suprafaţă.

[4] Matematician şi logician american de origine cehoslovacă, născut în 1906. — *N.T.*
[5] În sensul că nu pot fi nici demonstrate, nici infirmate. — *N.R.*

strația este foarte ușoară. Dacă adăugăm o linie dreaptă suplimentară (de exemplu, linia groasă din același desen) oricărei hărți din linii drepte corect colorate, această linie va diviza planul în două hărți separate, fiecare colorată corect dacă este considerată izolat, dar cu perechi de regiuni colorate identic de-a lungul liniei groase. Pentru a restaura colorarea corectă pentru întreaga hartă, tot ce avem de făcut este să interschimbăm toate culorile de o parte a liniei (indiferent care). Această operație este ilustrată în partea dreaptă a figurii. Harta din partea de sus a figurii a fost inversată, așa cum o fotografie pozitivă este schimbată în una negativă. După cum se vede, noua hartă este acum corect colorată.

Pentru a completa demonstrația, să considerăm un plan care este împărțit în două regiuni printr-o singură linie. Evident, cele două regiuni pot fi colorate cu două culori. Desenăm o nouă dreaptă și inversăm culorile de o parte a acestei linii. Desenăm o a treia linie și așa mai departe. Este clar că procedeul rămîne valabil pentru orice număr de drepte — așa că putem considera demonstrată teorema celor două culori pentru orice hartă desenată cu linii drepte, printr-o

Fig. 46 Două culori sînt, de asemenea, suficiente pentru o hartă desenată cu linii care se întretaie pe suprafață și cu curbe închise.

metodă cunoscută sub numele de „metoda inducției matematice". Demonstrația poate fi generalizată pentru cazul unor hărți mai puțin rigide, ca cea din fig. 46, desenate cu linii fără sfîrșit care fie că traversează harta de la un capăt la altul, fie că sînt cuprinse în întregime în interiorul ei, ca linii curbe închise. Dacă adăugăm o linie care trece de la o margine la alta a hărții, putem inversa culorile de o parte a acestei linii, ca și înainte. Dacă noua linie este o curbă închisă, putem inversa culorile tuturor regiunilor din interiorul — sau, dacă preferăm, din exteriorul acestei bucle. Aceste linii închise se pot intersecta cu ele însele, dar în acest caz operația de recolorare devine ceva mai complicată.

De notat că toate hărțile date ca exemplu aici au încrucișări pare (la fiecare încrucișare se întîlnesc un număr par de linii). Se poate demonstra că o hartă plană poate fi colorată în două culori dacă și numai dacă toate încrucișările sale sînt pare. Faptul este cunoscut sub numele de „teorema hărților în două culori". Că această condiție nu este suficientă pentru hărțile desenate pe un tor se poate vedea ușor liniind nouă pătrate pe o foaie de hîrtie pătrată (ca pentru jocul Ticktacktoe[6]), și apoi îndoind-o în formă de tor în modul descris mai înainte. Acest covrig cu pătrățele are încrucișări pare, dar necesită trei culori.

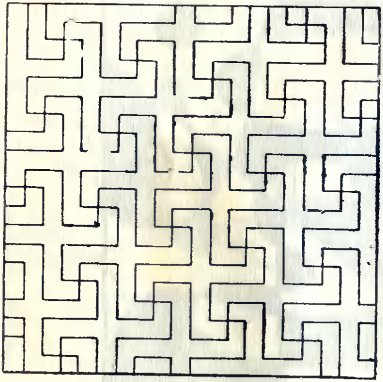


Fig. 47 Cîte culori sînt necesare pentru această hartă ?

Și acum, iată trei probleme de colorare a hărților, foarte ușoare, deși fiecare dintre ele prezintă capcane de un fel sau altul, care fac soluția oarecum diferită de cea care ar fi de așteptat la prima vedere ; ele sînt date aici mai mult pentru amuzament decît ca instruire.

1. Cîte culori cere harta din fig. 47 (inventată de problemistul englez Henry Ernest Dudeney), astfel încît două regiuni vecine să nu fie colorate în aceeași culoare ?

2. Stephen Barr scrie

[6] Vezi nota 1 de la cap. VI. — *N.T.*

despre un pictor care dorea să picteze pe o pînză enormă un desen non-figurativ după modelul din fig. 48. El s-a hotărît să se limiteze la patru culori și să umple fiecare regiune cu o culoare, astfel încît pe fiecare parte a fiecărei frontiere comune să fie cîte o culoare diferită. Fiecare regiune are o arie de 8 dm², în afară de regiunea de sus, care este de două ori mai mare. Cînd pictorul și-a verificat stocul de culori, a găsit că are la îndemînă doar atîta roșu cît să-i ajungă pentru o suprafață de 24 dm², atît galben cît să-i ajungă pentru o suprafață egală cu aceasta, atît verde cît să-i ajungă pentru 16 dm² și atît albastru cît să-i ajungă să acopere 8 dm². Cum a reușit pînă la urmă să vopsească toată pînza?

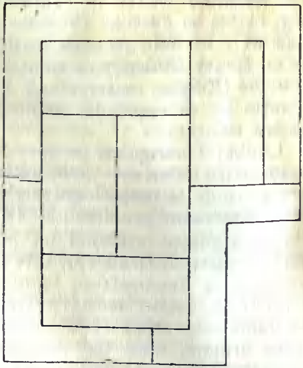


Fig. 48 Cîte culori sînt necesare pentru colorarea acestui tablou abstracționist?

3. Leo Moser, un matematician de la Universitatea din Alberta (Canada), întreabă: cum poate fi desenată pe un plan o hartă în două culori, astfel încît indiferent unde ar fi plasat pe ea un triunghi echilateral cu latura egală cu 1, cele trei vîrfuri ale sale să nu fie niciodată situate toate pe una și aceeași culoare?

ADAOS

Afirmația că pe un plan nu pot fi desenate cinci regiuni astfel ca fiecare pereche să aibă o frontieră comună a fost făcută de Moebius, într-o lecție a sa din 1840. El a prezentat-o sub forma unei istorioare, în care un prinț oriental își lasă moștenire regatul celor cinci fii ai săi, cu condiția ca el să fie împărțit în cinci regiuni, fiecare dintre ele vecină cu celelalte. Problema este echivalentă cu următoarea problemă din teoria grafelor[7]: este oare posibil să plasăm cinci puncte într-un plan și să unim fiecare punct cu toate celelalte prin linii drepte care nu se intersectează? Demonstrații ale imposibilității acestui lucru nu sînt grele și pot fi găsite în orice carte elementară de teoria grafelor. O variantă ușor de urmărit a fost dată

[7] Graf — o serie de puncte, discrete sau continue, ca cele care formează o curbă sau o suprafață, fiecare dintre ele reprezentînd valoarea unei anumite funcții. — *N.T.*

de Heinrich Tietze în capitolul intitulat *Asupra domeniilor vecine* din cartea sa *Famous Problems of Mathematics* (Probleme matematice celebre). În linii generale, o demonstrație asemănătoare a fost dată și de Henry Dudeney ca soluție la problema nr. 140 din *Mathematical Puzzles* (Enigme matematice). Din păcate, Dudeney afirmă că demonstrația lui ar cuprinde, implicit, și o demonstrație a teoremei celor patru culori.

Limbajul neriguros pe care l-am folosit cînd am spus că teorema celor patru culori este „nerezolvabilă în sens Gödel" a atras următoarea scrisoare de la cosmologul englez Dennis Sciama (publicată în „Scientific American", noiembrie 1960, p. 21):

„Mi-a plăcut articolul lui Martin Gardner despre problema celor patru culori. Într-adevăr, este imposibil de demonstrat că este imposibil să se demonstreze teorema. Pentru că dacă teorema nu este adevărată, lucrul acesta poate fi probat explicit și fără putință de îndoială prezentînd o hartă care nu a putut fi colorată cu patru culori. Prin urmare, dacă teorema este nedemonstrabilă, ea trebuie să fie adevărată. Aceasta înseamnă că nu putem demonstra că ea este nedemonstrabilă, căci aceasta ar fi echivalent cu a demonstra că teorema este adevărată — ceea ce este o contradicție.

Același raționament rămîne valabil pentru oricare teoremă a cărei falsitate ar putea fi demonstrată printr-un contraexemplu, de exemplu ultima teoremă a lui Fermat[8]. S-ar putea ca astfel de teoreme să fie nedemonstrabile — dar aceasta numai dacă ele sînt adevărate. Prin urmare, nu vom putea niciodată ști că ele sînt nedemonstrabile, așa că matematicienii vor încerca la infinit să le demonstreze. Este o stare de lucruri de-a dreptul înfricoșătoare. Poate că ar fi mai convenabil să ne apucăm cu toții să facem fizică, dar s-ar putea ca și acest domeniu să fie în cele din urmă invadat de Gödel-iști..."

De fapt, situația nu mai pare chiar atît de înfricoșătoare dacă ne gîndim că o teoremă care este nerezolvabilă în sens Gödel în cadru unui anumit sistem deductiv poate fi întotdeauna rezolvată metamatematic, lărgind sistemul. Dacă teorema celor patru culori se va dovedi vreodată nerezolvabilă în sens Gödel, în cadrul unui sistem bazat pe anumite postulate ale topologiei și ale teoriei mulțimilor, ea va deveni automat „adevărată" (după cum arată clar Sciama) — dar „adevărată" în sensul metamatematic că este rezolvabilă într-un sistem mai larg, poate un sistem în care teorema hărții în patru culori este un nou postulat.

---

[8] Pierre de Fermat — matematician francez, 1601—1665. „Ultima teoremă a lui Fermat" este numele dat unei teoreme nedemonstrate, care afirmă că ecuația $x^n + y^n = z^n$ nu are soluții pentru x, y și z întregi nenuli, atunci cînd n este mai mare decît 2. — *N.T.*

Iată răspunsurile la cele trei probleme de colorare a hărţilor (primele două răspunsuri trimit la desenele din fig. 47 şi, respectiv, 48):

1. Harta din fig. 47 ar putea fi colorată în două culori — dacă n-ar exista o mică linie în colţul din stînga jos. În zona aceea există trei regiuni adiacente, aşa că sînt necesare trei culori.

2. Artistul şi-a colorat tabloul abstracţionist, amestecînd întreaga cantitate de culoare albastră pe care o avea la dispoziţie, cu o treime din cantitatea de culoare roşie, obţinînd astfel suficient purpuriu ca să coloreze 16 dm² din pînză. După ce a colorat cu galben partea mare de sus şi aria din centru, i-a fost uşor să coloreze regiunile rămase în roşu, verde şi purpuriu.

3. Pentru a colora un plan în două culori în aşa fel încît nici un grup de trei puncte de aceeaşi culoare să nu poată fi vîrfurile unui triunghi echilateral cu latura 1, metoda cea mai simplă este să se împartă planul în benzi paralele, fiecare cu lăţimea de $\sqrt{3}/2$, şi acestea să fie apoi colorate alternativ în alb şi negru, aşa cum se vede în fig. 49. Totuşi, aceasta nu rezolvă problema decît dacă introducem noţiunile de mulţimi închise şi mulţimi deschise. Un continuu de numere reale — să spunem, numerele 0 şi 1 — se numeşte interval închis dacă include numerele 0 şi 1, şi deschis dacă nu le include. Dacă unul dintre aceste numere este inclus, iar celălalt nu, intervalul este numit închis la un capăt şi deschis la celălalt.

Bandele desenate pe plan sînt închise de-a lungul marginii lor din stînga şi deschise de-a lungul celei din dreapta. Banda neagră din stînga are o lăţime care începe la 0, măsurată pe dreapta orizontală din partea de jos a figurii, şi se termină la $\sqrt{3}/2$. Ea include pe 0, dar nu include valoarea $\sqrt{3}/2$. Banda următoare are o lăţime care include pe $\sqrt{3}/2$, dar nu include valoarea $2\sqrt{3}/2$ şi aşa mai departe pentru celelalte benzi. Cu alte cuvinte, fiecare linie verticală aparţine numai de banda din dreapta sa. Această condiţie este necesară pentru cazurile în care triunghiul, desenat în linii punctate, este aşezat cu toate cele trei vîrfuri pe liniile de frontieră.

Leo Moser, de la Universitatea din Alberta, care mi-a trimis această problemă, scrie că nu se ştie de cîte culori este nevoie pentru a colora planul, în aşa fel încît oricare *două* puncte, separate printr-o distanţă egală cu 1, să nu fie situate pe o aceeaşi culoare. S-a arătat că numărul necesar de culori este patru şi că numărul suficient este şapte. (Faptul că şapte este un număr suficient reiese clar dacă ne gîndim la o reţea regulată de hexagoane, fiecare cu raza cercului circumscris ceva mai

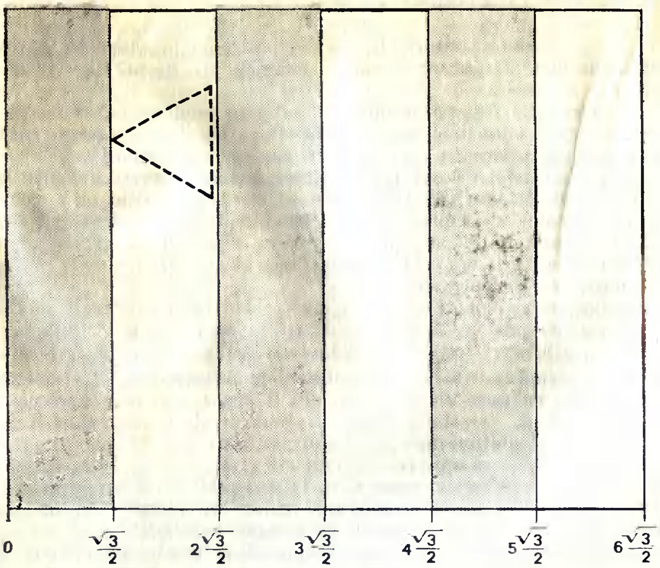


Fig. 49 Soluția problemei triunghiului și a hărții în două culori.

mică decît 1 și înconjurat de șase hexagoane de culori diferite atît între ele cît și față de cea a hexagonului central.) Distanța de la patru la șapte este atît de mare, încît problema pare încă foarte departe de rezolvare.

CAPITOLUL XI

Dl. Apollinax vizitează New York-ul

Pe cînd domnul Apollinax vizita New York-ul,
Rîsul lui provoca clinchetul ceştilor de ceai.
T. S. Eliot

P. Bertrand Apollinax, strălucitul protejat al celebrului matematician francez Nicolas Bourbaki, era puţin cunoscut chiar şi în Franţa înainte de primăvara lui 1960. Dar în acel an, după cum se ştie, lumea matematică a fost zguduită de publicarea într-o revistă franceză a unei descoperiri, cunoscută astăzi sub numele de funcţia lui Apollinax. Cu ajutorul acestei remarcabile funcţii, Apollinax a putut dintr-o singură lovitură: a) să demonstreze ultima teoremă a lui Fermat, b) să găsească un contraexemplu (şi anume o hartă cu 5693 regiuni) la faimoasa teoremă topologică a celor patru culori şi c) să aşeze temeliile descoperirii de către Channing Cheetah, trei luni mai tîrziu, a unui număr cu 5693 cifre — primul în genul său — care este atît perfect, cît şi impar.

Cititorul va înţelege desigur surpriza mea plăcută cînd profesorul Cheetah, de la Universitatea din New York, m-a invitat la o serată la care Apollinax urma să fie oaspetele de onoare. (Apartamentul lui Cheetah se află situat în Greenwich Village, într-o casă mare de piatră cafenie aproape de Fifth Avenue. Proprietara clădirii este d-na Orville Phlaccus, văduva cunoscutului om de afaceri, iar clădirea însăşi este supranumită Palatul Phlaccus de către studenţii Universităţii new-yorkeze din apropiere.) Cînd am ajuns eu, serata era în toi. Am recunoscut printre invitaţi cîţiva membri ai Facultăţii de matematică a Universităţii şi am bănuit că cei mai mulţi dintre tinerii prezenţi erau studenţi.

Nu se putea să te înşeli în privinţa lui Apollinax. El era, bineînţeles, în centrul atenției. Un tînăr licențiat trecut cu puțin de 30 de ani, înalt, cu trăsături aspre, care nu puteau fi numite frumoase, dar care sugerau o puternică impresie de bărbăție, combinată cu o inteligență masivă. Purta un mic bărbișon negru și avea urechile cam mari. Sub haina de tweed purta o vestă de un roșu aprins.

În timp ce d-na Phlaccus îmi întindea o ceașcă de ceai, auzii o fată spunînd:

— Spune-mi, domnule Apollinax, inelul de argint de la degetul dv. nu e cumva o bandă Moebius?

Dl. Apollinax își scoase inelul și i-l dădu.

— Ba da, spuse el. E făcut de un prieten al meu din Paris, care ține un magazin de bijuterii pe Malul Stîng.

Vorbea cu un pronunțat accent franțuzesc.

— Dar e o nebunie! exclamă fata, înapoindu-i inelul. Nu vă e teamă că s-ar putea răsuci, făcînd să vă dispară degetul?

Apollinax rîse zgomotos.

— Dacă crezi cu adevărat că asta este nebunie, atunci nu știu ce vei spune despre asta. Și scoase din buzunar o cutiuță plată și pătrată de lemn. Înăuntru erau 16 plăcuțe din material plastic alb, care se potriveau perfect una în alta, așa cum se vede în partea din stînga a fig. 50. Grosimea lor fusese astfel aleasă, încît cele cinci piese din centru aveau formă de cub. Apollinax atrase atenția asupra numărului de cuburi, împrăștie plăcuțele pe o masă din apropiere, apoi le reașeză iute în cutiuță, în modul arătat în ilustrația din dreapta. Ele se potriveau și de data asta la fel de perfect ca înainte. Dar acum erau numai patru cuburi! Unul dintre cuburi dispăruse complet!

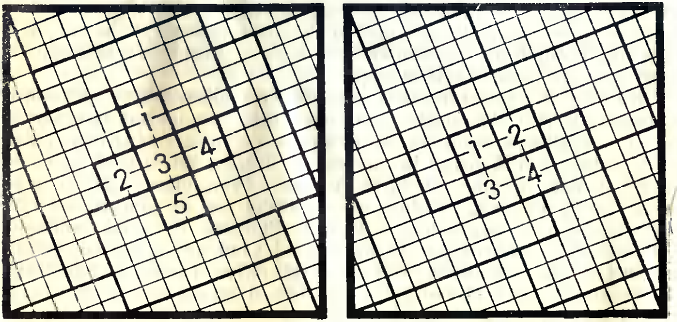


Fig. 50 Misterul plăcuței care dispare.

Fata privi cutiuţa cu neîncredere un timp, apoi îşi întoarse privirea mirată către Apollinax, care se zguduia de rîs.

— Aş putea să mă uit puţin la ea? întrebă ea, luîndu-i cutiuţa din mînă şi ducînd-o spre un colţ mai liniştit al camerei.

— Cine este puiculiţa? şopti Apollinax la urechea profesorului Cheetah.

— Pardon? răspunse profesorul.

— Fata cu bluza aceea drăguţă, vreau să spun.

— A da, o cheamă Nancy Ellicott. Vine de la Boston. Este una dintre cele mai bune studente ale noastre.

— Foarte frumuşică.

— Adevărat? N-am văzut-o niciodată purtînd altceva decît blue-jeans şi una şi aceeaşi bluză, cam murdară.

— Îmi plac grozav non-conformiştii pe care-i aveţi aici, în Sat[1]. Se aseamănă atît de mult între ei!

— Uneori e însă greu să faci deosebire între non-conformism şi nevroză, remarcă cineva din grup.

— Asta-mi aminteşte de o anecdotă pe care am auzit-o recent, intervenii şi eu. Care este deosebirea dintre un psihopat şi un nevropat?

Nimeni nu scoase o vorbă.

— Un phisopat, continuai eu, crede că doi şi cu doi fac cinci. Un nevropat ştie că fac patru — dar asta îl enervează.

Se auziră cîteva rîsete politicoase, însă Apollinax părea foarte serios.

— Şi are motive să fie nervos, spuse el. Nu scria oare Alexander Pope[2]: „De ce, o, zei! de ce doi şi cu doi fac mereu patru?" În adevăr, de ce? Nici chiar cea mai simplă aritmetică nu este ferită de contradicţii.

Scoase din buzunar un carneţel şi scrise pe el următoarea serie infinită:

$$4 - 4 + 4 - 4 + 4 - 4 + 4 \ldots$$

— Care este suma acestei serii? întrebă el. Dacă grupăm numerele în felul următor:

$$(4 - 4) + (4 - 4) + (4 - 4) \ldots$$

suma este evident zero. Dar dacă le grupăm astfel:

$$4 - (4 - 4) - (4 - 4) - (4 - 4) \ldots$$

---

[1] Greenwich Village — „Satul" Greenwich, cartier al New York-ului frecventat de artişti, scriitori şi studenţi. — *N.T.*

[2] Poet englez, 1688—1744. — *N.T.*

suma este, la fel de evident, patru. Să presupunem că mai încercăm și așa:

$$4 - (4 - 4 + 4 - 4 + 4 - 4 \ldots)$$

Suma seriei este acum patru minus suma aceleiași serii. Cu alte cuvinte, dublul sumei este patru, astfel că suma trebuie să fie egală cu jumătatea lui patru — adică doi!

Tocmai eram pe punctul să fac o observație, cînd Nancy se întoarse spre grup și spuse:

— Plăcuțele astea mă înnebunesc. Unde-o fi dispărut cel de-al cincilea cub?

Apollinax rîse pînă îi dădură lacrimile.

— O să te ajut puțin, draga mea, spuse el. Gîndește-te: n-o fi dispărut cumva într-o dimensiune de ordin superior?

— Rîdeți de mine?

— De loc. Cum știi, cea de-a patra dimensiune este o prelungire de-a lungul unei a patra coordonate, perpendiculară pe cele trei coordonate ale spațiului tridimensional. Ia acum un cub. Acesta are patru diagonale principale, fiecare dintre ele pornind de la un colț și ajungînd la colțul opus prin centru. Din cauza simetriei cubului, fiecare dintre aceste diagonale este, în mod evident, perpendiculară pe celelalte. Și atunci, de ce n-ar putea un cub, dacă vrea cu adevărat, să alunece în lungul unei a patra coordonate?

— Dar profesorul de fizică ne-a spus că cea de-a patra coordonată este *timpul*, spuse Nancy cu sprîncenele încruntate.

— Absurd! se indignă Apollinax. Relativitatea generalizată este acum la fel de moartă ca pterodactilii. Profesorul acela n-a auzit că Hilbert Dongle a descoperit recent o eroare fatală în teoria lui Einstein?

— Mă îndoiesc, răspunse Nancy.

— E foarte ușor să-ți explic. Dacă învîrtești foarte repede o sferă de cauciuc moale, ce se întîmplă cu ecuatorul ei? Se umflă. În teoria relativității, poți explica această umflare în două feluri. Mai întîi, poți presupune că universul este un sistem de referință fix — un așa-numit sistem inerțial. În acest caz, spui că sfera se învîrtește, iar inerția produce umflarea ecuatorului. Sau, poți face din sferă un sistem de referință fix, în care caz trebuie să consideri că universul este cel care se rotește. Masele stelelor în mișcare stabilesc un cîmp gravitațional tensorial, care își exercită acțiunea cea mai puternică asupra ecuatorului sferei imobile. Bineînțeles...

— Eu aș pune problema un pic altfel, interveni Cheetah. Aș spune că există o mișcare relativă a sferei față de stele, iar această mișcare relativă produce o anumită schimbare în structura spațio-temporală a universului. Cea care provoacă umflarea ecuatorului este tocmai presiunea, ca să spun aşa, a acestei matrici spaţio-temporale. Umflarea poate fi privită atît ca un efect gravitaţional, cît şi ca unul inerţial. În ambele cazuri ecuaţiile cîmpului sînt aceleaşi.

— Foarte bine, zise Apollinax. Asta e tocmai ceea ce Einstein însuşi numea principiul echivalenţei — echivalenţa dintre gravitaţie şi inerţie. Aşa cum îi plăcea lui Hans Reichenbach să o spună, între ele nu există nici o distincţie autentică. Dar dă-mi voie să te întreb numai atît: nu este aşa că teoria relativităţii interzice corpurilor fizice să aibă mişcări relative cu viteze mai mari decît cea a luminii? Şi totuşi, dacă facem din mingea de cauciuc sistemul nostru fix de referinţă, n-ar fi nevoie decît de o foarte lentă rotaţie a mingii pentru a da Lunii o mişcare relativă mult mai rapidă decît viteza luminii. Cheetah îl privi cam încurcat.

— Înţelegi, continuă Apollinax, că nu putem ţine sfera pur şi simplu nemişcată, în timp ce învîrtim universul în jurul ei. Asta înseamnă că ar trebui să privim rotaţia sferei ca absolută, nu ca relativă. Astronomii au intrat într-o încurcătură de acelaşi tip cu ceea ce ei numesc efectul Doppler transversal[3]. Dacă Pămîntul se învîrteşte, viteza relativă transversală între observator şi o rază de lumină care vine de la o stea îndepărtată este foarte mică, aşa că deplasarea Doppler este foarte mică. Dar dacă consideri că universul se învîrteşte, viteza transversală a stelei îndepărtate faţă de observator este foarte mare, aşa că efectul Doppler ar trebui să crească în mod corespunzător. Deoarece este însă bine stabilit că efectul Doppler transversal este mic, trebuie să admitem că Pămîntul este acel care se roteşte. Bineînţeles, aceasta implică aruncarea pe fereastră a teoriei relativităţii.

— Bine, murmură Cheetah, care, în treacăt fie spus, arăta cam palid. Dar cum poţi explica în acest caz faptul că experienţa lui Michelson şi Morley nu a putut detecta vreo mişcare a Pămîntului faţă de spaţiul fix?

— Foarte simplu, spuse Apollinax. Universul este infinit. Pămîntul se roteşte în jurul Soarelui, Soarele aleargă prin galaxie, galaxia „galumfează"[4] faţă de alte galaxii, galaxiile formează roiuri galactice care se mişcă faţă de alte roiuri galactice, iar roiurile acestea sînt părţi ale unor supraroiuri. Ierarhia este fără de sfîrşit. Însumează o serie infinită de vectori, reprezentînd viteze şi direcţii întîmplătoare, şi

---

[3] Efectul Doppler — schimbarea aparentă a frecvenţei unei unde (sonore sau luminoase), produsă de schimbări care au loc în distanţa dintre sursa undei şi receptor. Numit astfel după fizicianul austriac C. J. Doppler, 1803—1853. — *N.T.*

[4] În original, *gallumph* — cuvînt inventat de Lewis Carroll, prin combinarea cuvintelor *gallop* şi *triumphant*. — *N.T.*

ai să vezi ce se întîmplă. Vectorii se anulează reciproc. Zeroul și infinitul sînt rude foarte apropiate. Dă-mi voie să-ți arăt.

Apollinax arătă cu degetul o vază mare care se afla pe masă.

— Închipuie-ți că vaza asta e goală. Apoi începem să o umplem cu numere; dacă vrei, cu mici plăcuțe pe care sînt înscrise numere. La douăsprezece fără un minut, punem înăuntru numerele de la 1 la 10, apoi scoatem afară numărul 1. La douăsprezece fără o jumătate de minut, introducem numerele de la 11 la 20 și îl scoatem pe 2. La douăsprezece fără o treime de minut, introducem numerele de la 21 la 30 și îl scoatem pe 3. La douăsprezece fără un sfert de minut, punem numerele 31—40 și îl scoatem pe 4. Și așa mai departe. Cîte numere vor fi în vază la douăsprezece fix?

— O infinitate, spuse Nancy. De fiecare dată cînd introduci în vază zece numere, iei afară numai unul.

Apollinax rîse în hohote.

— Ba nu va fi *nici un număr* în vază! Se află 4 în vază? Nu, 4 a fost scos la operația a patra. Se află 518 în vază? Nu, acest număr a fost scos la operația a 518-a. Numerele care se vor afla în vază la douăsprezece fix formează o mulțime vidă. Te-ai convins cît de apropiat este infinitul de zero?

Doamna Cheetah tocmai se apropia de noi, cu o tavă pe care se găseau tot felul de prăjituri asortate.

— Cred că o să fie cazul să pun în aplicare axioma alegerii a lui Zermelo[5], spuse Apollinax, și să iau cîte una din fiecare.

— Dacă ești așa de convins că teoria relativității poate fi considerată ca moartă, spusei eu după cîteva minute, care este atunci părerea dumitale despre teoria cuantică modernă? Există oare în comportarea particulelor elementare un caracter întîmplător fundamental? Sau caracterul întîmplător este doar o expresie a ignoranței noastre în înțelegerea legilor?

— În privința asta, sînt pe deplin de acord cu punctul de vedere modern, spuse Apollinax. De fapt, merg chiar și mai departe. Sînt de acord cu Karl Popper că există argumente *logice* cum că determinismul nu mai poate fi luat în serios.

— Asta n-o mai pot crede, spuse cineva.

— Bine, hai să o luăm altfel. Există porțiuni ale viitorului care *principial* nu pot fi niciodată prezise corect, chiar dacă am dispune de informații complete despre starea universului. Dă-mi voie să demonstrez.

---

[5] Axioma lui Zermelo sau axioma alegerii — axiomă din teoria mulțimilor, care afirmă că, dată fiind o colecție oarecare de mulțimi separate, poate fi construită o mulțime nouă care să conțină cîte un element din fiecare mulțime dată. — *N.T.*

Scoase o fişă de carton din buzunar şi ţinînd-o în aşa fel ca nimeni să nu poată vedea ce scrie pe ea, mîzgăli cîteva vorbe. Apoi îmi întinse fişa.

— Pune-o, te rog, în buzunarul din dreapta al pantalonilor.

Făcui cum mi-a spus.

— Pe fişă, spuse el, am descris un eveniment viitor. Evenimentul nu a avut încă loc, dar în mod sigur el va avea sau nu va avea loc înainte de — privi la ceasul de la mînă — înainte de ora nouă.

Scoase din buzunar o altă fişă şi mi-o întinse.

— Aş vrea să încerci să ghiceşti dacă evenimentul pe care tocmai l-am descris va avea loc sau nu. Scrie pe fişă Da sau Nu.

Tocmai pusesem mîna pe creion, cînd Apollinax mă apucă de încheietura mîinii.

— Nu încă, prietene. Dacă aflu care-ţi este prezicerea, aş putea face ceva ca să nu fie aşa cum spui. Aşteaptă să mă întorc cu spatele şi ai grijă ca nimeni să nu vadă ce scrii.

Se răsuci cu spatele la mine şi privi în tavan pînă terminai de scris.

— Acum pune fişa în buzunarul din stînga, te rog.

Se întoarse din nou cu faţa.

— Nu ştiu, bineînţeles, care-ţi este prezicerea. Nici dumneata nu ştii care este evenimentul. Aşadar, şansa ca să ai dreptate este de unu la doi.

Încuviinţai.

— În acest caz, pot pune cu dumneata următorul rămăşag. Dacă prezicerea dumitale se dovedeşte falsă, îmi dai un dolar. Dacă se dovedeşte justă, îţi dau eu un milion de dolari.

Toată asistenţa privea uimită.

— S-a făcut, spusei.

— În timp ce aşteptăm să se facă ora nouă, spuse Apollinax către Nancy, să ne întoarcem un pic la teoria relativităţii. Îţi pot da o metodă de a purta întotdeauna o bluză relativ curată, chiar dacă nu ai decît două bluze şi nu le speli niciodată.

— Sînt numai urechi, spuse Nancy, zîmbind.

— Ba mai ai şi alte trăsături, spuse Apollinax, şi încă foarte drăguţe toate. Dar lasă-mă să-ţi explic metoda cu bluzele. Îmbracă mai întîi pe cea mai curată dintre ele, să zicem, bluza A, şi poart-o pînă devine mai murdară decît bluza B. Apoi dezbrac-o şi pune-ţi bluza relativ curată B. În momentul cînd B a devenit mai murdară decît A, dezbrac-o şi pune-ţi bluza relativ curată A. Şi aşa mai departe.

Nancy se înroşi toată.

— Mă tem că nu voi putea aştepta aici pînă la nouă, spuse Apollinax. Nu într-o seară călduroasă de primăvară ca asta, cel puţin. Nu cumva ştii dacă Thelonius Monk cîntă pe undeva prin oraş în seara asta?

Nancy făcu ochii mari.

— Dar bineînţeles! Cîntă într-un local chiar aici, în Sat. Îţi place?

— Mă omor după el, spuse Apollinax. Aşa că dacă o să mă conduci la un restaurant bun prin apropiere, o să-ţi ofer o masă, o să-ţi explic misterul plăcuţelor şi apoi o să mergem împreună să-l ascultăm pe Monk.

După ce Apollinax şi Nancy plecară, braţ la braţ, zvonul despre prezicerea făcută se răspîndi printre toţi invitaţii. Cînd se făcu nouă, toţi se strînseră să afle care este prezicerea şi care este răspunsul meu. Avusese dreptate. Evenimentul prezis era logic neprevizibil. I-am rămas dator cu un dolar.

Poate că cititorul va încerca el însuşi să găsească evenimentul pe care Apollinax l-a descris pe fişa sa.

ADAOS

Mulţi dintre cititori l-au luat pe Apollinax foarte în serios (deşi spusesem că el era protejatul lui Bourbaki, binecunoscutul matematician francez inexistent[6]) şi mi-au cerut să le indic referinţa în care ar putea găsi mai multe amănunte despre „funcţia lui Apollinax". Aşadar, precizez aici că atît Apollinax şi Nancy, cît şi ceilalţi invitaţi, nu sînt altceva decît personaje din două poezii de Thomas Stearns Eliot[7], *Mr. Apollinax* şi *Nancy*, care apar una lîngă alta în volumul *Collected Poems: 1909–1962*, Faber and Faber, Londra, 1963, pp. 32–33.

În treacăt fie spus, *Mr. Apollinax* este o poezie despre Bertrand Russell[8]. Atunci cînd Russell a vizitat Universitatea Harvard, în 1914, Eliot a audiat lecţiile acestuia de logică, iar mai apoi cei doi oameni s-au întîlnit la un ceai — tocmai ceaiul descris de Eliot în poezie.

Numele de Hilbert Dongle este derivat din cel al fizicianului englez Herbert Dingle, care de cîţiva ani argumentează că dacă paradoxul ceasornicului din relativitate este adevărat, atunci teoria relativităţii este falsă. (Vezi capitolul scris de mine asupra paradoxului ceasornicului în cartea *Relativity for the Million* (Relativitatea pe înţelesul

---

[6] Nicolas Bourbaki este numele sub care sînt publicate, incepînd din 1935, o serie de cărţi din diferite domenii ale matematicii, scrise de matematicieni eminenţi din diferite ţări, în special din Franţa. — *N.T.*

[7] T. S. Eliot — poet şi eseist englez, născut în Statele Unite (1888—1964), laureat al Premiului Nobel în 1948. — *N.T.*

[8] Bertrand (Arthur William), conte de Russell, matematician şi filozof englez (1872—1969), de două ori laureat al Premiului Nobel, în 1950 şi 1968. — *N.T.*

tuturor), care se poate găsi acum într-o ediţie de buzunar.) Iar Thelonius Monk nu este altcineva decît Thelonius Monk[9].

Metoda pe care Apollinax o recomandă lui Nancy în legătură cu bluza relativ curată este împrumutată dintr-o poezioară a lui Piet Hein, pe care l-am mai menţionat în capitolul asupra împletiturilor. Paradoxul cu numerele din vază provine din cartea lui J. E. Littlewood *Varietăţi matematice*. El ilustrează cazul în care scăderea numărului transfinit „alef-zero"[10] din de zece ori alef-zero, dă zero. Dacă plăcuţele numerotate sînt scoase din vază în ordinea 2, 4, 6, 8, ..., în vază rămîne o infinitate alef-zero de numere — şi anume toate numerele impare. S-ar putea, de asemenea, scoate din vază o mulţime infinită de plăcuţe într-un asemenea mod încît să rămînă orice număr finit dorit de plăcuţe. Dacă vrem, de exemplu, să lăsăm în vază exact trei plăcuţe, atunci scoatem numerele în ordine serială, dar începînd cu 4. Situaţia poate servi ca o ilustraţie amuzantă a faptului că atunci cînd din alef-zero se scade alef-zero, rezultatul este nedeterminat; el poate fi făcut egal cu zero, cu infinit, sau cu orice pozitiv întreg dorit, în funcţie de natura celor două mulţimi infinite care sînt implicate.

Modelul pentru paradoxul „cubului care dispare" este bazat pe un foarte puţin cunoscut principiu, descoperit de Paul Curry, din New York, şi care este discutat pe larg în capitolele dedicate „dispariţiilor geometrice" din cartea mea *Mathematics, Magic and Mystery* (Matematică, magică şi mister), publicată la editura Dover în ediţie de buzunar.

Prezentarea paradoxului prezicerii ca un rămăşag a fost publicată pentru prima dată în revista canadiană de magie „Ibidem", nr. 23, martie 1961, p. 23. O variantă uşor diferită, implicînd o carte poştală trimisă unui prieten, am publicat şi în „The British Journal for the Philosophy of Science", vol. 13, mai 1962, p. 51.

RĂSPUNSURI

Paradoxul plăcuţelor, demonstrat de P. Bertrand Apollinax, se explică după cum urmează. Cînd toate cele şaptesprezece plăcuţe sînt dispuse sub formă de pătrat, laturile pătratului nu sînt absolut drepte, ci sînt uşor convexe, aproape imperceptibil. Atunci cînd unul dintre cuburi este îndreptat şi cele şaisprezece plăcuţe rămase

---

[9] Thelonius „Sphere" Monk, pianist şi compozitor de jazz american, născut în 1918 (?). — *N.T.*

[10] Alef-zero — numărul cardinal al tuturor întregilor pozitivi, cel mai mic număr cardinal infinit. „Alef" este prima literă a alfabetului ebraic. — *N.T.*

sînt rearanjate în pătrat, laturile acestui pătrat sînt concave în aceeaşi măsură imperceptibilă. Acest lucru explică schimbarea aparentă a ariei. Pentru a dramatiza paradoxul, Apollinax a fost nevoit să recurgă la iuţeală de mînă, ascunzînd în mînecă cel de-al cincilea cub cu ocazia amestecării plăcuţelor pe masă.

Prezicerea făcută de Apollinax pe fişă era: „Vei introduce în buzunarul din stînga al pantalonilor o fişă pe care ai scris cuvîntul NU". Cea mai simplă prezentare a aceluiaşi paradox este să ceri cuiva să prezică, prin DA sau NU, dacă următorul cuvînt pe care el îl va spune cu voce tare va fi NU. Argumentele care îl fac pe Karl R. Popper să fie convins că o parte a viitorului este în principiu imprevizibilă, nu sînt bazate pe acest paradox — care nu este, de altfel, decît o variantă a vechiului paradox al minciunii — ci pe consideraţii cu mult mai profunde. Ele sînt expuse în articolul lui Popper *Nedeterminismul în fizica cuantică şi în fizica clasică*, publicat în „The British Journal for the Philosophy of Science", vol. 1, nr. 2 şi 3, 1950, şi vor fi discutate mai pe larg în viitoarea sa carte *Postscript: After Twenty Years* (Postscriptum: După douăzeci de ani). Un paradox al prezicerii identic în esenţă cu cel al lui Apollinax, cu excepţia faptului că în loc de o persoană şi o fişă se foloseşte un calculator electronic şi un ventilator electric, este discutat în capitolul 11 al cărţii lui John G. Kemeny *A Philosopher Looks at Science* (Un filozof consideră ştiinţa), publicată la D. Van Nostrand în 1959.

Paradoxul seriilor infinite de cifre 4, alternativ adunate şi scăzute, se explică prin faptul că suma acestei serii nu converge, ci oscilează între valorile zero şi patru. Explicarea paradoxurilor rotaţiei ar cere cunoştinţe mai profunde de teoria relativităţii. Pentru o prezentare foarte atrăgătoare a unui punct de vedere modern asupra acestor dificultăţi vechi, aş recomanda cartea lui Dennis Sciama *The Unity of Universe* (Unitatea universului), Doubleday and Comp., Inc., New York.

CAPITOLUL XII

Nouă probleme

1. JOCUL „EVITĂRII PĂTRATELOR"

Jocul folosește o tablă de șah de 6 × 6. Unul dintre jucători are 18 piese (rondele) roșii, iar celălalt 18 piese negre. Ei plasează alternativ cîte una dintre piesele lor pe oricare cîmp liber al tablei. Fiecare se străduie să evite așezarea pieselor astfel ca patru oarecare dintre ele să fie colțurile unui pătrat. Aceste pătrate pot fi de orice dimensiuni și pot fi înclinate oricum față de tablă. Există 105 astfel de pătrate, dintre care cîteva sînt indicate în fig. 51.

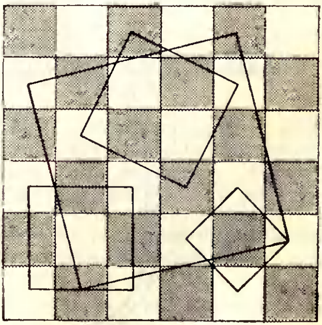


Fig. 51 Patru dintre cele 105 pătrate care pot fi formate pe tabla jocului „evitării pătratelor".

Un jucător este declarat învingător atunci cînd oponentul său nu mai reușește să evite formarea unuia dintre cele 105 pătrate. Se poate juca fie cu piese adevărate, fie cu creionul și hîrtia — desenînd tabla și marcînd cu X sau O cîmpurile pe care s-a jucat.

După ce am imaginat acest joc, luni de zile am fost convins că este imposibil ca el să ducă la remiză. Dar mai apoi C. M. McLaury, un student în matematică de la Universitatea din Oklahoma, a demonstrat că jocul se poate, totuși, sfîrși cu remiză. Problema constă în a arăta cum se poate ajunge la ea. Şi anume, în a împărţi cele 36 de cîmpuri în două categorii, fiecare de cîte 18 cîmpuri, în aşa fel încît patru cîmpuri oarecare din aceeaşi categorie nu constituie colţurile vreunui pătrat.

2. PROBLEMA ACARULUI

Dirijarea eficientă a trenurilor pune deseori probleme descurajante pentru dispeceri. Schema de circulaţie ilustrată în fig. 52 are meritul de a combina simplitatea cu o surprinzătoare dificultate. Tunelul este suficient de larg pentru locomotivă, dar nu şi pentru fiecare dintre cele două vagoane. Problema constă în a folosi locomotiva pentru a schimba între ele locurile celor două vagoane A şi B, apoi în a aduce locomotiva la locul ei de la început. Pot fi folosite ambele capete ale locomotivei, pentru tras şi împins, iar cele două vagoane pot fi legate, la nevoie, unul de celălalt.

Soluţia optimă este cea care cere minimum de operaţii. Prin „operaţie" înţelegem aici orice mişcare a locomotivei între opriri, admiţînd că ea se opreşte atunci cînd îşi inversează direcţia, cînd întîlneşte un vagon pe care trebuie să-l împingă, sau cînd trebuie decuplată de un vagon pe care îl trăsese. Mişcările celor două macazuri nu sînt considerate ca operaţii.

Un mod foarte comod de a lucra la dezlegarea acestei enigme constă în a aşeza trei monede diferite chiar pe ilustraţie şi în a le mişca de-a lungul liniilor, ţinînd seama că numai moneda care reprezintă loco-

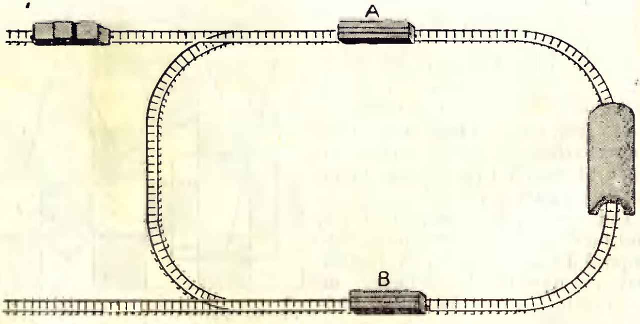


Fig. 52 O problemă de dirijare a trenurilor.

motiva poate trece prin tunel. Pe figură, vagoanele au fost desenate în poziţii prea apropiate de macazuri. Cînd lucraţi la problemă, presupuneţi că ambele vagoane sînt destul de îndepărtate de macazuri ca să lase destul loc pentru locomotivă şi, eventual, pentru celălalt vagon.

Nu sînt permise manevre ale acelor în timpul mersului. De exemplu, nu este permis să schimbaţi repede macazul, imediat după ce locomotiva a împins un vagon necuplat peste el, în aşa fel ca vagonul să treacă pe o linie, iar locomotiva pe cealaltă, fără să se oprească.

3. RECLAMELE DE BERE DE PE AUTOSTRADĂ

Smith conducea maşina pe o autostradă, cu soţia lîngă el.

— Ai observat, spuse el la un moment dat, că reclamele astea idioate pentru berea Flatz par a fi egal distanţate pe şosea? Mă întreb la ce distanţă sînt una de alta?

D-na Smith aruncă o privire la ceasul de la mînă, apoi socoti numărul de reclame pe lîngă care treceau într-un minut.

— Ce coincidenţă stranie! spuse Smith. Dacă înmulţeşti acest număr cu zece, rezultatul este exact egal cu viteza maşinii, în mile pe oră.

Presupunînd că viteza maşinii este constantă, că reclamele sînt egal distanţate şi că minutul în care d-na Smith a făcut socoteala a început şi s-a sfîrşit între două reclame, care este distanţa dintre două reclame consecutive?

4. CUBUL TĂIAT ŞI COVRIGUL TĂIAT

Un inginer, cunoscut pentru dexteritatea sa în a vedea corect structuri tridimensionale, tocmai servea cafea şi covrigi. Înainte de a pune cubul de zahăr în ceaşcă, îl aşeză pe masă în faţa sa şi gîndi: dacă trec un plan orizontal prin centrul cubului, secţiunea tăieturii va fi desigur un pătrat. Dacă îl trec vertical prin centru şi prin patru colţuri ale cubului, secţiunea va fi un dreptunghi alungit. Dar dacă trec planul astfel... ? Spre surpriza lui, văzu că secţiunea va fi un hexagon regulat.

Cum a fost făcută secţionarea? Dacă latura cubului este de 1 cm, care va fi latura hexagonului?

După ce, în sfîrşit, inginerul a dat drumul cubului de zahăr în cafea, atenţia lui a fost atrasă de covrigul de pe farfurioară. Dacă trec un plan orizontal prin centru, își spuse el, secțiunea va consta din două cercuri concentrice. Dacă trec un plan vertical prin centru, secțiunea va consta din două cercuri separate între ele printr-o distanță egală cu diametrul găurii covrigului. Dar dacă întorc planul așa... Fluieră de mirare. Secțiunea consta de data asta din două cercuri perfecte, care se intersectau!

Cum a fost făcută tăietura? Dacă covrigul este un tor perfect, cu diametrul exterior de 12 cm și avînd gaura de 4 cm diametru, care sînt diametrele cercurilor care se intersectează?

5. ÎMPĂRȚIREA ARIEI MONADEI[1]

Doi matematicieni luau masa într-un restaurant chinezesc de pe West Third Street, în Manhattan, și comentau emblema desenată pe meniul restaurantului (fig. 53).

— Bănuiesc că e unul dintre cele mai vechi simboluri religioase din lume, spuse unul dintre ei. Ar fi greu de găsit unul mai potrivit pentru a simboliza marile opoziții ale naturii; bine și rău, bărbat și femeie, inflație și deflație, integrare și diferențiere...

— Nu cumva aceasta este și emblema liniei de cale ferată Northern Pacific?

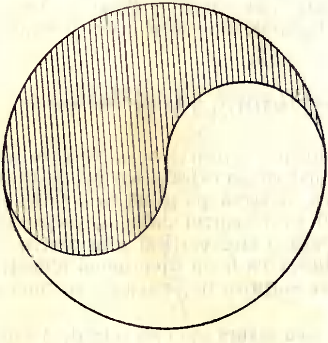


Fig. 53 Emblema sau „monada" coreeană.

— Ba da. După cîte știu, unul dintre inginerii companiei a văzut simbolul pe un steag coreean la Expoziția Internațională de la Chicago, în 1893, și a insistat pentru adoptarea lui ca simbol al companiei. El a argumentat că reprezintă perfect cele două extreme, apa și focul, care pun în mișcare locomotiva cu abur.

— Nu crezi că el a inspirat și construcția mingii de baseball?

— Nu m-ar mira.

— Știai însă că există o metodă foarte elegantă de a împărți în două părți egale fiecare dintre cele două arii colorate di-

[1] A se vedea *Amuzamente matematice*, pp. 157–158. — *N.R.*

ferit ale simbolului, prin simpla trasare a unei linii drepte de-a curmezişul cercului?

Presupunînd că frontiera dintre cele două regiuni este formată de două semicercuri, găsiţi linia dreaptă care împarte simultan regiunile în părţi egale.

6. SURORILE CU OCHI ALBAŞTRI

Dacă întîlniţi întîmplător două dintre surorile Jones (ceea ce presupune că cele două constituie o selecţie aleatoare din mulţimea tuturor surorilor Jones), şansa ca amîndouă să aibă ochi albaştri este exact unu la unu. Cîte surori au ochi albaştri printre toate surorile Jones?

7. CÎT DE VECHI ESTE ROSE-RED CITY[2]?

Doi profesori, unul de engleză şi celălalt de matematică, beau împreună o bere la bufetul Universităţii.

— E ciudat, spuse profesorul de engleză, cum unii poeţi pot scrie cîte un vers nemuritor, deşi tot restul operei lor este fără nici o valoare. John William Burgon, de pildă. Poeziile lui sînt atît de mediocre, încît nimeni nu le mai citeşte astăzi. Totuşi, el este acela care a compus unul dintre cele mai minunate versuri din poezia engleză: „Un oraş roşu ca trandafirul, ca Timpul însuşi de două ori mai tînăr".

Matematicianul, căruia îi plăcea să-şi necăjească prietenii cu tot felul de probleme improvizate, se gîndi cîteva clipe, apoi recită:

Un oraş roşu ca trandafirul, de două ori mai tînăr ca Timpul însuşi,
Cu un miliard de ani în urmă, vîrsta cetăţii
Era de exact două cincimi din vîrsta pe care Timpul o va avea
Peste un miliard de ani. Puteţi socoti
Ce vîrstă are astăzi oraşul stacojiu?

Bineînţeles, profesorul de engleză uitase de mult timp algebra, aşa că schimbă iute subiectul spre alte domenii. Dar cititorii acestei cărţi nu pot avea dificultăţi cu această problemă.

8. CONCURSUL ENIGMATIC

Trei licee — „Washington", „Lincoln" şi „Roosevelt" — s-au întîlnit într-o întrecere de atletism. Fiecare dintre şcoli participa cu un singur om la fiecare probă. Susan, o elevă la liceul „Lincoln", stătea la peluză şi încerca să-şi încurajeze prietenul, care era campionul şcolii la greutate.

---

[2] Oraşul roşu-ca-trandafirul. — *N.T.*

Cînd Susan se întoarse acasă seara, tatăl său o întrebă ce a făcut școala sa.

— Am cîștigat bineînțeles proba de greutate, spuse ea, dar întrecerea a fost cîștigată de liceul „Washington". Au realizat un scor final de 22 de puncte, pe cînd noi am terminat cu 9 puncte, iar liceul „Roosevelt" tot cu atîtea puncte.

— Dar cum a fost sistemul de punctaj? întrebă tatăl.

— Nu-mi amintesc exact, răspunse Susan, dar s-a dat un număr de puncte pentru cîștigătorul fiecărei probe, ceva mai puține puncte pentru cel care a luat locul al doilea și încă și mai puține pentru locul al treilea. Numărul de puncte a fost același pentru fiecare probă. (Prin „număr", Susan înțelegea desigur un întreg pozitiv.)

— Cîte probe au fost în total?

— Nu știu, tată. M-am uitat numai la greutate.

— A fost și o probă de săritură în înălțime? întrebă fratele lui Susan.

— Da.

— Cine a cîștigat-o?

Susan nu știa nici asta.

Oricît ar părea de necrezut, la această din urmă întrebare se poate răspunde numai cu ajutorul informațiilor date. Care liceu a cîștigat săritura în înălțime?

9. TERMITELE ȘI CELE 27 DE CUBURI

Imaginați-vă un cub mare, format din alipirea a 27 de cuburi mai mici de lemn și de mărime egală (fig. 54). O termită pornește din centrul feței unui cub oarecare din exterior și sapă un tunel care o poartă o dată prin fiecare dintre cuburi. Mișcarea ei este întotdeauna paralelă cu o latură a cubului mare, niciodată diagonală.

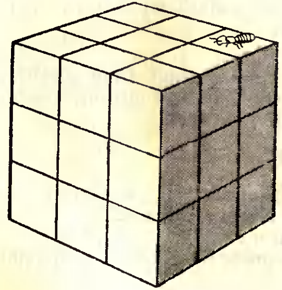


Fig. 54 Ce drum parcurge termita?

Este oare posibil ca termita să treacă prin fiecare din cele 26 de cuburi exterioare numai cîte o singură dată iar apoi să-și termine călătoria pătrunzînd pentru prima oară în cubul central? Dacă Da, arătați cum; dacă Nu, demonstrați de ce.

Se presupune, desigur, că termita, o dată intrată în unul dintre cuburile mici, urmează un drum cuprins în întregime în interiorul cubului mare. Altminteri, ea ar putea ieși afară pe undeva pe suprafaţa cubului mare şi s-ar deplasa pe această suprafaţă pînă la un alt loc de intrare convenabil. Dacă acest lucru ar fi permis, desigur problema nu s-ar mai pune.

RĂSPUNSURI

1. În fig. 55 se arată sfîrşitul „remizat" al unui joc de „evitare a pătratelor". Această soluţie grea şi foarte frumoasă a fost descoperită de C. M. McLaury, un student în matematică de la Universitatea din Oklahoma, căruia i-am comunicat problema prin intermediul unuia dintre profesorii săi, Richard Andree.

Doi dintre cititori (William R. Jordan, Scoţia, New York, şi Donald L. Vanderpool, Towanda, Pennsylvania) au reuşit să arate, printr-o enumerare completă a posibilităţilor, că soluţia este unică, exceptînd uşoare variaţii în cele patru cîmpuri marginale, marcate cu săgeţi. Cîmpurile acestea pot fi ocupate de orice culoare, cu condiţia doar să nu fie toate monocolore; dar deoarece fiecare jucător nu dispune decît de 18 piese, două din aceste cîmpuri trebuie să fie ocupate de o culoare, iar celelalte două de altă culoare. Pe desen sînt aranjate în aşa fel încît oricum ar fi rotit pătratul, ansamblul să se reconstituie dacă se inversează culorile.

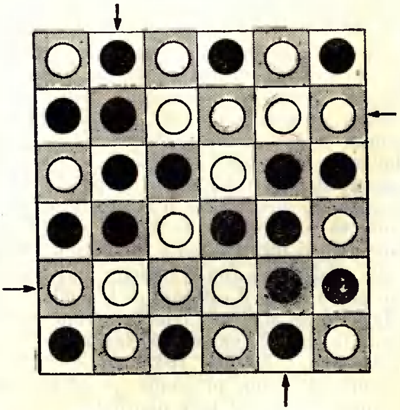


Fig. 55 Răspunsul la problema jocului „evitării pătratelor".

Tabla de 6×6 este cea mai mare tablă pe care este posibilă remiza. Acest rezultat a fost demonstrat în 1960 de Robert I. Jewett, pe atunci student la Universitatea din Oregon. El a putut arăta că remiza este imposibilă pe o tablă de ordinul şapte — şi întrucît orice tablă de ordin mai mare conţine un subpătrat de şapte pe şapte, remizele sînt în mod clar imposibile şi pe acestea.

David H. Templeton, profesor de chimie la Laboratorul de radiaţii Lawrence al Universităţii din California (Berkeley), a observat că cel de-al doilea jucător poate întotdeauna să forțeze remiza printr-o strategie foarte simplă bazată pe simetrie. El poate imita de fiecare dată ultima mișcare a adversarului, fie simetric în raport cu dreapta care desparte tabla în două (paralelă cu baza), fie cu o rotație de 90 de grade în jurul centrului tablei. (Ultima dintre aceste strategii duce la remiza ilustrată în fig. 55.) O altă variantă de strategie este să joace pe cîmpul corespunzător opus de pe linia care trece prin cîmpul jucat de adversar, și prin centrul tablei. Strategii de remiză pentru cel de-al doilea jucător au mai fost trimise de Allan W. Dickinson, Richmond Heights, ambii din Missouri, și de Michael Merritt, student la Colegiul agricol și mecanic din Texas. Toate aceste strategii sînt aplicabile pe toate tabelele de ordin par și, întrucît remizele nu sînt posibile pe table pare de ordin mai mare decît șase, ele garantează victoria celui de-al doilea jucător pe orice tablă pară de ordin opt sau mai mare. O strategie de reflexie față de dreapta care separă tabla în două părți și este paralelă cu una dintre laturi asigură victoria chiar și pe o tablă de ordin șase, fiindcă unica schemă de remiză posibilă nu prezintă acest tip de simetrie.

Strategiile bazate pe simetrie nu dau rezultate pe tablele impare, din cauza existenței unui cîmp central. Deoarece practic nu se știe nimic despre strategiile pe tablele impare, tabla de ordin șapte este potrivită pentru joc. Jocul nu se poate sfîrși prin remiză și în prezent nimeni nu știe ce parte va cîștiga, chiar dacă ambele joacă rațional.

În 1963, Walter W. Massie, pe atunci un viitor inginer de poduri și șosele la Institutul politehnic Worcester, a scris un program de joc cu „evitarea pătratelor" pentru calculatorul cifric IBM 1620, care a constituit subiectul uneia dintre lucrările sale de sfîrșit de semestru. Programul permite calculatorului să joace primul sau al doilea pe orice tablă pătrată de ordinul patru pînă la zece. Dacă are prima mișcare, calculatorul alege cîmpul la întîmplare. La mișcările următoare, el urmează o strategie de reflexie, în afara cazului cînd mutarea prin reflexie formează un pătrat; în acest caz, calculatorul face alegeri întîmplătoare, pînă cînd găsește un cîmp sigur.

Pe o tablă de ordin n, numărul de pătrate diferite care pot fi formate din patru cîmpuri este dat de formula $(n^4 - n^2)/12$. Deducerea acestei relații — ca și a unei relații valabile pentru table dreptunghiulare — poate fi găsită în cartea lui Harry Langman *Play Mathematics* (Jucați matematică), Hafner, 1962, pp. 36—37.

După cîte știu, problema „evitării triunghiurilor" pe table triunghiulare nu a fost încă abordată.

2. Locomotiva poate interverti locurile vagoanelor A și B și se poate reîntoarce la locul său inițial în șaisprezece operații:

1. Locomotiva se mişcă spre dreapta şi se cuplează cu vagonul A.
2. Trage pe A pe linia de jos.
3. Împinge pe A spre stînga, decuplează.
4. Se mişcă spre dreapta.
5. Face o rotaţie, în sensul acelor de ceasornic, prin tunel.
6. Împinge pe B spre stînga. Se cuplează cu A şi B.
7. Trage A şi B spre dreapta.
8. Împinge pe A şi B pe linia de sus. A este decuplat de B.
9. Trage B pe linia de jos.
10. Împinge pe B spre stînga, decuplează.
11. Face o rotaţie în sens invers acelor unui ceasornic, prin tunel.
12. Împinge pe A pe linia de jos.
13. Se mişcă spre stînga, se cuplează cu B.
14. Trage pe B spre dreapta.
15. Împinge pe B pe linia de sus, decuplează.
16. Se mişcă spre stînga pînă la poziţia iniţială.

Acest procedeu ar funcţiona chiar dacă nu se permite locomotivei să tragă cu partea din faţă, cu condiţia însă ca încă de la început locomotiva să fie aşezată cu spatele spre vagoane.

Atît Howard Grossman, din New York, cît şi Moises V. Gonzales, din Miami (Florida), au arătat că problema rămîne rezolvabilă chiar dacă se elimină linia laterală din partea de jos; în acest caz, sînt însă necesare două mişcări suplimentare, ridicînd astfel numărul total la 18. Poate cititorul să le descopere?

3. O trăsătură ciudată a problemei cu reclamele pentru berea Flatz este că nu este necesar să se cunoască viteza maşinii pentru a putea afla distanţa dintre ele. Fie x numărul de reclame pe lîngă care maşina trece într-un minut. În timp de o oră, maşina va trece pe lîngă $60x$ reclame. După cum se spune în enunţul problemei, viteza maşinii este de $10x$ mile pe oră. Pe parcursul a $10x$ mile, vor fi depăşite $60x$ reclame, deci pe o milă maşina va trece pe lîngă $60x/10x$, adică 6 reclame. Prin urmare, acestea sînt distanţate între ele cu 1/6 mile, sau 268 m.

4. Un cub, tăiat cu un plan care trece prin mijloacele a şase laturi, ca în fig. 56, duce la o secţiune de forma unui hexagon regulat. Dacă latura cubului este de 1 cm, latura hexagonului va fi de $\sqrt{2}/2$ cm.

Pentru a tăia un tor astfel încît secţiunea să conste din două cercuri care se intersectează, planul trebuie să treacă prin centru şi să fie tangent la tor deasupra şi dedesubt, aşa cum se vede în fig. 57. Dacă torul are un diametru exterior de 12 cm, iar diametrul găurii este de 4 cm, atunci fiecare cerc al secţiunii va avea, evident, un diametru de 8 cm.

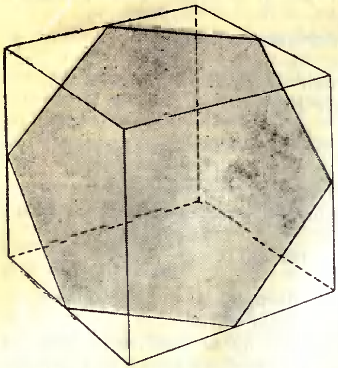


Fig. 56 Răspunsul la problema secționării cubului.

Acest mod de tăiere, împreună cu cele două moduri descrise anterior, constituie singurele căi de a tăia un covrig astfel ca secțiunile să fie circulare. Everett A. Emerson, de la atelierul electronic al firmei „National Cash Register" din Hawthorne (California), mi-a trimis o demonstrație algebrică riguroasă că nu există o a patra cale.

5. În fig. 58 este arătat modul în care trebuie desenată o linie dreaptă care să împartă în părți egale cele două regiuni ale emblemei din fig. 53. O demonstrație foarte simplă se obține desenînd cele două semicercuri punctate. Diametrul cercului K este egal cu jumătatea diametrului emblemei — prin urmare aria lui va fi egală cu un sfert din aria emblemei. Scăzînd regiunea G din acest cerc, și adăugîndu-i regiunea H, regiunea care rezultă are o arie egală tot cu un sfert din aria emblemei. Urmează că aria G este egală cu aria H — și evident jumătate din G va fi egală cu jumătate din H. Linia bisectoare taie în cercul K jumătate din aria G, dar îi restituie o arie egală (jumătate din H), așa că aria desenată hașurat de sub linia bisectoare are aceeași arie ca și cercul K. Aria cercului mic este însă un sfert din aria cercului mare; prin urmare, zona hașurată este împărțită exact în două. Același raționament se poate aplica și zonei albe.

Această demonstrație a fost dată de Henry Dudeney ca răspuns la problema nr. 158 din cartea sa *Amusements in Mathematics* (Amuzamente matematice). După ce problema a apărut și în „Scientific American", patru cititori (A. E. Decae, F. J. Hooven, Charles W. Trigg și B. H. K. Willoughby) mi-au trimis o altă demonstrație, care este cu mult mai simplă. Pe fig. 58, desenați un diametru orizontal al cercului mic K. Semicercul de dedesubtul acestei linii are o arie care este îm mod clar egală cu 1/8 din aria cercului mare. Deasupra diametrului se află un sector de 45° al cercului mare (mărginit de diametrul orizontal al cercului mic și de linia diagonală), care este, evident, egal cu 1/8 din aria cercului mare. Luate împreună, semicercul și sectorul au o arie de 1/4 din aria cercului mare; prin urmare, linia

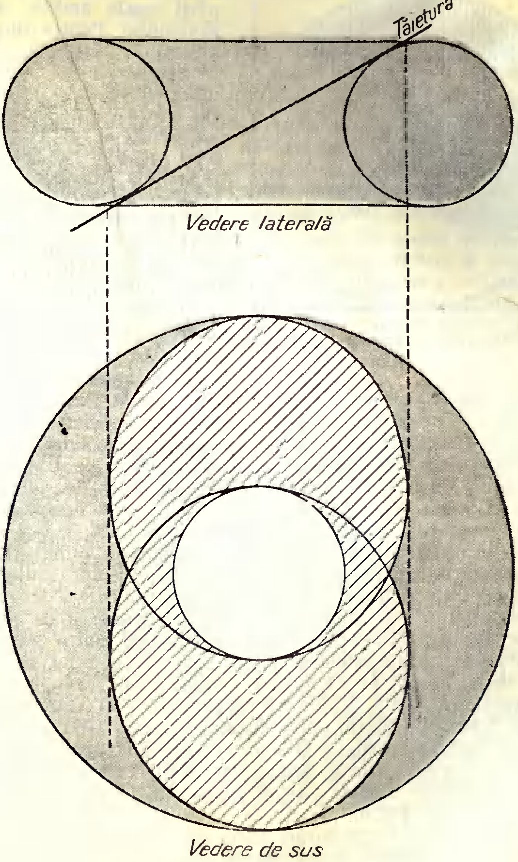


Fig. 57 Răspunsul la problema secționării covrigului.

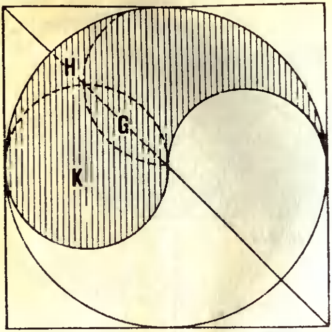


Fig. 58. Răspunsul la problema emblemei coreene.

diagonală trebuie să împartă în părți egale ambele zone ale simbolului. Pentru diferite moduri de împărțire a celor două zone prin linii curbe, cititorul este îndrumat să consulte cartea mai sus citată a lui Dudeney, cît și un articol al lui Trigg, *Împărțirea monadei*, apărut în „Mathematics Magazine" vol. 34, nr. 2, noiembrie-decembrie 1960, pp. 107—108.

Monada sau simbolul numit *Yin-Yang* (purtînd denumirea de *T'ai-chi-t'u* în China și *Tomoye* în Japonia) este de obicei desenat cu o mică pată neagră în zona albă și cu o mică pată albă în zona neagră. Acest lucru este menit să simbolizeze faptul că marile dualități ale vieții sînt rareori pure, că fiecare conține o părticică din cealaltă. Există o bogată literatură orientală asupra simbolului. Sam Loyd, care a construit mai multe enigme matematice pe baza lui (vezi *Sam Loyd's Cyclopedia of Puzzles* (Enciclopedia de enigme a lui Sam Loyd, p. 26), l-a denumit Marea Monadă. Termenul de „monadă" este repetat de Dudeney și este folosit de Olin D. Wheeler într-o cărticică intitulată *Wonderland* (Țara minunilor), publicată în 1901 de compania de căi ferate Northern Pacific. Primul capitol al cărții lui Wheeler este dedicat unui istoric al semnului care a devenit emblema companiei și este plin de informații curioase și de reproduceri în culori din surse orientale. Pentru a afla mai multe despre simbol, puteți consulta următoarele referințe: articolul lui Schuyler Cammann *Careul magic de trei în filozofia și religia veche chineză*, în *History of Religions*, vol. 1, nr. 1, vara lui 1961, pp. 37—80; cartea mea *Ambidextrous Universe* (Istețul univers), Basic Books, 1965, pp. 249—250; cartea lui George Sarton *A History of Science* (Istoria științei), vol.1, Harvard University Press, 1952, p. 11. Carl Gustav Jung[8] citează și el cîteva referințe engleze asupra simbolului în introducerea la cartea sa *I Ching* (1929).

6. Există probabil trei surori Jones cu ochi albaștri și patru surori în total. Dacă există n fete, dintre care a au ochi albaștri, pro-

[8] Psiholog și psihiatru elvețian, 1875—1961. — *N.T.*

babilitatea ca două dintre ele, alese la întîmplare, să aibă ochi albaştri ,este

$$\frac{a(a-1)}{n(n-1)}.$$

Întrucît ni se spune că această probabilitate este de 1/2, problema se reduce la aflarea valorilor întregi ale lui a şi n care dau expresiei de mai sus valoarea 1/2. Valorile minime pentru a şi n sînt 3 şi, respectiv, 4. Valorile următoare în mărime sînt 15 şi 21, dar este extrem de puţin probabil să existe atît de multe surori. Aşadar, patru surori, dintre care trei cu ochi albaştri, este aprecierea cea mai plauzibilă.

7. Vîrsta oraşului roşu-ca-trandafirul este de şapte miliarde de ani. Fie x vîrsta actulă a oraşului, iar y vîrsta actuală a Timpului. Cu un miliard de ani înainte, oraşul ar fi avut vîrsta de $x - 1$ miliarde de ani, iar peste un miliard de ani, vîrsta Timpului va fi de $y + 1$ miliarde de ani. Datele problemei permit scrierea următoarelor ecuaţii:

$$2x = y$$

$$x - 1 = \frac{2}{5}(y + 1).$$

Aceste ecuaţii dau pentru x (vîrsta actuală a oraşului) o valoare de şapte miliarde de ani, iar pentru y (vîrsta actuală a Timpului), o valoare de paisprezece miliarde de ani. Problema se bazează, bineînţeles, pe o teorie a „creării într-o zi" a cosmosului.

8. Din păcate, nu dispun de spaţiu suficient ca să redau pe larg rezolvarea problemei concursului atletic; voi sugera, aşadar, procedeul prin care se poate arăta că liceul „Washington" a cîştigat proba de săritură în înălţime. Trei întregi pozitivi diferiţi reprezintă punctajele acordate pentru locurile unu, doi şi trei în fiecare dintre probe. Întregul pentru primul loc trebuie să fie cel puţin 3. Ştim că în cadrul concursului au existat cel puţin două probe şi că liceul „Lincoln" (care a cîştigat proba de greutate) a avut un punctaj total de 9 — astfel că punctajul acordat pentru primul loc nu poate fi mai mare decît 8. Dar poate fi exact 8? Nu, pentru că în acest caz nu ar putea fi decît două probe şi nu ar mai fi astfel posibil pentru liceul „Washington" să acumuleze 22 de puncte. Argumente ceva mai complicate elimină 6, 4 şi 3 ca întregi posibili pentru primul loc. Singura posibilitate rămîne 5.

Dacă 5 este numărul de puncte acordat pentru primul loc, atunci trebuie să fie cel puţin cinci probe în concurs. (Mai puţine probe nu ar fi suficiente să dea liceului „Washington" un punctaj total de 22,

Probe	1	2	3	4	5	Scorul
Liceul Washington	2	5	5	5	5	22
Liceul Lincoln	5	1	1	1	1	9
Liceul Roosevelt	1	2	2	2	2	9

Fig. 59 Răspunsul la problema concursului atletic dintre cele trei licee.

iar mai multe ar ridica punctajul total al liceului „Lincoln" la mai mult de 9). Liceul „Lincoln" a marcat 5 puncte prin cîştigarea probei de greutate, aşa că celelalte 4 puncte trebuie să fi fost cîştigate unul cîte unul. În acest fel, liceul „Washington" poate să atingă scorul final de 22 de puncte în numai două moduri : 4, 5, 5, 5, 3 sau 2, 5, 5, 5, 5. Prima alternativă este eliminată, deoarece ea dă liceului „Roosevelt" un punctaj de 17 — pe cînd punctajul cunoscut este 9. Posibilitatea care rămîne dă pentru liceul „Lincoln" un scor corect, aşa că putem sintetiza rezultatele ca în tabelul din fig. 59.

Liceul „Washington" a cîştigat toate probele, în afară de greutate — prin urmare şi săritura în înălţime.

Mai mulţi cititori mi-au trimis soluţii mai scurte decît cea dată mai sus. Doi dintre ei (d-na Erlys Jedlicka, din Saratoga, California, şi Albert Zoch, student la Institutul tehnologic din Illinois) au observat că există o soluţie extrem de scurtă dacă presupunem că problema are răspuns unic. Iată ce scrie d-na Jedlicka :

„Domnule Gardner,

Aţi ştiut că problema poate fi rezolvată fără nici un fel de calcul? Cheia necesară se află în ultimul paragraf. Soluţia ecuaţiilor, în numere întregi, trebuie să indice fără ambiguitate care dintre licee este cîştigătorul probei de săritură în înălţime. Acest lucru poate fi făcut numai dacă unul dintre licee a cîştigat toate probele, exceptînd, se înţelege, greutatea ; altminteri, problema nu poate fi rezolvată numai cu informaţiile date, chiar şi după calcularea punctajelor şi numărului de probe. Întrucît liceul care a cîştigat proba de greutate nu este şi cîştigătoarea finală, este evident că acest cîştigător final a învins în total celelalte probe. Prin urmare, fără nici un fel de calcul, se poate spune că liceul „Washington" a cîştigat săritura în înălţime".

9. Nu este posibil ca termita să treacă o singură dată prin cele 26 de cuburi exterioare şi apoi să-şi sfîrşească drumul în cubul din centru. Acest lucru poate fi uşor demonstrat, închipuindu-ne cuburile alternînd în culoare, asemenea unei table de şah tridimensionale

sau unui cristal de sare de bucătărie, în care atomii de sodiu și de clor sînt dispuși alternativ. Cubul mare va consta în acest caz din 13 cuburi de o culoare și din 14 de altă culoare. Drumul termitei va trece întotdeauna prin cuburi care alternează în culoare, prin urmare, pentru ca drumul să poată cuprinde toate cele 27 de cuburi, trebuie să înceapă și să se sfîrșească pe setul de 14. Cubul central, însă, aparține setului de 13 — așa că drumul este imposibil.

Problema poate fi generalizată în felul următor: un cub de ordin par (care are un număr par de celule pe fiecare latură) are un număr de celule de o culoare egal cu numărul de celule de cealaltă culoare. În acest caz, nu există un cub central, dar un drum complet poate începe pe oricare celulă și se poate sfîrși pe oricare celulă de altă culoare. Un cub de ordin impar are un număr de celule de o culoare mai mare cu 1 decît numărul celulelor de cealaltă culoare, deci drumul complet trebuie să înceapă și să se sfîrșească pe culoarea care este folosită pentru setul mai mare. În cuburile impare de ordinul 3, 7, 11, 15, 19,... celula din centru aparține setului mai mic, deci ea nu poate fi sfîrșit de drum pentru un drum complet. În cuburile impare de ordinul 1, 5, 9, 13, 17,... celula centrală aparține setului mai mare și deci poate servi drept sfîrșit pentru oricare drum complet care a început pe o celulă de aceeași culoare. Într-un cub impar, nu este posibil un drum închis, care să meargă prin fiecare celulă, din cauza existenței unui cub suplimentar de o anumită culoare.

Foarte multe probleme bidimensionale pot fi rezolvate rapid printr-o astfel de „probă de paritate". De exemplu, nu este posibil pentru un pion să pornească dintr-un colț al tablei de șah, să urmeze un drum care să-l ducă o singură dată prin fiecare cîmp și să sfîrșească pe cîmpul din colțul diagonal opus.

CAPITOLUL XIII

Poliominourile şi dreptunghiurile perfecte

Poliominourile — aceste fascinante forme care acoperă cîmpuri vecine pe o tablă de şah — au fost introduse în lumea matematicii în 1954 de Solomon W. Golomb, actualmente profesor de inginerie şi matematică la Universitatea din California de sud. În revista „Scientific American", ele au fost luate în discuţie pentru prima oară în 1957. De atunci, ele au devenit recreaţii matematice extrem de populare, pe parcurs fiind scoase la iveală sute de enigme poliominice şi de configuraţii neobişnuite. În următoarele pagini, vom cita dintr-o comunicare a lui Golomb, care ia în discuţie unele dintre cele mai recente descoperiri în acest domeniu.

„Formele care reunesc cinci pătrate vecine se numesc pentominouri. Există douăsprezece astfel de forme. Dacă sînt aranjate ca în fig. 60, ele se aseamănă cu litere ale alfabetului, iar aceste litere pot fi folosite ca denumiri pentru piese. Pentru raţiuni mnemotehnice, este util să ne reamintim sfîrşitul alfabetului (TUVWXYZ) şi cuvîntul FILiPiNe.

Am arătat, în articolele anterioare, că aceste douăsprezece pentominouri, care totalizează 60 de pătrate, pot forma anumite figuri, ca de pildă dreptunghiuri 3×20, 4×15, 5×12, 6×10. Ele pot forma de asemenea o tablă de şah 8×8 cu cele patru pătrate rămase în exces situate oriunde vrem pe marginea ei, sub forma unui pătrat 2×2. Dat fiind un pentomino, pot fi folosite nouă dintre celelalte pentru a forma un model la scară al acestuia, de trei ori mai lung şi

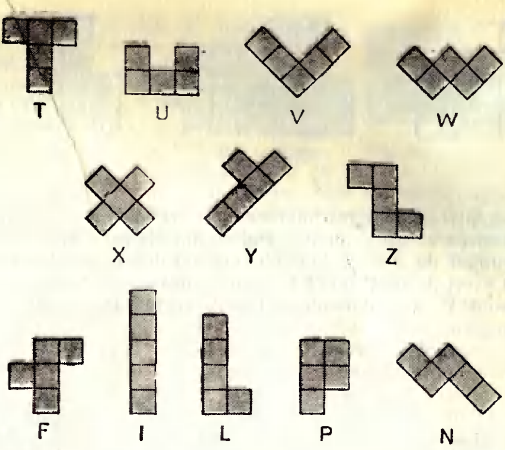


Fig. 60

de trei ori mai înalt. Este, de asemenea, posibil ca cele 12 pentominouri să fie aranjate în *două* dreptunghiuri, fiecare de 5×6".

(Această din urmă configurație este cunoscută ca o problemă de suprapunere, deoarece implică forme care pot fi suprapuse. Golomb vorbește despre cinci noi probleme de suprapunere, publicate aici pentru prima dată. Dacă cititorul nu a descoperit între timp plăcerea pe care o pot oferi pentominourile, el este sfătuit să-și confecționeze un set de piese din carton și să-și încerce îndemînarea pe cîteva dintre problemele care urmează. În toate aceste probleme, piesele pot fi așezate cu oricare dintre cele două fețe în sus.)

„1. Împărțiți cele 12 pentominouri în trei grupuri de cîte patru. Găsiți o formă de 20 de pătrate, care poate fi întocmită cu piesele din fiecare grup. Una dintre soluții este ilustrată în fig. 61.

2. Împărțiți cele 12 pentominouri în trei grupuri de cîte patru. Subîmpărțiți fiecare grup în două perechi de forme. Pentru fiecare grup, găsiți o regiune cu 10 pătrate, care să poată fi formată de fiecare dintre cele două perechi. O soluție este arătată în fig. 62. Poate cititorul găsi și alte soluții, dintre care una fără găuri?

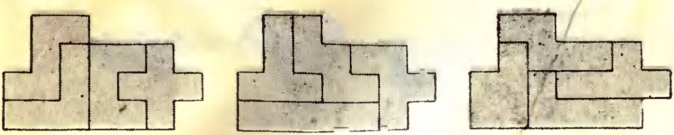


Fig. 61

3. Împărțiți cele 12 pentominouri în trei grupuri de cîte patru. Adăugați fiecărui grup un monomino (un singur pătrat) și formați un dreptunghi de 3×7. Fig. 63 indică soluția. Se știe că ea este unică, cu excepția faptului că în primul dintre cele trei dreptunghiuri pentominoul Y și monominoul pot fi rearanjate, ocupînd totuși aceeași regiune.

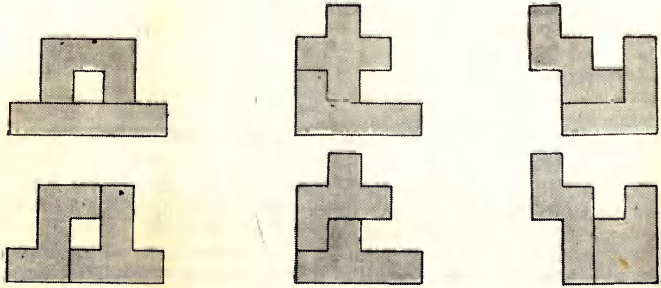


Fig. 62

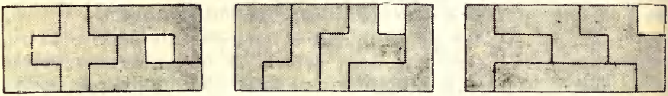


Fig. 63

Demonstrația unicității se bazează pe o idee a lui C. S. Lorens. În forma reprezentată în fig. 64 — ca să începem cu ea — pentominoul X poate fi folosit numai în cuplaj cu pentominoul U. Mai departe, nici unul dintre pentominourile F și W nu pot fi folosite pentru a completa acest dreptunghi. De asemenea, datorită faptului că pentominourile U și X nu pot fi folosite decît împreună, este imposibil să folosim F și W în cadrul *aceluiași* dreptunghi de 3 × 7. Prin urmare dintre cele trei dreptunghiuri de 3 × 7, unul va conține X și U, altul va conține W (dar nu și U), iar al treilea va conține F (dar nu și U). Cînd se enumeră și se compară toate completările posibile ale acestor trei dreptunghiuri (o operație foarte lungă), se constată că soluția indicată este unica posibilă.

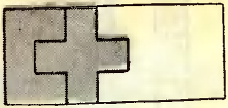


Fig. 64

4. Împărțiți cele 12 pentominouri în patru grupuri de cîte trei. Găsiți o regiune de 15 pătrate, care poate fi formată din pentominourile fiecărui grup. Nu se cunoaște soluția acestei probleme — dar nici nu s-a demonstrat că problema este imposibil de rezolvat.

5. Găsiți regiunea cea mai mică de pe tabla de șah, în care încap oricare două dintre cele 12 pentominouri. Aria minimă pentru o astfel de regiune este de nouă pătrate. Există numai două exemple de astfel de regiuni (fig. 65).

Valabilitatea oricăreia dintre cele două regiuni desenate se testează prin încercări cu fiecare pentomino în parte. Imposibilitatea găsirii unei regiuni cu mai puțin de nouă pătrate se demonstrează în felul următor: dacă ar fi posibil să se găsească o regiune cu mai puțin de nouă pătrate, atunci pentominourile I, X, și U, în particular, ar încăpea într-o regiune de nu mai mult de opt pătrate. Pentominourile I și X ar avea atunci trei pătrate în comun. (În caz contrar, ar fi nevoie fie de nouă pătrate, fie de o linie dreaptă de șase pătrate, ceea ce este o extravaganță inutilă.) Aceasta poate avea loc numai în două feluri (fig. 66). În ambele cazuri, însă, potrivirea pentominoului U ar cere un al nouălea pătrat. Prin urmare, opt pătrate nu sînt suficiente, pe cînd nouă sînt, așa cum s-a arătat prin exemplificare.

Fig. 65

În ultimul timp, diferite probleme pentominoice au fost abordate cu ajutorul calculatoarelor electronice moderne. Capitolul 13 dedi-

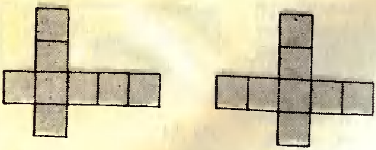


Fig. 66

cat poliominourilor din cartea *Amuzamente matematice* de M. Gardner[1] conţine o relatare scurtă a modului în care Dana S. Scott a programat calculatorul MANIAC de la Universitatea Princeton să determine toate modurile în care cele 12 pentominouri pot fi potrivite pe tabla de şah de 8×8, lăsînd o gaură de 2 × 2 în centru. S-a scos la iveală faptul că există 65 de soluţii fundamental diferite, în sensul că două soluţii care diferă numai printr-o rotaţie sau o reflexie nu sînt considerate ca diferite. Mai recent, C. B. Haselgrove, un matematician de la Universitatea din Manchester (Anglia), a programat un calculator să găsească toate modurile posibile de a forma cu cele 12 pentominouri un dreptunghi de 6×10. Excluzînd rotaţiile şi reflexiile, el a găsit 2 339 de soluţii fundamental diferite! Tot el a verificat şi programul lui Scott pentru problema tablei de şah de 8 × 8.

Anumite configuraţii speciale cu pentominouri oferă prilejuri excelente de recreaţie. Fig. 67 ilustrează o piramidă de 64 de pătrate, care poate fi formată din 12 pentominouri şi dintr-un tetromino pătratic de 2×2. Crucea din fig. 68 necesită numai cele 12 pentominouri, dar este neobişnuit de grea. Încă neconstruită este forma din fig. 69, deşi nu s-a demonstrat că problema este imposibilă. Soluţia nu a fost găsită, nici mutînd monominoul (gaura) în alt loc. Aproximaţia cea mai bună, cunoscută la ora aceasta, este ilustrată în fig. 70. Tot imposibilă este considerată şi configuraţia lui Herbert Taylor, arătată în fig. 71, deşi nimeni nu a putut demonstra că nu există soluţie.

Din fericire, nu toate problemele de acest gen sînt nerezolvabile. Pentru forma ilustrată în fig. 72, de exemplu, matematicianul. R. M. Robinson, de la Universitatea din California, a putut demonstra că este imposibil să fie construită din 12 pentominouri. Ea are 22 de pătrate „de margine" de-a lungul laturilor. Dacă pentominourile sînt examinate separat şi se socoteşte numărul maxim de „pătrate de margine" pe care ele le pot furniza, se găseşte că numărul total este de 21, cu unul mai puţin decît este necesar. Acest tip de raţionament se poate aplica în mod curent la jocurile cu cuburi în care se urmăreşte construirea a diferite figuri. De obicei, în astfel de jocuri, se separă

[1] Editura Ştiinţifică, Bucureşti, 1968, p. 120. — *N.R.*

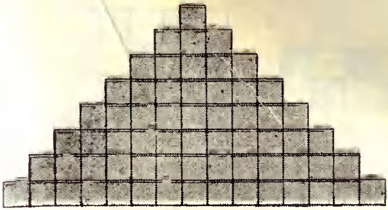


Fig. 67

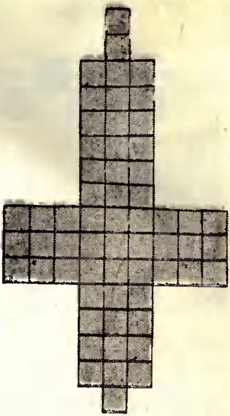


Fig. 68

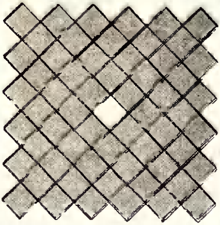


Fig. 69

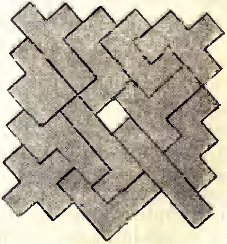


Fig. 70

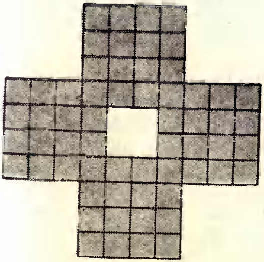
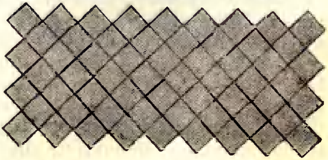


Fig. 71


72 Fig.

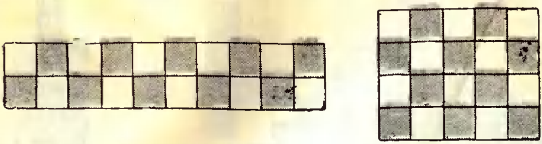


Fig. 73

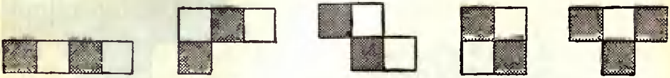


Fig. 74

de la început piesele „de margine" de piesele „de interior", astfel ca să se poată construi mai întîi conturul figurii.

Poliominourile care acoperă patru pătrate de pe tabla de şah se numesc tetrominouri. Spre deosebire de pentominouri, cele cinci tetrominouri distincte nu pot forma un dreptunghi. Pentru a demonstra acest lucru, coloraţi, alternativ în două culori diferite, pătratele a două dreptunghiuri de 4×5 şi de 2×10 respectiv — singurele dreptunghiuri care au aria egală cu 20 (vezi. fig. 73). Patru dintre cele cinci tetrominouri (fig. 74) vor acoperi totdeauna cîte două pătrate de o culoare şi două de altă culoare, însă tetrominoul în formă de T va acoperi trei pătrate de o culoare şi unul de altă culoare. Aşadar, luate împreună, cele cinci tetrominouri vor acoperi un număr impar de pătrate cenuşii şi un număr impar de pătrate albe. Or, ambele dreptunghiuri considerate au cîte 10 pătrate de o culoare, iar 10 este un număr par.

Pe de altă parte, oricare dintr-o serie de pentominouri diferite poate fi combinat cu cele cinci tetrominouri pentru a forma un pătrat de 5×5. Două dintre exemple sînt ilustrate în fig. 75. Aceasta ridică o întrebare interesantă: cîte pentominouri diferite pot fi folosite în acest mod?

Robert I. Jewett, student în matematică la Universitatea din Oregon — care a mai fost menţionat şi în capitolul anterior — a propus o problemă cu dominouri (poliominouri de două pătrate), foarte diferită de oricare dintre problemele discutate pînă aici. Este oare posibil să formăm cu dominouri un dreptunghi, în aşa fel încît să nu existe

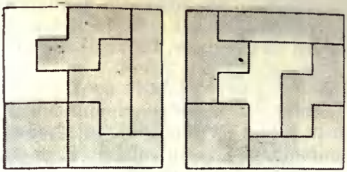


Fig. 75

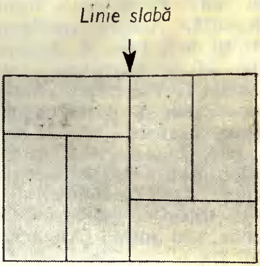


Fig. 76

nici o linie dreaptă, orizontală sau verticală, care să unească două laturi opuse ale dreptunghiului? De exemplu, în fig. 76 există o linie verticală prin centru care se întinde de sus pînă jos. Dacă în loc de plăcuțe de domino am folosi cărămizi, dreptunghiul ar prezenta desigur un defect destul de grav. Problema lui Jewett este așadar o problemă de găsire a unor structuri de construcții care să nu aibă „linii slabe". Mulți dintre cei care atacă această problemă o părăsesc foarte repede, convinși că ea nu are soluții. De fapt, ea are o infinitate de soluții.

Cititorul este invitat să-și procure un set de plăcuțe de domino — setul normal al jocului, care conține 28 de plăcuțe, este arhisuficient — și să încerce să găsească cel mai mic dreptunghi „perfect" care poate fi construit din ele. Soluția acestei frumoase probleme va fi dată în paragraful dedicat răspunsurilor, împreună cu o demonstrație remarcabilă, dată de Golomb, a faptului că nu există pătrate „perfecte" de 6×6.

ADAOS

De la data cînd acest articol a apărut în „Scientific American", au fost făcute progrese însemnate în studiul poliominourilor și a dreptunghiurilor perfecte. Cititorul interesat poate consulta cartea lui Golomb *Polyominoes* (Poliominouri), publicată la editura Scribner în 1965, în care subiectul este expus pe larg și sînt date multe rezultate noi.

Configurația lui Herbert Taylor (fig. 71) și pătratul dințat din fig. 69 au fost între timp demonstrate a fi imposibile, deși pentru nici una dintre aceste forme demonstraţia nu este nici scurtă, nici elegantă. Asupra configuraţiei lui Taylor, am primit demonstraţii de la Ivan M. Anderson, Leo J. Brandenburger, Bruce H. Douglas, Micky Earnshaw, John G. Fletcher, Meredith G. Williams şi Donald L. Vanderpool. Iar pentru pătratul dinţat — de la Bruno Antonelli, Leo J. Barandenburger, Cyril B. Carstairs, Bruce H. Douglas, Micky Earnshaw, E. J. Mayland, jr., şi Robert Nelson.

J. A. Lindon, din Surrey (Anglia), a găsit o soluţie pentru pătratul dinţat avînd monominoul (gaura) pe margine, vecină cu unul dintre colţuri (această soluţie apare la p.73 a cărţii citate a lui Golomb). Alţi cititori au găsit soluţii cu monominoul într-un colţ. D. C. şi B.G. Gunn, din Sussex (Anglia), mi-au trimis 16 variante diferite de acest tip. Nu se cunoaşte încă nici o soluţie cu monominoul aşezat pe margine, pe al doilea loc de la colţ.

William E. Patton, inginer pensionar din South Boston (Virginia), mi-a scris că el se ocupă încă din 1944 de dreptunghiurile perfecte care pot fi construite din piese de domino. Mi-a trimis cîteva din rezultatele sale, multe dintre ele sugerînd probleme interesante. De exemplu, care este dreptunghiul perfect cel mai mic care are acelaşi număr de dominouri pe verticală şi pe orizontală? Răspunsul este 5×8. Cititorii ar putea căuta singuri soluţiile.

Noţiunea de pătrat perfect din dominouri sugerează un mare număr de jocuri, care, după cîte ştiu, nu prea au fost exploatate. De exemplu, jucătorii ar putea aşeza pe rînd piese de domino pe o tablă de şah pătrată de mărime potrivită. Cîştigător este cel care completează primul o linie „slabă". Jocul ar putea fi jucat şi invers: cel care completează primul o linie „slabă" pierde jocul.

RĂSPUNSURI

Răspunsurile la problemele piramidei şi crucii sînt ilustrate în fig. 77 şi fig. 78. Nici una dintre aceste soluţii nu este unică. La problema: care dintre pentominouri pot fi combinate cu cele cinci tetrominouri, pentru a forma un pătrat de 5×5, răspunsul este: acest lucru este posibil cu toate pentominourile, în afară de I, T, X şi U.

Cel mai mic dreptunghi perfect (dreptunghiul fără linii drepte care unesc laturi opuse), care poate fi construit din piese de domino, are dimensiunile 5×6. Cele două soluţii esenţial diferite sînt indicate în fig. 79.

„Nu este greu de arătat, scrie Solomon W. Golomb, că lăţimea minimă a dreptunghiurilor perfecte trebuie să fie mai mare decît 4. (Cazurile de dreptunghiuri cu lăţimea 2, 3 şi 4 pot fi cel mai bine

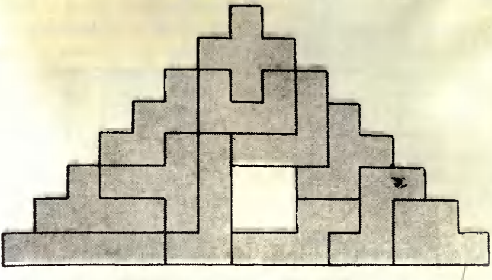


Fig. 77 Un răspuns la problema piramidei.

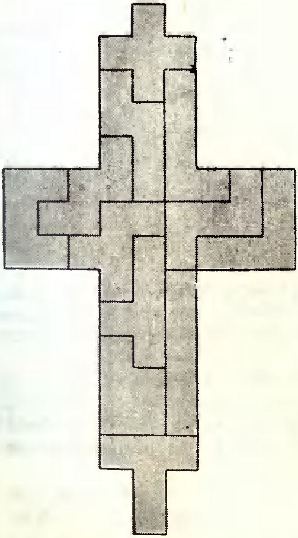


Fig. 78 Un răspuns la problema crucii.

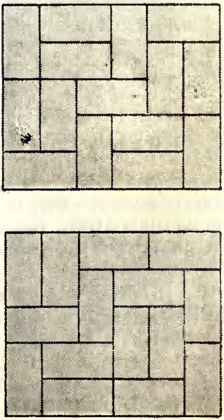


Fig. 79 Răspunsuri la problema dreptunghiurilor perfecte.

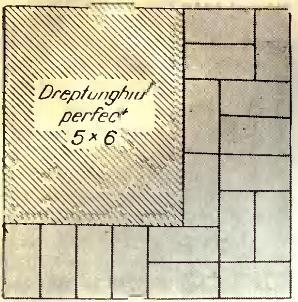


Fig. 80 Un dreptunghi perfect pe o tablă de 8 × 8.

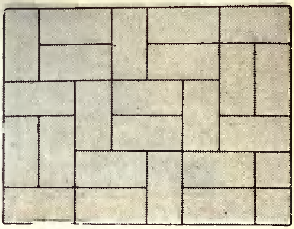


Fig. 81 Un dreptunghi perfect de 6 × 8.

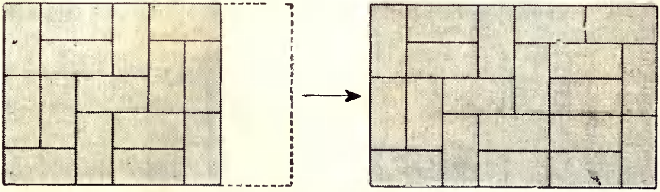


Fig. 82. O soluție generală pentru problema dreptunghiurilor perfecte.

tratate separat.) Prin urmare, deoarece pătratul de 5 × 5 are un număr impar de pătrate mici, iar piesele de domino acoperă întotdeauna un număr par de pătrate, dreptunghiul de 5 × 6 reprezintă soluția cea mai mică.

Un dreptunghi de 5 × 6 poate fi continuat pînă la o tablă de șah de 8 × 8, satisfăcînd în continuare condiția de „perfecțiune". Un exemplu este ilustrat în fig. 80. Un lucru surprinzător: nu există pătrate perfecte de 6 × 6. Pentru acest fapt există o demonstrație cu adevărat remarcabilă.

Închipuiți-vă un pătrat de 6 × 6, acoperit în întregime cu piese de domino. O astfel de figură conține 18 piese și 10 linii despărțitoare, 5 orizontale și 5 verticale. Ea este perfectă dacă fiecare linie despărțitoare intersectează cel puțin o piesă.

Prima etapă a demonstrației constă în a arăta că în orice dreptunghi perfect, fiecare linie despărțitoare trebuie să taie un număr *par* de piese. Să considerăm o linie verticală oarecare. Aria din stînga ei (exprimată în număr de pătrate unitate) este pară (6, 12, 18, 24 sau 30). Piesele de domino aflate *în întregime* la stînga acestei linii trebuie să acopere o arie pară, deoarece fiecare piesă acoperă două pătrate. Piesele *tăiate* de linia despărțitoare trebuie de asemenea să acopere o arie pară în stînga liniei, deoarece această arie este diferența dintre două numere pare (aria totală din stînga și aria acoperită de piesele întregi de domino). Întrucît fiecare piesă tăiată ocupă *un* pătrat la stînga liniei despărțitoare, trebuie să existe un număr *par* de piese tăiate de această linie.

Pătratul de 6×6 are 10 linii despărțitoare. Pentru a fi perfect, fiecare linie trebuie să întretaie cel puțin două piese de domino. Nici o piesă nu poate fi tăiată de mai mult de o linie despărțitoare, prin urmare cel puțin 20 de piese trebuie să fie tăiate de linii despărțitoare. Dar în pătratul de 6×6 nu există decît 18 piese!

Un raționament asemănător arată că pentru ca să existe un dreptunghi perfect de 6×8, fiecare linie despărțitoare trebuie să întretaie *exact* două piese de domino. Un astfel de dreptunghi este arătat în fig. 81.

Rezultatul cel mai general este următorul: dacă un dreptunghi are o arie pară, iar atît lungimea, cît și lățimea lui depășesc valoarea 4, este posibil să se găsească o acoperire „perfectă" a dreptunghiului cu piese de domino — cu excepția cazului 6×6. În fapt, pentru toate dreptunghiurile mai mari pot fi obținute acoperiri pornind de la dreptunghiul de 5×6 și de la cel de 6×8, folosind o metodă de extindere fie a lungimii, fie a lățimii cu 2. Metoda se poate explica mai ușor cu ajutorul fig. 82. Pentru a extinde orizontal cu 2 dreptunghiul de 5×6, se așază cîte o piesă de domino orizontală lîngă fiecare piesă orizontală de la vechea frontieră, în timp ce piesele verticale sînt deplasate de la frontiera veche spre cea nouă; iar spațiul care se creează astfel este umplut cu două piese orizontale.

Cititorul poate găsi interesant să abordeze problema trominourilor ca elemente de construcție. În particular, care este dreptunghiul minim care poate fi acoperit cu două sau mai multe trominouri drepte (dreptunghiuri de 1×3), fără linii „slabe"?

CAPITOLUL XIV

Defăimătorii lui Euler: descoperirea unui pătrat greco-latin de ordinul 10

Istoria matematicii este plină de speculaţii inteligente — presupuneri intuitive făcute de oameni cu profundă înţelegere matematică — care deseori au aşteptat timp de secole pînă să fie confirmate sau infirmate prin demonstraţie. Dar cînd aceasta are în fine loc, el constituie un eveniment matematic de primă mărime. La întîlnirea anuală din aprilie 1959 a Societăţii americane de matematică s-a întîmplat să fie anunţate nu unul, ci două astfel de evenimente. Unul dintre ele (demonstraţia unei vechi conjecturi din teoria grupurilor) nu intră în profilul acestei cărţi, dar celălalt — o infirmare a unei celebre presupuneri a marelui matematician elveţian Leonhard Euler[1] — este legat de nenumărate probleme clasice din matematica recreaţională. Euler îşi exprimase convingerea că nu pot exista pătrate greco-latine de anumite ordine. Trei matematicieni (E. T. Parker, de la Corporaţia „Sperry Rand", R. C. Bose şi S. S. Shrikhande, ambii de la Universitatea din Carolina de nord) au reuşit să facă praf conjectura lui Euler. Ei au găsit metode cu care se pot construi un număr infinit de pătrate de tipul pe care specialiştii, urmîndu-l pe Euler, l-au considerat timp de 177 de ani imposibil de construit.

Cei trei matematicieni, porecliţi de colegii lor „defăimătorii lui Euler", au scris împreună o scurtă dare de seamă asupra descoperirii lor. În cele ce urmează, voi cita cîteva fragmente din acest raport,

[1] Vezi nota 6 de la cap. VIII. — *N.T.*

a	b	c	d
b	a	d	c
c	d	a	b
d	c	b	a

α	β	γ	δ
γ	δ	α	β
δ	γ	β	α
β	α	δ	γ

aα	bβ	cγ	dδ
bγ	aδ	dα	cβ
cδ	dγ	aβ	bα
dβ	cα	bδ	aγ

Fig. 83 Pătratul greco-latin (dreapta) este format prin suprapunerea a două pătrate latine (stînga şi centru).

intercalînd din loc în loc cîteva comentarii proprii destinate să clarifice unele dintre noţiuni sau să rezume anumite pasaje mai tehnice.

„În ultimii ani ai vieţii sale, Leonhard Euler a scris un lung memoriu asupra unei noi specii de careu magic: *Recherches sur une nouvelle espèce de quarrés magiques*. Astăzi, aceste construcţii sînt numite pătrate latine, datorită obiceiului lui Euler de a nota celulele lor cu litere latine.

Să considerăm, de exemplu, pătratul din stînga fig. 83. Cele patru litere latine *a*, *b*, *c* şi *d* ocupă cele 16 celule ale pătratului, în aşa fel încît fiecare literă apare o singură dată în fiecare coloană şi o singură dată pe fiecare rînd. Un pătrat latin diferit — celulele lui sînt etichetate cu literele greceşti corespunzătoare — este desenat în mijloc. Dacă suprapunem cele două pătrate, aşa cum se arată în dreapta, constatăm că fiecare literă latină intră în combinaţie o dată, şi numai o singură dată, cu fiecare din literele greceşti. Cînd două sau mai multe pătrate latine pot fi combinate în acest fel, se spune că ele sînt ortogonale. Pătratul combinat este cunoscut sub numele de pătrat greco-latin".

Pătratul din dreapta oferă o soluţie pentru un popular joc de cărţi din secolul al XVIII-lea: scoateţi dintr-un pachet aşii, popii, damele şi valeţii şi aranjaţi-i sub formă de pătrat, astfel ca fiecare rînd şi coloană să conţină toate cele patru valori şi toate cele patru „culori". Cititorii s-ar putea amuza căutînd şi o altă soluţie, în care cele două diagonale principale sînt ocupate şi ele de cîte o „culoare" şi de cîte o carte de valori diferite.

„În general, un pătrat latin de ordinul *n* este definit ca un pătrat de $n \times n$, ale cărui n^2 celule sînt ocupate cu *n* simboluri diferite, astfel ca fiecare simbol să apară o singură dată pe fiecare rînd şi o

0	1	2	3	4
1	2	3	4	0
2	3	4	0	1
3	4	0	1	2
4	0	1	2	3

0	1	2	3	4
2	3	4	0	1
4	0	1	2	3
1	2	3	4	0
3	4	0	1	2

0	1	2	3	4
3	4	0	1	2
1	2	3	4	0
4	0	1	2	3
2	3	4	0	1

0	1	2	3	4
4	0	1	2	3
3	4	0	1	2
2	3	4	0	1
1	2	3	4	0

Fig. 84 Patru pătrate latine de ordinul 5, reciproc ortogonale.

singură dată în fiecare coloană. Sînt posibile mulțimi de două sau mai multe pătrate latine, astfel ca oricare două pătrate din mulțime să fie ortogonale. În fig. 84 sînt prezentate patru pătrate latine de ordinul 5, două cîte două ortogonale, care folosesc cifre drept simboluri".

Pe vremea lui Euler era ușor de demonstrat că nu este posibil un pătrat greco-latin de ordinul 2. Pătrate de ordinul 3, 4 și 5 erau cunoscute, dar ce se putea spune despre cele de ordinul 6? Euler punea problema în felul următor: fiecare dintre șase regimente are cîte șase ofițeri, fiecare de un alt grad. Pot fi oare acești 36 de ofițeri aranjați într-o formație pătrată, în așa fel încît fiecare rînd și fiecare coloană să conțină cîte un ofițer din fiecare grad și din fiecare regiment?

„Euler a arătat că problema celor n^2 ofițeri, care este evident identică cu problema construirii unui pătrat greco-latin de ordinul n, poate fi totdeauna rezolvată dacă n este impar, sau dacă n este un număr „de două ori par" (adică, dacă poate fi divizat prin 4). Pe baza a nenumărate încercări, Euler a afirmat: «Nu ezit să conchid ce este imposibil să se construiască vreun pătrat complet cu 36 de celule, aceeași situație fiind valabilă și pentru cazurile $n = 10$, $n = 14$ și, în general, pentru toate numerele numai o dată pare» (adică, numerele nedivizibile prin 4). Această afirmație avea să devină celebră sub numele de „conjectura lui Euler". Mai formal, ea poate fi formulată în modul următor: pentru orice întreg pozitiv k, nu există nici o pereche de pătrate latine ortogonale de ordinul $n = 4k + 2$".

În anul 1901 matematicianul francez Gaston Tarry a publicat o demonstrație a faptului că presupunerea lui Euler este în adevăr valabilă pentru un pătrat de ordinul 6. Tarry, ajutat de fratele său, a ales calea cea mai grea. El a trecut în revistă pur și simplu toate posibilitățile de construire a unui pătrat latin de ordinul 6, și apoi a arătat că nu există nici o pereche care să formeze un pătrat greco-latin. Această demonstrație a mărit, bineînțeles, încrederea în veridicitatea conjecturii lui Euler. Mai mulți matematicieni au publicat chiar „demonstrații" că conjectura ar fi corectă — dar mai tîrziu s-a arătat că toate conțin erori.

Volumul de muncă implicat în rezolvarea problemei prin enumerarea tuturor posibilităților crește rapid o dată cu ordinul pătratului. Următorul caz nerezolvat, cel al pătratului de ordinul 10, era cu mult prea complicat pentru a putea fi rezolvat pe calea aceasta; chiar și în 1959 el rămînea cu mult în urma posibilităților calculatoarelor electronice. Matematicienii de la Universitatea din California (Los Angeles) au programat calculatorul SWAC să caute pătrate greco-latine de ordinul 10. După mai bine de 100 de ore de lucru, n-a fost găsit nici măcar unul. Investigarea s-a limitat însă la o porțiune atît de mică a tuturor cazurilor posibile, încît de aici nu se poate trage nici o concluzie. S-a calculat că, dacă conjectura lui Euler este adevărată, calculatorul și programul citat ar fi avut nevoie de cel puțin un secol pentru a o demonstra.

„Ultima frază din memoriul lui Euler sună astfel: «Închei în acest punct cercetarea acestei probleme, care, deși de prea puțin folos luată în sine, ne poate duce la observații importante în teoria combinărilor precum și în teoria generală a careurilor magice». Or, în fapt — și acesta este un exemplu izbitor al unității științei — impulsul inițial care a dus la rezolvarea conjecturii lui Euler a venit din nevoile practice ale agronomiei experimentale, iar cercetarea pe care Euler o considera fără valoare practică s-a dovedit pînă la urmă de o importanță capitală în planificarea unor experiențe".

Sir Ronald Fischer, astăzi profesor de genetică la Universitatea din Cambridge și unul dintre cei mai mari statisticieni ai lumii, a fost primul care a arătat, prin anii 1920, cum pot fi folosite pătratele latine în cercetarea agricolă. Să presupunem, de exemplu, că cineva dorește să testeze, cu o cheltuială minimă de timp și de bani, efectul a șapte tipuri diferite de îngrășăminte chimice asupra creșterii grîului. Dificultatea principală care survine în acest tip de cercetări constă în faptul că fertilitatea diferitelor parcele de sol variază de obicei într-un mod foarte neregulat. Cum am putea planifica un experiment care să testeze simultan toate cele şapte îngrăşăminte şi, în acelaşi timp, să elimine interpretările eronate datorate variaţiilor necontrolabile ale fertilităţii? Iată răspunsul: împărţiţi lanul de grîu în loturi, care să constituie celulele unui pătrat de 7×7, apoi aplicaţi cele 7 „tratamente" cu îngrăşăminte după schema unui pătrat latin ales la întîmplare. Mulţumită schemei, o analiză statistică simplă a rezultatelor va elimina orice interpretare greşită cauzată de fertilitatea diferită a solului.

Să presupunem acum că, în loc de o singură varietate de grîu, trebuie să testăm şapte varietăţi. Am putea oare planifica un experiment care să ţină seama şi de această a patra variabilă? (Celelalte trei variabile sînt fertilitatea solului pe rînduri şi pe coloane, şi tipul de tratament.) Răspunsul este de data aceasta un pătrat greco-latin. Literele greceşti indică unde trebuie plantate cele şapte varietăţi de grîu, iar literele latine — unde trebuie distribuite cele şapte feluri de îngrăşămînt. Şi în acest caz analiza statistică a rezultatelor este foarte simplă.

Pătratele greco-latine sînt astăzi larg folosite pentru planificarea unor experimente în biologie, medicină, sociologie şi chiar în prospectarea pieţei. „Lotul", fireşte, nu trebuie să fie neapărat o parcelă de teren; el poate fi un animal, un pacient, o frunză, o cuşcă cu animale, locul în care se face o injecţie, o perioadă de timp, sau chiar un observator sau un grup de observatori. Pătratul greco-latin constituie pur şi simplu harta experimentului. Rîndurile sale iau asupra lor evidenţa uneia dintre variabile, coloanele a alteia, simbolurile latine a celei de-a treia, iar simbolurile greceşti a celei de-a patra. De exemplu, laboratorul unei fabrici de medicamente doreşte să verifice efectul a cinci tipuri diferite de pilule (dintre care una este un placebo[2]) asupra unor persoane care fac parte din cinci grupe de vîrstă, din cinci grupe de greutate şi care se găsesc în cinci faze diferite ale unei aceleiaşi boli. Un pătrat greco-latin de ordinul 5, ales la întîmplare dintre toate pătratele posibile de acest ordin, este cel mai bun instrument de planificare de care dispune experimentatorul. Eventualele variabile suplimentare pot fi luate în consideraţie suprapunînd pătrate latine adiţionale. Trebuie totuşi avut în vedere că pentru fiecare ordin n, nu există decît cel mult $n - 1$ pătrate reciproc ortogonale.

---

[2] Placebo — o substanţă fără efect farmacologic, administrată unor pacienţi „de control" fără ca aceştia să fie informaţi de natura reală a substanţei cu scopul de a elimina influenţa factorului psihologic asupra rezultatelor experimentării unor noi preparate biologic active asupra altor pacienţi. — *N.T.*

Istoria găsirii de către Parker, Bose și Shrikhande a unor pătrate greco-latine de ordinele 10, 14, 18, 22 etc. începe în 1958, an în care Parker a descoperit un fapt care arunca o gravă îndoială asupra veridicității conjecturii lui Euler. Sub îndrumarea lui Parker, Bose a dezvoltat unele reguli generale foarte eficace pentru construirea pătratelor greco-latine de ordin superior. Mai apoi, Bose și Shrikhande, aplicînd aceste reguli, au putut construi un pătrat greco-latin de ordinul 22. Deoarece 22 este un număr nedivizibil prin 4, conjectura lui Euler a fost pentru prima oară infirmată. Este interesant de menționat că metoda de construcție pentru acest pătrat se bazează pe soluția unei celebre probleme de matematică recreativă, numită „problema elevelor" propusă de T. P. Kirkman în 1850. Un profesor are obiceiul să-și scoată zilnic cele 15 eleve pentru o scurtă plimbare, aranjîndu-le în trei coloane de cîte cinci eleve. Problema constă în a le aranja astfel încît timp de șapte zile consecutiv nici una dintre eleve să nu se afle mai mult decît o singură dată în același rînd cu oricare altă elevă. Soluția acestei probleme constituie un exemplu pentru un important tip de planificare a experimentelor, cunoscută sub numele de „metoda blocurilor incomplet echilibrate".

După ce Parker a văzut rezultatele obținute de Bose și Shrikhande, el a putut elabora imediat o metodă nouă care i-a permis să construiască un pătrat greco-latin de ordinul 10. Acesta este ilustrat în fig. 85. Simbolurile unuia dintre pătratele latine sînt cifrele de la 0 la 9, din partea stîngă a fiecărei celule. Cifrele din partea dreaptă a fiecărei celule aparțin celui de-al doilea pătrat latin. Cu ajutorul acestui pătrat, a cărui existență mai este încă negată în multe manuale, statisticienii pot acum planifica, pentru prima dată, experimente în care sînt supravegheate ușor și eficient patru seturi de variabile, fiecare cu cîte zece valori diferite.

(De notat că pătratul de ordinul 3 din colțul din dreapta jos al pătratului de ordinul 10 este un pătrat greco-latin de ordinul 3. Toate pătratele de ordinul 10 construite la început de Parker și colaboratorii săi conțineau un subpătrat de ordinul 3, în sensul că acest pătrat mai mic putea fi format întotdeauna prin permutarea rîndurilor și a coloanelor pătratului mai mare. Bineînțeles, schimbarea ordinii rîndurilor și coloanelor nu influențează proprietățile unui pătrat greco-latin. Permutările de genul acesta sînt banale; dacă un pătrat poate fi obținut din altul prin deplasarea rîndurilor sau a coloanelor, cele două pătrate sînt considerate unul și același pătrat. Multă vreme nu s-a știut dacă *toate* pătratele greco-latine de ordinul 10 conțin negreșit subpătrate de ordinul 3, dar în cele din urmă au fost construite multe astfel de pătrate care nu au o astfel de caracteristică.)

00	47	18	76	29	93	85	34	61	52
86	11	57	28	70	39	94	45	02	63
95	80	22	67	38	71	49	56	13	04
59	96	81	33	07	48	72	60	24	15
73	69	90	82	44	17	58	01	35	26
68	74	09	91	83	55	27	12	46	30
37	08	75	19	92	84	66	23	50	41
14	25	36	40	51	62	03	77	88	99
21	32	43	54	65	06	10	89	97	78
42	53	64	05	16	20	31	98	79	87

Fig. 85 Pătratul greco-latin de ordinul 10 al lui E. T. Parker. El a reușit să infirme „conjectura lui Euler".

„O dată ajunși aici — își încheie cei trei matematicieni raportul — a început o corespondență asiduă între Bose și Shrikhande, pe de o parte, și Parker, pe de alta. Metodele erau rafinate din ce în ce mai mult; în cele din urmă, s-a stabilit că conjectura lui Euler este falsă pentru *toate* valorile $n = 4k + 2$, unde n este mai mare decît șase. Bruschețea cu care a fost rezolvată o problemă care timp de aproape două secole pusese matematicienii în încurcătură a surprins pe autori mai mult decît pe oricine altcineva. Ceea ce face evenimentul și mai surprinzător este faptul că noțiunile folosite în rezolvarea problemei nu au fost de loc din profunzimile matematicii moderne".

ADAOS

În anii de după 1959, viteza de lucru a calculatoarelor electronice a crescut enorm, ca și ingeniozitatea matematicienilor, în a elabora metode de programare din ce în ce mai eficiente. Folosind o tehnică numită „a întoarcerii" *(backtrack)*, Parker a elaborat un program pentru calculatorul UNIVAC 1206, care era în stare să ia un pătrat latin dat, de ordinul 10, și să caute pînă la epuizarea tuturor posibilităților toate pătratele ortogonale cu acesta; operație terminată în numai 28—45 de minute, ceea ce reprezintă o îmbunătăţire de aproximativ un trilion de ori a vechiului program SWAC! Rezultatul: au fost construite sute de noi pătrate greco-latine de ordinul 10. Pînă la urmă s-a dovedit că nimic nu este mai banal decît un pătrat de acest fel. Programul UNIVAC a putut găsi perechi ortogonale pentru mai mult de jumătate din pătratele de ordinul 10 construite la întîmplare care au fost introduse ca date în calculator... „Trebuie să tragem concluzia, scrie Parker, că Euler n-a avut nici pe departe dreptate şi că argumentele bazate pe calculele mai vechi n-au demonstrat decît că domeniul de cercetat este enorm de mare".

Surprinzător însă, pînă la această oră nu a fost găsit nici un grup de *trei* pătrate latine de ordinul 10 reciproc ortogonale. Mai înainte se demonstrase că pentru un ordin oarecare *n*, numărul maxim posibil de pătrate latine ortogonale este *n* — 1. Un set de *n* — 1 astfel de pătrate se numeşte un „set complet". De exemplu, pătratul latin de ordinul 2 are un set complet care constă din pătratul însuşi. Pătratul de ordinul 3 are un set complet care ar consta din două pătrate ortogonale, iar pătratul de ordinul 4 are un set complet format din trei pătrate ortogonale. Un set complet de patru pătrate latine reciproc ortogonale de ordinul 5 este ilustrat în fig. 84. (Bineînţeles, oricare două dintre acestea dau, prin suprapunere, un pătrat greco-latin.) Nu există însă un set complet de pătrate ortogonale de ordinul 6 — de fapt nu există nici măcar o pereche. Seturi complete au fost găsite pentru ordinele 7, 8 şi 9. Ordinul 10 este prin urmare ordinul cel mai mic pentru care nu se ştie încă dacă este sau nu posibil un set complet. Nu se ştie nici măcar dacă există un set de trei pătrate.

Problema aceasta capătă un interes deosebit în legătură cu aşa-numitele „plane proiective finite". (Cititorul interesat poate găsi amănunte despre aceste structuri fascinante în cîteva din referinţele indicate în bibliografia pentru acest capitol.) S-a arătat că dacă, pentru un anumit ordin *n*, există o mulţime completă de pătrate latine ortogonale, atunci este posibil să se deducă din ea construcţia unui plan proiectiv finit de ordinul *n*. Reciproc, dacă pentru ordinul *n* se cunoaşte un plan proiectiv finit, se poate construi un set complet de pătrate latine reciproc ortogonale de ordinul *n*. Întrucît Tarry a arătat că nu sînt posibile nici măcar două pătrate latine ortogonale de ordinul 6, rezultă că nu este posibil un plan proiectiv finit de ordinul 6. Mulţimi complete (şi deci şi plane proiective finite) există pentru ordinele 2, 3, 4, 5, 7, 8 şi 9. Planul proiectiv finit de ordinul cel mai mic a cărui existenţă nu a fost nici confirmată, nici infirmată, este cel de ordinul 10. Prin urmare, descoperirea unui set complet de nouă pătrate latine de ordinul 10 va rezolva în acelaşi timp şi problema foarte importantă a planelor proiective finite de acest ordin.

Fig. 86 O broderie bazată pe pătratul greco-latin al lui Parker.

În clipa de față, problema este în afara posibilităților programelor actuale de calcul și este puțin probabil că ea va fi rezolvată fără o mărire considerabilă a vitezei de calcul, sau fără descoperirea unei metode cu totul noi, care să abordeze problema dintr-un unghi cu totul diferit.

Coperta numărului din noiembrie 1959 al revistei „Scientific American" a reprodus o interesantă pictură în ulei a d-rei Emi Kasai, din redacția revistei, bazată pe pătratul greco-latin de ordinul 10 din fig. 85. Cele zece cifre au fost înlocuite prin zece culori diferite, așa ca fiecare celulă să conțină o pereche unică de culori. În fig. 86 este reprodusă o iscusită broderie realizată în 1960 de d-na Karl Wihtol, din Middletown (New Jersey), după pictura de pe coperta revistei. (Broderia devine echivalentă cu pătratul din fig. 85 după ce i se dă o rotație de un sfert de cerc, în sensul acelor unui ceasornic.) Culorile periferice ale fiecărei celule formează un pătrat latin, iar cele din interior — celălalt pătrat latin. În fiecare rînd și coloană, fiecare culoare apare o singură dată la periferia celulelor și o singură dată în interiorul acestora. Tabloul original al d-rei Kasai a fost cumpărat de societatea „Remington Rand" și oferit în dar lui E. T. Parker.

RĂSPUNSURI

Fig. 87 indică un procedeu de a aranja cele 16 cărți astfel ca nici o valoare și nici o „culoare" să nu apară de două ori pe un rînd sau o coloană oarecare, sau pe cele două diagonale principale.

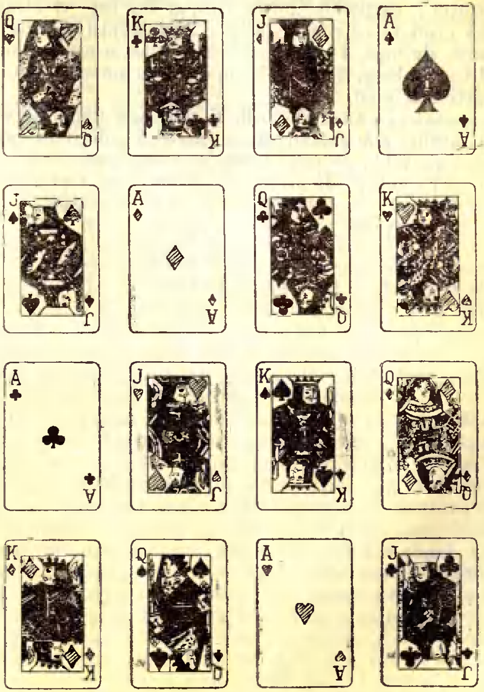


Fig. 87 O soluție pentru problema cu cărți.

De notat că cele patru cărţi din colţuri, ca şi cele patru cărţi centrale, formează de asemenea seturi, în care sînt reprezentate toate valorile, toate „culorile”. Ar fi frumos dacă ar exista o soluţie care să permită şi aranjarea alternativă a culorilor, dar aceasta nu este posibil.

W. W. Rouse Ball, în cartea sa *Mathematical Recreations and Essays* (Recreaţii şi eseuri matematice), p. 190, citează o sursă din 1723 în legătură cu această problemă şi spune că ea are 72 de soluţii fundamental diferite, fără a socoti rotaţiile şi reflexiile ca diferite. Henry Ernest Dudeney, în *Amusements in Mathematics* (Amuzamente matematice), problema 304, urmăreşte problema pînă în 1624, cînd a apărut o ediţie a cărţii lui Claude Gaspar Bachet; el atrage atenţia asupra unei erori în calcularea celor 72 de soluţii diferite. Numărul soluţiilor este, de fapt, 144. La acelaşi rezultat a ajuns, independent, şi Bernard Goldenberg, din Brooklyn, după ce am citat cifra incorectă de 72 în articolul meu.

Dacă se consideră numai rîndurile şi coloanele (ignorînd diagonalele principale), atunci *este posibil* să se găsească soluţii în care culorile alternează ca pe tabla de şah. Adolf Karfunkel, din New York, mi-a trimis mai multe soluţii de acest gen, dintre care reproduc una:

Q-cupă	K-treflă	J-caro	A-pică
J-treflă	A-cupă	Q-pică	K-caro
A-caro	J-pică	K-cupă	Q-treflă
K-pică	Q-caro	A-treflă	J-cupă

Elipsa

Fără îndoială, cercul prezintă la prima vedere o simplitate foarte atrăgătoare, dar o singură privire aruncată elipsei ar putea convinge pînă și pe cel mai mistic astronom că simplitatea perfectă a cercului este vecină cu zîmbetul fără expresie al idiotului. Un cerc are prea puține de spus, în comparație cu ceea ce poate spune o elipsă. Poate că însăși căutarea unor simplități cosmice în cadrul universului fizic este o căutare de acest tip circular — o reflectare a mentalității noastre necomplicate în cercetarea unei lumi exterioare infinit de complexe.
Eric Temple Bell
Mathematics : Queen and Servant of Science
(Matematica — regina și slujbașa științei)

Matematicienii au obiceiul de a studia, pentru plăcerea studiului însuși, lucruri care par teribil de nefolositoare. Dar, după secole, studiile lor se dovedesc că au o valoare științifică enormă. Nu există exemplu mai potrivit pentru acest fapt decît lucrările vechilor greci asupra curbelor necirculare de gradul doi : elipsa, parabola și hiperbola. Ele au fost studiate pentru prima dată de unul dintre elevii lui Platon, dar nu și-au găsit nici o aplicație științifică mai importantă pînă în secolul al XVII-lea, cînd Kepler a descoperit că planetele se mișcă pe elipse, iar Galilei a dovedit că proiectilele se mișcă pe traiectorii în formă de parabolă.

Apolionios din Perga, un geometru grec din secolul al III-lea î.e.n., a scris unul dintre cele mai mari tratate antice asupra acestor curbe. Lucrarea sa *Conicele* a fost prima care a arătat că aceste trei curbe, plus cercul, pot fi obținute prin secționarea, sub unghiuri continuu variabile, a unuia și aceluiași con. Dacă planul de secțiune este paralel cu baza conului, secțiunea rezultantă este un cerc (vezi fig. 88). Dacă planul este ușor înclinat, secțiunea devine o elipsă. Cu cît înclinarea este mai mare, cu atît elipsa devine mai alungită (sau mai excentrică, în limbajul matematic). S-ar putea crede că la o înclinare foarte mare a planului, curba va lua forma unei pere (deoarece cu cît planul pătrunde mai adînc spre baza conului, cu atît conul este mai larg în acea regiune), dar nu se întîmplă așa. Curba rămîne o elipsă perfectă pînă în momentul cînd planul devine paralel cu una dintre generatoarele conului. În acest moment, curba încetează de a se mai

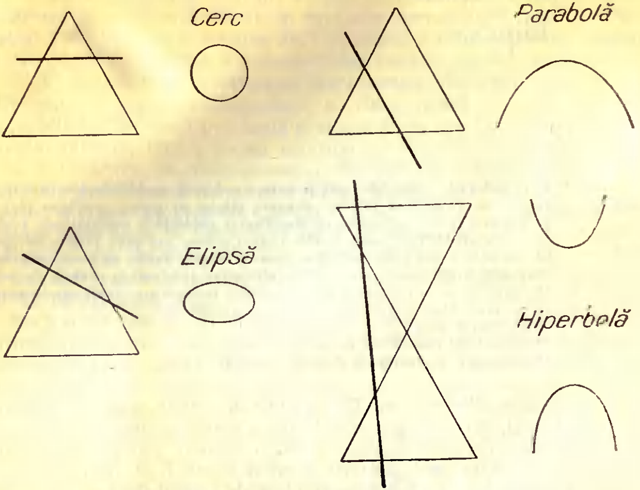


Fig. 88 Cele patru tipuri de secţiuni conice.

închide în ea însăşi — braţele ei se prelungesc spre infinit, curba devenind o parabolă. O înclinare şi mai mare a planului de secţiune duce la intersectarea acestuia cu un con inversat aşezat deasupra primului. Cele două secţiuni conice rezultante sînt cele două ramuri ale unei hiperbole. (O greşeală foarte larg răspîndită presupune că pentru a obţine o hiperbolă planul trebuie să fie paralel cu axa conului.) Ele variază ca formă pe măsură ce planul continuă să se rotească, pînă ce degenerează în cele din urmă, în linii drepte. Cele patru curbe poartă numele de curbe de gradul doi, deoarece sînt reprezentările grafice carteziene ale tuturor ecuaţiilor de gradul doi care leagă între ele două variabile.

Elipsa este cea mai simplă dintre toate curbele plane care nu sînt nici linii drepte, nici cercuri. Ea poate fi definită în numeroase feluri, dar poate că cel mai uşor de înţeles intuitiv este următorul: elipsa este drumul (sau locul geometric) al unui punct care se mişcă într-un plan, în aşa fel încît suma distanţelor sale la două puncte fixe este constantă. Această proprietate sugerează o binecunoscută metodă

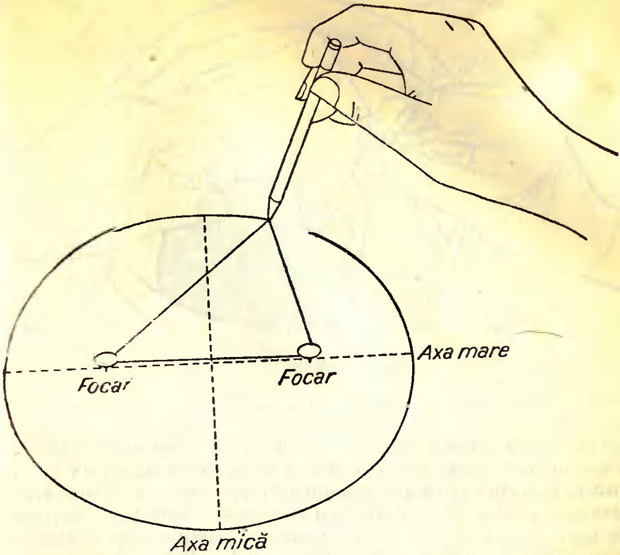


Fig. 89 Modul cel mai simplu de a desena o elipsă.

de desenare a elipselor. Înfigeţi două piuneze într-o foaie de hîrtie aşezată pe masă, treceţi în jurul lor o buclă din aţă şi ţineţi cu vîrful unui creion bucla întinsă, aşa cum se vede în fig. 89. Mişcînd creionul în jurul piunezelor, putem desena foarte uşor o elipsă perfectă. (Lungimea aţei nu variază, aşa că suma distanţelor dintre vîrful creionului şi cele două piuneze rămîne constantă.) Cele două puncte fixe ale elipsei (piunezele) se numesc focare. Ele sînt situate pe axa mare. Diametrul perpendicular pe această axă se numeşte axa mică. Dacă cele două piuneze sînt apropiate treptat una de alta (păstrînd aceeaşi buclă), elipsele obţinute de fiecare dată sînt din ce în ce mai puţin excentrice. Cînd focarele coincid, elipsa devine un cerc. Cu cît focarele se îndepărtează unul de altul, elipsa devine din ce în ce mai alungită, pînă ce degenerează în cele din urmă într-o dreaptă.

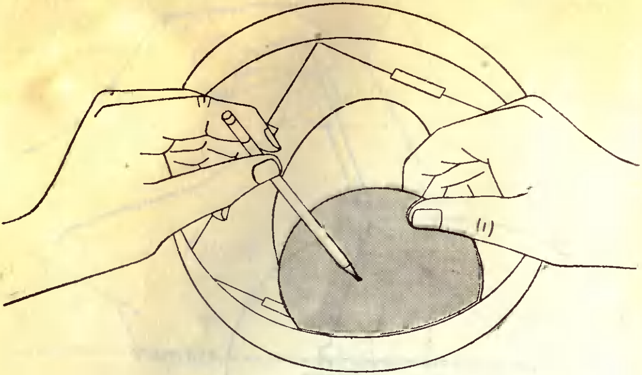


Fig. 90 Un elipsograf improvizat dintr-o tavă de prăjituri circulară și un disc de carton.

Există multe moduri de a construi elipse. Una dintre cele mai curioase metode poate fi demonstrată cu ajutorul unei tăvi de copt prăjituri de formă circulară și unui disc de carton cu diametru cît jumătate din cel al tăvii. Căptușiți marginea dinăuntru a tăvii cu o hîrtie aspră, care să împiedice alunecarea discului atunci cînd acesta se rostogolește în jurul marginii. Fixați cu bandă adezivă pe fundul tăvii o foaie de hîrtie. Faceți o gaură oriunde în disc și introduceți prin ea vîrful unui creion, apoi rostogoliți discul în jurul tăvii, cum se vede în fig. 90. Pe hîrtie va fi desenată o elipsă. Dacă gaura a fost făcută în centrul discului, vîrful creionului va desena, desigur, un cerc. Cu cît gaura este mai apropiată de marginea discului, cu atît va fi mai mare excentricitatea elipsei. Un punct de pe circumferința discului va trasa o elipsă care a degenerat într-o linie dreaptă.

Iată și o altă cale plăcută de obținere a unei elipse. Tăiați dintr-o foaie de hîrtie un cerc mare. Marcați un punct undeva în interiorul cercului, dar nu în centru, apoi îndoiți cercul astfel ca circumferința lui să cadă pe punctul ales. Dezdoiți, apoi îndoiți din nou, alegînd un alt punct pe circumferință — repetînd această operație pînă cînd hîrtia a fost îndoită de multe ori în toate direcțiile. Îndoiturile formează o mulțime de tangente, care conturează o elipsă (vezi fig. 91).

Deși mai puțin simplă decît cercul, elipsa rămîne totuși curba cea mai des întîlnită în viața de toate zilele. Motivul acestui lucru îl con-

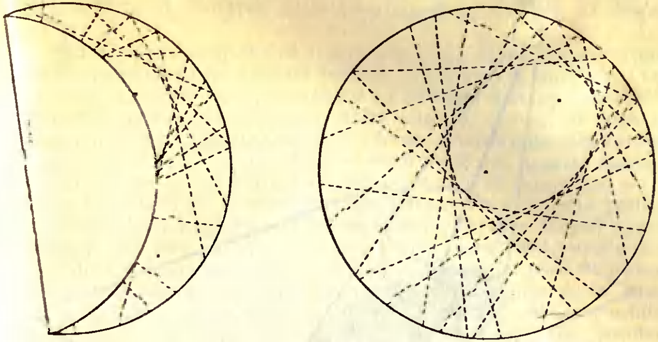


Fig. 91 Prin îndoirea unei foi de hîrtie circulare, astfel ca marginea acesteia să cadă într-un punct excentric fixat, se obține o elipsă.

stituie faptul că orice cerc privit oblic apare ca o elipsă. Mai mult, orice umbră închisă necirculară aruncată pe un plan de un cerc sau de o sferă este o elipsă. Umbrele care cad pe o sferă — curba interioară a Lunii aflată în fază crescătoare, de pildă — sînt mărginite de cercuri mari, dar noi le vedem ca arce eliptice. Înclinați un pahar cu apă (indiferent dacă paharul este cilindric sau conic) și veți constata că suprafața lichidului capătă un contur eliptic.

O minge așezată pe masă aruncă o umbră eliptică care este de fapt secțiunea în planul mesei a unui con de lumină în care mingea se potrivește exact. Mingea stă exact pe unul dintre focarele elipsei. Dacă ne imaginăm o sferă mai mare care este tangentă la suprafață pe partea cealaltă a acesteia și se potrivește exact în același con, sfera aceea va atinge umbra în cel de al doilea focar. Aceste două sfere prilejuiesc următoarea celebră și frumoasă demonstrație (dată de G. P. Dandelin, un matematician belgian din secolul al XIX-lea) a faptului că secțiunea conică este în adevăr o elipsă.

Fie A un punct oarecare pe elipsă. Desenați o linie (indicată în figură prin —·—·—·—·—) care trece prin A și prin vîrful conului. Această dreaptă va fi tangentă la cele două sfere în punctele D și E. Trasați o dreaptă de la A la B — punctul, în care sfera mică atinge umbra, dreapta analogă de la A la C — punctul în care sfera mare atinge umbra. AB este egal cu AD, deoarece ambele drepte sînt tangente la o sferă din același punct exterior fix. AE este egal cu AC

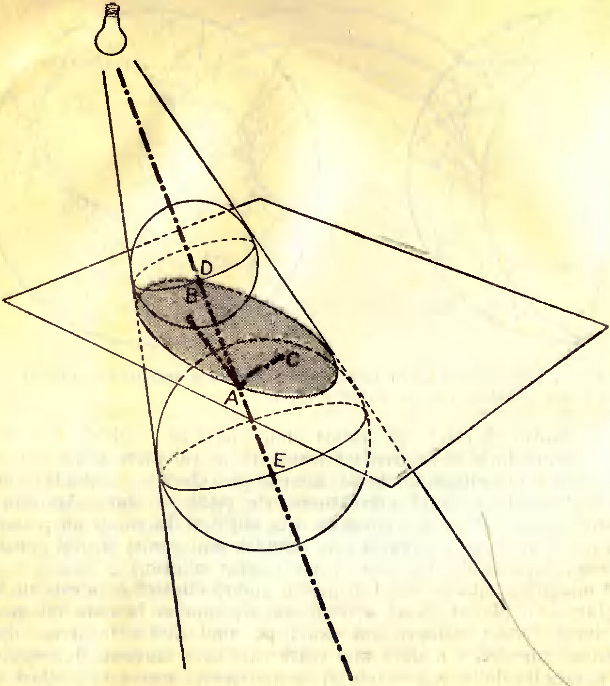


Fig. 92 Cu ajutorul unei sfere mai mari se poate dovedi că umbra aruncată de o sferă mică are formă de elipsă.

pentru același motiv. Adunînd cantități egale la cantități egale, obținem:

$$AD + AE = AB + AC.$$

Dar AD + AE este unul și același lucru cu DE. Datorită simetriei conului și sferelor, această dreaptă are o lungime constantă, indiferent unde este ales punctul A pe elipsă. Dacă suma AD + AE este constantă, atunci ecuația de mai sus arată că și suma AB + AC este constantă. Întrucît AB şi AC sînt distanţele de la punctul A la două puncte fixe, locul geometric al lui A trebuie să fie o elipsă, cu focarele în B şi C.

În fizică, elipsa intervine de foarte multe ori, ca traiectorie a unui obiect care se mişcă pe o orbită închisă, sub influenţa unei forţe centrale care variază invers proporţional cu pătratul distanţei. Planetele şi sateliţii, de exemplu, descriu orbite eliptice, centrul de greutate al sistemului fiind plasat în unul dintre focare. Cînd Kepler şi-a anunţat marea sa descoperire că planetele se mişcă pe elipse, această descoperire contrazicea în aşa măsură credinţa generală că Dumnezeu nu ar permite traiectorii ale corpurilor cereşti care să fie mai puţin perfecte decît cercul, încît Kepler a fost nevoit să-şi ceară scuze. Kepler spunea că elipsele sale sînt „bălegar", pe care a fost nevoit să-l introducă cu scopul de a înlătura din astronomie cantităţile şi mai mari de bălegar care se acumulaseră în urma încercărilor îndelungate de a păstra orbitele circulare. Kepler însă nu a descoperit niciodată de ce orbitele sînt eliptice; acest pas a fost realizat de Newton, pe baza consideraţiilor sale asupra naturii gravitaţiei. Nici chiar marele Galilei nu a putut crede că orbitele nu sînt circulare, deşi evidenţa experimentală era extrem de bogată.

O importantă proprietate de reflexie a elipsei este ilustrată în fig. 93. Desenaţi o linie dreaptă care să fie tangentă la elipsă într-un punct oarecare. Liniile care unesc acest punct cu focarele fac unghiuri egale cu tangenta. Dacă ne imaginăm elipsa ca o fîşie metalică verticală, aşezată pe o suprafaţă plană, atunci orice undă sonoră care se propagă în linie dreaptă din unul dintre focare va lovi fîşia şi se va reflecta direct către cel de-al doilea focar. Mai mult, dacă unda se mişcă spre margine cu o viteză constantă, ea va atinge al doilea focar după un acelaşi interval de timp, indiferent de direcţia pe care a avut-o atunci cînd a părăsit primul focar (deoarece distanţele parcurse înainte şi după reflexie au o sumă constantă). Închipuiţi-vă acum un bazin eliptic adînc, umplut cu apă. Iniţiem o undă circulară prin introducerea degetului în apă, în unul dintre focarele elipsei. Cîteva clipe mai tîrziu, în celălalt focar vor putea fi văzute sosind din toate direcţiile undele reflectate.

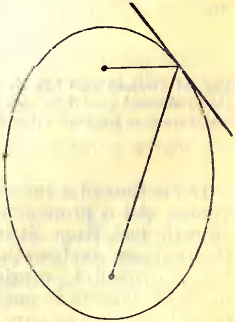


Fig. 93 O tangentă face unghiuri egale cu cele două drepte care unesc punctul de tangenţă cu focarele.

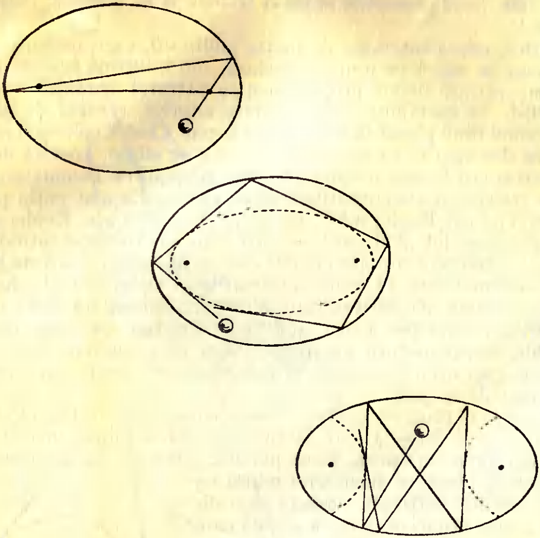


Fig. 94 Drumul unei bile de biliard care este împinsă prin unul din focarele elipsei (sus); drumul unei bile care nu este împinsă printre focare (mijloc); drumul unei bile care este împinsă printre focare (jos).

Lewis Carroll a inventat și propus o masă de biliard circulară. Nu cunosc nici o propunere cît de cît serioasă pentru o masă de biliard eliptică, însă Hugo Steinhaus dă, în cartea sa *Mathematical Snapshots* (Instantanee matematice), republicată recent de Oxford University Press, o analiză surprinzătoare a comportării unei bile pe o astfel de masă. Plasată în unul dintre focare și împinsă (fără rotație proprie) într-o direcție oarecare, bila se va lovi de margine și va trece prin celălalt focar (vezi desenul din partea de sus a fig. 94). Admițînd că nu există frecare care să întîrzie mișcarea bilei, aceasta va continua să treacă printr-un focar după fiecare ricoșeu. Totuși, după numai cîteva drumuri, traiectoria bilei se va confunda practic cu axa mare a elipsei. Dacă bila nu a fost plasată într-un focar şi dacă a fost astfel împinsă încît să nu treacă printre focare, ea se va mişca mereu pe traiectorii care sînt tangente la o elipsă mai mică, cu aceleaşi focare (vezi desenul din mijloc). Dacă bila este împinsă astfel încît să treacă printre focare (ca în desenul din partea de jos), ea se va deplasa la nesfîrşit pe traiectorii care nu se apropie niciodată mai mult de focare decît o hiperbolă avînd aceleaşi focare.

In opereta *Micadoul*[1] există un cuplet despre un jucător de biliard nevoit să joace

> Pe o masă în vînt
> Cu un tac cam frînt
> Şi eliptice bile!

In romanul *Portret al artistului în tinereţe*[2], James Joyce are un personaj, profesor, care citează aceste versuri, apoi arată că prin „eliptic" W. S. Gilbert voia să spună de fapt „elipsoidal". Dar ce este un elipsoid? Acesta are trei axe principale. Un elipsoid de rotaţie, mai propriu numit sferoid, este suprafaţa unui corp în spaţiu, obţinut prin rotaţia unei elipse în jurul uneia dintre cele două axe. Dacă rotaţia se face în jurul axei mici, ea generează un sferoid turtit la poli, asemenea Pămîntului. Rotaţia în jurul axei mari generează un sferoid alungit, asemănător unei mingi de rugby. Imaginaţi-vă un astfel de sferoid alungit care are faţa interioară lustruită ca o oglindă. Dacă în unul dintre focare se aprinde o lumînare, o bucăţică de hîrtie pusă în celălalt focar va lua foc.

Camerele care au tavanul sferoidal pot fi pe drept cuvînt numite „camere ale şoaptelor". Sunete foarte încete emise în unul din focare pot fi auzite clar în celălalt focar. În Statele Unite, cea mai cunoscută „galerie a şoaptelor" se află în sala statuilor, de la Capitoliu. Nici un ghid nu uită de acest lucru atunci cînd îşi conduce grupul de turişti.

Atît sferoidul turtit, cît şi cel alungit dau secţiuni circulare dacă sînt tăiate cu planuri perpendiculare pe una dintre cele trei axe de coordonate şi secţiuni eliptice dacă planul este perpendicular pe celelalte două axe. Atunci cînd nici una dintre cele trei axe nu este egală cu celelalte, şi toate secţiunile perpendiculare pe axe sînt elipse, forma este un elipsoid veritabil (fig. 95). Aceasta este forma pe care

---

[1] Operetă de William S. Gilbert şi Arthur Sullivan (1885). — *N.T.*
[2] Scris în anul 1916. Traducerea în limba română a apărut în E.L.U., Bucureşti, 1969, p. 297. — *N.T.*

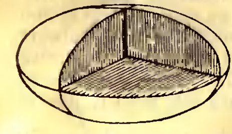


Fig. 95 Orice secțiune printr-un elipsoid are forma de elipsă.

tind să o ia pietricelele de pe o plajă după ce au fost multă vreme spălate de ape.

Problemele distractive „eliptice" sînt destul de rare. Iată două mai ușoare:

1. Arătați că nici un poligon regulat cu mai mult de patru laturi nu poate fi înscris într-o elipsă, în așa fel ca toate vîrfurile sale să se afle pe perimetrul elipsei.

2. În metoda de construire a elipsei prin îndoirea unei foi de hîrtie circulare, explicată mai înainte, centrul cercului și locul marcat cu un punct constituie focarele elipsei. Arătați că curba conturată de îndoituri este în adevăr o elipsă.

ADAOS

Henry Dudeney, în problema nr. 126 din cartea *Modern Puzzles* (Enigme moderne), explică metoda piunezelor și a buclei de ață pentru construirea elipselor, apoi întreabă cum poate fi folosită această metodă pentru desenarea unei elipse cu axa mare și axa mică date. Metoda este foarte simplă:

Desenați mai întîi cele două axe. Problema constă acum în a găsi cele două focare A și B ale unei elipse care are aceste axe. Fie C unul dintre capetele axei mici. Punctele A și B sînt simetric așezate pe axa mare, în locuri pentru care atît AC, cît și CB sînt egale cu jumătatea lungimii axei mari. Este ușor de arătat că o buclă de ață cu lungimea egală cu perimetrul triunghiului ABC poate servi la trasarea elipsei cerute.

Mese de biliard eliptice au fost puse efectiv în vînzare în Statele Unite. O reclamă pe o pagină întreagă a ziarului „The New York Times" din 1 iulie 1964 anunța că a doua zi jocul poate fi cumpărat la magazinul „Stern", prezentarea lui fiind asigurată de stelele de cinematograf Joanne Woodward și Paul Newman. Sub numele de *Elliptopool**, jocul este o invenție brevetată a lui Arthur Frigo, din Torrington (Connecticut), pe vremea aceea student la Colegiul unional din Shenectady. Datorită faptului că singurul buzunar al mesei se află în unul dintre focare, pe ea se pot executa nenumărate lovituri foarte interesante.

Articolul despre biliard din cea de-a unsprezecea ediție a *Enciclopediei Britanice* cuprinde o notă de subsol care spune: „În anul 1907,

---

* Pool, sau biliard cu buzunare — variantă a jocului de biliard foarte răspîndită în Statele Unite. — *N.T.*

în Anglia a fost introdusă, ca o schimbare, o masă ovală". Totuși, nici aceasta, nici masa propusă de Lewis Carroll nu dispuneau de nici un buzunar. În iulie 1964, Edwin E. Robinson, din Pacifica (California), a brevetat sub numărul 198571 o masă circulară cu patru buzunare.

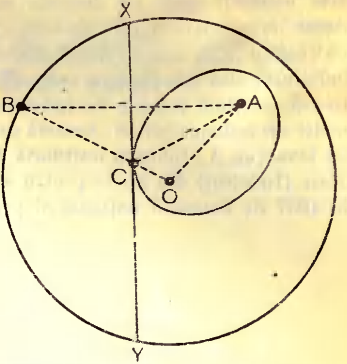


Fig. 96 Explicația formării elipselor prin îndoirea unei hîrtii circulare.

RĂSPUNSURI

1. Nici un alt poligon regulat în afară de pătrat nu poate fi înscris într-o elipsă, deoarece colțurile oricărui poligon regulat sînt așezate pe un cerc. Un cerc nu poate intersecta o elipsă în mai mult de patru puncte. Prin urmare, nici un poligon regulat cu mai mult de patru vîrfuri nu poate fi plasat cu toate vîrfurile sale pe o elipsă. Această problemă a fost propusă revistei „Mathematics Magazine" (numărul din septembrie-octombrie 1960) de către M. S. Klamkin.

2. Demonstrația faptului că metoda de construire a unei elipse prin îndoirea unei foi de hîrtie conduce în adevăr la o elipsă, se face în felul următor (vezi fig. 96). Fie punctul A orice punct ales pe o hîrtie circulară, diferit de centrul cercului (O). Hîrtia este astfel îndoită încît un punct oarecare B de pe circumferință să cadă în A. Aceasta produce o îndoitură de-a lungul liniei XY. Deoarece XY este bisectoarea dreptei AB, segmentele BC și AC trebuie să fie egale. Este evident că OC + AC = OC + CB. OC + CB este raza cercului, care nu poate varia, prin urmare și OC + AC trebuie să fie constant. Întrucît OC + AC este suma distanțelor dintre punctul C și două puncte fixe A și O, locul geometric al lui C atunci cînd B se mișcă în jurul cercului, trebuie să fie o elipsă cu focarele în A și O.

Indoitura XY este tangentă la elipsă în punctul C, deoarece ea face unghiuri egale cu dreptele care unesc punctul C cu focarele. Acest lucru poate fi ușor stabilit, notînd că unghiul XCA este egal cu unghiul XCB, care, la rîndul său, este egal cu unghiul YCO. Deoarece îndoiturile sînt întotdeauna tangente la elipsă, elipsa devine înfășurătoarea mulțimii infinite de îndoituri care pot fi făcute repetînd de multe ori îndoirea hîrtiei. Această demonstrație este luată din broșura lui Donovan A. Johnson intitulată *Paper Folding for the Mathematics Class* (Îndoituri din hîrtie pentru studiile de matematică), publicată în 1957 de Consiliul național al profesorilor de matematică.

Pătratele cu 24 de culori și cuburile cu 30 de culori

Un joc normal de domino constă din 28 de plăcuțe negre, împărțite fiecare în cîte două pătrate, care fie că sînt goale, fie că au marcate pe ele un număr de puncte albe. În set nu există plăcuțe identice, iar luate împreună, ele reprezintă cele 28 de moduri posibile în care pot fi combinate două cîte două numerele de la 0 la 6. Plăcuțele pot fi considerate ca segmente de dreaptă care, atunci cînd sînt așezate cap la cap, formează lanțuri liniare; în acest sens, orice joc de domino este strict unidimensional. Cînd noțiunea de domino este extinsă la piese bi- și tridimensionale, iau naștere tot felul de recreații variate și foarte puțin cunoscute. Percy Alexander MacMahon, un specialist englez de prestigiu în analiza combinatorie, a dedicat multe studii acestor „superdominouri". Materialul care urmează este luat din cartea sa *New Mathematical Pastimes* (Distracții matematice inedite), publicată în 1921.

Pentru un domino bidimensional, formele cele mai convenabile sînt triunghiul, pătratul și hexagonul, deoarece în fiecare dintre aceste cazuri poligoanele regulate pot fi astfel aranjate, încît să acopere complet un plan. Dacă se folosesc pătrate, iar laturile lor sînt etichetate în toate modurile posibile cu ajutorul a n simboluri, poate fi formată o mulțime de $\frac{1}{4}n(n+1)(n^2-n+2)$ pătrate. Fig. 97 arată întregul set de 24 de dominouri pătrate care rezultă cînd $n=3$. Dacă cititorul își va construi din carton un astfel de set, el va dispune de cele necesare pentru un joc extrem de distractiv. Este mai conve-

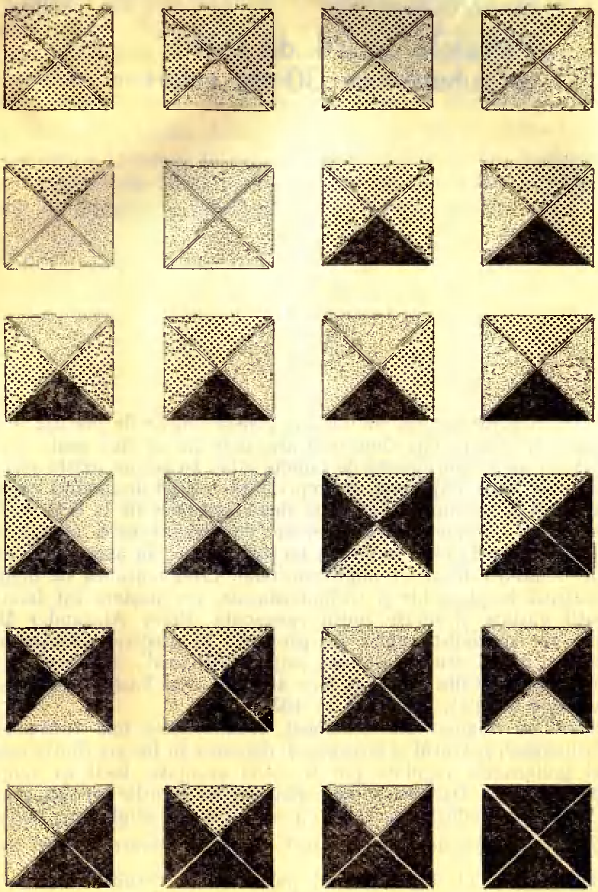


Fig. 97 Un set de dominouri pătrate, în trei culori.

nabil să folosim culori în locul simbolurilor. Problema constă în a asambla toate cele 24 de pătrate, în așa fel încît să formeze un dreptunghi de 4 × 6, cu două condiții: 1) fiecare pereche de laturi care se ating trebuie să fie de aceeași culoare; 2) marginea dreptunghiului, de jur împrejur, trebuie să fie de aceeași culoare. Se presupune că pătratele de carton sînt colorate numai pe o parte. Pentru marginea dreptunghiului poate fi aleasă orice culoare — la fiecare alegere fiind posibile un număr mare de soluții diferite.

Dreptunghiul de 4 × 6 este singurul care poate fi format în condițiile date. Un dreptunghi de 2 × 12 este în mod evident imposibil, deoarece el ar cere ca fiecare pătrat să aibă aceeași culoare ca marginea. Poate cititorul demonstra, privind cele 24 de pătrate colorate din fig. 97, că un dreptunghi de 3 × 8 este de asemenea imposibil?

În trei dimensiuni, cubul este singura formă care permite, prin asamblarea cu alte cuburi identice, să se umple complet un spațiu tridimensional; din această cauză, el poate fi foarte bine ales pentru dominoul tridimensional. Dacă pentru fețe sînt alese două culori, nu pot fi colorate distinct decît cel mult zece cuburi — un număr prea mic pentru a prezenta interes. Pe de altă parte, folosind trei culori ar rezulta prea multe cuburi (57). Cu șase culori, numărul sare la 2226, dar din această mulțime putem selecta o submulțime de 30 care este ideală pentru scopurile noastre. Ea constă din cuburi care poartă pe cele șase fețe ale lor cele șase culori diferite.

Este ușor de văzut că 30 este numărul maxim. O față roșie, să zicem, trebuie să existe pe fiecare cub. Pe fața opusă acestei fețe roșii poate fi oricare dintre cele cinci culori rămase. Cele patru culori rămase pot fi plasate în șase moduri diferite, așa că numărul total de cuburi diferite trebuie să fie de 5 × 6 = 30. (Două cuburi sînt considerate diferite dacă este imposibil să fie așezate unul lîngă altul, în așa fel încît fețele de aceleași culori să corespundă.) Fig. 98 arată cele 30 de cuburi, sub formă desfăcută.

Cele 30 de cuburi — descoperite după cît se pare de MacMahon — au devenit un joc clasic de geometrie recreativă. Nu este prea ușor de confecționat un set, dar efortul este pe deplin răsplătit. Un set de cuburi frumos colorate este o jucărie de familie nemaipomenit de fascinantă; ea nu necesită baterii de schimb și durează ani de zile. Cuburi din lemn sau din material plastic pot fi cumpărate la orice magazin de jucării. În loc de a le vopsi, fețele cuburilor pot fi acoperite cu hîrtie colorată.

Ca exercițiu introductiv, alegeți pe oricare dintre cele 30 de cuburi. Găsiți apoi un al doilea cub care poate fi așezat lîngă primul, astfel ca fețele care se ating să se potrivească la culoare, fețele de la

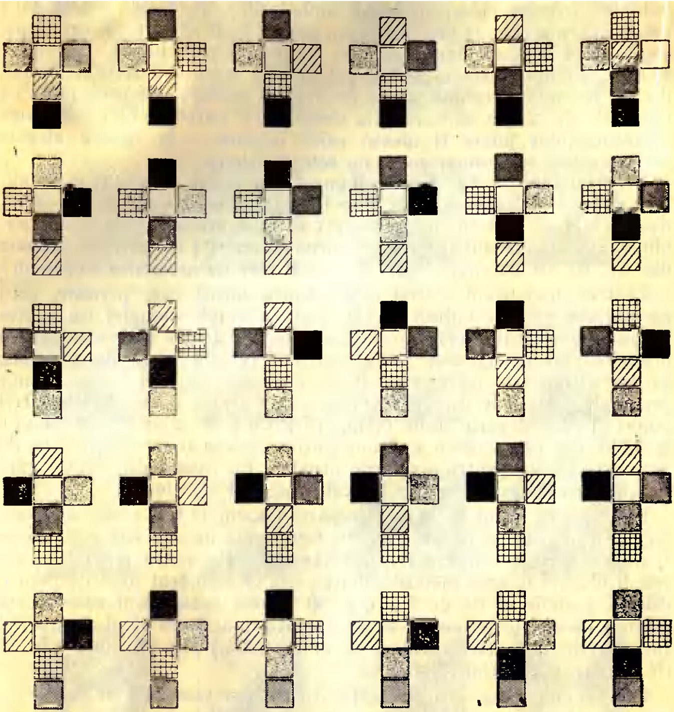


Fig. 98 Cele 30 de cuburi colorate, prezentate sub formă desfăcută.

capete să fie de o a doua culoare, iar celelalte patru culori să se găsească pe celelalte patru fețe, fiecare față laterală a solidului fiind într-o singură culoare. Este întotdeauna posibil să realizați acest aranjament. Deoarece cele două cuburi sînt unul imaginea în oglindă a celuilalt, înseamnă că fiecare cub — ca și fiecare particulă elementară a materiei — are „anticubul" său.

(Căutînd un anumit tip de cub, se economisește mult timp dacă aliniem cuburile în șiruri și întoarcem dintr-o dată un șir întreg. De pildă, să presupunem că ne uităm după cuburile care au roșu și albastru pe fețele opuse. Aranjați într-un șir un grup de cuburi cu roșul deasupra, dați șirului două sferturi de rotație și scoateți afară toate cuburile care au acum albastrul deasupra. Sau, să presupunem că dorim să alegem cuburile care au albastru, galben și verde pe fețele care se întîlnesc într-un colț. Formați un șir cu cuburi care au albastrul deasupra, întoarceți-l cu fața în jos și scoateți cuburile care au deasupra verde și galben. Întoarceți cuburile rămase în așa fel ca verdele să vină deasupra, apoi răsuciți șirul cu fața în jos și eliminați cuburile care au pe fața de sus albastru și galben. Cuburile rămase vor fi toate de tipul dorit.)

Nu este posibil să se formeze un lanț liniar constînd din mai mult de două cuburi, care să aibă pe toate fețele laterale cîte o singură culoare, dar se poate ușor construi un șir de șase cuburi care să aibă pe fiecare față toate cele șase culori. O problemă foarte amuzantă este construirea acestui șir în așa fel ca toate fețele care se ating să aibă culori identice, iar cele două fețe de la capetele șirului să fie, de asemenea, identice.

Iată acum un joc ceva mai complicat. Alegeți un cub oarecare și așezați-l pe una din fețe. Din cele 29 de cuburi rămase, alegeți opt, în așa fel ca ele să formeze un cub cu dimensiunile $2 \times 2 \times 2$ și care este copia perfectă a cubului inițial (cu excepția dimensiunilor). În plus, fiecare pereche de fețe care se ating trebuie să se potrivească la culoare. (MacMahon atribuie prietenului său, colonelul Julian R. Jocelyn, descoperirea faptului că acest lucru poate fi întotdeauna făcut, indiferent care cub este ales la început.)

Numai un singur set de opt cuburi vor fi potrivite pentru acest joc, și ele nu pot fi găsite ușor dacă nu se procedează sistematic. Cea mai bună cale de urmat este, probabil, următoarea. Notați cele trei perechi de culori de pe fețele opuse ale prototipului, apoi eliminați dintre cele 29 de cuburi pe toate acelea care au pe fețele lor opuse una dintre cele trei perechi de culori ale prototipului. Vor rămîne 16 cuburi. Așezați prototipul astfel ca unul dintre colțurile sale de sus să fie îndreptat spre dv. și să vedeți deci numai cele trei fețe care se întîlnesc în acel colț. Printre cele 16 cuburi veți găsi două care pot fi așezate în așa fel încît aceleași trei culori să fie dispuse în aceleași poziții ca pe prototip. Puneți-le deoparte. Întoarceți cubul ales la început astfel ca alt colț al său să fie îndreptat spre dv. și găsiți cele două cuburi care au fețele colorate identic cu cele ale acestui colț al prototipului. Cele opt cuburi astfel selectate — cîte două pentru

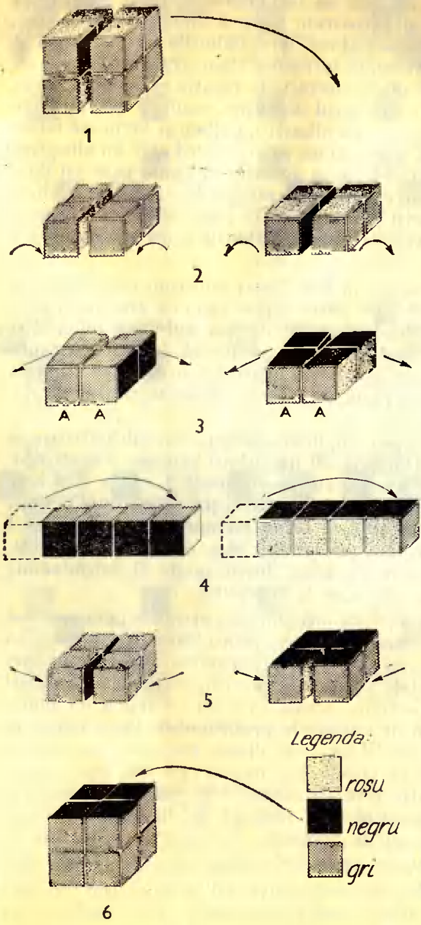


Fig 99 Metoda lui Lyons de a transforma un anumit model în cea de-a doua formă a sa.

1. Acest model este colorat în roşu pe partea de sus şi în negru pe partea de jos. Întoarceţi cuburile astfel încît feţele interioare roşii şi negre să ajungă în poziţia arătată. Mutaţi jumătatea de sus a modelului spre dreapta.

2. Daţi fiecărei coloane un sfert de rotaţie, în direcţia indicată de săgeţi, pentru a aduce roşul pe partea de jos a pătratelor din stînga şi negrul pe partea de sus a pătratelor din dreapta.

3. Desfaceţi pătratele şi aduceţi capetele marcate cu *A* împreună, pentru a forma două rînduri.

4. Mutaţi un cub din stînga spre capătul drept al fiecărui rînd.

5. Rupeţi fiecare rînd în două părţi egale, aducînd apoi feţele negre (în stînga) sau roşii (în dreapta) la un loc.

6. Aşezaţi grupul din dreapta deasupra celui din stînga. Aţi obţinut astfel cea de-a doua formă a modelului.

fiecare colţ al prototipului — sînt tocmai cuburile cerute. Acum este foarte simplu să construiţi modelul.

De fapt, există două căi esenţial diferite de a construi modelul cu aceste opt piese. L. Vosburgh Lyons, un neuropsihiatru din Manhattan, a elaborat ingeniosul procedeu ilustrat în fig. 99, care permite transformarea fiecăruia din aceste modele în cea de-a doua formă a sa. Cele două modele sînt legate între ele într-un mod remarcabil. Cele 24 de feţe exterioare ale unui model sînt cele 24 de feţe interioare ale celuilalt, iar dacă cele două modele sînt orientate similar, fiecare cub dintr-un model este diagonal opus cu poziţia sa în celălalt.

Lyons a observat că după ce a fost construit un model, este întotdeauna posibil să alegem un nou prototip dintre cele 21 de cuburi rămase, apoi să construim un model de $2 \times 2 \times 2$ pentru noul prototip cu ajutorul a opt dintre cele 20 de cuburi. Foarte puţini reuşesc să facă aceasta — dacă nu sînt avizaţi că noul prototip trebuie să fie imaginea în oglindă a celui dintîi. Cele opt cuburi necesare pentru construirea modelului sînt tocmai cele opt cuburi înlăturate din 16 în ultima etapă a procedeului de alegere a pieselor pentru modelul primului prototip.

Au mai fost propuse şi alte jocuri de construcţie cu cuburi colorate. Următoarele modele $2 \times 2 \times 2$, întotdeauna posibile, au fost luate din cartea *Das Spiel der 30 Bunten Würfel* (Jocul celor 30 de cuburi colorate), de Ferdinand Winter, publicată la Leipzig în 1934. În toate aceste modele, cuburile trebuie să respecte regula de la domino: feţele care se ating trebuie să aibă aceeaşi culoare.

1. O culoare pe feţele din dreapta şi din stînga, o a doua culoare pe feţele din faţă şi din spate, o a treia culoare deasupra şi o a patra dedesubt.

2. O culoare pe două feţe opuse şi culori diferite pe celelalte patru feţe.

3. O culoare pe feţele din dreapta şi din stînga, o a doua culoare în faţă şi în spate, celelalte patru culori rămase deasupra (cu fiecare pătrat de o altă culoare) şi aceleaşi patru culori dedesubt.

4. Fiecare faţă în patru culori, aceleaşi patru culori pe fiecare faţă.

În aparenţă, nu este posibil să construim un cub de $2 \times 2 \times 2$ care să aibă o culoare în faţă şi în spate, o a doua culoare la dreapta şi la stînga, o a treia dedesubt şi deasupra şi la care toate feţele care se ating să fie de aceeaşi culoare. Este posibil să construim un cub de $3 \times 3 \times 3$ avînd fiecare faţă de o culoare diferită, dar nu fără a încălca legea referitoare la culorile feţelor care se ating, din jocul de domino.

Jocuri de tip domino pot fi jucate cu orice piese bi- şi tridimensionale. Firma „Parker Brothers" mai are încă în vînzare un joc foarte plăcut, cu numele de *Contack*, lansat în 1939, care se joacă cu plăcuţe în formă de triunghiuri echilaterale. Dintre mai multe jocuri propuse pentru setul de cuburi colorate, cel cunoscut sub numele de *Turnul colorat* pare a fi cel mai bun.

Doi jucători se aşază faţă în faţă. Fiecare are dinainte un ecran, care poate fi uşor confecţionat dintr-o bucată de carton lată de circa 25 cm şi avînd capetele îndoite ca să poată sta în picioare. Cuburile sînt puse într-o cutie în care nu pot fi văzute, dar din care pot fi scoase unul cîte unul; poate fi folosit în acest scop şi un săculeţ.

Fiecare dintre parteneri scoate şapte cuburi din cutie şi le aşază în spatele ecranului, unde nu pot fi văzute de adversar. Primul jucător deschide jocul prin aşezarea unuia dintre cuburile sale în mijlocul mesei. (Avantajul de a deschide jocul poate fi cîştigat prin aruncarea unui cub, după ce unul dintre parteneri a numit trei culori; dacă una dintre acestea cade deasupra, partenerul joacă primul.) Al doilea jucător aşază apoi un cub alături de primul, avînd grijă ca feţele care se ating să fie de aceeaşi culoare. Jucătorii adaugă alternativ cuburi structurii, clădind astfel un turn care se sprijină pe o bază formată din patru cuburi. Scopul fiecăruia dintre parteneri este să scape de cuburile lui.

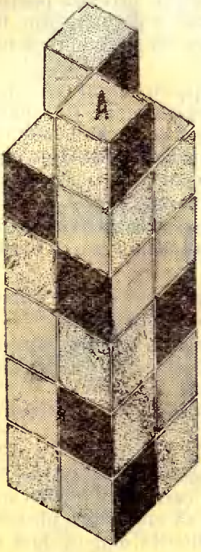


Fig. 100 Jocul *Turnul colorat.*

Regulile sînt următoarele:

1. Fiecare etaj de patru cuburi trebuie să fie completat înainte de a începe un nou etaj.

2. Un cub poate fi aşezat oriunde pe un loc gol în etaj, cu următoarele două condiţii: toate feţele care se ating trebuie să fie de aceeaşi culoare; mutarea nu trebuie să facă imposibilă continuarea jocului pe etaj. În fig. 100, de exemplu, cubul A ar fi incorect jucat dacă oricare dintre feţele sale ar întîlni sub unghiuri drepte o faţă liberă de aceeaşi culoare.

3. Dacă unul dintre parteneri nu poate juca nici unul dintre cuburile sale, el trebuie

să scoată un altul din cutie. Dacă acest cub poate fi jucat, el continuă jocul. Dacă nu poate, sau nu doreşte să-l joace, îşi aşteaptă din nou rîndul.

4. Dacă pentru motive strategice un jucător doreşte să lase să-i treacă rîndul, el îl poate lăsa în orice moment, dar trebuie să scoată un cub din cutie.

5. Jocul se sfîrşeşte atunci cînd unul dintre jucători a reuşit să scape de toate cuburile. El capătă 3 puncte pentru cîştigarea jocului, plus cîte un punct pentru fiecare din cuburile rămase în stoc la adversar.

6. Dacă toate cuburile au fost scoase din cutie, se joacă alternativ pînă cînd unul dintre jucători nu poate, sau nu doreste, să joace. Atunci joacă celălalt jucător, pînă ce adversarul său poate sau doreşte să joace. Dacă nici unul nu poate, sau nu doreşte să joace, jocul se sfîrşeşte şi cel care are mai puţine cuburi este cîştigător. El capătă un număr de puncte egal cu surplusul de cuburi din stocul adversarului.

7. Sfîrşitul unui set de partide poate fi stabilit dinainte la un număr anumit de puncte.

Cei care joacă *Turnul colorat* de mai multă vreme ajung să descopere diferite strategii care conduc la cîştigarea jocului. Să presupunem, de pildă, că partenerul tocmai a început un nou etaj, iar dv. mai aveţi doar două cuburi. Ar fi neînţelept să jucaţi în diagonală faţă de cubul plasat de el, în aşa fel încît cubul care va rămîne să nu mai poată fi jucat ulterior pe nici una dintre poziţiile cu trei feţe rămase. S-ar putea să fie mai bine să jucaţi alături de cubul partenerului, pentru a vă păstra deschisă posibilitatea de a continua la mişcarea următoare. Descoperirea unor astfel de strategii transformă învăţarea focului într-o experienţă stimulatoare şi conduce la îndemînare la joc, ceea ce creşte considerabil şansele de cîştig.

Dacă vreun cititor are sugestii în vederea îmbunătăţirii jocului *Turnul colorat*, aş fi bucuros să le aflu; de asemenea, orice sugestie asupra altor jocuri cu cuburi colorate. Cele 30 de cuburi colorate au apărut pe lume de peste 70 de ani, dar este foarte probabil că ele mai conţin încă multe surprize.

ADAOS

Cînd am explicat jocul cu cele 24 de pătrate colorate ale lui MacMahon, am comis gafa de a spune că el are o singură soluţie (deoarece am interpretat greşit una dintre observaţiile lui MacMahon). Este cea mai gravă neînţelegere care s-a strecurat vreodată în această rubrică din revistă. Am primit scrisori de la circa 50 de cititori, care mi-au trimis cîte cel puțin două soluții. Thomas O'Beirne și-a consacrat acestui joc rubrica *Enigme și paradoxuri*, din numărul din 2 februarie 1961 al revistei „The New Scientist" și a arătat cum pot fi obținute zeci de soluții.

La Buenos Aires, problema a atras atenția lui Federico Fink. Împreună cu cîțiva prieteni, el a găsit sute de soluții diferite, iar după numai cîteva luni, lista a ajuns la cîteva mii (rotațiile și reflexiile neconțînd, firește, ca soluții diferite). La 20 noiembrie 1963, el mi-a scris că, după estimările sale, numărul soluțiilor diferite s-ar ridica la 12 224.

Problema a fost definitiv rezolvată la începutul anului 1964. Fink a propus lui Gary Feldman, de la Centrul de calcul al Universității Stanford (Palo Alto, California), să scrie un program pentru problemă, ceea ce Feldman a și făcut. Folosind un program scris în ALGOL[1] și lucrînd aproximativ 40 de ore, calculatorul B—5000 al centrului, a întocmit o listă a tuturor soluțiilor posibile. Numărul lor este de 12 261. Fink greșise cu numai 37 — o previziune cu adevărat uimitoare.

Ar fi nevoie de multe pagini pentru a trece în revistă principalele rezultate la care a ajuns Fink analizînd cele 12 261 de soluții. Nici una dintre ele, din păcate, nu prezintă simetrie bilaterală. Numărul maxim de „carouri" (pătrate monocolore formate din două triunghiuri dreptunghice) care apar alăturate în așa fel încît formează un poliomino de o singură culoare este 12. Fig. 101, stînga, prezintă o astfel de soluție; poliominoul de ordinul 12 are simetrie bilaterală și seamănă cu un rac. Numărul minim de „carouri izolate" (carouri înconjurate complet de alte culori) este trei. Fig. 101, mijloc, este o soluție în care fiecare din cele trei carouri izolate sînt de culori diferite. Numărul maxim de carouri izolate este 13, așa cum este exemplificat în fig. 101, dreapta.

De observat că toate cele trei soluții ilustrate conțin o „punte" orizontală din trei carouri izolate, avînd culoarea marginii, care leagă marginea din dreapta de cea din stînga. În rubrica sa din „New Scientist", O'Bierne a demonstrat că orice soluție trebuie să aibă o astfel de punte. Poziția punții, împreună cu alte pete care au culoarea marginii, oferă un criteriu convenabil de clasificare a celor 20 de specii diferite de soluții. (O'Beirne menționase 18, dar Fink a găsit mai tîrziu încă două.)

Multe jocuri recreative cu cuburi colorate așteaptă încă să fie cercetate. De exemplu, dintr-un set de 57 de cuburi colorate în una,

[1] ALGOL — un tip de limbaj folosit la programarea calculatoarelor electronice, în care informația furnizată mașinii este exprimată în notație algebrică și în concordanță cu regulile algebrei booleene. — *N.T.*

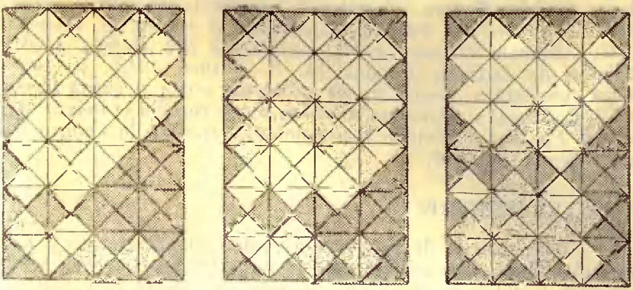


Fig. 161 Trei dintre cele 12 261 de soluţii ale problemei cuburilor colorate: racul (stînga), trei carouri izolate de culori diferite (mijloc) şi 13 carouri izolate (dreapta).

două şi trei culori, pot fi alese 27 de cuburi care sînt colorate fiecare în cel mult două culori. Întrucît din 27 de cuburi se poate forma un cub cu dimensiunile $3 \times 3 \times 3$, aici există fără îndoială interesante probleme de construcţie. Sau s-ar putea lucra cu subsetul de 30 de cuburi care au cîte trei culori pe fiecare cub. Unele dintre construcţiile care nu sînt posibile cu cele 30 de cuburi colorate în şase culori, s-ar putea să fie posibile cu aceste 30 de cuburi colorate în trei culori. De exemplu, poate fi format un cub colorat în întregime în roşu, cu condiţia obişnuită ca feţele care se ating să fie de o aceeaşi culoare?

MacMahon, care, pare-se, a inventat jocul cu cele 30 de cuburi, era maior în armata britanică şi preda matematica la Academia militară regală. El este mai bine cunoscut prin cartea sa *Introduction to Combinatory Analysis* (Introducere în analiza combinatorie) şi prin articolul dedicat aceluiaşi subiect în cea de-a unsprezecea ediţie a *Enciclopediei Britanice*. A murit în 1928. Thomas O'Beirne mă informează că un joc format dintr-un set de cuburi cu opt culori, din care trebuie asamblat un cub mai mare respectînd anumite condiţii, se vindea pe vremuri în Anglia sub numele de *Mayblox*; pe cutia jocului, MacMahon era menţionat ca inventator.

Un joc popular care se află în comerţ, sub diferite nume, în mai multe ţări, constă din patru cuburi, fiecare colorat în patru culori diferite. Problema constă în a le aranja în aşa fel încît toate cele patru culori (indiferent de ordine) să apară pe fiecare faţă a prismei patratice de 4×1. Uneori, în locul culorilor apar anumite simboluri, cum ar fi cele din patru culori de pe cărţile de joc sau reclame pentru diferite produse. Pentru o descriere a acestor jocuri, puteţi consulta cărţile *Diversions and Pastimes* (Distracţii şi treceri de vreme) de R. M. Abraham (Dover, 1964), p. 100 şi *100 Puzzles* (100 de probleme) de Anthony Filipiak (A. S. Barnes, 1942), p. 108. O analiză detaliată a acestui tip de probleme poate fi găsită în capitolul 7, *Cubismul şi aranjarea culorilor,* din cartea lui O'Beirne *Puzzles and Paradoxes* (Enigme şi paradoxuri), apărută la Oxford University Press în 1965.

RĂSPUNSURI

Trei metode de rezolvare a problemei pătratelor cu patru culori a lui MacMahon au fost date în ADAOS. Descoperirea soluţiilor pentru problemele cu cuburi colorate este lăsată în seama cititorilor.

Pentru a demonstra că dreptunghiul de 3×8 nu poate fi format cu cele 24 de pătrate colorate, cu respectarea condiţiilor puse, alegeţi mai întîi patru pătrate oarecare, care au triunghiuri vecine de aceeaşi culoare, pentru cele patru colţuri. Rămîn 14 pătrate, care poartă aceeaşi culoare — exact cîte trebuie pentru cele 14 celule de margine ale dreptunghiului. Cel puţin trei dintre ele vor avea însă culoarea de margine pe laturi opuse — ceea ce cere trei pătrate interioare care să conţină aceeaşi culoare. Dar pătrate cu această culoare *nu mai există,* pentru că toate au fost deja folosite pentru margine. Aşadar, dreptunghiul de 3×8 este imposibil de construit.

H. S. M. Coxeter

Foarte mulţi dintre matematicienii profesionişti găsesc amuzant să facă din cînd în cînd incursiuni în domeniul matematicii recreative, cam tot aşa cum le place să joace ocazional o partidă de şah ; este o formă de relaxare, pe care ei evită să o ia prea în serios. Pe de altă parte, mulţi dintre creatorii ingenioşi şi bine informaţi de enigme posedă doar cunoştinţe foarte elementare de matematică. H. S. M. Coxeter, profesor de matematică la Universitatea din Toronto (Canada) este una dintre acele rare personalităţi care excelează atît ca matematicieni cît şi ca autorităţi în latura „mai puţin serioasă" a profesiunii lor.

Harold Scott Macdonald Coxeter s-a născut la Londra, în 1907 şi a studiat matematica la Trinity College, de la Universitatea din Cambridge. Pe linie „serioasă", el este cunoscut ca autor al cărţilor *Non-Euclidean Geometry* (Geometria neeuclidiană), 1942, *Regular Polytopes* (Politope regulate), 1948, şi *The Real Projective Plane* (Planul proiectiv real), 1955. Pe linie „uşoară", el a editat şi adus la zi lucrarea clasică a lui W. W. Rouse Ball *Mathematical Recreations and Essays* (Recreaţii şi eseuri matematice) şi a scris zeci de articole de matematică recreativă la diferite reviste. în 1961, editura „John Wiley & Sons" a publicat cartea sa *Introduction to Geometry* (Introducere în geometrie), care constituie obiectul acestui capitol.

Cartea aceasta este remarcabilă din mai multe puncte de vedere. Mai presus de toate, domeniul ei este extrem de variat. Cartea trece prin mai toate capitolele geometriei, inclusiv geometria neeuclidiană, cristalografia, teoria grupurilor, teoria reţelelor, geodezicele, vectorii, geometria proiectivă şi cea afină, topologia — subiecte care de obicei nu pot fi întîlnite în cărţi introductive. Stilul cărţii este clar şi sugestiv, deşi în mare parte tehnic. El cere o citire înceată şi atentă, dar are meritul de a permite comprimarea unei mari cantităţi de material într-un volum relativ redus. Cartea este de la un capăt la altul impregnată de simţul de umor al autorului, de dragostea sa pentru frumuseţile matematicii şi de entuziasmul său pentru joc. Cele mai multe dintre capitole se deschid prin citate literare foarte adecvate (multe din Lewis Carroll) şi se încheie cu exerciţii, care deseori sînt noi şi interesante enigme. Cîteva dintre capitole sînt în întregime dedicate unor probleme sau subiecte de înalt interes recreaţional, dintre care unele au fost luate în discuţie, la un nivel ceva mai elementar, în volumul de faţă şi în cel care l-a precedat: raportul de aur, corpurile geometrice regulate, curiozităţi topologice, colorarea hărţilor, împachetarea sferelor, şi altele.

Fragmente de informaţie lăturalnică, extrem de amuzante, punctează textul. Cîţi dintre cititori ştiu, spre exemplu, că în 1957 compania „B. F. Goodrich" a obţinut un patent pentru banda Moebius? Acest patent, purtînd numărul 2 784 834, se referă la o bandă de cauciuc trecută peste două roţi, folosită la transportul substanţelor fierbinţi sau abrazive. Atunci cînd bandei i se dă familiara jumătate de răsucire, ea se uzează în mod egal pe ambele feţe — sau, mai corect, pe singura sa faţă.

Sau, cîţi cititori ştiu că la Universitatea din Göttingen există o cutie enormă în care se află un manuscris care arată cum se poate construi, numai cu rigla şi compasul, un poligon regulat cu 65 537 de laturi? Un poligon cu un număr de laturi exprimat printr-un număr prim poate fi construit după procedeul obişnuit numai dacă numărul este un număr prim de un tip special, numit număr prim Fermat — un număr prim care poate fi exprimat sub forma $2^{(2^n)}+1$. Numai cinci astfel de numere prime sînt cunoscute: 3, 5, 17, 257 şi 65 537. Sărmanul om care a reuşit să construiască 65 537-gonul, ne spune Coxeter, şi-a pierdut zece ani la această treabă. Nimeni nu ştie dacă există (sau nu) vreun poligon cu un număr prim de laturi mai mare decît acesta, care să fie în principiu, construibil cu rigla şi compasul. Dacă un asemenea poligon există, construcţia lui ar fi în afara discuţiei, deoarece numărul laturilor sale ar fi exprimat printr-o cifră astronomică.

S-ar putea spune că banalul triunghi, atît de minuţios studiat de matematicienii antici, n-ar mai putea oferi nici o surpriză. Cu toate acestea, multe teoreme remarcabile referitoare la triunghi — teoreme care nu figurează la Euclid, deşi acesta le-ar fi putut descoperi cu

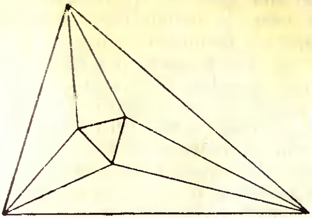


Fig. 102 Teorema lui Morley.

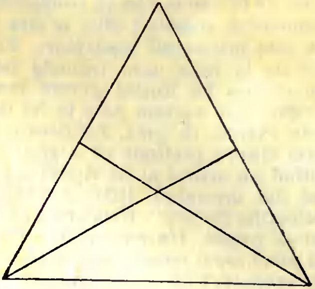


Fig. 103 Problema bisectoarelor interne.

ușurință — au fost găsite doar foarte recent. Un exemplu grăitor în acest sens, discutat de Coxeter, este teorema lui Morley. Aceasta a fost descoperită prin anul 1899 de Frank Morley, profesor de matematică la Universitatea John Hopkins (Baltimore, Maryland), tatăl scriitorului Christopher Morley (1890-1957). Coxeter scrie că teorema s-a răspîndit rapid printre matematicieni, sub formă de zvon mărunt, dar prima demonstrație a fost publicată abia în 1914. Poate că acesta este cel mai bun exemplu ilustrativ pentru acele „bunuri umane pe care nu le consumi atunci cînd te bucuri cel mai mult de ele", despre care vorbeau Paul și Percival Goodman în capitolul 5 al cărțuliei lor *Communitas* (Societatea).

Teorema lui Morley este ilustrată în fig. 102. Se desenează un triunghi de o formă oarecare și i se trisectează unghiurile. Liniile trisectoare se întîlnesc totdeauna, două cîte două, în vîrfurile unui triunghi echilateral. Ceea ce este cu totul surprinzător în această teoremă este tocmai apariția acestui mic triunghi echilateral, numit triunghiul lui Morley. Profesorul Morley a scris mai multe manuale și a efectuat lucrări importante în multe domenii — dar celebritatea și-a cucerit-o numai datorită acestei teoreme. De ce nu a fost ea descoperită mai devreme? Coxeter crede că probabil matematicienii, știind că unghiul nu poate fi trisectat în condițiile clasice, s-au ferit de teoremele care implicau trisectarea unghiurilor.

O altă teoremă asupra triunghiurilor care și-a cîștigat o largă popularitate în secolul nostru este ilustrată în fig. 103. Dacă bisectoarele unghiurilor interioare de la baza unui triunghi sînt egale, pare de la sine înţeles că triunghiul trebuie să fie isoscel. Dar aţi putea demonstra aceasta? Nici o altă problemă de geometrie elementară nu este mai subtil înşelătoare. Reciproca ei — bisectoarele unghiurilor de la baza unui triunghi isoscel sînt egale — datează încă de pe vremea lui Euclid şi este foarte uşor de demonstrat. Teorema despre care vorbim *pare* la fel de uşor de demonstrat, dar de fapt este extrem de grea. La fiecare cîteva luni primesc o scrisoare în care cineva pretinde că a găsit o demonstraţie. De obicei, răspund citînd un articol al lui Archibald Henderson, care a apărut în numărul din decembrie 1937 al revistei „Journal of the Elisha Mitchell Scientific Society". Henderson îşi intitulează articolul, care are aproape 40 de pagini, *Un eseu asupra problemei bisectoarelor interioare, menit să pună capăt tuturor eseurilor asupra problemei bisectoarelor interioare.* El subliniază că multe dintre demonstraţiile publicate — unele aparţinînd unor matematicieni celebri — sînt greşite; apoi dă zece demonstraţii corecte, toate foarte lungi şi complicate. Este o surpriză foarte plăcută să găsim în cartea lui Coxeter o demonstraţie nouă atît de simplă, încît autorul ei nu are nevoie decît de o sugestie pe patru rînduri din care demonstraţia se obţine pe loc.

Din cînd în cînd, atunci cînd cineva descoperă o teoremă nouă şi elegantă, el este tentat să o pună în versuri. Un exemplu modern şi amuzant este *Sărutul precis*, o poezie a distinsului chimist Frederick Soddy[1], cel care a introdus în ştiinţă cuvîntul „izotop". Dacă trei cercuri de dimensiuni oarecare sînt astfel aşezate încît fiecare dintre ele să fie tangent la celelalte două, este întotdeauna posibil să se deseneze un al patrulea cerc care este tangent la primele trei. În mod obişnuit, există două moduri de a desena acest al patrulea cerc, aşa cum se arată prin linii punctate în fig. 104. Care este relaţia dintre razele acestor patru cercuri? Soddy, folosind un procedeu despre care a mărturisit mai tîrziu că nu l-a înţeles niciodată, a nimerit peste următoarea formulă foarte simetrică, foarte elegantă în care a, b, c, şi d sînt inversele celor patru raze:

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = \frac{1}{2}(a + b + c + d)^2.$$

Inversul unui număr n este, pur şi simplu, $1/n$, iar inversa unei fracţii se obţine răsturnînd fracţia respectivă. Inversul razei este o măsură a curburii cercului. O curbură concavă — cum este cea a cercului care le cuprinde pe celelalte trei — este considerată o curbu-

[1] Chimist englez, laureat al Premiului Nobel în 1921 (1877—1956). — *N. T.*

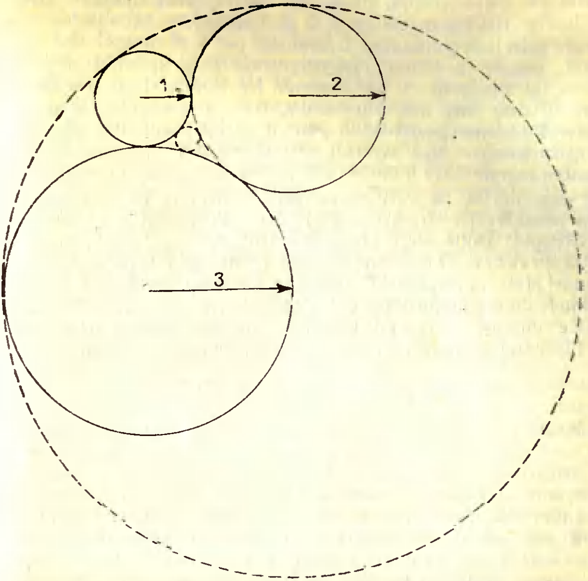


Fig. 104 *Sărutul precis* al lui Frederick Soddy.

ră negativă și în calcule ea intră ca un număr negativ. O linie dreaptă are curbura nulă. Coxeter citează astfel cea de-a doua strofă a poeziei :

Patru cercuri vin la sărutat,
Cel mai mic este cel mai curbat.
Curbura este luată pentru
Inversul distanței de la centru.
Pătratele celor patru cuburi adunate
Dau din pătratul sumei lor, jumate.

Formula lui Soddy economisește creatorilor de jocuri amuzante foarte mult timp ; problemele care implică cercuri care se „sărută", des întîlnite în lucrările rebusiste, sînt foarte greu de rezolvat fără ajutorul ei. De exemplu, dacă cele trei cercuri desenate prin linii pline în fig. 104 au razele de 1, 2 şi 3 cm, care sînt razele cercurilor desenate prin linii punctate? Răspunsul poate fi desigur dat desenînd un mare număr de triunghiuri dreptunghice şi aplicînd gospodăreşte teorema lui Pitagora — dar formula lui Soddy dă o simplă ecuaţie de gradul doi, care are două rădăcini — inversele celor două raze căutate. Rădăcina pozitivă dă pentru curbura cercului mic valoarea 23/6, prin urmare raza acestuia este de 6/23 cm; rădăcina negativă dă pentru cercul mare o curbură negativă de $-1/6$ şi o rază de 6 cm.

Cei care doresc să verifice calităţile formulei pe alte cazuri, pot lua în consideraţie următoarea situaţie. Pe un plan se desenează o linie dreaptă. Două sfere „care se sărută", una cu raza de 4 cm şi cealaltă cu raza de 9 cm, sînt aşezate pe dreaptă. Care este raza celei mai mari sfere care poate fi aşezată pe aceeaşi dreaptă şi le „sărută" pe primele două? În locul formulei lui Soddy, se poate folosi următoarea expresie echivalentă, dată de Coxeter, care face calculul mult mai uşor. Date fiind trei numere inverse a, b, şi c al patrulea număr invers va fi

$$d = a + b + c \pm 2\sqrt{ab + bc + ac}.$$

În bogat ilustrata carte a lui Coxeter, desene din cele mai interesante, chiar şi din punct de vedere artistic, însoţesc capitolele dedicate simetriei şi rolului jucat de teoria grupurilor în construirea modelelor care se repetă — cum sînt desenele decorative de pe zugrăveli: tapete, mozaicuri, stofe de mobilă etc. „Matematicianul, ca şi pictorul sau poetul, este un creator de modele", scria matematicianul englez G. H. Hardy[2] într-un celebru articol, citat de Coxeter. „Şi dacă modelele sale sînt mai trainice decît ale lor, aceasta este pentru că sînt construite din *idei*". Cînd se asamblează poligoane în aşa fel încît ele să acopere planul, fără goluri sau acoperiri, modelul rezultat poartă numele de *mozaicare*. O mozaicare regulată este cea obţinută exclusiv din poligoane regulate, toate identice şi în contact colţ la colţ (nu colţ la latură). Există numai trei astfel de mozaicări: o reţea de triunghiuri echilaterale, reţeaua cu pătrate a mesei de şah, şi reţeaua hexagonală a fagurelui de albine, a gardurilor de sîrmă sau a unor pardoseli de mozaic. Cu triunghiuri şi pătrate se poate umple un plan şi fără a aşeza piesele colţ la colţ, dar acest lucru nu se poate face cu hexagoane.

Mozaicările „semiregulate" sînt acelea în care cele rezultate din asamblarea colţ la colţ a două sau mai multe feluri de poligoane regulate, în aşa fel încît în jurul fiecărui vertex să fie aceleaşi poligoane

---

[2] Godfrey Harold Hardy, matematician englez, 1877—1947. — *N.T.*

și în aceeași ordine ciclică. Există exact opt mozaicări de acest gen, construite din diferite combinații de triunghiuri, pătrate, hexagoane, octogoane și dodecagoane (vezi fig. 105). Toate ar putea constitui — unele chiar constituie — excelente modele pentru pardoseli. Toate rămîn neschimbate prin reflexie în oglindă, în afară de mozaicul din colțul din dreapta jos, care a fost descris încă de Johannes Kepler. Acesta are două forme — una fiind imaginea în oglindă a celeilalte. O trecere de timp foarte plăcută constă în a tăia din carton un număr mare de poligoane de dimensiunile și formele potrivite, a le colora în diferite culori și a încerca toate aceste modele. Dacă se ridică restricția privind colțurile, din aceleași poligoane se pot forma o varietate infinită de mozaicuri. (Cîteva exemple pregnante de asemenea mozaicări neregulate, dar simetrice, sînt reproduse în cartea lui Hugo Steinhaus *Mathematical Snapshots*.)

Toate mozaicările care acoperă planul cu un model repetat, aparțin unui set de 17 grupuri de simetrie diferite, care epuizează toate modalitățile fundamental diferite în care modelele pot fi repetate la nesfîrșit în două dimensiuni. Elementele acestor grupuri sînt pur și simplu operații efectuate asupra unui model de bază: translația acestuia în plan, rotația sau reflexia într-o oglindă. Cele 17 grupuri de simetrie au o importanță deosebită în studiul structurii cristalelor; Coxeter precizează că cel care a demonstrat pentru prima dată că numărul acestor grupuri este de 17, a fost cristalograful rus E.S. Fedorov, în 1891. „Arta acoperirii unui plan cu un model repetat, scrie Coxeter, și-a atins apogeul în Spania secolului al XIII-lea, unde maurii au folosit toate cele 17 grupuri în complicatele decorații ale Alhambrei. Preferința lor pentru desenele abstracte se datoresc respectării stricte a celei de-a doua Porunci; „Să nu-ți faci ție chip cioplit!"

Bineînțeles, configurațiile constitutive fundamentale ale modelelor de acest fel sînt limitate, cu necesitate, la forme abstracte. Coxeter ia în discuție modul ingenios în care artistul olandez Maurits C. Escher, care trăiește acum la Baarn, a aplicat multe dintre cele 17 grupuri de simetrie la mozaicuri în care drept regiuni fundamentale sînt folosite formele de animale. Unul dintre uimitoarele mozaicuri ale lui Escher, reprodus în cartea lui Coxeter, reprezintă un cavaler pe calul său (fig. 106); un altul este arătat în fig. 107. După cum observă Coxeter, la prima vedere, modelul cavalerului pare să fie rezultatul translației unei configurații de bază de-a lungul unor axe verticale și orizontale: dar, la o examinare mai atentă, se constată că și fondul este construit din aceeași configurație de bază. Grupul de simetrie pentru acest model este, de fapt, generat de așa-numitele „reflexii alunecate" — o translație a configurației însoțită de o inver-

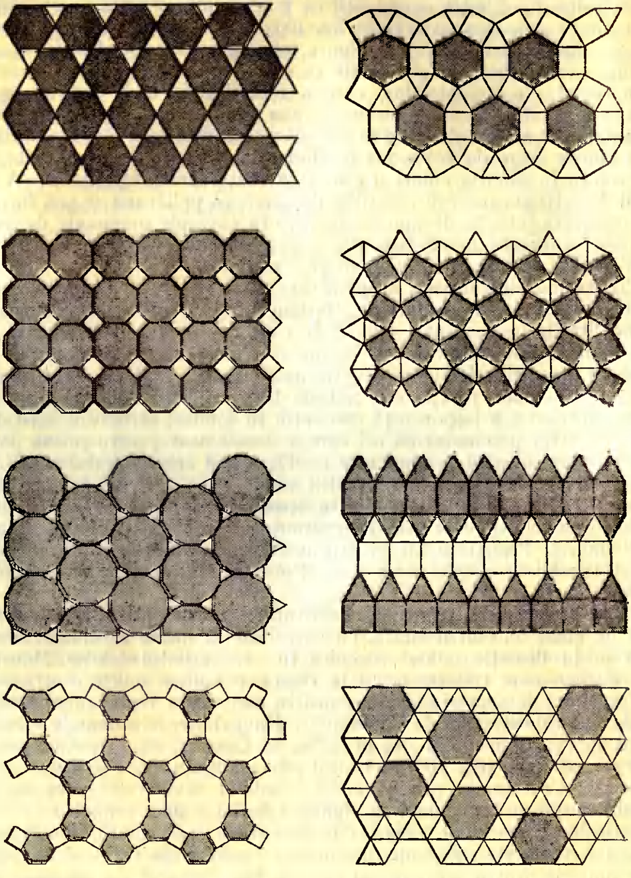


Fig. 105 Cele opt mozaicări „semiregulate".

Fig. 106 Unul dintre mozaicurile matematice ale lui Maurits Escher.

sare a acesteia prin reflexie în oglindă. Riguros vorbind, aceasta nu este o mozaicare, deoarece regiunea constitutivă de bază nu este un poligon. Modelul aparţine unei clase curioase de mozaicuri, în care forme neregulate, dar toate identice, se întreţes, umplînd planul. Nu este greu de găsit forme abstracte de acest gen, dar atunci cînd se pune problema ca ele să semene cu ceva, lucrurile se complică enorm.

Escher este un pictor căruia îi place să se joace cu structuri matematice. Există o respectabilă şcoală estetică, al cărei crez este „arta

Fig. 107 Un alt mozaic al lui Escher. El a fost tipărit în culori pe coperta numărului din aprilie 1961 al revistei „Scientific American".

— o formă de joc", și o la fel de respectabilă școală matematică ce consideră toate sistemele matematice drept niște jocuri fără sens, jucate cu anumite simboluri și în concordanță cu reguli dinainte stabilite. Este oare și știința însăși tot un fel de joc? În legătură cu această problemă, Coxeter citează următoarele rînduri ale fizicianului teoretician irlandez John Lighton Synge:

„Se poate oare ca toți marii oameni de știință din trecut să fi jucat un joc — un joc ale cărui reguli sînt scrise nu de oameni, ci de Dumnezeu?... Atunci cînd ne jucăm, nu ne întrebăm de ce ne jucăm, ci pur și simplu ne jucăm[3]. Jocul nu servește nici un cod moral, în afară de acel ciudat cod care, pentru motive necunoscute, se impune de la sine asupra jocului însuși... Am căuta în zadar prin literatura științifică vreo intenție de motivare. Cît despre straniul cod moral pe care îl respectă oamenii de știință, ce poate fi mai straniu decît un ideal abstract al adevărului într-o lume plină de ascunzișuri, dezamăgiri și tabuuri?... Supunîndu-vă atenției ideea că mintea omenească se află în largul ei doar atunci cînd se joacă, mă joc eu însumi, și aceasta mă face să cred că ceea ce spun poate avea un element de adevăr".

Acest pasaj aduce mult cu stilul caracteristic al scrierilor lui Coxeter însuși. Este unul din motivele pentru care cartea sa este de fapt o comoară pentru studenții în matematică, ale căror minți vibrează pe aceeași lungime de undă.

ADAOS

Compania „Goodrich" nu a fost prima care a brevetat o instalație bazată pe banda Moebius. La 16 ianuarie 1923, Lee De Forest[4] a obținut brevetul nr. 1442682 pentru o peliculă cinematografică fără sfîrșit, de tip Moebius, pe care sunetul putea fi înregistrat pe ambele fețe, iar la 23 august 1949, Owen D. Harris a obținut brevetul nr. 2479929 pentru o curea abrazivă în formă de bandă Moebius. Ambele patente mi-au fost aduse la cunoștință de cititori. S-ar putea să mai fie și altele.

Există o foarte bogată literatură asupra triunghiului lui Morley. Demonstrația lui Coxeter apare la p. 23 a cărții sale, care poate fi consultată pentru referințele mai vechi. O discuție completă a triunghiului, împreună cu alte triunghiuri echilaterale care mai intervin (de exemplu, prin trisectarea unghiurilor exterioare), se face într-un articol al lui W. J. Dobbs din „Mathematical Gazette", februarie 1938. Teorema este discutată și de H. F. Baker, în cartea sa *Introduction to Plane Geometry* (Introducere în geometria plană), 1943, pp. 345—349. De la data apariției cărții lui Coxeter, demonstrații simple au mai fost date de Leon Bankoff (în „Mathematics Magazine", septembrie—octombrie 1962, pp.223—224) și Haim Rose (în „American Mathematical Monthly", august—septembrie 1964, pp. 771—773).

---

[3] Într-un mod spiritual este expusă aici interpretarea convenționalistă asupra metodelor formale în matematică și în unele științe ale naturii. La nivelul de abstractizare la care funcționează aceste metode cunoașterea are, într-un fel, structura unui joc, un „joc" ale cărui „reguli" sînt, ele însele, rodul demersului dialectic complicat și subtil al cunoașterii pe toate palierele sale. — *N.R.*

[4] Inventator american, mai ales în domeniul electronicii (1873—1961). — *N.T.*

Problema bisectoarelor interioare, cunoscută şi ca teorema lui Steiner-Lehmus, are o literatură şi mai bogată încă decît cea a triunghiului lui Morley. Teorema a fost propusă în 1840 de C. L. Lehmus şi demonstrată pentru prima dată de Jacob Steiner[5]. Pentru fascinanta sa istorie, ca şi pentru mai multe soluţii, se poate consulta articolul lui J. A. McBride din „Edinburgh Mathematical Notes", vol. 33, pp. 1—13, 1943, precum şi articolele lui Archibald Henderson intitulate *Privire de ansamblu asupra problemei Lehmus-Steiner-Terquem*, apărute în „Scripta Mathematica", vol. 21, pp. 223—312, 1955, şi vol. 22, pp. 81—84, 1956. Demonstraţia poate fi găsită şi în mai multe manuale de geometrie: L. S. Shively, *An Introduction to Modern Geometry* (Introducere în geometria plană), p. 141; David R. Davis, *Modern College Geometry* (Manual de geometrie modernă), p. 61; Nathan Altshiller Court, *College Geometry* (Manual de geometrie), p. 65. O demonstraţie extrem de scurtă, dată de G. Gilbert şi D. MacDonnell, a apărut în „American Mathematical Monthly", vol. 70, p. 79, 1963.

Poezia lui Soddy *Sărutul precis* poate fi găsită în întregime în antologia distractivă a lui Clifton Fadiman, *The Mathematical Magpie* (Gîlceava matematică), ed. „Simon and Schuster", 1962, p. 284. Ultima strofă a poeziei generalizează teorema pentru sfere. O a patra strofă, generalizînd pentru hipersfere cu *n* dimensiuni, a fost scrisă mai tîrziu de Thorold Gosset şi publicată în revista „Nature", numărul din 9 ianuarie 1937; ea poate fi găsită şi în cartea lui Fadiman, la p. 285.

Cea de-a patra mozaicare semiregulată din fig. 105 (numărînd de la stînga spre dreapta) constituie baza unui tablou al lui Salvador Dali[6], pe care autorul îl numeşte „Cincizeci de tablouri abstracte, care, văzute de la doi iarzi distanţă, se transformă în trei europeni bărboşi travestiţi în chinezi, iar privite de la şase iarzi, seamănă cu un cap de tigru regal". O reproducere în alb şi negru a tabloului a apărut în numărul din 6 decembrie 1963 al revistei „Time", la p. 90.

În fig. 108 este reprodus un alt mozaic remarcabil al lui Escher — o litografie din 1942, intitulată „Verbum", Escher o descria ca o istorie picturală a creaţiei. „Din nebuloasa cenuşie din centrul tabloului («La început a fost Cuvîntul») ies figuri triunghiulare. Cu cît ele se îndepărtează de centru, cu atît contrastul dintre lumină şi întuneric devine mai net, iar contururile, la început drepte, devin unduite şi zimţate. Alternativ, albul devine fond pentru obiectele negre, iar negrul, pentru obiectele albe. În apropierea marginilor, figurile se

[5] Matematician elveţian, 1796—1863. — *N.T.*

[6] Pictor şi scriitor spaniol, născut în 1904 şi stabilit în Statele Unite din 1940. — *N.T.*

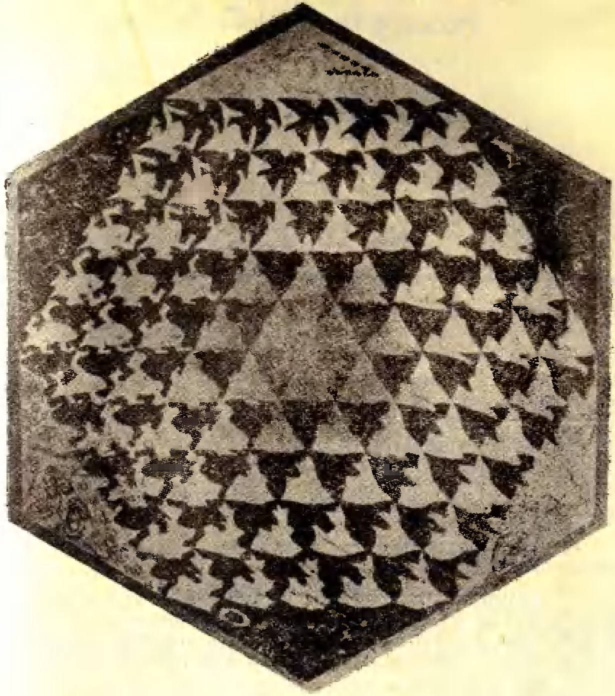


Fig. 108 *Verbum,* de Escher (litografie, 1942). Din colecţia lui Cornelius Van S. Roosevelt, Washington.

transformă în păsări, peşti, broaşte — fiecare specie în elementul său specific, cerul, apa şi pămîntul. În acelaşi timp, există transformări gradate din pasăre în peşte, din peşte în broască şi din broască din nou în pasăre. Există de asemenea o mişcare perceptibilă, în sensul acelor unui ceasornic". (Citatul este extras din lucrarea *The Graphic Work of M. C. Escher,* publicată la Londra de Oldbourne Press, 1961.)

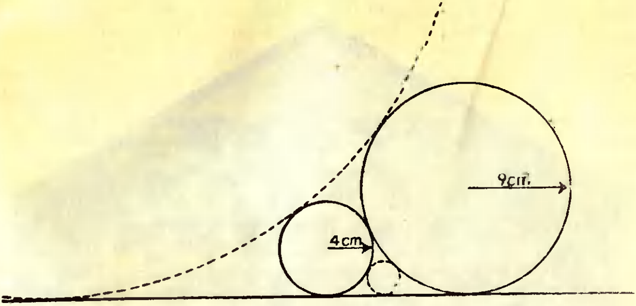


Fig. 109 Răspuns la problema sferelor „care se sărută".

Litografia a fost reprodusă de Melvin Calvin în articolul său *Evoluția chimică* din lucrarea *Interstellar Communication* (Comunicațiile interplanetare), apărută sub îngrijirea lui A. G. W. Cameron (Benjamin, 1963); Calvin spune că a văzut-o pentru prima oară atîrnată pe peretele unei farmacii din Olanda.

Pentru alte detalii asupra artei matematice a lui Escher, se poate consulta articolul meu din numărul din aprilie 1966 al revistei „Scientific American" și referințele citate acolo.

RĂSPUNSURI

Cititorilor li s-a cerut să găsească raza celei mai mari sfere care poate fi plasată pe o linie dreaptă (desenată într-un plan), în așa fel încît să fie tangentă la două sfere care se ating și care sînt de asemenea situate pe dreaptă, avînd razele de 4 cm și de 9 cm. Privită în secțiune, ca în fig. 109, problema se reduce la găsirea a patru cercuri reciproc tangente — linia dreaptă fiind considerată un cerc cu curbura zero. Formula din *Sărutul precis*, poezia lui Frederick Soddy, dă pentru razele celor două cercuri desenate cu linii punctate valorile 36/25 cm și 36 cm. Cercul mai mare este de fapt o secțiune mediană a sferei care este cerută în problemă.

Jocul lui Gale şi alte jocuri

Nicăieri omul nu a dovedit mai multă inventivitate decît în jocurile sale.
Leibniz, într-o scrisoare către Pascal

Jocurile matematice ca *ticktacktoe, dame, şah* sau *go*[1] sînt întreceri între doi parteneri, care 1) trebuie să se termine după un număr finit de mişcări, 2) nu conţin nici un element întîmplător introdus de instrumente cum sînt zarurile, cărţile etc. şi 3) sînt astfel jucate încît fiecare dintre parteneri poate vedea toate mişcările. Dacă un joc se încadrează în aceste condiţii, iar jucătorii joacă „raţional" — adică după strategia cea mai bună — atunci rezultatul jocului este predeterminat. Acesta va fi sau remiză, sau cîştig pentru cel care face prima mişcare, sau pentru cel care face cea de-a doua mişcare. În acest capitol vom face cunoştinţă mai întîi cu două jocuri simple pentru care strategiile de cîştig sînt cunoscute, apoi cu un popular joc de masă pentru care strategia de cîştig tocmai a fost descoperită şi, în cele din urmă, cu o clasă de jocuri de masă care nu au fost încă analizate.

Multe dintre jocurile mai simple în care piesele sînt plasate sau îndepărtate de pe o tablă se pretează la aşa-numita strategie de simetrie. Un exemplu clasic este jocul în care doi parteneri plasează pe rînd cîte o piesă de domino oriunde pe o masă dreptunghiulară. Fiecare piesă trebuie aşezată orizontal între limitele dreptunghiului şi fără a deplasa nici una dintre piesele aşezate anterior. Se presupune că există destule piese ca tabla să poată fi complet acoperită, cînd piesele sînt puse latură lîngă latură. Jucătorul care poate plasa ultima piesă

[1] Vezi capitolul VI. — *N.T.*

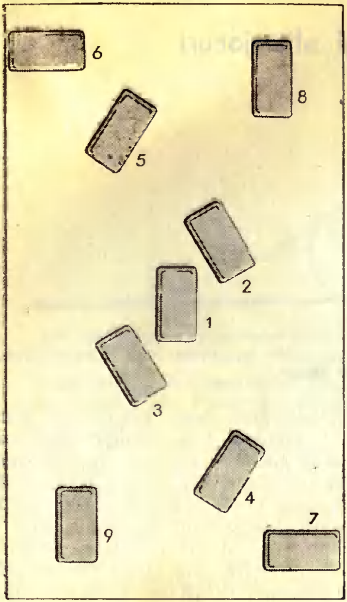


Fig. 110 Un joc de masă cu dominouri.

cîştigă. Jocul nu poate sfîrşi prin remiză, aşa că dacă ambele părţi joacă raţional, care dintre ele poate fi sigură de victorie? Răspunsul este: jucătorul care plasează prima piesă. Strategia sa constă în a plasa această primă piesă exact în centrul tablei (ca în fig. 110), şi în a imita apoi adversarul, plasînd piesa în poziţia opus-simetric. Este evident că ori de cîte ori al doilea jucător găseşte un petic de tablă liber, primul va găsi şi el un loc liber pe care se poate juca.

Aceeaşi strategie se aplică la orice tip de piesă plată care îşi păstrează conturul dacă i se dă o rotaţie de 180 de grade. De exemplu, strategia rămîne valabilă dacă piesele sînt în formă de cruci greceşti[2], dar nu va funcţiona dacă acestea au, de pildă, forma literei T. Va funcţiona, oare, dacă drept piese se folosesc trabucuri? Da, dar din cauză că extremităţile trabucului au conturuni diferite, primul trabuc trebuie plasat „în picioare" pe extremitatea lui plată! Nu este greu de inventat noi jocuri de acest gen, în care piese de diferite forme sînt alternativ plasate pe table cu tot felul de profiluri, după anumite reguli. În anumite cazuri, există strategii care asigură victoria pentru primul sau pentru cel de-al doilea jucător; în alte cazuri, astfel de strategii nu există.

Un alt tip de joc simetric asigură victoria în următorul joc. Pe masă sînt aranjate în cerc un număr oarecare de monede, în aşa fel încît fiecare să se atingă cu cele două vecine. Jucătorii ridică pe rînd fie o monedă, fie două care se ating. Cel care ridică ultima monedă, cîştigă. În acest caz, cel care poate să cîştige fără greş este jucătorul care

[2] O cruce cu toate braţele egale. — N.T.

joacă primul. După ce primul jucător a ridicat una sau două monede, monedele rămase formează un lanţ curbat cu două capete. Dacă lanţul conţine un număr impar de monede, jucătorul care face cea de-a doua mişcare ridică moneda din mijloc. Dacă numărul monedelor din lanţ este par, el ridică cele două monede centrale. În ambele cazuri, el lasă pe tablă două lanţuri separate de monede de lungime egală. De aici înainte, oricîte monede ar ridica adversarul său dintr-un lanţ, el îi copiază mişcarea, ridicînd una sau două monede din celălalt.

Atît strategia aceasta, cît şi cea de mai înainte, sînt exemple a ceea ce teoreticienii jocurilor numesc o strategie „de perechi": o strategie în care „mutările" celor doi parteneri sînt grupate în perechi (care nu trebuie neapărat să fie simetrice). Strategia cea mai bună constă în a juca o mutare a unei perechi ori de cîte ori adversarul joacă cealaltă mutare. Un exemplu foarte interesant de strategie de perechi este oferit de jocul topologic al lui Gale (sau *Bridg-it*), pus pe piaţă în 1960 şi devenit între timp extrem de popular printre copii. Jocul a fost prezentat în numărul din octombrie 1958 al revistei „Scientific American" şi el se datoreşte lui David Gale, matematician la Universitatea Brown (Providence, Rhode Island).

Tabla jocului este ilustrată în fig. 111. Dacă se joacă pe hîrtie, unul dintre jucători desenează cu un creion negru cîte o linie dreaptă, care uneşte o pereche oarecare de puncte negre vecine, orizontal sau vertical, dar nu diagonal. Celălalt jucător foloseşte un creion roşu pentru a uni în mod similar perechi de puncte roşii. Ei trasează pe rînd cîte o linie, cu condiţia ca acestea să nu se întretaie. Cîştigă cel care reuşeşte să completeze un drum continuu care uneşte cele două laturi opuse ale tablei care sînt de culoarea lui. (Jocul comercial are punctele pe tablă sub formă de ridicături, între care se pot plasa mici „punţi" sau „bariere" din material plastic.) Se ştie de mulţi ani că există o strategie de cîştig pentru jucătorul care face prima mutare, dar abia recent această strategie a fost descoperită.

Cel care a „stricat" jocul a fost Oliver Gross, un expert în jocuri de la „Rand Corporation", departamentul de matematică. Cînd am aflat despre descoperire, i-am scris imediat ca să-i cer detalii, aşteptîndu-mă să primesc o lungă şi complicată analiză care s-ar fi, putut dovedi prea tehnică pentru această carte. Spre mirarea mea, toată explicaţia se reducea, pur şi simplu, la diagrama din fig. 112 şi la următoarele două fraze: faceţi prima mişcare cum se arată prin linia neagră din colţul din stînga-jos a diagramei; apoi, ori de cîte ori mişcarea adversarului trece peste capătul uneia dintre liniile punctate, jucaţi trecînd peste celălalt capăt al aceleeaşi linii. Această ingenioasă strategie de perechi garantează victoria pentru primul jucător, deşi nu în mod necesar în numărul minim de mişcari. Gross spune

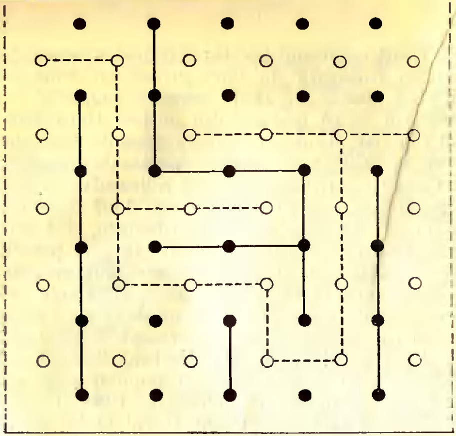


Fig. 111 Un final al *Jocului lui Gale*. Negrul a pierdut.

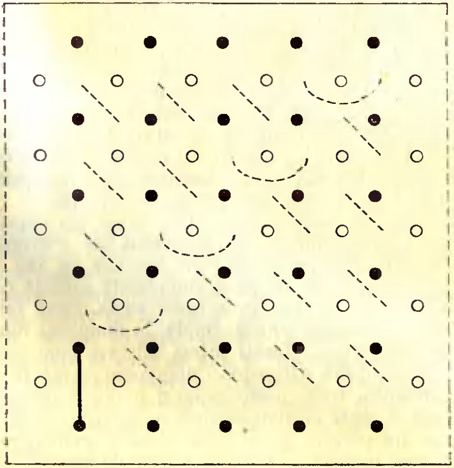


Fig. 112 Strategia „de perechi" a lui Oliver Gross, pentru cîştigarea *Jocului lui Gale*.

despre strategia sa că este „democratică", în sensul că „ea joacă prostește contra unui jucător prost si inteligent contra unui jucător inteligent, dar duce la victorie în toate cazurile". Aceasta nu este singura strategie de perechi descoperită de Gross, dar el a reținut-o pe aceasta din cauza regularității ei și ușurinței cu care poate fi extinsă la o tablă de orice dimensiune.

Observați că pe diagramă nu sînt indicate mișcări de-a lungul laturilor tablei. Astfel de mișcări sînt admise de regulile jocului, dar ele nu contribuie cu nimic la victorie. Dacă în cursul jocului adversarul încearcă să vă deruteze, făcînd mișcări de-a lungul laturilor, puteți răspunde tot prin mișcări de-a lungul laturilor. Sau, dacă preferați, puteți juca *oriunde* pe tablă. Dacă la un moment ulterior al jocului această mișcare făcută la întîmplare este cerută de strategie, pur și simplu faceți mișcarea la care aveți dreptul în altă parte. A avea o mișcare în plus pe tablă este uneori un avantaj, dar niciodată un dezavantaj. Bineînțeles, acum, cînd există o strategie de cîștig, jocul lui Gale nu mai prezintă interes, exceptînd pe jucătorii la care vestea nu a ajuns încă.

Multe jocuri de masă cu reguli relativ simple au rezistat însă tuturor încercărilor de analiză matematică. Un exemplu îl constituie familia de jocuri derivate din *halma*, un joc larg răspîndit în Anglia pe la sfîrșitul secolului trecut. „Modul de viață normal al englezului, scria George Bernard Shaw în 1898, constă în a sta în familii separate în camere separate în case separate, fiecare om ocupat în tăcere cu o carte, cu un ziar, cu un joc de halma..."

În forma sa inițială, jocul (a cărui denumire provine de la cuvîntul grecesc care înseamnă „săritură") se juca pe o masă de dame cu 16 pătrate pe fiecare latură, dar foarte curînd el a fost extins la mese de toate formele și dimensiunile. Jocul cunoscut astăzi sub numele de „dame chinezești" nu este altceva decît una dintre variantele tîrzii ale halmei. Voi explica aici numai o variantă simplificată, care poate fi jucată pe masa obișnuită de șah de 8×8 și care conduce la o interesantă „pasiență" solitară, încă nerezolvată.

Inițial piesele sînt în poziția obișnuită pentru începutul jocului de dame. Mișcările sînt aceleași ca la dame, cu următoarele excepții:

1. Piesele peste care se sare nu sînt îndepărtate de pe masă.
2. O piesă poate sări peste alte piese de orice culoare.
3. Mișcările și săriturile înapoi sînt admise.

Se poate face un șir de sărituri neîntrerupte peste piese de ambele culori, dar nu se admite combinarea unei sărituri cu o mișcare peste un singur cîmp. Scopul jocului este ca fiecare jucător să ocupe poziția inițială a celuilalt. Primul care reușește este cîștigător. Jocul poate fi cîştigat şi prin aducerea adversarului într-o situaţie în care acesta nu mai poate face nici o mişcare.

O oarecare idee despre dificultăţile care intervin în analiza jocurilor de tip halma vă puteţi face încercînd următoarea problemă. Aranjaţi 12 piese de dame în poziţiile obişnuite de începere a jocului, pe pătratele negre ale primelor trei rînduri ale tablei. Restul tablei este goală. În cît de puţine mişcări de tip halma puteţi transporta aceste piese pe ultimele trei rînduri ale laturii opuse? Prin „mişcare" se înţelege fie o mutare diagonală ca la dame, înainte sau înapoi, către un cîmp vecin negru, fie un salt peste una sau mai multe piese. Un salt neîntrerupt poate include sărituri înainte şi înapoi şi contează ca o singură mişcare. Ca şi la jocul de halma, nu este obligatoriu ca un salt să fie executat atunci cînd el poate fi făcut, iar o serie de salturi neîntrerupte poate fi terminată oricînd doriţi, chiar dacă mai sînt posibile şi alte salturi.

Pentru comoditate în înregistrarea soluţiei, numerotaţi cîmpurile negre, de la stînga spre dreapta şi de sus în jos, cu cifre de la 1 la 32.

ADAOS

După ce soluţia cu 20 de mişcări pentru problema de dame a fost publicată, mai mulţi cititori mi-au trimis demonstraţii că sînt necesare cel puţin 18. Unul dintre ei, Vern Poythress, din Fresno (California), a trimis o demonstraţie pentru 20 de mişcări ca minimum — din păcate prea lungă şi complicată pentru a fi reprodusă aici.

Aşa cum am menţionat şi în volumul *Amuzamente matematice* la p. 231, jocul lui Gale este identic cu un joc de „interschimbare" numit *Colivia*, care a fost inventat de Claude E. Shannon. Jocul lui Shannon este descris în una din nuvelele lui Arthur Clarke, *Pacifistul*, retipărită în antologia menţionată a lui Clifton Fadiman (pp. 37—47) ; o descriere a jocului mai este dată şi în articolul *Paşi către o inteligenţă artificială* al lui Marvin Minsky, în „Proceedings of the Institute of Radio Engineers", vol. 49, 1961, p. 23. În afară de varianta jocului lui Gale pusă în circulaţie sub numele de *Bridg-it*, pe piaţă a mai apărut şi o variantă mai complicată, sub numele de *Twixt*.

Independent de Gross, o strategie de cîştig pentru jocul lui Gale a fost descoperită de Alfred Lehman, de la Centrul de cercetări matematice al armatei S.U.A., în cadrul Universităţii din Wisconsin. Lehman a găsit o strategie generală pentru o clasă largă de jocuri de scurtcircuitare de tip Shannon. Lehman mi-a scris că a început lucrul prin 1959, dar rezultatele nu au fost publicate, deşi un rezumat al lor a fost trimis lui Shannon. În aprilie 1961, Lehman a vorbit despre lucrare în cadrul unei întîlniri a Asociaţiei americane de matematică, un rezumat al ei apărînd în dările de seamă pe luna iunie ale asociației. Articolul *O soluție pentru jocul de scurtcircuitare al lui Shannon* a apărut în „Journal of the Society of Industrial Applied Mathematics", vol. 12, nr. 4, decembrie 1964, pp. 587—725. Strategia lui Lehman aproape că dă o strategie de cîștig și pentru *Hex*, un binecunoscut joc topologic similar cu jocul lui Gale — însă Hex s-a strecurat prin analiză și a rămas în ultimă instanță nerezolvat.

În 1961, Günter Wenzel a scris un program pentru jocul lui Gale, pentru calculatorul IBM 1401, bazat pe strategia propusă de Gross. O fotocopie a programului a fost difuzată de Institutul de cercetări de sisteme IBM din New York, iar în martie 1963 a fost publicat în revista germană „Bürotechnik und Automation".

RĂSPUNSURI

Problema mutării celor 12 piese de dame de pe o parte a tablei pe cealaltă, folosind mișcări de tip *halma*, a provocat un răspuns masiv din partea cititorilor. Mai mult de 30 de cititori au rezolvat problema în 23 de mutări, 49 au rezolvat-o în 22 de mutări, 31 în 21 de mutări și 14 în 20 de mutări.

Nu am primit nici o demonstrație cum că 20 ar fi numărul minim de mutări, deși mulți cititori au indicat o cale simplă prin care se poate arăta că cel puțin 16 mutări sînt necesare. La începutul jocului opt piese se găsesc pe rîndurile impare 1 și 3 și patru piese pe rîndul par 2. La sfîrșit, opt piese se vor găsi pe rîndurile pare 6 și 8 și patru pe rîndul impar 7. În mod clar, patru piese trebuie să-și schimbe paritatea de la impar la par. Acest lucru poate fi făcut numai dacă fiecare dintre cele patru piese execută cel puțin o mișcare în săritură și o mișcare alunecată, ceea ce ridică numărul total al mutărilor la 16.

Este totuși greu de conceput ca piesele să poată fi transportate în mai puțin de 20 de mutări, deși trebuie să mărturisesc că atunci cînd am prezentat problema mi-a fost la fel de greu de conceput că 20 de mutări ar fi de ajuns. Presupunînd că pătratele negre sînt numerotate de la 1 la 32, de la stînga spre dreapta și de sus în jos, cu un pătrat alb în colțul de stînga sus al tablei, soluția dată de Edward J. Sheldon, primul dintre cei 14 cititori care mi-au trimis soluții cu 20 de mutări, se prezintă în felul următor:

1. 21—17	7. 17— 1
2. 30—14	8. 31—15
3. 25— 9	9. 26—10
4. 29—25	10. 28—19
5. 25—18	11. 14— 5
6. 22— 6	12. 23— 7

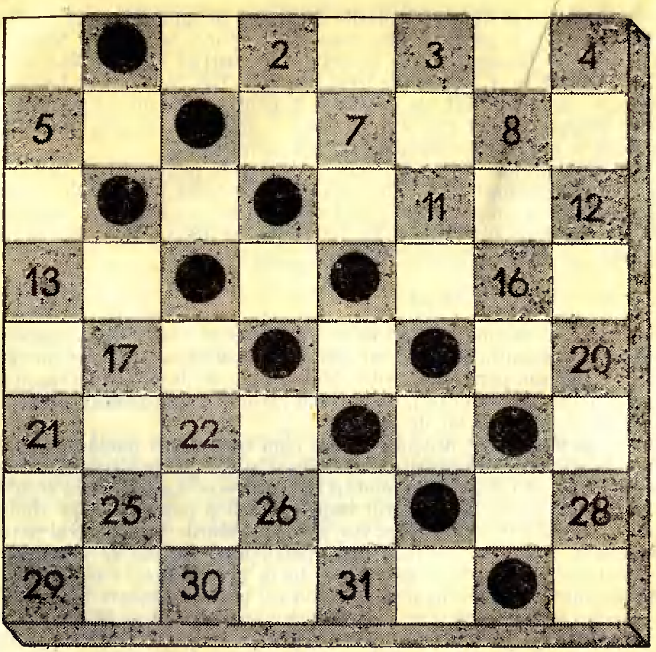


Fig. 113. Poziţia pieselor de dame după zece mutări.

13. 18— 2	17. 8— 4
14. 32—16	18. 24— 8
15. 27—11	19. 19— 3
16. 15— 8	20. 16—12

Această soluţie este simetrică. Figura 113 arată poziţiile pieselor după cea de-a zecea mutare. Dacă tabla este acum întoarsă şi primele zece mutări sînt repetate în ordine inversă, transportul cerut este complet. După cîte ştiu, aceasta este prima soluţie publicată de 20 de mutări. Ea este departe de a fi unică. Am primit şi alte soluţii simetrice în 20 de mutări, precum şi una teribil de asimetrică de la d-na Georgianna March — singura femeie printre cei 14 cîştigători.

Încă nouă probleme

1. ARANJAREA MONEDELOR

Luaţi trei monede de 25 de bani şi două monede de 10 bani şi aranjaţi-le alternînd, ca în fig. 114. Problema constă în a le schimba poziţiile ca în partea de jos a figurii, în cît mai puţine mutări.

O „mutare" constă în aşezarea a două degete pe oricare două monede vecine — *dintre care una trebuie să fie o monedă de 25 bani, iar cealaltă, o monedă de 10 bani,* apoi în translarea perechii pe o altă poziţie de-a lungul dreptei imaginare arătate în figură. Cele două monede ale perechii trebuie să rămînă tot timpul în atingere. Moneda din dreapta

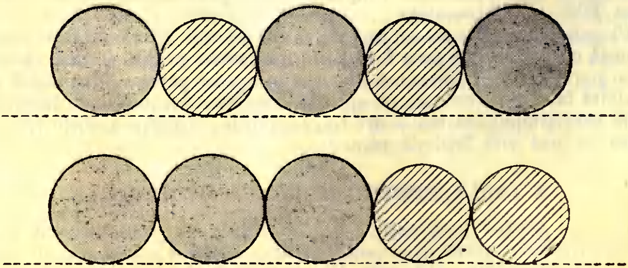


Fig. 114 Problema celor două monede.

unei perechi trebuie să rămînă în dreapta, iar cea din stînga trebuie să rămînă în stînga. Sînt admise locuri goale în şir la sfîrşitul fiecărei mutări, cu excepţia ultimei. Nu este nevoie ca, după ultima mutare, piesele să se găsească pe acelaşi loc ca la început pe linia imaginară.

Dacă ar fi voie să se deplaseze două monede de acelasi fel, problema ar putea fi rezolvată uşor în trei mutări: deplasaţi prin translaţie 1, 2 spre stînga, umpleţi locul gol cu 4, 5, apoi mutaţi 5, 3 din capătul drept în cel sting. Condiţia ca cele două monede să fie diferite face problema extrem de interesantă. Problema mi-a fost transmisă de H. S. Percival, din Garden City (New York).

2. PÎINEA PRĂJITĂ

Chiar şi cea mai simplă dintre treburile casnice poate pune probleme destul de complicate în ceea ce priveşte raţionalizarea timpului. Luaţi, de pildă, prepararea a trei felii de pîine prăjită şi unse cu unt, cu ajutorul unui aparat electric obişnuit, prevăzut cu două „uşi" rabatabile laterale, care ţin feliile de pîine strîns pe rezistenţă; el poate fi încărcat cu două felii de pîine dintr-o dată, dar nu le poate prăji decît pe o faţă. Pentru a le prăji şi pe cealaltă, trebuie ca „uşile" să fie deschise şi feliile întoarse.

Pentru a pune o felie de pîine în aparat, sînt necesare trei secunde; pentru a scoate o felie — trei secunde; pentru a întoarce o felie fără a o scoate — trei secunde. Pentru fiecare din aceste operaţii sînt necesare ambele mîini, ceea ce înseamnă că nu este posibil să introduceţi, să scoateţi sau să întoarceţi două felii dintr-o dată. De asemenea nu este posibil să ungeţi cu unt o felie în timp ce introduceţi, scoateţi sau întoarceţi o altă felie. Timpul în care o faţă a unei felii se prăjeşte este de 30 de secunde, iar timpul necesar pentru ungerea cu unt a unei felii — 12 secunde.

Fiecare felie este unsă cu unt numai pe o parte. Nici o faţă nu poate fi unsă cu unt înainte de a fi fost prăjită. O felie prăjită şi unsă cu unt pe o parte poate fi introdusă din nou în aparat pentru a fi prăjită pe cealaltă faţă. Se consideră că aparatul este bine încălzit de la început. Care este timpul cel mai scurt în care pot fi prăjite pe ambele feţe şi unse cu unt trei felii de pîine?

3. DOUĂ PROBLEME CU PENTOMINOURI

Pentru pasionaţii după probleme cu pentominouri, iată două probleme recent descoperite; prima dintre ele este mai uşoară.

A. În stînga fig. 115, cele 12 pentominouri sînt astfel aranjate încît să formeze un dreptunghi de 6×10. Împărţiţi dreptunghiul

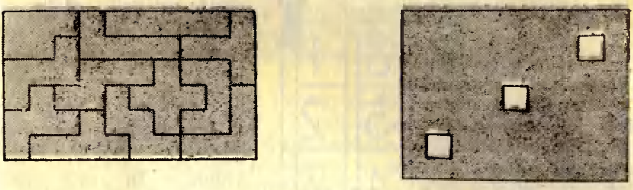


Fig. 115. O problemă cu pentominouri

— numai după liniile negre — în două părţi care pot fi asamblate din nou pentru a forma figura cu trei găuri din dreapta.

B. Aranjaţi cele 12 pentominouri ca să formeze un dreptunghi de 6×10, dar în aşa fel încît fiecare pentomino să atingă marginile dreptunghiului. Dintre cele cîteva mii de moduri fundamental diferite de a construi dreptunghiul de 6×10 (rotaţiile şi reflexiile nu sînt considerate diferite), se ştie că numai două îndeplinesc condiţiile acestei probleme. Piesele asimetrice pot fi aşezate cu oricare faţă în sus.

4. O TEOREMĂ A PUNCTULUI FIX

Într-o dimineaţă, exact la răsăritul soarelui, un călugăr budist începu să urce un munte înalt. Cărarea, foarte îngustă, mergea în spirală în jurul muntelui, urcînd către un templu care se zărea în vîrf.

Călugărul urca drumul cu diferite viteze, oprindu-se de multe ori să se odihnească şi să mănînce din fructele uscate pe care le adusese cu el. El ajunse la templu cu foarte puţin înainte de apusul soarelui. După mai multe zile de post şi rugăciune, el porni înapoi pe acelaşi drum, plecînd o dată cu răsăritul soarelui, mergînd cu viteze variate şi făcînd multe pauze pe parcurs. Desigur, viteza lui medie la coborîre era mai mare decît viteza medie la urcare.

Arătaţi că pe drum există un punct în care călugărul ajunge atît la urcare cît şi la coborîre, în exact acelaşi moment al zilei.

5. DOUĂ PROBLEME CU CIFRE

Cele două probleme care urmează par să necesite un calculator cifric, care să testeze sute de combinaţii de cifre într-un timp rezonabil de scurt. Dacă însă sînt abordate just şi se recurge la unul sau

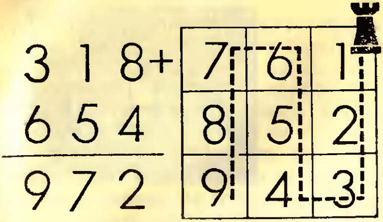


Fig. 116 Pot fi combinate caracteristicile celor două tipuri de pătrate?

două artificii inteligente, ambele probleme pot fi rezolvate cu foarte puțină muncă cu creionul și hîrtia. Prin astfel de „scurtături", un programator iscusit poate economisi timpul de utilizare a calculatorului electronic — în unele cazuri se poate chiar renunța complet la ajutorul acestuia.

A. The Square Root of Wonderful (Radical din minunat) este titlul unei piese jucate nu de mult pe Broadway. Dacă fiecare literă din WONDERFUL reprezintă o cifră diferită (dar nu zero) și dacă cuvîntul OODDF reprezintă, folosind același cod, rădăcina pătrată, care *este* rădăcina pătrată din Wonderful (din minunat)?

B. Există mai multe moduri în care cele nouă cifre (fără zero) pot fi aranjate în pătrat, în așa fel încît să reprezinte o sumă. În exemplul din stînga fig. 116, 318 plus 654 dă 972. Există, de asemenea, multe moduri de a plasa cifrele într-o matrice pătratică. în așa fel încît, luate în ordine serială, să formeze un lanț de felul celui trasat de mișcarea unui turn la șah. Un exemplu este prezentat în partea dreaptă a figurii. Puteți începe de la 1, apoi, mutînd cîte un pătrat, puteți trece pe rînd la 2, 3, 4, și așa mai departe pînă la 9.

Problema constă în a satisface ambele condiții cu un singur pătrat. Cu alte cuvinte, plasați cifrele într-o matrice de 3×3, în așa fel încît să formeze un lanț de felul celui trasat de mișcarea unui turn la șah, de la 1 la 9, iar rîndul de jos să fie suma primelor două rînduri. Răspunsul este unic.

6. CUM ȘI-A POTRIVIT KANT CEASUL?

Se spune că Immanuel Kant[1] era un burlac cu obiceiuri atît de regulate, încît locuitorii Königsbergului își potriveau ceasurile cînd îl vedeau trecînd prin anumite puncte ale orașului.

Într-o seară, Kant fu foarte neplăcut surprins să constate că propriul său ceas de perete s-a oprit. În mod evident, servitorul, care avea zi liberă, uitase să-l întoarcă. Cum ceasul de buzunar era dat la

[1] Filozof german, 1724—1804. — *N.T.*

reparat, Kant nu avea cum potrivi limbile celui de perete. Aşa că se hotărî să facă o vizită prietenului său Schmidt, care locuia la circa 2 km distanţă. De cum intră în casa acestuia, Kant îşi aruncă o privire spre pendulă.

După cîteva ore, Kant îşi luă rămas bun şi o porni spre casă pe acelaşi drum pe care venise. Ca întotdeauna, el a mers cu un pas încet şi constant pe care nu şi-l schimbase în 20 de ani. Nu avea nici o idee despre cît durează drumul de la Schmidt pînă acasă, pentru că Schmidt se mutase de curînd într-o casă nouă şi Kant nu avusese încă timp să cronometreze drumul. Cu toate acestea, imediat ce intră în casă, el stabili fără ezitare limbile ceasului la o anumită oră.

Cum a putut şti Kant care era ora exactă?

7. JOCUL CELOR „DOUĂZECI DE ÎNTREBĂRI", ATUNCI CÎND PROBABILITĂŢILE SÎNT CUNOSCUTE

În binecunoscutul joc *Douăzeci de întrebări*, o persoană se gîndeşte la un obiect — cum ar fi Statuia Libertăţii sau Călcîiul lui Ahile — iar o altă persoană încearcă să ghicească obiectul cu ajutorul a cel mult 20 de întrebări, la care se poate răspunde prin da sau nu. De obicei cele mai bune întrebări sînt cele care împart mulţimea obiectelor posibile în două submulţimi, egale pe cît se poate ca număr. Astfel, dacă prima persoană a ales ca „obiect" un număr între 1 şi 9, numărul acela poate fi ghicit cu procedeul de mai sus în nu mai mult de patru întrebări, uneori chiar mai puţine. Din 20 de întrebări se poate ghici orice număr cuprins între 1 şi 2^{20} (adică 1 048 576).

Să presupunem acum că fiecăruia dintre obiectele posibile i se poate atribui o anumită valoare distinctă, care să reprezinte probabilitatea ca obiectul respectiv să fi fost ales. De exemplu, să presupunem că un pachet de cărţi este format dintr-un as de cupă, doi de „doi de cupă", trei de „trei" şi aşa mai departe pînă la nouă nouari de cupă, în total 45 de cupe. Pachetul este amestecat şi cineva alege o carte. Dv. trebuie să ghiciţi această carte punînd întrebări la care se poate răspunde prin da sau nu. Cum aţi putea minimiza numărul probabil de întrebări pe care le aveţi de pus?

8. NU FACEŢI MAT DINTR-O MUTARE

Răspunzător pentru revoltătoarea problemă ilustrată în fig. 117 este Karl Fabel, un problemist german de şah. Ea a apărut recent în delicioasa rubrică de probleme de şah non-conformiste, publicată de Mel Stover în revista „Canadian Chess Chat".

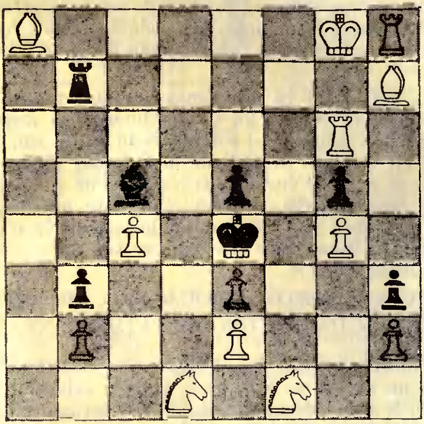


Fig. 117 Albul mută și *nu* face mat.

Vi se cere să găsiți pentru alb o mutare care *nu* ar duce la șah-mat imediat pentru regele negru.

9. GĂSIȚI HEXAEDRELE

Un poliedru este un corp în spațiu, mărginit de plane — fețele poliedrului. Cel mai simplu poliedru este tetraedrul, care are patru fețe — fiecare din ele un triunghi (vezi fig. 118, sus). Tetraedrul poate avea o varietate nesfîrșită de forme, dar dacă considerăm rețeaua sa de muchii drept un invariant topologic (adică, dacă ne permitem să schimbăm lungimea oricărei muchii și unghiurile sub care acestea se întîlnesc, cu condiția însă să păstrăm structura rețelei), atunci există un singur tip fundamental de tetraedru. Cu alte cuvinte, un tetraedru nu poate avea drept fețe decît niște triunghiuri.

Poliedrul cu cinci fețe are două varietăți fundamentale (fig. 118, mijloc și jos). Una este reprezentată de marile piramide ale Egiptului (patru triunghiuri pe o bază cu patru laturi). Cealaltă este reprezentată de un tetraedru care are un colț tăiat: trei fețe sînt patrulatere, iar două triunghiuri.

John McClellan, un artist din Woodstock (New York), pune întrebarea: cîte varietăți fundamentale de hexaedre convexe, adică de

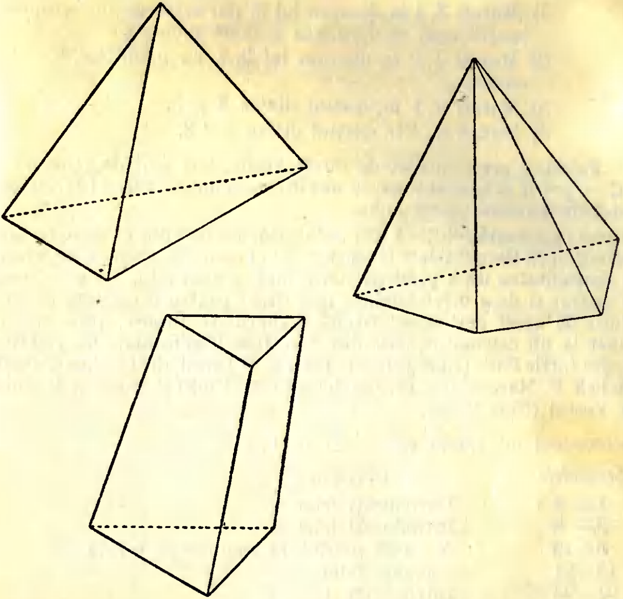


Fig. 118 Trei tipuri de poliedre.

poliedre cu şase feţe, există în total? (Un corp în spaţiu este convex dacă fiecare dintre feţele sale poate fi aşezată în întregime pe o masă.) Exemplul cel mai banal este, bineînţeles, cubul.

Dacă veţi căuta hexaedre tăind colţurile unor corpuri mai simple, trebuie să aveţi grijă să evitaţi dublurile. Astfel, dacă se taie vîrful unei piramide egiptene, rămîne un schelet care este echivalent, topologic, cu cel al cubului. Aveţi, de asemenea, grijă, să evitaţi modelele care nu pot exista fără feţe curbe.

RĂSPUNSURI

1. Jocul celor două monede poate fi rezolvat în patru mutări, după cum urmează. Monedele sînt numerotate de la stînga spre dreapta.

1) Mutați 3, 4 la dreapta lui 5, dar separate de 5 printr-un spațiu egal cu lărgimea a două monede.

2) Mutați 1, 2 la dreapta lui 3, 4, cu monedele 4 și 1 în contact.

3) Mutați 4, 1 în spațiul dintre 5 și 3.

4) Mutați 5, 4 în spațiul dintre 3 și 2.

2. Folosind acest aparat de modă veche, trei felii de pîine — A, B, C — pot fi prăjite și unse cu unt în două minute. Fig. 119 ilustrează modul de a realiza acest lucru.

După ce această soluție a fost publicată, am fost pus în mare încurcătură aflînd că timpul poate fi scurtat la 111 secunde. Ceea ce neglijasem era posibilitatea de a prăji parțial o față a unei felii, de a o scoate din aparat și de a o reintroduce mai tîrziu pentru a termina prăjitul. Soluții de acest gen mi-au trimis Richard A. Brouse, programator-analist la un calculator IBM din San Jose (California), R. J. Davis, Jr., din Little Falls (New Jersey), John F. O'Dowd, din Quebec (Canada) Mitchell P. Marcus, din Birmingham (New York) și Howard Robbins, din Vestal (New York).

Procedeul lui Davis este următorul:

Secundele	*Operația*
1— 3	Introduceți felia A
3— 6	Introduceți felia B
6—18	A a fost prăjită 15 secunde pe o față
18—21	Scoateți felia A
21—23	Introduceți felia C
23—36	B a fost prăjită complet pe o față
36—39	Scoateți felia B
39—42	Introduceți felia A, întoarsă
42—54	Ungeți cu unt felia B
54—57	Scoateți felia C
57—60	Introduceți felia B
60—72	Ungeți cu unt felia C
72—75	Scoateți felia A
75—78	Introduceți felia C
78—90	Ungeți cu unt felia A
90—93	Scoateți felia B
93—96	Introduceți felia A, astfel întoarsă ca să completați prăjirea părții numai parțial prăjite
96—108	Felia A este complet prăjită
108—111	Scoateți felia C.

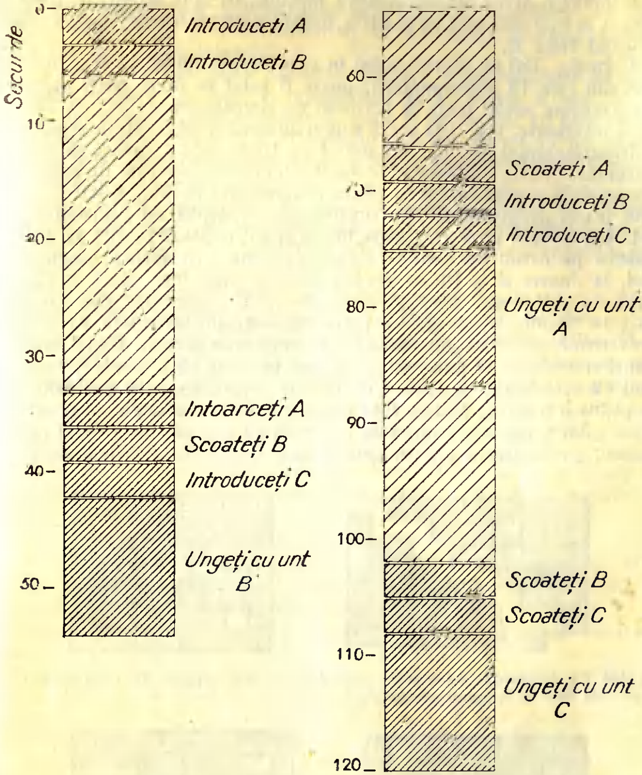


Fig. 119 Soluția problemei prăjirii a trei felii de pîine în numai 2 minute.

Toate feliile sînt acum prăjite și unse cu unt, însă felia A se mai află încă în aparat. Chiar dacă A trebuie scoasă din aparat, pentru a completa lanțul de operații, timpul nu depășește 114 secunde.

Robbins a atras atenţia asupra faptului că spre sfîrşit, în timp ce felia A se mai află încă în prăjitor,timpul poate fi folosit foarte eficient mîncînd felia B.

3. În fig. 120 se arată modul în care dreptunghiul de 6 × 10, format din cele 12 pentominouri, poate fi tăiat în două părţi care pot fi rearanjate astfel încît să formeze un dreptunghi de 7 × 9, cu trei găuri interioare. Fig. 121 arată singurele două posibilităţi de construire a dreptunghiului de 6 × 10, astfel ca toate cele 12 piese să atingă marginea. Cea de a doua dintre aceste două variante este de asemenea remarcabilă şi prin faptul că poate fi împărţită în două părţi congruente (ca şi dreptunghiul din problema precedentă cu pentominouri).

4. Un călugăr urcă un munte într-o zi şi-l coboară în altă zi. Există undeva pe drum un punct în care el ajunge în acelaşi moment al zilei, la ducere şi la întoarcere? Problema mi-a fost adusă la cunoştinţă de psihologul Ray Hyman, de la Universitatea din Oregon, care, la rîndul său, a găsit-o într-o monografie intitulată *Rezolvarea problemelor*, scrisă de psihologul configuraţionist german Karl Duncker. Duncker scrie că el personal nu a fost în stare să o rezolve, menţionînd cu satisfacţie că nimeni dintre cei cărora le-a pus problema nu au putut-o rezolva. Există mai multe căi de a o aborda — continuă el — „dar probabil că nici una nu este mai evident clară decît următoarea: presupunem că urcuşul şi coborîşul este efectuat de *două*

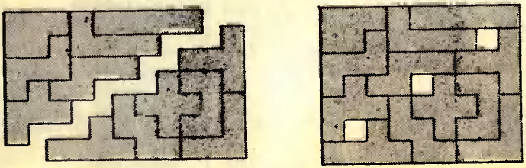


Fig. 120 Un dreptunghi de 6 × 10 construit din pentominouri poate fi refăcut ca dreptunghi de 7 × 9, avînd trei găuri.

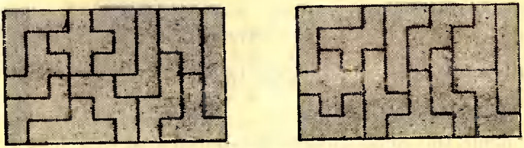


Fig. 121 Toate pentominourile care intră în compoziţia acestor dreptunghiuri de 6 × 10 ating marginile.

persoane, într-o aceeaşi zi. Ele *trebuie să se întîlnească*. Aşadar, dintr-o condiţie obscură şi greu de controlat în ansamblu, situaţia a fost adusă brusc în plină lumină".

5. *A*. Dacă OODDF este rădăcina pătrată a lui WONDERFUL, care este numărul pe care îl reprezintă? O nu poate fi mai mare decît 2, fiindcă ridicarea la pătrat ar duce la un număr cu zece cifre. Nu poate fi 1, deoarece nici un număr care începe cu 11 nu poate avea un pătrat a cărui a doua cifră să fie 1. Prin urmare, O trebuie să reprezinte pe 2.

WONDERFUL trebuie să fie cuprins între pătratele lui 22 000 şi 23 000. Pătratul lui 22 este 484; pătratul lui 23 este 529. Întrucît cea de-a doua cifră a lui WONDERFUL este 2, putem conchide că WO = 52.

Ce valori trebuie date literelor din 22DDF pentru ca pătratul să fie egal cu 52NDERFUL? Pătratul lui 229 este 52 441; pătratul lui 228 este 51 984. Prin urmare, OODD este fie 2299, fie 2288.

Vom folosi acum un artificiu, bazat pe noţiunea de *rădăcină cifrică*. Suma celor nouă cifre din WONDERFUL (unde, după cum am spus, zero nu apare) este 45, care, la rîndul său, dă o sumă egală cu 9 — rădăcina sa cifrică. Rădăcina lui pătrată trebuie să aibă o rădăcină cifrică care, atunci cînd este ridicată la pătrat, dă un număr care are rădăcina cifrică 9. Singurele rădăcini cifrice care îndeplinesc această condiţie sînt 3, 6 şi 9 — prin urmare, OODDF trebuie să aibă rădăcina cifrică 3, 6 sau 9.

F nu poate fi 1, 5 sau 6, deoarece oricare dintre aceste cifre ar plasa un F la sfîrşitul lui WONDERFUL. Singurele completări posibile pentru 2299F şi 2288F care îndeplinesc această cerinţă în legătură cu rădăcina cifrică sînt 22 998, 22 884 şi 22 887.

Pătratul lui 22 887 este 523 814 769 — singurul număr care se potriveşte cu cuvîntul codificat WONDERFUL.

B. Ceea ce salvează mult timp în rezolvarea acestei probleme este observaţia că dacă cele două cifre sînt plasate într-o matrice de 3 × 3, astfel încît să formeze un lanţ de la 1 la 9, de forma drumului unui turn de şah, cifrele impare trebuie să ocupe celula centrală şi cele patru celule din colţuri. Acest lucru poate fi văzut uşor colorînd cele nouă celule alternativ, ca pe tabla de şah — celula din mijloc fiind colorată în negru. Deoarece numărul celulelor negre depăşeşte cu unu pe cel al celulelor albe, drumul trebuie să înceapă şi să se sfîrşească pe o celulă neagră; în acest fel, toate cifrele pare vor cădea în celulele albe.

Există 24 de moduri diferite de a aranja cele patru cifre pare în celulele albe. Opt dintre acestea — în care 2 este aşezat opus lui 4 —

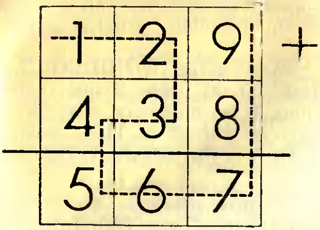


Fig. 122 Soluția problemei lanțului de cifre.

pot fi eliminate dintr-o dată, deoarece nu permit realizarea unui drum complet al cifrelor în ordine serială. Celelalte 16 variante pot fi foarte repede verificate, ținînd seama că suma celor două cifre de sus de pe coloana întîi trebuie să fie mai mică decît 10, iar suma celor două cifre de sus de pe coloana a treia trebuie să fie mai mare decît 10. A doua dintre aceste afirmații este adevărată din cauză că cele două cifre de sus de pe coloana din mijloc sînt una pară și alta impară — suma lor fiind totuși o cifră pară. Aceasta se poate întîmpla numai dacă se transportă 1 de la adunarea cifrelor din dreapta. Singurul mod de a forma drumul, în așa fel ca rîndul de jos al matricei să fie suma rîndurilor unu și doi, este cel din fig. 122.

După publicarea acestei soluții în „Scientific American", Harmon H. Goldstone, din New York, și Scott B. Kilner, din Corona (California), mi-au trimis o metodă folosită de ei, ceva mai rapidă. Există numai trei drumuri de tipul celui trasat de un turn, esențial diferite (abstracție făcînd de rotații și reflexii) : cel arătat în figură, un drum spiralat pornind dintr-un colț spre centru și un drum în formă de S pornind dintr-un colț spre colțul diagonal opus. Pe fiecare dintre aceste drumuri, cifrele pot merge în ordine în ambele direcții, formînd astfel șase modele diferite. Examinîndu-le pe fiecare ținînd seama de diferitele rotații și reflexii, se ajunge repede la soluția unică.

Observați că dacă soluția este reflectată într-o oglindă (ținută în partea de sus a matricei), se obține o matrice ale cărei cifre sînt și ele în ordine serială ; pe un traseu de tipul turnului de șah și astfel dispuse încît dacă din rîndul ei de sus se scade rîndul din mijloc, se obține rîndul de jos.

Dacă mișcarea turnului este înlocuită cu mișcarea reginei, există numai patru soluții (dintre care una identică cu cea de aici) în care numerele de la 1 la 9 sînt în ordine serială pe un traseu de tip regină. Ele au fost date de Charles W. Trigg într-o detaliată analiză a soluțiilor de forma ABC + DEF = GHK, publicată în „Recreational Mathematics Magazine", nr. 7, februarie 1962, pp. 35—36.

6. Immanuel Kant și-a calculat momentul exact în care s-a întors acasă în felul următor. Înainte de a pleca de acasă, el a întors ceasul de perete, astfel că privindu-l la plecare și la venire a aflat cît timp

a lipsit de acasă. Din acesta, a scăzut timpul petrecut la Schmidt (fiindcă s-a uitat la venire şi la plecare, la ceasul din holul acestuia). A obţinut astfel timpul total cît a durat plimbarea. Deoarece s-a întors pe acelaşi drum şi cu aceeaşi viteză, a împărţit durata totală a plimbării la doi, ca să afle cît a făcut la întoarcere. Acest timp, adăugat la ora plecării de la Schmidt, i-a indicat ora sosirii acasă. Nu a mai avut decît să mute limbile ceasului.

Winston Jones, din Johannesburg (Africa de Sud), a sugerat o altă soluţie. Dl. Schmidt, prietenul lui Kant, era ceasornicar. Aşa că, pe cînd stăteau şi discutau, i-a reparat, poate, ceasul de buzunar al lui Kant.

7. Prima operaţie este să facem o listă a probabilităţilor pentru cele două cărţi: 1/45, 2/45, 3/45, ... Primele două valori pot fi combinate pentru a forma un nou element: 1/45 plus 2/45 este egal cu 3/45. Cu alte cuvinte, probabilitatea ca o carte aleasă să fie un as *sau* un doi, este de 3/45. Există acum opt elemente: setul as-doi, setul „trei", setul „patru" şi aşa mai departe pînă la „nouă". Combinăm din nou primele două probabilităţi ale acestui şir: valoarea 3/45 pentru setul as-doi şi probabilitatea 3/45 de a alege un trei. Acest nou element, format din cărţi cu valoare de as, doi şi trei, are o probabilitate de apariţie de 6/45. Aceasta este mai mare decît probabilităţile pentru „patru" sau pentru „cinci", aşa că atunci cînd combinăm cele două probabilităţi de valori minime, trebuie să combinăm cărţile cu valorile patru şi cinci pentru a obţine un nou element cu valoarea 9/45. Procedeul acesta de asociere în pereche a primelor două valori din şirul nou format este continuat pînă cînd rămîne un singur element. Acesta va avea probabilitatea de 45/45, adică 1. Diagrama din fig. 123 arată cum se face combinarea elementelor. Strategia pentru minimalizarea numărului de întrebări constă în a lua aceste perechi în ordine inversă. Astfel, prima întrebare ar putea fi: cartea aleasă se află în setul de „patru, cinci sau nouă"? Dacă răspunsul este Nu, ea se poate afla în celălalt set, aşa că întrebarea următoare va fi: este cartea un şapte sau un opt? Şi aşa mai departe pînă o ghiciţi.

Observaţi că dacă este vorba de un as sau de un „doi", sînt necesare cinci întrebări să îl ghiciţi. O strategie binară, de împărţire pur şi simplu a elementelor, la fiecare întrebare, după subansambluri pe cît posibil mai egale, ar asigura ghicirea cărţii în cel mult patru întrebări, poate chiar în trei. Totuşi, procedeul descris mai sus dă pentru minimul numărului aşteptat de întrebări, la repetarea de foarte multe ori a jocului, o valoare ceva mai mică. În cazul de faţă, numărul minim este trei.

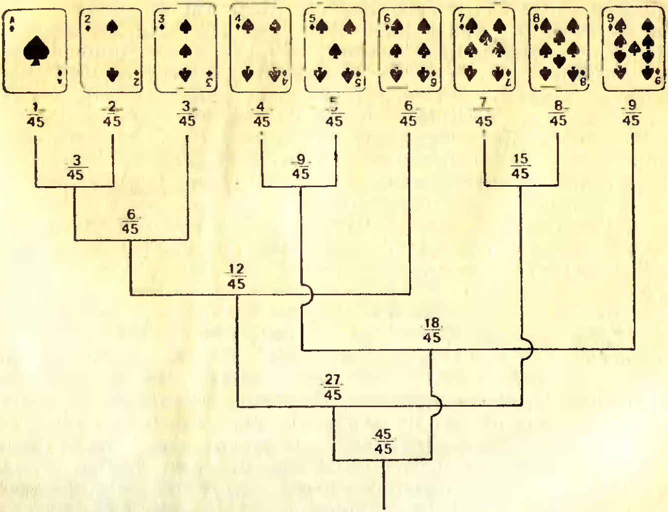


Fig. 123 Strategia folosită la minimizarea numărului de întrebări prin Da sau Nu. la ghicirea unuia dintre mai multe obiecte care au probabilitate de apariție diferită.

Acest număr minim se calculează în felul următor: cînd cartea aleasă este un as, sînt necesare cinci întrebări. Tot cinci sînt necesare cînd cartea este un doi, dar există doi de „doi", așa că este nevoie de zece întrebări. În mod similar, cele trei cărți de trei necesită de trei ori patru — adică 12 — întrebări. Numărul total de întrebări pentru toate cele 45 de cărți este 135, adică o medie de trei întrebări pentru fiecare carte.

Strategia expusă a fost descoperită de David A. Huffman, inginer electrician la Institutul tehnologic din Massachusetts, pe vremea cînd era încă student acolo. Ea este explicată în lucrarea *O metodă de construire a codurilor cu redundanță minimă*, publicată în „Proceedings of the Institute of Radio Engineers", vol. 40, septembrie 1952, pp. 1098–1101. Strategia a fost redescoperită mai tîrziu de Seth Zimmerman, care a descris-o în articolul *Un procedeu optimal* *de triere* din „American Mathematical Monthly", vol. 66, octombrie 1959, pp. 690—693. O foarte bună expunere netehnică a procedeului poate fi găsită în cartea *Symbols, Signals and Noise* (Simboluri, semnale și zgomot), de John R. Pierce (ed. „Harper & Brothers", 1961), cu începere de la p. 94.

8. Albul poate evita victoria prin șah-mat asupra negrului numai prin mutarea turnului cu patru cîmpuri spre stînga. Această mutare

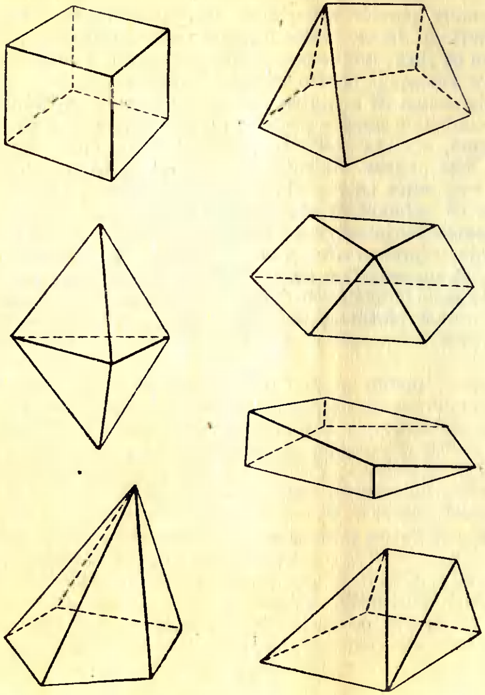


Fig. 124 Cele șapte varietăți de hexaedre convexe.

atacă regele negru, dar negrul poate acum să „bată" nebunul alb cu turnul său.

Cînd problema a apărut în „Scientific American", foarte mulți cititori au făcut observația că situația din fig. 117 nu este posibilă, deoarece există doi nebuni albi pe cîmpuri de aceeași culoare. Ei au uitat că un pion ajuns pe ultimul rînd poate fi transformat în orice piesă, nu numai în regină. Oricare dintre cei doi pioni albi care lipsesc de pe tablă ar fi putut fi transformat într-un al doilea nebun.

Există multe partide aparținînd unor maeștri, în care pionii au fost transformați în cai. Este adevărat că transformarea în nebuni este extrem de rară; dar se pot imagina situații în care ea să fie avantajoasă. De exemplu, pentru evitarea poziției de „pat". Sau, albul își poate da seama că ar putea cîștiga jocul printr-un șah-mat foarte subtil folosind fie o nouă regină, fie un nou nebun. Dacă se hotărăște pentru regină, aceasta poate fi „bătută" de un turn negru, care la rîndul său este „bătut" de calul alb; dacă însă își transformă pionul în nebun, s-ar putea ca negrul să ezite să schimbe un turn pentru un nebun, așa că nebunul ar rămîne pe tablă.

9. Cele șapte varietăți de hexaedre convexe, cu schelete topologic distincte, sînt arătate în fig. 124. Nu cunosc nici o cale simplă de a demonstra că nu există și altele. O demonstrație mai puțin formală este dată de John McClellan în articolul *Problema hexaedrelor*, publicat în „Recreational Mathematics Magazine", nr. 4, august 1961, pp. 34—40.

Calculul cu diferenţe finite

Calculul cu diferenţe finite — o ramură a matematicii nu prea bine cunoscută, dar care se dovedeşte de multe ori extrem de folositoare — se situează undeva la jumătatea drumului între algebră şi calculul diferenţial şi integral. W. W. Sawyer, un matematician de la Universitatea Wesleyană (Middletown, Connecticut), obişnuieşte să-l introducă studenţilor executînd în faţa lor următorul truc de „citire a gîndului".

În loc să cereţi cuiva să „se gîndească la un număr", cereţi-i „să se gîndească la o expresie matematică". Pentru a face trucul mai uşor, expresia trebuie să fie pătratică (puterile lui x trebuie să nu depăşească 2). Să presupunem că partenerul se gîndeşte la $5x^2 + 3x - 7$. Stînd cu spatele, ca să nu-i vedeţi calculele, cereţi-i să înlocuiască x cu 0, 1 şi 2 şi să vă spună cele trei valori pe care le capătă astfel expresia. Valorile pe care vi le dă vor fi —7, 1 şi 19. După cîteva calcule sumare (pe care cu puţin antrenament le puteţi face în gînd), îi comunicaţi expresia la care s-a gîndit!

Metoda este foarte simplă. Aşezaţi într-un rînd cele trei valori pe care vi le-a comunicat. Sub ele, scrieţi diferenţele dintre două valori vecine, scăzînd întotdeauna numărul din stînga din vecinul lui din dreapta. Într-un al treilea rînd puneţi diferenţa dintre numerele din rîndul al doilea. Tabelul arată astfel:

$$\begin{array}{ccccc} -7 & & 1 & & 19 \\ & 8 & & 18 & \\ & & 10 & & \end{array}$$

Coeficientul lui x^2 din formula căutată va fi totdeauna jumătate din numărul din ultimul rînd al acestui tabel. Coeficientul lui x se obține scăzînd jumătatea numărului de jos din primul număr din rîndul al doilea. Constanta din formulă nu este altceva decît primul număr din rîndul de sus.

Procedeul este întru cîtva analog integrării. Dacă notăm cu y valoarea, atunci formula ca atare exprimă o funcție y de variabila x. Cînd lui x i se dau valori în progresie aritmetică (0, 1, 2, ...), y ia o serie de valori (−7, 1, 19, ...). Calculul cu diferențe finite este studiul unor astfel de serii. În cazul dat, făcînd un calcul simplu cu cei trei termeni ai unei serii, ați putut deduce funcția pătratică care a generat cei trei termeni.

Calculul cu diferențe finite își trage originile din *Methodus Incrementorum* (Metoda creșterilor), un tratat publicat între 1715 și 1717 de matematicianul englez Brook Taylor[1] (cel care a descoperit și celebra teoremă care-i poartă numele, din calculul diferențial). Prima lucrare importantă asupra acestui subiect apărută în limba engleză (după cele ale lui Leonhard Euler și alții) a fost publicată în 1860 de George Boole[2], celebru prin lucrările lui de logică simbolică. Manualele de algebră din secolul al XIX-lea includeau deseori o schiță a calculului, dar mai apoi acesta a căzut în dizgrație — poate cu excepția folosirii sale pentru verificarea tabelelor de dobînzi sau, ocazional în știință, pentru găsirea formulelor și a valorilor de interpolare. Astăzi, calculul este din nou la modă, fiind un instrument extrem de valoros în statistică și în științele sociale.

Pentru cei interesați în matematica recreativă există metode elementare ale acestui tip de calcul, care se pot dovedi de un mare folos. Să vedem, de pildă, cum poate fi aplicat calculul cu diferențe finite la o problemă veche, cum este cea a tăierii unui tort. Care este numărul maxim de felii în care un tort poate fi tăiat prin n tăieturi în linie, dreaptă, fiecare intersectînd pe toate celelalte? Acest număr este evident, o funcție de n. Dacă această funcție nu este prea complicată, metoda diferențelor ne poate ajuta să o găsim prin tehnici empirice

[1] 1685—1731. — *N.T.*
[2] 1815—1864. — *N.T.*

Zero tăieturi lasă, evident, tortul întreg; o tăietură dă două felii, două tăieturi — patru felii, și așa mai departe. Nu este greu de găsit prin tatonări că seria începe astfel: 1, 2, 4, 7, 11, ··· (vezi fig. 125). Faceți, ca și înainte, un tabel, ale cărui rînduri reprezintă diferențele dintre termenii vecini din rîndul de deasupra:

Numărul de tăieturi	0		1		2		3		4
Numărul de felii	1		2		4		7		11
Diferențele de ordinul întîi		1		2		3		4	
Diferențele de ordinul doi			1		1		1		

Dacă seria inițială este generată de o funcție liniară, numerele din rîndul diferențelor de ordinul întîi vor fi toate identice. Dacă funcția este pătratică, numerele identice apar în rîndul diferențelor de ordinul doi. O expresie cubică ar da numere identice în rîndul diferențelor de ordinul trei și așa mai departe. Cu alte cuvinte, numărul rîndurilor

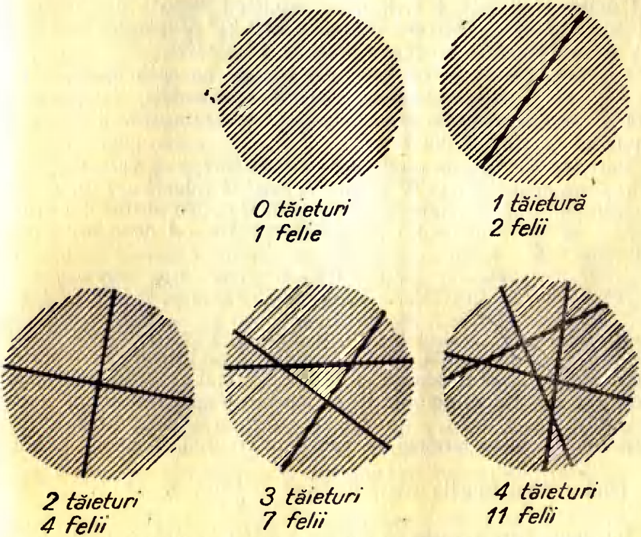


Fig. 125 Problema tortului.

de diferențe este tocmai gradul expresiei. Dacă tabelul ar cere zece rînduri de diferențe înainte ca numerele dintr-un rînd să devină egale, asta ar însemna că funcția generatoare conține puteri pînă la x^{10}.

În cazul de față sînt numai două rînduri, prin urmare funcția trebuie să fie pătratică. Datorită acestui fapt, o putem obține rapid prin metoda deja folosită în trucul descris la începutul capitolului.

Problema tăierii tortului are două interpretări. O putem considera o problemă abstractă de geometrie pură (un cerc ideal tăiat de drepte ideale), sau o problemă de geometrie aplicată (un tort real tăiat cu un cuțit real). Fizica este plină de situații de felul acesta care pot fi privite din două puncte de vedere, și care implică formule derivabile din datele experimentale, cu ajutorul calculului cu diferențe finite. Un exemplu celebru de formulă pătratică este formula pentru numărul maxim de electroni care pot ocupa fiecare „nivel" energetic al unui atom. Pe măsură ce ne îndepărtăm de nucleu, seria evoluează astfel: 0, 2, 8, 18, 32, 50, ... Primul rînd de diferențe este 2, 6, 10, 14, 18, ... Al doilea rînd este 4, 4, 4, 4, ... Aplicînd metoda din trucul „de citire a gîndului", obținem formula simplă $2n^2$ pentru numărul maxim de electroni care pot ocupa cel de al n-lea nivel.

Dar cum procedăm dacă funcția este de un ordin mai înalt? În aceste cazuri putem folosi o formulă remarcabilă, descoperită de Isaac Newton. Aceasta este aplicată în toate cazurile, indiferent de numărul de rînduri din tabel.

Formula lui Newton presupune că seria începe cu valoarea funcției care corespunde lui $n = 0$. Să numim această valoare a. Primul număr al primului rînd de diferențe este b, primul număr al rîndului următor este c, și așa mai departe. Expresia pentru cel de-al n-lea număr al seriei este

$$a + bn + \frac{cn(n-1)}{2} + \frac{dn(n-1)(n-2)}{2 \cdot 3} + \frac{en(n-1)(n-2)(n-3)}{2 \cdot 3 \cdot 4} \ldots$$

Expresia este continuată numai pînă cînd toți termenii următori devin zero. De exemplu, cînd este aplicată problemei tăierii tortului, mărimile a, b, c se înlocuiesc cu 1, 1, 1. (Restul expresiei este ignorat, deoarece toate rîndurile mai joase ale tabelului constau din zerouri; prin urmare, d, e, f ... au valoarea zero și toată partea expresiei care conține acești termeni nu contribuie cu nimic la sumă.) Obținem, în felul acesta, funcția pătratică $\frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n + 1$.

Înseamnă oare aceasta că am găsit astfel formula pentru numărul maxim de felii care pot fi obținute prin n tăieturi ale tortului? Din păcate, tot ce putem spune în acest punct este „probabil". De unde provine această nesiguranță? Din faptul că pentru orice serie finită de numere există o infinitate de funcții care pot genera acele numere. (Aceasta este tot una cu a spune că fiind dat un număr oarecare de puncte pe un grafic, prin ele se poate trasa o infinitate de curbe.) Să considerăm seria 0, 1, 2, 3, ... Care este termenul următor? O presupunere rezonabilă este 4. Într-adevăr, dacă aplicăm tehnica care tocmai a fost explicată, primul rînd de diferențe se va compune din 1, iar formula lui Newton ne spune că cel de-al n-lea termen al seriei este n. Dar și expresia

$$n + \frac{1}{24} n(n-1)(n-2)(n-3)$$

generează o serie care începe cu 0, 1, 2, 3, ... În cazul acesta seria continuă nu cu 4, 5, 6, ..., ci cu 5, 10, 21, ...

Cam în felul acesta se descoperă și legile în știință. Într-adevăr, metoda diferențelor poate fi deseori aplicată la fenomene fizice, în scopul de a „ghici" o lege a naturii. Astfel, să presupunem că un fizician cercetează pentru prima dată felul în care cad corpurile grele. El notează că, după o secundă, o piatră parcurge 5 m, după două secunde 20 m, după trei secunde 45 m etc. El își aranjează observațiile în felul următor:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & & 5 & & 20 & & 45 & & 80 \\ & 5 & & 15 & & 25 & & 35 & \\ & & 10 & & 10 & & 10 & & \end{array}$$

Măsurătorile ar putea, firește, să nu fie prea exacte, dar numerele din ultimul rînd nu vor diferi mult de 10, așa că fizicianul poate presupune că rîndul următor de diferențe constă din zerouri. Aplicînd formula lui Newton, el trage concluzia că distanța totală pe care cade piatra în n secunde este $5n^2$. Dar nimic nu este sigur în legătură cu această lege. Ea nu reprezintă altceva decît cea mai simplă funcție care corespunde unei serii finite de observații — curba de ordinul cel mai mic care poate fi trasată printr-o serie finită de puncte ale unui grafic. Este adevărat, legea este confirmată din ce în ce mai mult, pe măsură ce observațiile se acumulează, dar niciodată nu putem fi siguri că noi observații suplimentare nu vor cere modificarea legii.

În ceea ce privește tăierea tortului, deși ceea ce se studiază este mai curînd o structură matematică pură decît o comportare a naturii, situația este surprinzător de asemănătoare. Fiindcă după tot ceea ce știm pînă acum s-ar putea ca a cincea tăietură să nu ducă la cele

16 felii prezise de formulă. Un singur eșec de acest gen ar aduce căderea formulei, în timp ce nici cel mai mare număr de succese nu o poate confirma o dată pentru totdeauna. „Natura — spune George Polya — poate să răspundă prin «da», sau «nu» însă ea șoptește un răspuns, iar pe celălalt îl pronunță cu glas de tunet ; ea spune «da» condiționat, însă spune «nu» definitiv". Polya vorbește despre lumea reală, nu despre structuri matematice abstracte, dar este foarte curios că observația sa se aplică la fel de bine și la ghicirea funcțiilor prin metoda diferențelor finite. Matematicienii practică pe scară largă ghicitul, după o schemă deseori similară metodelor științifice inductive, iar Polya a scris o lucrare fascinantă, *Mathematics and Plausible Reasoning*[3] despre felul în care procedează ei.

Cîteva tatonări cu creionul și hîrtia arată că cinci tăieturi într-un tort duc într-adevăr la maximum 16 felii. Această prezicere reușită a formulei mărește probabilitatea ca formula să fie corectă. Dar pînă în clipa cînd va fi riguros *demonstrată* (ceea ce nu este prea greu, în acest caz), ea trăiește doar ca o presupunere rezonabilă. De ce atît în matematică, cît și în alte științe, se întîmplă atît de des ca formula cea mai simplă să fie și cea mai bună presupunere, aceasta este una dintre marile întrebări ale filozofiei moderne a științei. Măcar și pentru faptul că nimeni nu poate spune exact ce se înțelege prin „cea mai simplă formulă".

Iată acum cîteva probleme care sînt strîns legate de problema tăierii tortului și care pot fi abordate prin calculul cu diferențe finite. Găsiți mai întîi forma cea mai plauzibilă pentru formulă, apoi încercați să demonstrați formula prin metode deductive. Care este numărul maxim de felii care pot fi obținute prin n tăieturi simultane (în linie dreaptă) ale unei figuri plane în formă de Lună în creștere ? Cîte felii de budincă se pot obține cu n tăieturi plane simultane printr-o bucată cilindrică ? În cîte părți poate fi împărțit planul cu ajutorul unor cercuri de același diametru, care se intersectează ? Dar de diametre diferite ? Dar cu ajutorul unor elipse de dimensiuni diferite ? În cîte regiuni poate fi împărțit spațiul cu ajutorul unor sfere care se intersectează ?

Problemele recreaționale care implică permutări și combinări conțin deseori formule de ordin nu prea mare, care pot fi mai întîi ghicite corect prin metoda diferențelor finite, sperînd ca mai apoi vor putea fi și demonstrate. Avînd o rezervă nelimitată de scobitori de n culori diferite, cîte triunghiuri diferite pot fi formate pe o supra-

---

[3] G. Pólya, *Matematica și raționamentele plauzibile*, Editura Științifică, București, 1962. — *N.R.*

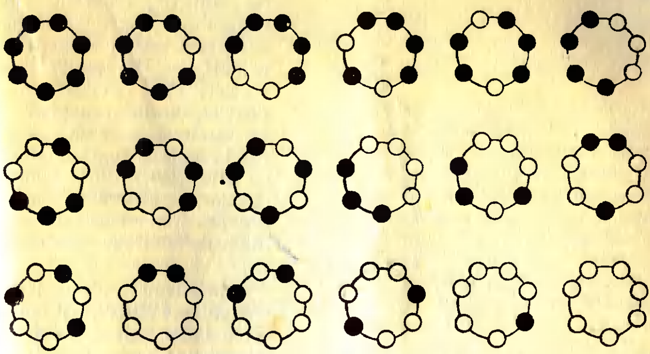


Fig. 126 Din mărgele de două culori pot fi formate 18 şiraguri diferite de cîte şapte mărgele

faţă plană, folosind trei scobitori pentru cele trei laturi ale triunghiului? (Reflexiile sînt considerate diferite, dar nu şi rotaţiile.) Cîte pătrate diferite? Cîte tetraedre diferite pot fi produse colorînd fiecare faţă cu o culoare diferită şi folosind n culori diferite? (Două tetraedre sînt identice dacă pot fi întoarse şi plasate faţă lîngă faţă, astfel ca feţele corespondente să fie de aceeaşi culoare.) Cîte cuburi cu n culori?

Bineînţeles, dacă o serie este generată de o funcţie care nu este un polinom de puterile variabilei, metoda diferenţelor finite cere ajutorul altor tehnici. De exemplu, funcţia exponenţială 2^n generează seria 1, 2, 4, 8, 16, ... Rîndul diferenţelor de ordinul întîi este tot 1, 2, 4, 8, 16, ..., aşa că procedeul de mai înainte nu ar duce nicăieri. Uneori, o situaţie aparent simplă duce la o serie care rezistă la toate încercările de a găsi o formulă generală. Un exemplu care a dat mult de furcă este problema şiragului de mărgele, din cartea de enigme a lui Henry Ernest Dudeney. Un şirag circular conţine n mărgele, negre sau albe. Cîte şiraguri diferite pot fi formate cu n mărgele? Pornind de la zero mărgele, seria este 0, 2, 3, 4, 6, 8, 13, 18, 30, ... (În fig. 126 sînt arătate cele 18 varietăţi diferite de şiraguri pentru $n = 7$). Bănuiesc că în această serie intervin de fapt două formule — una pentru n impar şi alta pentru n par — dar nu ştiu dacă ele pot fi obţinute prin metoda diferenţelor finite. „O rezolvare generală ...

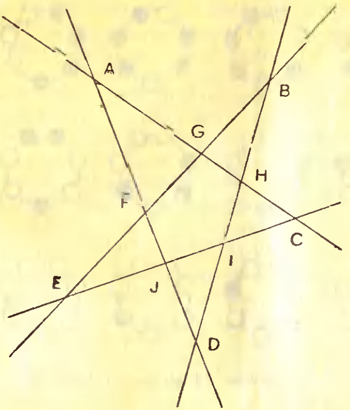


Fig. 127 Din cinci linii drepte se pot forma zece triunghiuri.

este dificilă, dacă nu chiar imposibilă", scrie Dudeney. Problema este echivalentă cu următoarea din teoria informaţiei: cîte cuvinte binare diferite, dar de o lungime dată, rămîn dacă se elimină, ca fiind identice, toate cuvintele cu o aceeaşi ordine ciclică a cifrelor, considerate fie de la dreapta spre stînga, fie că le luăm de la stînga spre dreapta?

O problemă mult mai simplă, cu care cititorii îşi pot încerca îndemînarea, mi-a fost trimisă de Charles B. Schorpp şi Dennis T. O'Brien, din Wernersville (Pennsylvania): care este numărul maxim de triunghiuri care pot fi construite cu ajutorul a n linii drepte? În fig. 127 se arată cum din cinci linii pot fi construite zece triunghiuri. Dar cîte pot fi construite din şase linii, şi care este formula generală? Formula poate fi găsită mai întîi prin metoda diferenţelor; apoi, cu puţină inspiraţie, nu este greu de arătat că formula este corectă.

ADAOS

Atunci cînd formula lui Newton este aplicată unor date obţinute experimental, deseori apare o anomalie pentru cazul zero. De exemplu, în volumul *Amuzamente matematice*, la p. 287, se dă formula pentru numărul maxim de felii care pot fi obţinute cu n tăieturi plane simultane într-un covrig. Formula este cubică:

$$\frac{n^3 + 3n^2 + 8n}{6}$$

şi poate fi obţinută aplicînd formula lui Newton unor rezultate obţinute experimental, dar ea pare să nu se aplice în cazul $n = 0$. Cînd un covrig nu este tăiat, există evident o singură „felie", pe cînd formula spune că nu trebuie să existe nici una. Pentru a face formula aplica-bilă, trebuie să definim „felia" ca o parte a covrigului *produsă prin tăiere*. Acolo unde există îndoieli asupra cazului zero, trebuie să operăm o extrapolare în tabelul cu diferențe, mergînd înapoi, și să admitem pentru cazul zero o valoare care produce primul număr dorit în ultimul rînd de diferențe.

Pentru a demonstra formula dată pentru numărul maxim de porții în care poate fi împărțit un tort (sau un cerc) cu ajutorul a n tăieturi liniare, să notăm mai întîi faptul că linia a n-a intersectează cele $n - 1$ linii trasate anterior. Aceste $n - 1$ linii împart planul în n regiuni. Cînd cea de-a n-a linie traversează aceste n regiuni, ea taie fiecare regiune în două părți, prin urmare linia a n-a adaugă la totalul precedent n regiuni. La început există o singură piesă. Prima tăietură adaugă încă o piesă (felie), a doua tăietură adaugă încă două felii, a treia tăietură adaugă încă trei felii și așa mai departe pînă la cea de a n-a tăietură, care adaugă încă n felii. Așadar, numărul total de felii este $1 + 1 + 2 + 3 + \cdots + n$. Suma $1 + 2 + 3 + \cdots + n$ este $\frac{1}{2}\,n(n - 1)$. La aceasta trebuie să adunăm 1 pentru a obține formula finală.

Problema șiragului de mărgele a fost dată de Dudeney ca problema nr. 275 din cartea sa *Puzzles and Curious Problems* (Enigme și probleme ciudate). John Riordan menționează și el problema la pagina 162 (problema nr. 37) a cărții sale *Introduction to Combinatorial Analysis* (Introducere în analiza combinatorie) (ed. „Wiley & Sons", 1958), indicînd soluția fără a da și formula. (Mai înainte, el discutase problema în articolul *Semnificația combinatorie a teoremei lui Pólya*, în „Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics", vol. 5, nr. 4, decembrie 1957, pp. 232–234.) Problema a fost mai tîrziu analizată minuțios — găsindu-i-se și unele aplicații surprinzătoare în teoria muzicii și în teoria circuitelor — de către Edgar N. Gilbert și John Riordan, în articolul *Tipuri de simetrie ale secvențelor periodice* din „Illinois Journal of Mathematics", vol. 5, nr. 4, decembrie 1961, pp. 657–665. Autorii dau următorul tabel pentru numărul de tipuri diferite de șiraguri de mărgele, formate din mărgele de două culori, cu una pînă la 20 de mărgele:

Numărul de mărgele	*Numărul de șiraguri de mărgele*
1	2
2	3
3	4
4	6
5	8

6	13
7	18
8	30
9	46
10	78
11	126
12	224
13	380
14	687
15	1 224
16	2 250
17	4 112
18	7 685
19	14 310
20	27 012

În paranteză fie spus, existenţa formulelor pentru problema şiragului de mărgele nu înseamnă automat că Dudeney nu a avut dreptate spunînd că nu există soluţie ; se poate ca el să fi spus doar că nu este posibil să se găsească o expresie polinomială pentru numărul de şiruri ca funcţie de n, astfel ca acest număr să poată fi calculat direct din formulă, fără ajutorul unui tabel conţinînd factorii primi. Deoarece formula conţine funcţia *Fi* a lui Euler[4], numărul de şiraguri trebuie calculat prin recurenţă[5]. Terminologia lui Dudeney nu este prea exactă, dar este posibil ca el să nu fi considerat formulele recursive drept „soluţii". Oricum, calculul cu diferenţe finite nu este nici într-un fel aplicabil acestei probleme şi se cunosc pentru ea doar formule recursive.

Mai multe zeci de cititori — prea mulţi pentru a-i putea cita aici — au trimis soluţii corecte ale problemei înainte ca formula lui Golomb să fi fost publicată ; unii dintre ei au dedus-o din lucrarea lui Riordan, iar alţii cu totul independent. Mulţi dintre ei au observat că atunci cînd numărul de mărgele este un număr prim (diferit de 2), formula care dă numărul de şiraguri devine foarte simplă :

$$\frac{2^{n-1}-1}{n} + 2^{\frac{n-1}{2}} + 1.$$

[4] Funcţia Fi (Φ) a lui Euler — o funcţie care ataşează fiecărui întreg mulţimea tuturor întregilor cu excepţia întregului dat şi care sînt primi în raport cu acesta. Numită astfel după matematicianul elveţian Leonhard Euler. — *N.T.*

[5] Formulă de recurenţă — o formulă care determină un termen al unui şir din unul sau mai mulţi termeni precedenţi. — *N.T.*

Următoarea scrisoare a lui John F. Gummere, director al Școlii „William Penn", din Philadelphia, a apărut în numărul din octombrie 1961 al revistei „Scientific American":

„Am citit cu mult interes articolul dv. asupra calculului cu diferențe finite. Mi-am dat seama că una dintre cele mai interesante aplicații ale formulei lui Newton este cea pe care am descoperit-o cu ani în urmă cu mult înainte de a lua cunoștință cu calculul acesta. Este vorba de aplicarea metodei diferențelor finite unei serii de puteri. Experimentînd cu anumite figuri, am observat că dacă se scriu o serie de pătrate, ca 4, 9, 16, 25, 36, 49, iar acestea se scad unul din altul, se obține o serie pe care o poți scădea din nou, ajungînd în cele din urmă la o diferență finită.

Așa că am încercat cu cuburi și puteri egale cu patru, reușind să deduc o formulă care arăta că dacă n este puterea, trebuie să scazi de n ori, ajungînd astfel la o diferență constantă egală cu factorial de n. Am cerut atunci părerea tatălui (care a fost mai mulți ani directorul Observatorului memorial „Strawbridge" de la Colegiul Haverford și profesor de matematică). El mi-a spus pe un ton foarte jovial: «Ia te uită, John! tocmai ai descoperit calculul cu diferențe finite!»"

RĂSPUNSURI

Cîte triunghiuri diferite pot fi formate cu n linii drepte? Sînt necesare cel puțin trei linii pentru fiecare triunghi, patru linii pentru a construi patru triunghiuri, cinci linii pentru a construi zece triunghiuri. Aplicînd calculul cu diferențe finite, se poate construi tabelul următor:

Numărul de linii	0	1	2	3	4	5
Numărul de triunghiuri	0	0	0	1	4	10
Diferențe de ordinul unu		0	0	1	3	6
Diferențe de ordinul doi		0	1	2	3	
Diferențe de ordinul trei			1	1	1	

Cele trei rînduri de diferențe indică o funcție cubică. Folosind formula lui Newton, se găsește funcția

$$\frac{1}{6}n(n-1)(n-2),$$

care generează seria 0, 0, 0, 1, 4, 10, ... și are prin urmare șanse serioase de a fi tocmai formula pentru numărul maxim de triunghiuri care pot fi construite cu n linii. Dar, cum am mai spus, aceasta este doar o conjectură, bazată pe un număr mic de verificări cu creionul și hîrtia. Ea poate fi verificată prin următorul raționament.

Liniile trebuie desenate astfel încît oricare două dintre ele să nu fie paralele, iar printr-un punct să nu se treacă mai mult de două. În acest fel, este sigur că fiecare linie va intersecta toate celelalte linii și că fiecare set de trei linii trebuie să formeze un triunghi. Nu este posibil pentru aceleași trei linii date să formeze mai mult decît un triunghi, așa că numărul de triunghiuri astfel formate este maxim. Problema este echivalentă, prin urmare, cu întrebarea: în cîte moduri diferite pot fi luate 3 linii din n? Teoria elementară a combinațiilor răspunde: exact numărul dat de formula obținută empiric mai înainte.

Solomon W. Golomb — matematicianul care a mai fost menționat cu ocazia discutării poliominourilor — a fost foarte amabil și mi-a trimis soluția dată de el problemei șiragurilor de mărgele. Problema consta în a găsi o formulă pentru numărul de șiraguri diferite care pot fi formate cu n mărgele, presupunînd că mărgelele sînt de două culori și considerînd că diferitele rotații și reflexii ale șiragului nu sînt varietăți distincte. Formula se dovedește a fi cu mult peste puterile metodei diferențelor.

Să notăm cu d_1, d_2, d_3, ... divizorii lui n (inclusiv 1 și n). Pentru fiecare divizor găsim așa-numita funcție Fi a lui Euler, pe care o notăm cu $\Phi(d)$. Această funcție este numărul de întregi pozitivi mai mici sau egali cu d, care nu au un divizor comun cu d. Se presupune că 1 este un astfel de întreg, dar nu și d. Astfel, $\Phi(8)$ este 4, deoarece 8 are următorii întregi care sînt primi în raport cu el: 1, 3, 5 și 7. Prin convenție $\Phi(1)$ este luat egal cu 1. Funcțiile Fi ale lui Euler pentru 2, 3, 4, 5, 6 și 7 sînt 1, 2, 2, 4, 2 și 6, respectiv. Fie a numărul de culori în care sînt colorate mărgelele. Pentru șiraguri cu un număr impar de mărgele, formula care dă numărul de șiraguri diferite cu n mărgele este următoarea:

$$\frac{1}{2n}\left[\Phi(d_1)\cdot a^{\frac{n}{d_1}}+\Phi(d_2)\cdot a^{\frac{n}{d_2}}+\ldots+n\cdot a^{\frac{n+1}{2}}\right].$$

Atunci cînd n este par, formula este următoarea:

$$\frac{1}{2n}\left[\Phi(d_1)\cdot a^{\frac{n}{d_1}}+\Phi(d_2)\cdot a^{\frac{n}{d_2}}+\ldots+\frac{n}{2}\cdot(1+a)\cdot a^{\frac{n}{2}}\right].$$

Punctele reprezintă operația de înmulțire. Golomb a exprimat aceste formule într-o formă mai comprimată și mai tehnică, dar cred că cele date aici pot fi mai ușor înțelese. Ele sînt generale, în sensul că pot fi aplicate pentru mărgele colorate în orice număr a de culori.

Formulele care răspund celorlalte întrebări ale capitolului sînt:

1. Numărul de regiuni ale unei Luni în creştere, care rezultă din n tăieturi drepte este dat de

$$\frac{n^2 + 3n}{2} + 1.$$

2. Numărul de felii de budincă obţinute prin n tăieturi plane:

$$\frac{n^3 + 5n}{6} + 1.$$

3. Numărul în care este împărţit planul prin intersectarea a n cercuri:

$$n^2 - n + 2.$$

4. Numărul de regiuni în care este împărţit planul prin intersectarea a n elipse:

$$2n^2 - 2n + 2.$$

5. Numărul de regiuni ale spaţiului realizate prin intersectarea a n sfere:

$$\frac{n(n^2 - 3n + 8)}{3}.$$

6. Numărul de triunghiuri care pot fi formate din scobitori de n culori:

$$\frac{n^3 + 2n}{3}.$$

7. Numărul de pătrate care pot fi formate din scobitori de n culori:

$$\frac{n^4 + n^2 + 2n}{4}.$$

8. Numărul de tetraedre cu feţele de n culori:

$$\frac{n^4 + 11n^2}{12}.$$

9. Numărul de cuburi cu feţele de n culori:

$$\frac{25n^4 - 120n^3 + 209n^2 - 108n}{6}.$$

REFERINȚE SUPLIMENTARE

1. *Sistemul binar*

Abaca logică de W. Stanley Jevons, în *The Principles of Science*, Macmillan 1874, Londra, cap. 6, pp. 104–105; reeditată în ediție de buzunar, Dover, 1958

Doi de Constance Reid, in *From Zero to Infinity*, ediție revăzută, Thomas Y. Crowell, 1960, cap. 2.

Cîteva jocuri binare de R. S. Scorer, P. M. Grundy și C. A. B. Smith, în „Mathematical Gazette", vol. 28, 1944, pp. 96–103.

Cum să numărați pe degete de Frederik Pohl, în *Digits and Dastards*, Ballantine, 1966.

Sortarea cartelelor și sistemul binar de John Milholland, în „Mathematics Teacher", vol. 44, 1951, pp. 312–314.

O mașină de adunat cu cartele perforate, pe care o pot construi elevii de Larew M. Collister, în „Mathematics Teacher", vol. 52, octombrie 1959, pp. 471–473

2. *Teoria grupurilor și împletiturile*

Teoria împletiturilor de Emil Artin, în „Annals of Mathematics", seria a doua, vol. 48, nr. 1, 1947, pp. 101–126.

Împletituri și permutări de Emil Artin, în „Annals of Mathematics", seria a doua, vol. 48, 1947, pp. 643–649.

Teoria împletiturilor de Emil Artin, în „The American Scientist", vol. 38, nr. 1, 1950, pp. 112—115; retipărit în „Mathematics Teacher", vol. 52, nr. 5, 1959, pp. 328—333. O discuție mai puțin tehnică a rezultatelor obținute în cele două lucrări dinainte.

Asupra problemei coardei, a lui Dirac de M. H. A. Newman, în „The Journal fo the London Mathematical Society", vol. 17, partea a 3-a, nr. 67, 1942, pp. 173—177.

Asupra teoriei grupurilor:

The Theory of Groups de Marshall Hall Jr., Macmillan, 1959.

Groups de Georges Papy, St. Martin's Press, 1964.

The Theory of Groups: An Introduction de Joseph J. Rotman, Allyn and Bacon, 1965.

Teoria grupurilor pentru învățămîntul secundar de Richard A. Dean, în „Mathematics Teacher", vol. 55, nr. 2, 1962, pp. 98—105.

4. *Jocurile și enigmele lui Lewis Carroll*

The Lewis Carroll Picture Book, editată de Stuart Dodgson Collingwood, Unwin, 1899; retipărită în ediție de buzunar, sub titlul *Divertismente și jocuri ale lui Lewis Carroll*, Dover, 1961.

Symbolic Logic and the Game of Logic de Lewis Carroll, Dover, 1958.

Pillow Problems and a Tangled Tale de Lewis Carroll, Dover, 1958.

Lewis Carroll și o enigmă din geometrie de Warren Weaver, în „American Mathematical Monthly", vol. 45, 1938, pp. 234—236.

Manuscrisele matematice ale lui Lewis Carroll de Warren Weaver, în „Proceedings of the American Philosophical Society", vol. 98, 15 octombrie 1954, pp. 377—381.

Lewis Carroll, matematicianul de Warren Weaver, în „Scientific American", aprilie 1956, pp. 116—128.

Matematica — văzută în oglindă de Margaret F. Willerding, în „Scripta Mathematica", vol. 25, nr. 3, noiembrie 1960, pp. 209—219.

The Annotated Alice de Martin Gardner, Clarkson Potter, 1960; retipărită în ediție de buzunar de Forum Books, 1963, și de Penguin, 1965.

*The Annotated Snark** de Martin Gardner, Simon and Schuster, 1962.

---

* Snark — un animal misterios, imaginat de Lewis Carroll. Numele provine din contragerea cuvintelor *snake* (șarpe) și *shark* (rechin). — *N. T.*

5. *Tăieturi din hîrtie*

Paper capers de Gerald M. Loe, Ireland Magic Co., 1955.

A Miscellany of Puzzles de Stephen Barr. Crowell, 1965. Cartea conține multe probleme inedite cu hîrtie tăiată sau îndoită.

Equivalent and Equidecomposable Figures de V. G. Beltyanskii. D.C. Heath, 1963. O broșură tradusă din limba rusă, după o ediție din 1956.

Geometric Dissections de Harry Lindgren, Van Nostrand, 1964. Lucrarea cea mai completă asupra subiectului.

6. *Jocuri de masă*

A History of Board Games other than Chess, de Harold James Ruthven Murray. Oxford Press, 1952.

Board and Table Games de R. C. Bell, Oxford Press, 1960.

Asupra jocului *Rithmomachy*:

Rithmomachia — marele joc medieval al numerelor de David Eugene Smith și Clara C. Eaton, în *Number Games and Number Rhymes*, New York, Teachers College, Columbia University, 1914, pp. 29—38. Retipărit din „American Mathematical Monthly", aprilie 1911.

Jocul pitagoreic al lui Boissière de John F. C. Richards, în „Scripta Mathematica", vol. 12, nr. 3, septembrie 1946, pp. 177—217.

Vechiul joc al Rithmomachiei de Charles Leete, în „Engineering and Science Review" (editată de Institutul Case), ianuarie 1960, pp. 18—20.

Asupra șahului oriental:

Korean Games, with Notes on the Corresponding Games of China and Japan de Stewart Culin, University of Pennsylvania, 1895. Reeditată în 1958, sub titlul *Games of the Orient*, de Charles E. Tuttle.

A Manual of Chinese Chess de Charles F. Wilkes, Yamato Press, San Francisco, 1952.

Japanese Chess, the Game of Shogi de E. Ohara, Bridgeway (Tuttle) Press, 1958.

Asupra șahului „imaginativ":

Chess Eccentricities de maiorul George Hope Verney, Longmans, Green and Co., Londra, 1895. Cea mai bună lucrare în limba engleză.

Șahul imaginativ de Maurice Kraitchik, în *Mathematical Recreations*, Dover, 1953, pp. 276–279.

Variațiuni ale șahului de V. R. Parton, în „The New Scientist" (săptămînal englez), 27 mai 1965, p. 607.

Les jeux d'échecs non orthodoxes de Joseph Boyer, publicată de autor, Paris, 1951.

Nouveaux jeux d'échecs non orthodoxes de Joseph Boyer, publicată de autor, Paris, 1954.

Les jeux de dames non orthodoxes de Joseph Boyer, publicată de autor, Paris, 1956.

Asupra jocului *reversi*:

A Handbook of Reversi, ed. Jacques & Son, 1888. O cărțulie cuprinzînd regulile jocului autorizată de Lewis Waterman și vîndută o dată cu jocul.

The Handbook of Reversi, ed. F. H. Ayres, 1889. O altă cărțulie de reguli, scrisă de inventatorul rival John W. Mollett și difuzată de producătorul rival al jocului.

*Reversi and Go Bang** de „Berkeley" (W. H. Peel), F. A. Stokes Co., New York, 1890. O carte de 72 de pagini, autorizată de Waterman. Cea mai bună lucrare asupra jocului.

Reversi de Alice Howard Cady, American Sports Publishing Co., New York, 1896. O carte de 44 de pagini, în esență o ediție prescurtată a celei dinainte.

Reversi de „Profesorul Hoffmann" (Angelo Lewis), în *The Book of Table Games*, George Routledge and Sons, Londra, 1894, pp. 611–623.

7. *Împachetarea sferelor*

Într-o clipire din ochi de Edwin B. Matzke, în „Bulletin of the Torrey Botanical Club", vol. 77, nr. 3, mai 1950, pp. 222–227.

Împachetarea compactă și spuma de H. S. M. Coxeter, în „Illinois Journal of Mathematics", vol. 2, nr. 48, 1958, pp. 746–758. Articolul cuprinde o bibliografie de 30 de lucrări mai vechi.

Împachetarea sferelor egale de C. A. Rogers, în „Proceedings of the London Mathematical Society", vol. 8, 1958, pp. 609–620.

Umplerea spațiului cu sfere egale de H. S. M. Coxeter, în „Matematika", vol. 6, 1959, pp. 147–157.

---

* Go-bang — joc japonez, care se joacă pe o masă de *go*. Fiecare dintre cei doi adversari, jucînd alternativ, încearcă să plaseze cinci piese într-un rînd. — *N. T.*

Împachetarea compactă a sferelor egale de H. S. M. Coxeter, în *Introduction to Geometry*, Wiley, 1961, pp. 405—411.

Împachetarea regulată simplă a sferelor, în trei dimensiuni de Ian Smalley, în „Mathematics Magazine", noiembrie 1963, pp. 295—300.

Regular Figures de L. Fejes-Toth, Macmillan, 1964, pp. 288—307.

8. *Numărul transcendent Pi*

Famous Problems of Elementary Geometry de Felix Klein, Ginn and Co., 1897. Reeditată în 1930 de ed. Stechert; poate fi găsită în mod curent în ediție de buzunar (Dover).

Istoria și transcendența lui Pi de David Eugene Smith, în *Monographs on Topics of Modern Mathematics*, editată de J.W.A. Young, Longmans, Green, 1911; ediție de buzunar Dover, 1955.

Squaring the Circle: A History of the Problem de E. W. Hobson, Cambridge, 1913; Chelsea, 1953.

Cuadratura cercului de Heinrich Tietze, în *Famous Problems of Mathematics*, capitolul 5, Graylock Press, 1965 (traducere după ediția germană revizuită din 1959).

Lunga, lunga cale a lui Pi de Philip J. Davis, în *The Lore of Large Numbers*, Random House New Mathematical Library, 1961, cap. 17.

Numărul Pi de H. von Baravalle, în „Mathematics Teacher", vol. 45, mai 1952, pp. 340—348.

Circumetrica de Norman T. Gridgeman, în „The Scientific Monthly", vol. 77, nr. 1, iulie 1953, pp. 31—35.

Asupra calculării zecimalelor lui Pi:

Contributions to Mathematics, comprising chiefly the rectification of the circle to 607 places of decimals de William Shanks, Londra, 1853.

Prelucrare statistică a valorilor primelor 2000 de zecimale ale numerelor e și π, obținute la calculatorul ENIAC de N. C. Metropolis, G. Reitwiesner și J. von Neumann, în *Mathematical Tables and Other Aids to Computation*, 1950, vol. 4, pp. 109—111.

Evoluția aproximărilor zecimale extinse pentru numărul Pi de J. W. Wrench, jr., în „The Mathematics Teacher", decembrie 1960, pp. 644—649.

Calculul lui Pi cu 100 000 de zecimale de Daniel Shanks și John W. Wrench, jr., în „Mathematics of Computation", vol. 16, nr. 77, ianuarie 1962, pp. 76—99. Sînt incluse tabele care dau primele 100 000 de zecimale ale numărului Pi.

Asupra disputei dintre Hobbes şi Wallis:

Certurile dintre Hobbes si dr. Wallis, matematicianul de Isaac Disraeli, în *Quarrels of Authors*, Londra, 1814.

Hobbes de George Croom Robertson, William Blackwood, Londra, 1936, pp. 167—185.

The Mathematical Works of John Wallis de Joseph F. Scott, Taylor and Francis, 1938.

9. *Victor Eigen, matemagicianul*

Mathematics, Magic and Mystery de Martin Gardner, Dover, 1956.

Mathematical Magic de William Simon, Scribner's, 1964.

Curbe închise care se autointersectează de Hans Rademacher şi Otto Toeplitz, în *Despre numere şi figuri*, Ed. Ştiinţifică, Bucureşti, 1968, cap. 10.

10. *Teorema hărţii în patru culori*

The Four Color Problem de Philip Franklin, în „Scripta Mathematica Library", nr. 5, 1941.

Ce este matematica? de Richard Courant şi Herbert Robbins, Ed. Ştiinţifică, Bucureşti, 1969. Vezi *Problema celor patru culori*, pp. 263—264; *Teorema celor cinci culori*, pp. 281—283.

Problema regiunilor vecine, problema coardei şi problema culorilor de David Hilbert şi S. Cohn-Vossen, în *Geometry and the Imagination*, Chelsea, 1952 (tradusă după ediţia germană din 1932), pp. 333—340.

Problema celor patru culori de Hans Rademacher şi Otto Toeplitz, în *Despre numere şi figuri*, Ed. Ştiinţifică, Bucureşti, 1968, cap. 12.

Introduction to Geometry de H. S. M. Coxeter, Wiley, 1961, pp. 385—395.

Intuitive Concepts in Elementary Topology de Bradford Henry Arnold, Prentice-Hall, 1962. Vezi *Problema celor patru culori*, pp. 43—55; *Teorema celor şapte culori pe un tor*, pp. 85—87.

Colorarea hărţilor de Sherman K. Stein, în *Mathematics: The Man-made Universe*, W. H. Freeman, 1963, pp. 175—199.

Colorarea hărţilor de Oystein Ore, în *Grafele şi aplicaţiile lor*, Ed. Ştiinţifică, Bucureşti, 1968.

Induction in Geometry de L. I. Golovina și I. M. Yaglom, D. C. Heath, 1963, pp. 22–44.

Famous Problems of Mathematics de Heinrich Tietze, Graylock Press, 1965 (traducere după ediția germană din 1959). Vezi *Despre domeniile vecine*, pp. 64–89; *Problema celor patru culori*, pp. 226–242.

Probleme de colorare a hărților de H. S. M. Coxeter, în „Scripta Mathematica", vol. 23, nr. 1–4, 1957, pp. 11–25.

Colorarea hărților de un colectiv de la Facultatea de matematică a Universității din Chicago, în „Mathematics Teacher", decembrie 1957, pp. 546–550.

Problema hărții în patru culori, 1840–1890 de H. S. M. Coxeter, în „Mathematics Teacher", aprilie 1959, pp. 283–289.

Insula celor cinci culori de Martin Gardner, în *Future Tense*, o lucrare editată de Kendell Foster Crossen, Greenberg, 1952; reeditată în *Fantasia Mathematica*, editată de Clifton Fadiman, Simon and Schuster, 1958.

13. *Poliominouri și dreptunghiuri perfecte*

Poliominourile de Martin Gardner, în *The „Scientific American" Book of Mathematical Puzzles and Diversions*, Simon and Schuster, 1959, cap. 13*.

Polyominoes de Solomon W. Golomb, Scribner's, 1965. O listă bibliografică de la sfîrșitul cărții citează toate referințele importante din cărți sau reviste.

14. *Defăimătorii lui Euler*

Problema celor 36 de ofițeri de G. Tarry, în „Comptes Rendus de l'Association française pour l'avancement des sciences naturelles", vol. 1, 1900, pp. 122–123; vol. 2, 1901, pp. 170–203.

Asupra falsității conjecturii lui Euler despre inexistența a două pătrate latine ortogonale de ordinul $4t + 2$ de R. C. Bose și S. S. Shrikhande, în „Proceedings of the National Academy of Sciences", vol. 45, nr. 5, mai 1959, pp. 734–737.

Pătrate latine ortogonale de E. T. Parker, în „Proceedings of the National Academy of Sciences", vol. 45, nr. 6, iunie 1959, pp. 859–862.

O importantă conjectură matematică propusă acum 177 de ani este infirmată de John A. Osmundsen, în „New York Times" din 26 aprilie 1959, p. 1.

* Vezi ediția în limba română, Editura Științifică, București, 1968. — *N. R.*

Asupra construcției unor seturi de pătrate latine reciproc ortogonale și falsității conjecturii lui Euler de R. C. Bose și S. S. Shrikhande, în „Transactions of the American Mathematical Society", vol. 95, 1960, pp. 191—209.

Noi rezultate în construcția unor pătrate latine reciproc ortogonale și falsitatea conjecturii lui Euler de R. C. Bose, S. S. Shrikhande și E. T. Parker, în „Canadian Journal of Mathematics", vol. 12, 1960, pp. 189—203.

Un studiu cu ajutorul calculatorului al pătratelor latine ortogonale de ordinul 10 de E. T. Parker, în „Computers and Automation", august 1962, pp. 1—3.

Tabele ortogonale de Sherman K. Stein, în *Mathematics: The Man-made Universe*, W. H. Freeman, 1963, cap. 12.

Pătrate latine ortogonale de Herbert John Ryser, în *Combinatorial Mathematics*, Mathematical Association of America, 1963, cap. 7.

Asupra planurilor proiective finite:

Aritmetica finită și geometriile de W. W. Sawyer, în *Prelude to Mathematics*, Penguin, 1955, cap. 13.

Planurile finite și pătratele latine de Truman Botts, în „Mathematics Teacher", mai 1961, pp. 300—306.

Planuri finite pentru elevi de A. A. Albert, în „Mathematics Teacher", martie 1962, pp. 165—169.

Planul proiectiv general și planurile proiective finite de Harold L. Dorwart, în *The Geometry of Incidence*, Prentice-Hall, 1966, secț. IV.

Asupra folosirii pătratelor greco-latine în planificarea experimentelor:

Analysis and Design of Experiments de H. B. Mann, Dover, 1949.

The Design of Experiments de R. A. Fisher, Hafner, 1951.

Experimental Design and Its Statistical Basis de David John Finney, University of Chicago Press, 1955.

Planning of Experiments de D. R. Cox, John Wiley & Sons, 1958.

15. *Elipsa*

Curbele și suprafețele cele mai simple de David Hilbert și S. Cohn-Vossen, în *Geometry and the Imagination*, Chelsea, 1956, pp. 1—24.

A Book of Curves de E. H. Lockwood, Cambridge University Press, 1961.

*Ceva nou în legătură cu mingea-8** de Ronald Bergman, în „Recreational Mathematics Magazine", ianuarie-februarie 1964, pp. 17—19. Asupra jocului Elliptipool

16. *Cele 24 de pătrate colorate și 30 de cuburi colorate*

New Mathematical Pastimes de Percy Alexander MacMahon, Cambridge University Press, 1921.

Das Spiel der 30 Bunten Würfel de Ferdinand Winter, Leipzig, 1934. O broșură de 128 de pagini, consacrată în întregime celor 30 de cuburi colorate.

Mathematical Recreation de Maurice Kraitchik, Dover, 1953. Vezi la p. 312 un joc care folosește 30 de pătrate care epuizează aranjamentele a patru din cinci culori, iar la p. 313 cîteva probleme cu șaisprezece pătrate care epuizează aranjamentele a două culori din opt.

Problema cuburilor colorate de W. R. Rouse Ball, în *Mathematical Recreations and Essays*, ediție revăzută, Macmillan, 1960, pp. 112—114.

Blocuri colorate și *Construcții cu blocuri colorate* de Aniela Ehrenfeucht, în *The Cube Made Interesting*, Pergamon Press, 1964, pp. 46—66. Cartea este o traducere după ediția în limba polonă din 1960.

Construcții cu cuburi colorate de Paul B. Johnson, în „American Mathematical Monthly", vol. 63, nr. 6., iunie-iulie 1956, pp. 392—395.

Cubeb de L. Vosburgh Lyons, în *Ibidem*, nr. 12, decembrie 1957, pp. 8—9.

Poliedre colorate — o problemă de permutări de Clarence R. Perisho, în „Mathematics Teacher", vol. 35, nr. 4, aprilie 1960, pp. 253—255.

18. *Jocul lui Gale și alte jocuri*

Despre jocul lui Gale:

*The 2nd „Scientific American" Book of Mathematical Puzzles and Diversions*** de Martin Gardner, Simon and Schuster, 1961, pp. 84—87**.

O soluție a jocului lui Shannon de Alfred Lehman, în „Journal of the Society of Industrial Applied Mathematics", vol. 12, nr. 4, decembrie 1964, pp. 687—725.

Asupra jocului *halma*:

The Book of Table Games de „Profesorul Hoffmann" (Angelo Lewis), George Routledge and Sons, 1894, pp. 604—607.

* Mingea-8 — minge folosită, în jocul *pool* și care poartă numărul 8. — *N.T.*

** Vezi ediția în limba română, Editura Științifică, București, 1968. — *N.R.*

A History of Board Games de H. J. R. Murray, Oxford University Press, 1952, pp. 51—52.

20. *Calculul cu diferențe finite*

The Calculus of Finite Differences de Charles Jordan, Chelsea, 1947.

Numerical Calculus de William Edmunds Milne, Princeton University Press, 1949.

The Calculus of Finite Differences de L. M. Milne-Thomson, Macmillan, 1951.

An Introduction to the Calculus of Finite Differences and Difference Equations de Kenneth S. Miller, Henry Holt, 1960.