L
LYCEUM

Colecţia LYCEUM

Ilustraţia copertei: GH. MARINESCU

Dr. VIOREL GH. VODĂ

Triunghiul-ringul cu trei colțuri

Cuvînt înainte de Acad. GH. MIHOC

EDITURA ALBATROS — BUCUREȘTI — 1979

„Pe linie de cercetare, geometria cuprinde astăzi domenii abstracte foarte generale, dar geometria elementară rămîne foarte importantă în învățămînt fie prin aplicațiile ei directe diverse, fie ca o verigă în înțelegerea problemelor moderne de teoria spațiilor generalizate, care la rîndul lor au aplicații în tehnică și fizica teoretică."

N.N. MIHĂILEANU[1]

[1] M i h ă i l e a n u, N. N., *Lecții complementare de geometrie*. Editura didactică și pedagogică, București, 1976, pp. 222–223.

Cartea de față a constituit pentru mine o surpriză. Autorul este deja cunoscut cititorilor din țara noastră printr-o lucrare de inițiere în știința statisticii, publicată în colecția „Sinteze Lyceum" (*Gîndirea Statistică — un mod de gîndire al viitorului*, Edit. Albatros, 1977).

Stilul vioi, atractiv era una din caracteristicile lucrării citate.

Abordînd un subiect atît de diferit, nu am crezut la început că tînărul statistician va reuși să reediteze cu același succes, atractivitatea atît de necesară unei lucrări destinate cititorului atît de pretențios care este tînăra generație.

Personal, mărturisesc că am parcurs *Triunghiul — ringul cu trei colțuri* ca pe un roman de aventuri de bună calitate: nu l-am lăsat din mîini pînă la ultima pagină. Aceasta este o dovadă în primul rînd a realului talent literar cu care este scrisă prezenta carte de geometrie sintetică. Pe de altă parte, materialul original inclus, elementele istorice, modul de prezentare, fac din această lucrare o carte cu adevărat utilă elevilor, putînd fi folosită ca auxiliar prețios în pregătirea școlară cît și pentru diferite concursuri în care geometria sintetică intervine în probele respective.

După cum am mai spus, autorul — deși azi cunoscut cercetător în domeniul statisticii matematice, a debutat ca tînăr matematician în domeniul geometriei sintetice: între anii 1960—1963, paginile „Gazetei Matematice" includeau aproape în fiecare număr, articole, note, probleme originale sau rezolvări datorate statisticianului de astăzi.

Experiența unei rodnice activități la această minunată revistă de matematici elementare își spune cuvîntul. Cărți de acest gen sînt greu de scris: ele cer în primul rînd pasiune pentru subiectul abordat, dragoste și înțelegere pentru cititorul căruia îi sînt adresate; convingerea că slova scrisă trebuie să contribuie la instruirea și educarea tinerilor în spiritul muncii, spirit ce caracterizează — în lumina vie a documentelor Partidului nostru fiecare om al muncii din țara noastră.

Acad. GH MIHOC

Memoriei tatălui meu
Gheorghe Vodă (1898—1952)

DIN PARTEA AUTORULUI

Matematica așa-numită „elementară" are în țara noastră o veche tradiție. Este semnificativ să menționăm că „Gazeta Matematică" apare practic neîntrerupt din anul 1895, cînd un grup de entuziaști în frunte cu Vasile Cristescu, Alexandru G. Ioachimescu, Ion Ionescu și Gheorghe Țițeica au reușit înființarea unei reviste de matematică menită a deveni un avanpost în viața culturală a țării.

De-a lungul timpului, „Gazeta Matematică" a creat o adevărată pepinieră de talentați matematicieni și a trezit un interes viu, emulativ pentru știința cu faima de „cea mai aridă".

Dacă urmărim tendințele care au caracterizat activitatea „Gazetei Matematice" și a surorilor ei mai mici și anume „Revista Matematică din Timișoara" (RMT), „Pitagora" sau „Pozitiva" — pentru a nu cita aici decît pe cele mai cunoscute, se constată o preferință accentuată pentru partea „clasică" a matematicii: geometrie, algebră, teoria numerelor, analiză matematică și trigonometrie.

Între aceste ramuri, geometria sintetică a ocupat un loc aparte datorită în primul rînd frumuseții ei intrinseci. În al doilea rînd, din punct de vedere didactic, geometria are față de celelalte ramuri — avantajul imaginii — care joacă din punct de vedere psihologic un rol important în formarea raționamentului abstract, matematic.

Chiar și în epoca actuală, cînd în revistele destinate tineretului se constată o adevărată „invazie" a teoriei structurilor algebrice, a teoriei probabilităților și statisticii matematice, a teoriei mulțimilor etc., geometria sintetică — deși are posibilităţi limitate — după cum spunea profesorul N.N. Mihăileanu [13], nu poate fi eliminată din ansamblul cunoaşterii şi din didactica generală.

Sensul care trebuie atribuit ideii de mai sus este următorul: un matematician nu are dreptul să se lase „prins în ringul cu trei colţuri". Geometria triunghiului nu poate constitui un scop în sine pentru o cercetare matematică de o viaţă. Dar rolul geometriei triunghiului este mult mai important decît pare la prima vedere, cînd unii dintre noi sînt tentaţi să-l considere „un joc secund". Ea este una din ramurile matematicii elementare intens folosită în teoria mecanismelor (vezi [13]). Este cunoscut de asemenea procedeul numit „triangulaţie", prin care se efectuează măsurarea unor suprafeţe de teren. Problemele de maxim şi minim legate de triunghi au nebănuite aplicaţii în fizică şi construcţii etc.

Desigur, în toate aceste domenii, geometria triunghiului ca şi orice altă branşă de matematică este un element auxiliar. Dar aici, acest element auxiliar deţine una din importantele „virtuţi ale matematicii" de care vorbea acad. Gh. Mihoc (vezi „Scînteia", 5 dec. 1976) şi anume formarea unei gîndiri corecte şi clare prin intermediul raţionamentului abstract şi al imaginii concrete.

Literatura românească de specialitate este deosebit de bogată în ceea ce priveşte geometria sintetică.

Lucrarea de faţă, deşi concepută la stilul „romanesc", conţine o bogată informaţie, de multe ori originală asupra domeniului abordat. Sînt incluse în cursul expunerii în mod deliberat variate probleme alese, majoritatea din revistele româneşti, iar capitolul V constituie de fapt o „culegere de probleme concentrată" asupra geometriei triunghiului.

Rolul tuturor lucrărilor destinate tineretului este acela de a răspunde pe deplin prevederilor Programului Partidului Comunist Român de făurire a societăţii socialiste multilateral dezvoltate şi înaintare a României spre comunism. Astfel, după cum se subliniază în acest istoric document, în ţara noastră se acţionează intens pentru „realizarea unui profil larg al liceelor, al învățămîntului general, reducîndu-se în continuare fărîmițarea specialităților, astfel ca absolventul de liceu să aibă cunoștințe multilaterale pentru a putea trece cînd apare necesitatea, în diferite domenii de activitate ale industriei, agriculturii, economiei și în alte sectoare ale societății noastre socialiste." (*Programul Partidului Comunist Român de făurire a societății socialiste multilateral dezvoltate și înaintare a României spre comunism*, Editura politică, București, 1975, p. 94).

INTRODUCERE

(sau cîte ceva despre geometrie)

„Ring (SPORT), platformă pătrată, special amenajată, pe care se dispută meciurile de box. R. este ridicat la 0,75—1,25 m deasupra solului, are o suprafață care variază între 25 și 36 m^2 și este înconjurat cu trei rînduri de corzi“ (Dicționar Enciclopedic Român, *vol. IV, Q—Z, Editura politică, București, 1966, p. 152*)

Ringul despre care va fi vorba în cele ce urmează este ceva mai pașnic, deși în interiorul lui s-au dat și se dau cu fiecare generație bătălii grele.

Misterul — dacă a existat cumva vreunul — e risipit prin însăși specificarea „colțurilor“. Titlul de roman polițist ascunde de fapt o carte de matematică. Mai precis, este o carte de geometrie sintetică. Iar acum nu este deloc greu de ghicit că inculpatul nostru este cel mai „sărac“ dintre poligoane.

Triunghiul...

Nu l-am considerat de prea multe ori prieten. Întotdeauna s-a găsit să ne facă în necaz cu vreun loc geometric sau cu vreo concurență de drepte ciudate. Ca să nu mai vorbim de cazul cînd ni se cerea să-l construim aproape din nimic — cu o mediană, o înălțime și un unghi.

Am răsuflat ușurați cînd am descoperit geometria analitică, mulțumindu-i de multe ori lui Descartes — izbăvitorul de „teroarea inspirației“.

Și totuși, perfidul ring — odată ce te-a prins între corzile lui — chiar dacă scapi, te atrage fără voie. E ca o junglă sau ca aerul tropicelor: ajunge să-l respiri o singură dată pentru a-i simți mereu lipsa cînd nu-l mai ai.

Că lucrurile stau așa, că nu e numai o imagine poetică născută din simpatia noastră (cu totul subiectivă, dacă putem spune așa!) pentru vedeta geometriei elementare, o dovedesc marii noştri matematicieni şi mulţi alţii de pe alte meleaguri, care în clipe de răgaz, retraşi pentru o clipă din vîltoarea propriului lor domeniu specific, s-au lăsat captaţi de ringul cu trei colţuri.

Traian Lalescu (1882—1929) — as al teoriei ecuaţiilor integro-diferenţiale este poate cel mai pregnant exemplu. El creează chiar o teorie a unor triunghiuri speciale şi scrie şi o carte intitulată *Geometria triunghiului* (vezi bibliografia, [8]).

Victor Thebault (Belgia), Jacques Hadamard (Franţa), Fr. Morley (S.U.A.), D.I. Perepiolkin (U.R.S.S.), sînt numai cîteva nume care au gravitat în jurul ABC — ului...

Probabil că această magie a geometriei datează din timpuri imemoriale. Azi, sîntem obişnuiţi să considerăm numerele ca element primordial, ca punct de pornire a oricărei judecăţi matematice. Şi totuşi, omul s-a lovit la început de forme. Forme, care chiar dacă nu erau „geometrice" în sensul dat de noi astăzi, conţineau primele elemente de geometrie. Luna plină a sugerat probabil cercul, munţii — corpurile poliedrice, orizontul — dreapta, iar constelaţiile — poligoanele.

Istoria numerelor este mult mai tînără, originea ei izvorînd şi din necesitatea de a măsura aceste forme.

Revenind din natură în societatea umană, constatăm imediat că agricultura şi construcţiile au fost primele „generatoare de geometrie".

Clasicii materialismului dialectic au sesizat magistral acest aspect care este de fapt începutul matematicii ca ştiinţă:

> „...matematica s-a născut din necesităţile practice ale oamenilor; din măsurarea loturilor de pămînt şi a capacităţii vaselor, din calcularea timpului şi din mecanică" (Fr. Engels, *Anti-Dühring*, ed. III, ESPLP, Bucureşti, 1955, p. 48).

Istoria geometriei începe cu un mic paradox legat de însăşi numele ei. Cu puţina greacă pe care o ştim fiecare, nu este prea greu de recompus semnificaţia etimologică a cuvîntului geometrie. Geo — pămînt, metron — măsură. Aşadar, avem de-a face cu ştiinţa de a măsura pămîntul.

Dar la vechii greci — de la care ne-a provenit aproape întreaga terminologie și care au faima de „clasici“ în acest domeniu (faimă care nu este deloc atribuită pe nedrept), știința măsurării pămîntului nu avea prea multe lucruri comune cu „adevărata geometrie“. Ei numeau aceste aplicații de fapt ale geometriei (așa cum spunem noi astăzi), g e o d e z i e. De ea se folosește în largă măsură geografia, la construirea hărților, atlaselor etc.

Geodezia este, prin vocație, slujitoare supusă triunghiului Iată, să dăm un exemplu, care la prima vedere pare banal. Dar totuși, să ne amintim un fapt: azi, oricare dintre noi „luăm de bune“ afirmații ca: „înălțimea Everestului este de X metri“, „vîrful Omul are Y metri“ etc., fără să ne mai gîndim cum s-a reușit să se afle aceste lucruri.

Să privim însă figura 1.1. În dreapta, am desenat un munte a cărui înălțime nu o cunoaștem și pe care vrem s-o aflăm.

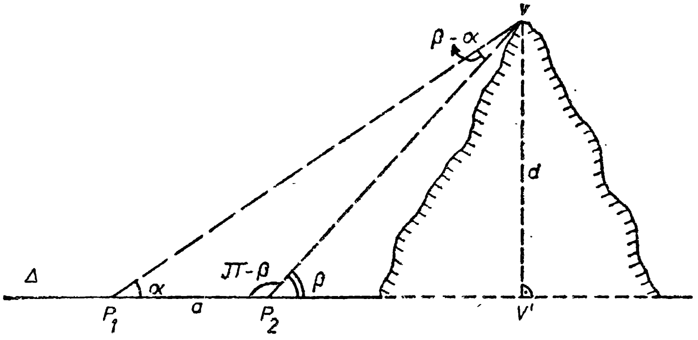

Fig. 1.1.
Măsurăm înălțimea unui munte

Ne închipuim că putem privi prin munte, și din vîrful său, notat cu V, coborîm o perpendiculară pe baza sa. Proiecția lui V pe bază o notăm cu V' și deci distanța $VV' = d$ (necunoscută) este mărimea care ne interesează. Pînă acum nu cunoaștem de fapt nimic. N-am bătut însă atîta drum pînă la poalele muntelui fără să fi adus cu noi ajutoare. În afară de cunoştinţele noastre de geometrie, pe umăr purtăm un aparat ciudat numit t e o d o l i t. Structura lui mecanică nu e complicată, şi el vă este înfăţişat în figura 1.2.

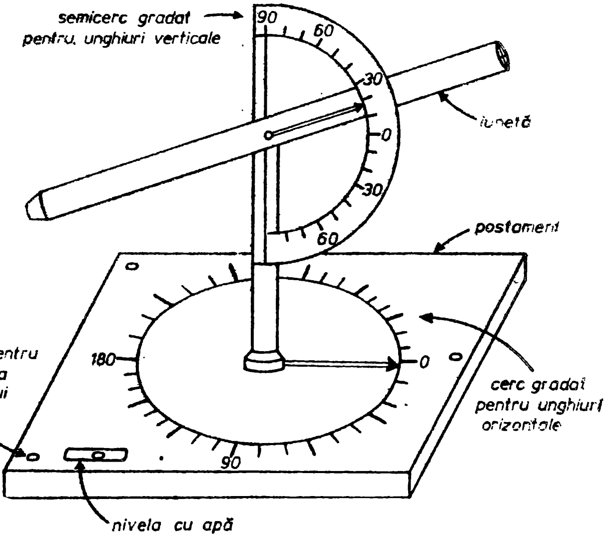

Fig. 1.2.
Un prieten al „geometrului practician":
teodolitul

Să încercăm să-l descriem puţin: în primul rînd, el constă dintr-o lunetă mobilă atît în plan vertical cît şi în plan orizontal. În planul vertical se află fixat un semicerc gradat pe care se citesc unghiurile verticale. În planul orizontal — mai precis pe postamentul pe care este aşezată toată „instalaţia", se află un cerc gradat pe care se citesc unghiurile orizontale. Postamentul e prevăzut cu trei locaşe pentru fixarea unui trepied. „Echilibrul" aparatului se controlează cu un dispozitiv simplu numit „nivela cu apă" — de fapt un tub în care plutește o bulă de aer. Trepiedul se fixează pe teren, reglîndu-l în așa fel încît bula de aer să ajungă la mijlocul tubului. Săgețile celor două cercuri sînt fixate la gradația O. Din acest moment, putem începe să rotim luneta pînă cînd prindem reperul fixat.

Așadar, ne aflăm în preajma muntelui nostru în punctul P_1. Cu ajutorul teodolitului măsurăm unghiul $VP_1\Delta$ — fie el α. Ne mutăm apoi în punctul P_2 — nu fără a fi măsurat distanța P_1P_2 — fie ea a. Din noua poziție măsurăm unghiul $VP_2\Delta$ — să zicem β.

Și iată cum am ajuns la o problemă de geometrie a triunghiului: „dacă într-un triunghi oarecare se dau două unghiuri și o latură, atunci să se calculeze înălțimea corespunzătoare laturii cunoscute".

Privim din nou figura 1.1. Unghiul VP_2P_1 este de fapt $(\pi - \beta)$, iar triunghiul $VV'P_2$ este dreptunghic. Deci imediat:

$$\sin \beta = d/vP_2. \tag{1}$$

Întrucît $\widehat{P_1VP_2} = \pi - \alpha - (\pi - \beta) = \beta - \alpha$, putem scrie în triunghiul VP_1P_2 teorema sinusurilor și obținem:

$$\frac{VP_2}{\sin \alpha} = \frac{a}{\sin (\beta - \alpha)}. \tag{2}$$

Deci scoțînd pe $\overline{VP}_2$ din (2) și anume:

$$VP_2 = \frac{a \sin \alpha}{\sin (\beta - \alpha)} \tag{3}$$

și introducînd în (1), se obține înălțimea căutată:

$$d = \frac{a \sin \alpha \sin \beta}{\sin (\beta - \alpha)}, \tag{4}$$

adică, în fond, înălțimea muntelui pe care-l admiram de la distanță.

Dăm acum un alt exemplu. Ne imaginăm de data aceasta următorul joc ceva mai complicat: două echipe — să le numim pentru simplificare „echipa I" și „echipa II", ascund fiecare cîte un obiect de volum relativ mare într-o porțiune dată de teren; scopul jocului este fotografierea obiectului respectiv fără a fi descoperit de adversar. Cîștigător al jocului se declară acea echipă care reușește să prezinte prima arbitrului o fotografie de calitate a obiectivului echipei partenere de joc, fără a fi descoperit. Dacă un membru al vreunei echipe este „prins în flagrant delict" (descoperit în timp ce fotografiază obiectivul advers), echipa respectivă pierde jocul.

Să presupunem acum că o grupă de recunoaștere a echipei I a descoperit dincolo de o lizieră de copaci — vezi figura 1.3. — obiectivul echipei II care se întinde de la A la B.

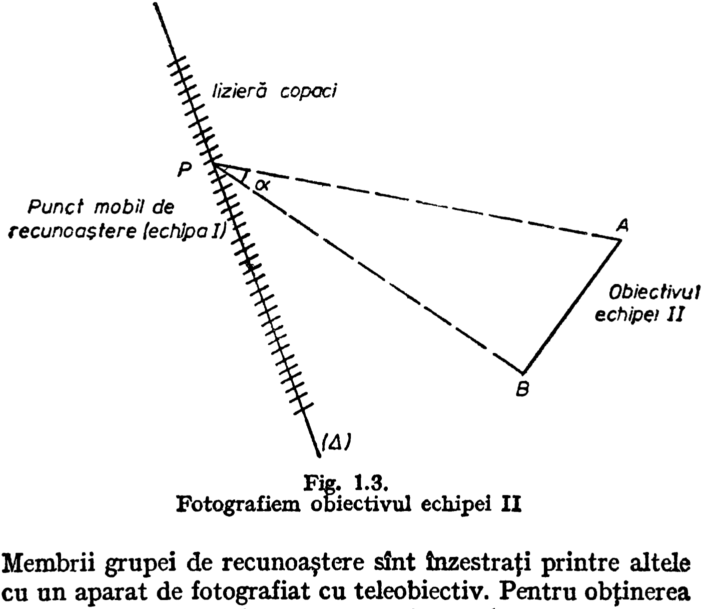

Fig. 1.3.
Fotografiem obiectivul echipei II

Membrii grupei de recunoaștere sînt înzestrați printre altele cu un aparat de fotografiat cu teleobiectiv. Pentru obținerea unei fotografii de calitate, cel care fotografiază va trebui să se găsească într-o poziție avantajoasă față de obiectivul AB.

Aceasta se traduce în termeni geometrici prin *găsirea punctului P pe dreapta* (Δ) *din care segmentul AB se vede sub un unghi maxim.*

Adică, dintre toate triunghiurile cu latura AB dată și vîrful P mobil pe o dreaptă dată (Δ), care este acela pentru care unghiul APB este maxim (să notăm pentru ușurință $\sphericalangle APB = \alpha$).

În primul rînd, trebuie să ne asigurăm cumva că această poziție a lui P există, că de fapt unghiul α își atinge valoarea maximă posibilă pentru acea poziție a lui P.

Lucrul acesta „îl simțim", fiindcă dacă ne-am situa pe dreaptă în așa fel încît A, P, B să fie colineare, atunci α ar fi minim, adică 0. Pe de altă parte, dacă am urca mereu pe dreapta (Δ) — deci în stînga sus, după cum arată figura 1.3, — unghiul s-ar micșora mereu și la un moment dat n-am mai vedea din segmentul AB decît un punct. Aceasta se întîmplă însă numai „la infinit".

Prin urmare, între cele două valori minime (practic poziții care dau aceeași valoare minimă posibilă 0), va exista și una maximă obținută pentru o anumită poziție a lui P pe dreapta (Δ).

Să enunțăm acum o proprietate foarte cunoscută: dacă într-un cerc ducem o coardă AB de lungime dată, atunci din orice punct de pe cerc coarda respectivă se vede sub același unghi. E interesant de remarcat că această proprietate era cunoscută de vechii greci, ea găsindu-se consemnată în celebrele *Elemente* ale lui Euclid. Ca o consecință a acestei proprietăți, deducem că există o infinitate de puncte din care putem vedea sub același unghi un segment dat.

Așadar, dacă vom construi mediatoarea segmentului AB și vom descrie un cerc ce trece prin punctele A și B, găsim cîte puncte dorim cu proprietatea mai sus menționată. La rîndul ei, și mulțimea cercurilor circumscrise unui segment dat este infinită. În cazul nostru, situația se prezintă astfel: punctul căutat se află pe un cerc ce trece prin A și B, dar acest cerc nu poate fi oarecare, deoarece observatorul ce va fotografia obiectivul AB este obligat să nu „sară" de pe dreapta (Δ) deoarece dacă ar sta în spatele lizierei de pomi n-ar mai vedea obiectivul, iar dacă ar depăşi liziera înspre obiectiv, atunci ar fi reperat de membrii echipei II. Astfel soluţia se dovedeşte a fi următoarea: postul de observare va trebui fixat în locul unde cercul ce trece prin *A* şi *B* este tangent dreptei (Δ) aşa cum se arată în figura 1.4.

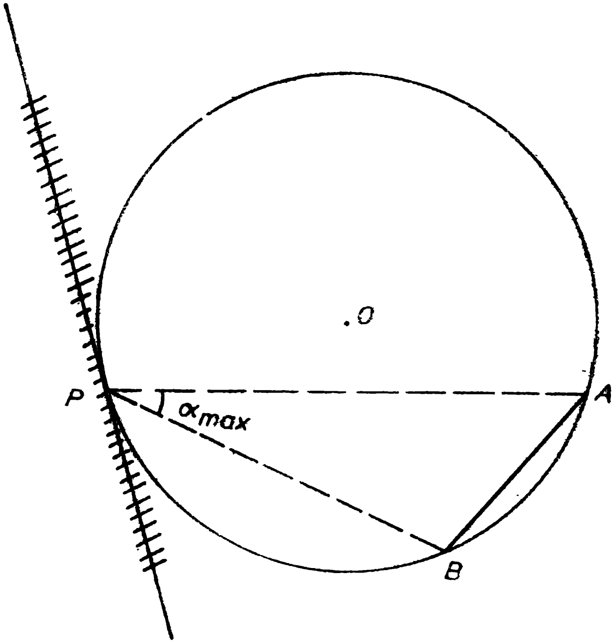

Fig. 1.4.
Punctul din care trebuie fotografiat obiectivul *AB*

Vă veţi întreba poate cum găseşte practic observatorul punctul căutat? La început, acesta vizează cu telemetrul (aparat pentru măsurarea distanţelor) punctele *A* şi *B* pînă cînd obține o aceeași distanță $PA = PB$. Înseamnă deci că raza vizuală trebuie materializată.

Pentru aceasta, se localizează pe direcția ei cel puțin două repere — o tufă, o piatră mai mare, sau orice alte particularități de teren. În acest mod, mediatoarea capătă formă fizică, coborînd din sfera conceptelor în lumea reală.

Faza următoare constă în determinarea punctului O pe mediatoare astfel ca $OA = OB = OP$, și OP perpendicular în același timp pe (Δ).

Urmează acum o muncă ceva mai complicată cu instrumentele pe care le avem la dispoziție — teodolitul și telemetrul; intră în scenă și un al doilea observator, postat în P', așa cum arată fig. 1.5.

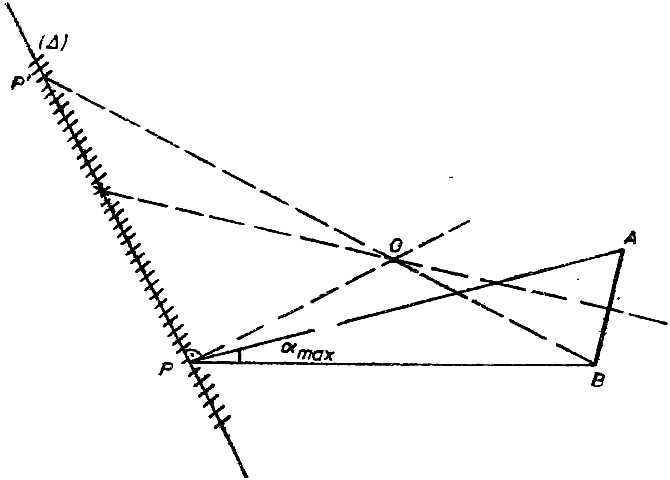

Fig. 1.5.
Găsirea efectivă a punctului P

Cu telemetrul, acest al doilea observator măsoară distanța pînă la B și apoi pînă la un punct oarecare O ce materializează mediatoarea. Trebuie să facem observația că el s-a așezat chiar în punctul P' — colinear cu cele două puncte de mai sus. Știind la ce distanță se află unul de altul cei doi observatori se poate calcula imediat:

$$OP = \sqrt{P'O^2 - P'P^2}. \qquad (5)$$

Dacă ne aflăm într-un caz favorabil și anume $OP = OB = P'B - P'O$, atunci punctul în care se află primul observator este chiar cel căutat. Dacă acest lucru nu se întîmplă, atunci cei doi observatori se deplasează de o parte și de alta a punctului de pe lizieră (*) ce materializează mediatoarea, pînă cînd reușesc să apropie cît mai mult posibil ca mărime cele două distanțe OP și OB. Se înțelege că primul observator va avea teodolitul astfel reglat încît luneta să facă în planul orizontal un unghi de 90° cu liziera.

Cineva poate reproșa desigur empirismul ultimei părți. Situațiile practice impun însă deseori adaptarea teoriei la condițiile concrete. În cazul de față, observatorul nu putea să presupună problema rezolvată, să alerge în centrul cercului circumscris triunghiului PAB și să măsoare apoi distanța $OP \perp (\Delta)$. Măsurările, în toate problemele, trebuie efectuate fizic și în funcție de anumite condiții; pentru aceasta, ne folosim de diferite aparate care la rîndul lor sînt înzestrate cu o anumită precizie și afectate de anumite erori. Una din surprizele cele mai mari pe care le are un tînăr atunci cînd intră în lumea reală a verificării unor adevăruri teoretice este constatarea faptului că experiența practică furnizează în majoritatea cazurilor doar e s t i m ă r i ale adevărului respectiv. Exemplul — „cel mai clasic", ca să spunem așa — îl constituie verificarea practică a teoremei: „suma unghiurilor unui triunghi este 180°". Teorema se demonstrează fără nici o dificultate. Și totuși, alegînd trei puncte cît mai depărtate pe o cîmpie, jalonîndu-le și apoi măsurînd unghiurile, vom constata — efectuînd experiența de foarte multe ori, că numai întîmplător vom obține *exact* 180°! (în majoritatea cazurilor se va obține o valoare foarte apropiată de 180°, dar totuși diferită). Aceasta nu înseamnă că teorema a fost infirmată de practică; intervin însă aici o serie de particularități ale lumii reale în care trăim și care nu pot fi neglijate. În primul rînd — la o scară ceva mai mare — spațiul în care trăim este curb, planeta Pămînt pe care ne desfășurăm activitatea este „rotundă", aparatele cu care efectuăm măsurările au caracteristicile enumerate mai sus, operatorii care mînuiesc aceste aparate sînt afectați la rîndul lor de factori subiectivi ca oboseală, neatenție, grad de pregătire diferit, stare psihică diferită etc.

Din această cauză, orice experiment practic — fie că este fizic, chimic sau de orice altă natură, are un c a r a c t e r s t a t i s t i c. Erorile și aproximările care apar sînt inerente.

În „experimentele de geometrie" — cum ar fi, de exemplu, măsurările de arii, suprafețe curbe, volume, determinarea distanțelor sau înclinațiilor, rolul teoriei este foarte important. Ea ne arată către ce trebuie să tindem, care este gradul de precizie obținut etc. (pentru exemple și detalii este util să se consulte lucrarea: Iu. V. Kemniț, *Matematiceskaya Obrabotka Zavisimîh Rezultatov Izmerenii*, Izdatelstvo „Nedra", Moskva, 1970, p. 85 — Prelucrarea matematică a rezultatelor măsurărilor dependente).

Nu trebuie însă să tragem concluzia din cele prezentate anterior că geometria ar fi o știință experimentală.

> „Toate formele geometrice — spunea Egmont Colerus[1] — nu sînt altceva decît obiecte ale imaginației. Cu scopul de a ne fixa ideile și pentru a le comunica semenilor noștri, notăm simbolic aceste forme și acest lucru se face prin intermediul desenului. Dar desenul nu este altceva decît semne, adică simboluri."

Rolul acestor obiecte ale imaginației este acela de a modela situații reale și proprietăți care au loc independent de voința noastră, însușiri ale materiei, ale Universului, a cărui primă trăsătură caracteristică este însăși structura lui geometrică.

Dar pledoaria noastră pentru geometria sintetică — și în particular pentru triunghi, nu s-a încheiat. Un neîncrezător poate imediat să ne arunce o provocare: bine, geometria asta sintetică e frumoasă, cere imaginație, dar ce te faci, de exem-

---

[1] C o l e r u s, E., *De la punct la a patra dimensiune*, Editura științifică, București, 1967, p. 49.

plu, în cazul conicelor — ca elipsa sau hiperbola — care în liceu, de exemplu, se tratează numai pe cale analitică? La malițiozități de acest gen se răspunde cu exemple care să-l reducă la tăcere pe interlocutor. Iată mai departe un lanț de astfel de exemple.

Să alegem ca ring de această dată elipsa (deși tot triunghiul ne va scoate din încurcătură). Nu mai e de mult un secret ce este aceea o elipsă, așa că o să intrăm direct în subiect. Una din proprietățile „frumoase" ale acestei conice este următoarea: produsul distanțelor de la focarele elipsei la o tangentă oarecare la elipsă este constant și anume egal cu pătratul semiaxei mici.

Figura 1.6 ne lămurește mai bine cum stă situația. Imaginăm în continuare următoarea figură: (figura 1.7). Am construit deci triunghiul ABC și am notat latura $BC = 2c$. Am dus dreapta (Δ) — bisectoare exterioară a unghiului A. Din B și C am coborît perpendicularele d_1 și d_2 care sînt deci distanțele de la B și C la (Δ). Bisectoarea interioară a unghiului A, AA' are proprietatea că este perpendiculară pe (Δ). Să mai notăm $AB + AC = 2a$ (constant). Pentru a lucra mai general, putem deci considera vîrful A mobil în plan.

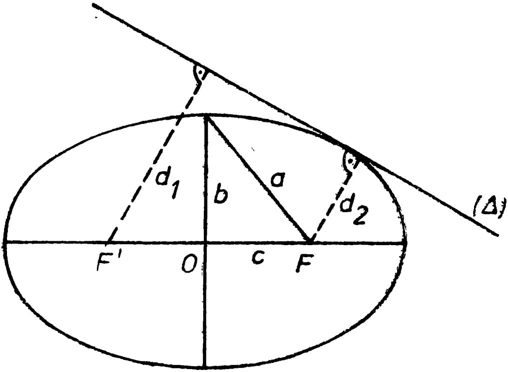

Fig. 1.6.
Într-o elipsă are loc relația $d_1 d_2 = b^2$

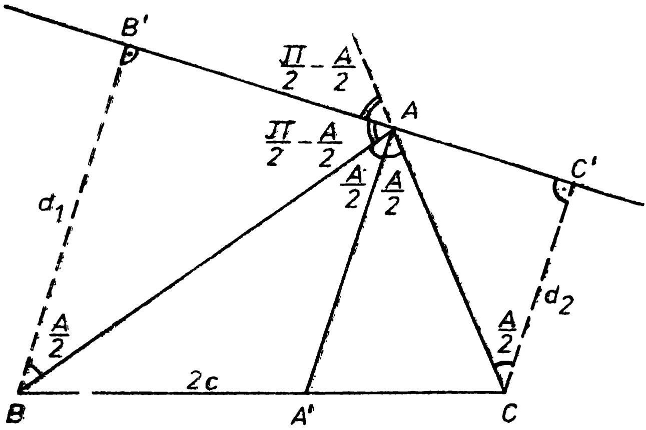

Fig. 1.7.
Demonstrăm sintetic proprietatea $d_1 d_2 = b^2$

Atunci, conform definiției elipsei ca loc geometric al punctelor pentru care suma distanțelor la două puncte fixe B și C — numite focare, este constantă, vîrful A va descrie în plan o elipsă. Bisectoarea exterioară unghiului A este mereu tangentă elipsei, iar AA' reprezintă deci normala la elipsă. Am regăsit, așadar, pe cale sintetică o altă proprietate a elipsei:

„Normala într-un punct al elipsei este egal înclinată pe razele vectoare".

Putem începe deci cîteva mici evaluări. Avem:

$$d_1 = AB \cos\frac{A}{2}, \ d_2 = AC \cos\frac{A}{2} \tag{6}$$

prin urmare,

$$d_1 d_2 = AB \cdot AC \cdot \cos^2\frac{A}{2} = AB \cdot AC \cdot \frac{p(p-BC)}{AB \cdot AC} =$$
$$= \frac{1}{4}(AB+BC+CA)(AB+AC-BC) = \frac{1}{4}[(AB+AC)^2 -$$
$$- BC^2] = \frac{1}{4}(4a^2 - 4c^2) = a^2 - c^2. \tag{7}$$

Cititorul a recunoscut folosirea formulei „cosinusului unghiului pe jumătate" într-un triunghi, unde p reprezintă ca deobicei semiperimetrul triunghiului. Cum a și c sînt date, nu avem decît să notăm $a^2 - c^2 = b^2$ și obținem chiar relația căutată. Este binecunoscut, de asemenea (tot din considerații sintetice — și mai precis din teorema lui *Pitagora*), că b are semnificația semiaxei mici a elipsei (vezi din nou figura 1.6).

Mergem acum mai departe; proprietatea pe care am demonstrat-o mai sus ne ajută la deducerea unei alte proprietăți a elipsei și anume: dacă dintr-un punct exterior unei elipse ducem tangente la aceasta, atunci ele sînt egal înclinate pe razele vectoare. Figura 1.8. arată sugestiv acest lucru. În toate manualele pe care le-am întîlnit, demonstrația este făcută analitic. Și totuși, ce simplu se poate deduce sintetic! Iată cum: din focarele F și F' ducem respectiv perpendicularele d_1, d_2 și d_1', d_2' pe cele două tangente. Conform proprietății anterioare, au loc relațiile: $d_1d_2 = b^2$ și $d_1'd_2' = b^2$, adică de fapt:

$$\frac{d_1}{d_1'} = \frac{d_2'}{d_2}. \tag{8}$$

Pe de altă parte, dacă privim figura 1.8, deducem imediat:

$$d_1 = F'M \sin\alpha, \quad d_2 = MF\sin(\alpha + \theta) \tag{9}$$

$$d_1' = MF\sin\beta, \quad d_2' = F'M\sin(\beta + \theta). \tag{10}$$

Dacă înlocuim aceste expresii în (8) obținem:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin(\beta+\theta)} = \frac{\sin\beta}{\sin(\alpha+\theta)}, \tag{11}$$

relație care nu poate avea loc decît dacă $\alpha = \beta$.

Iată deci trei proprietăți ale elipsei demonstrate „dintr-un foc" prin simple aplicări ale unor proprietăți destul de simple ale triunghiului. Încercați să le refaceți pe cale analitică și comparați soluțiile de pe o poziție „neutră". Personal, pariez pe balanța înclinată spre arta ce poartă numele de *Geometrie*.

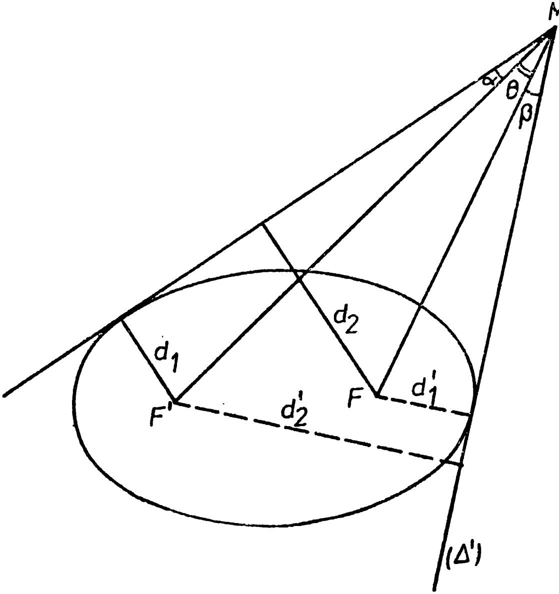

Fig. 1.8.
O altă proprietate a elipsei: înclinarea egală a două tangente din același punct pe razele vectoare (teorema *Poncelet*)

Dar, o adevărată încheiere — mai ales la o introducere atît de lungă — nu poate fi suplinită de nici o frază voit „frumoasă". Adevărata încheiere constă — ați ghicit desigur! — într-o problemă pe care v-o propun s-o rezolvați sintetic, deși ea se referă tot la elipsă.

Problema este următoarea: construim o elipsă de centru O și semiaxe a, b, și fie F_1 și F_2 focarele ei. Ducem o tangentă oarecare la această elipsă — fie ea ca de obicei (Δ) — și să notăm cu M punctul în care (Δ) atinge curba noastră. Dintr-unul din focare — să ne fixăm asupra lui F_1, coborîm o perpendiculară pe (Δ). Notăm cu P piciorul acestei perpendiculare. Ni se cere să arătăm următorul fapt: oricare ar fi (Δ), proiecțiile focarelor pe ea se află pe cercul de centru O și rază a.

Pentru a vă trezi gustul pentru „atacul sintetic" al oricărei probleme de geometrie, să desenăm figura corespunzătoare (fig. 1.9.) prozei de mai sus și să vă sugerăm și cîțiva pași către soluție. Vă uitați deci atent la elementele figurii 1.9. Prelungiți segmentul MF_2; prelungiți apoi și pe PF_1 pînă cînd acestea se întîlnesc în P'. Să unim acum P cu O. Încercați să demonstrați că OP este chiar semiaxa mare a elipsei. Cu aceasta, problema este rezolvată.

Credem că este suficient: un ghid trebuie să mai lase puțin din plăcerea descoperirii unui peisaj și celor pe care-i conduce.

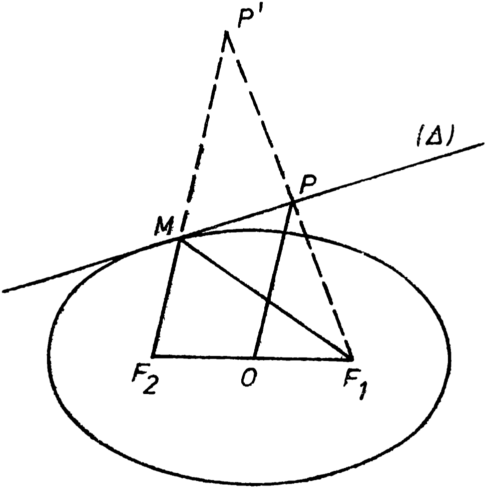

Fig. 1.9.
Din nou o problemă cu elipsa:
vrem soluția sintetică

Capitolul I

1. SCURT RAID ÎN ISTORIA MATEMATICII NOASTRE[1]

1.1. Cu ani în urmă

Şcoala românească de matematică este astăzi bine cunoscută în lumea întreagă. Mărturie stau numeroasele lucrări ale matematicienilor noştri, care apar atît în revistele de specialitate în limba română cît şi peste hotare, în prestigioase reviste internaţionale.

Desigur, toate aceste succese nu sînt întîmplătoare. În ultimele decenii, ele sînt rodul unei politici constante, desfăşurate la nivel de stat, politică dusă cu scopul de a dezvolta continuu creaţia ştiinţifică românească.

Aceste lucruri par astăzi normale pentru tînăra generaţie. Istoria dezvoltării matematicii la noi în ţară pune însă în evidenţă faptul că în trecut, activitatea ştiinţifică s-a desfăşurat în cea mai mare parte datorită entuziasmului şi spiritului de sacrificiu de care au dat dovadă marii noştri oameni de ştiinţă.

Astăzi, orice tînăr pasionat de matematici aşteaptă la sfîrşitul fiecărei luni apariţia „Gazetei Matematice", a „Revistei Matematice a elevilor din Timişoara" sau a altor publicaţii pe profil, ca un fapt de la sine înţeles. Puţini ştiu probabil că mulţi ani în urmă aceste apariţii se datorau numai şi numai activităţii benevole a unor oameni cu dra-

[1] Prima variantă a acestui capitol arăta altfel: ea intenţiona să cuprindă o istorie a geometriei triunghiului începînd cu vechii greci, trecînd prin perioada arabă şi terminînd cu ţara noastră. Examinînd manuscrisul, acad. Gh. Mihoc mi-a sugerat pe bună dreptate eliminarea primelor două paragrafe a căror tematică este tratată în mai multe lucrări apărute în limba română, şi a avut amabilitatea să-mi pună la dispoziţie extrem de originala generalizare a celebrei „probleme a chibritului", care îi aparţine.

goste de știință, care de cele mai multe ori rupeau o parte din cîștigul lor pentru ca acești adevărați mesageri de cultură matematică să poată ajunge în mîinile tinerei generații.

Dacă privim ceva mai departe în timp, constatăm că abia în jurul anilor 1814, odată cu activitatea didactică a lui Gheorghe Asachi (1788—1869) și a lui Gheorghe Lazăr (1779—1823), geometria este predată la noi în limba română! Pînă atunci, studiul geometriei se făcea în diferite școli particulare în limba latină, greacă sau slavonă, fapt care limita considerabil răspîndirea acestor cunoștințe în mase. Bineînțeles că nu existau manuale sau cărți de geometrie (și în general de matematică) în limba română. Prima lucrare de geometrie în românește a fost traducerea *Elementelor de geometrie* aparținînd cunoscutului matematician și astronom A.M. Legendre (1752—1833), traducere efectuată în 1837 de pedagogul iluminist Petrache Poenaru (1799—1875) a cărui activitate în domeniul organizării învățămîntului național a fost deosebit de importantă. Poenaru a fost secretar al lui Tudor Vladimirescu și participant direct la marea răscoală populară din 1821. Refugiat la Viena imediat după înfrîngerea răscoalei, el studiază acolo pînă în anul 1824, iar apoi se mută la Paris unde se înscrie la Școala Politehnică. În Franța, Petrache Poenaru rămîne pînă în 1832. Reîntors în țară, el conduce Eforia școlilor naționale pînă la revoluția din 1848 la care participă ca membru în comisia pentru eliberarea țiganilor robi.

În 1841, Poenaru mai publică o traducere, și anume aceea a *Elementelor de algebră* a lui Appeltauer. Activitatea sa neobosită în slujba învățămîntului românesc îi este răsplătită de oamenii de cultură ai vremii prin alegerea sa ca membru al Academiei Române (1870).

Un rol major în dezvoltarea învățămîntului matematic românesc l-a avut însă Spiru C. Haret (1851—1912) care ca ministru al Instrucțiunii Publice a luat măsuri în vederea modernizării învățămîntului din țara noastră. Prin legea de reformă a acestuia din 1898, se dădea o atenție deosebită geometriei, completîndu-se studiul acesteia cu elemente moderne.

Haret a sprijinit în măsura posibilităţilor sale pe tinerii matematicieni talentaţi, facilitîndu-le obţinerea unor burse de studiu în Franţa, ţară care în acea perioadă dispunea de o pleiadă de eminenţi matematicieni şi de institute de învăţămînt superior de bună calitate.

Activitatea ştiinţifică propriu-zisă precum şi activitatea de popularizare în rîndul maselor depindea la noi în bună măsură de conştiinţa patriotică a unor personalităţi ridicate din rîndul poporului.

Anul 1895 se înscrie în istoria culturală a ţării noastre ca un an cu o deosebită semnificaţie; un grup de pasionaţi ai matematicii, şi anume inginerii Vasile Cristescu, Ion Ionescu, A.G. Ioachimescu precum şi matematicianul Gheorghe Ţiţeica — acesta din urmă fiind binecunoscut astăzi ca unul dintre clasicii matematicii româneşti, înfiinţează o revistă de matematici elementare — „Gazeta Matematică" — revistă ce avea să devină o adevărată şcoală pentru generaţii întregi de iubitori ai acestei ştiinţe. „Gazeta Matematică" reuşeşte în scurt timp să-şi creeze o faimă şi dincolo de hotarele ţării, datorită seriozităţii cu care erau abordate diferite aspecte ale învăţămîntului matematic.

Toţi marii noştri matematicieni şi-au făcut ucenicia în paginile acestei reviste.

Adversităţile diferitelor perioade istorice (primul şi cel de-al doilea război mondial, criza economică a anilor 1929—1933), n-au reuşit să-şi lase amprenta asupra „Gazetei Matematice", tocmai datorită spiritului de sacrificiu al celor ce s-au consacrat bunului mers al vieţii acestui adevărat for de cultură.

Sub egida „Gazetei Matematice" s-au iniţiat în ţara noastră *Olimpiadele de matematică*, mijloc important de depistare a tinerelor talente în domeniul respectiv.

Geometria triunghiului a ocupat un loc însemnat în tematica „Gazetei Matematice". În anul 1901 se înfiinţează o editură a „Gazetei", în care au văzut lumina tiparului numeroase culegeri de probleme printre care şi cunoscuta *Culegere de Probleme de Geometrie* a lui Gheorghe Ţiţeica, piatră de încercare a tuturor tinerilor pasionaţi de geometrie.

In anul 1909 se înființează „Societatea Gazeta Matematică" care de-a lungul anilor reușește să grupeze oameni de diferite profesiuni: ingineri, ofițeri, profesori din învățămîntul mediu sau universitar etc.,care s-au dedicat printre altele răspîndirii cunoștințelor matematice în special în rîndul tineretului. Toată munca Societății se desfășura prin activitatea benevolă, inclusiv (și mai ales) strîngerea fondurilor necesare tipăririi revistei, a altor publicații, organizării olimpiadelor (pe atunci numite Concursurile „Gazetei Matematice") etc. Sprijinul acordat de stat pe vremea aceea era inexistent: este suficient să amintim doar că redacția „Gazetei" reușește să-și amenajeze un local propriu abia în anul 1935... Pilda „Gazetei Matematice" a fost molipsitoare. În diferite colțuri ale țării au început să apară „foi" matematice care se inspirau din modul de organizare și lucru al „Gazetei Matematice". Totuși, aceste reviste nu au reușit să se mențină — în mare parte datorită lipsei de fonduri. Un loc important printre ele — și de fapt singura care a supraviețuit — prin atingerea nivelului calitativ al „Gazetei", a fost „Revista Matematică din Timișoara" (cunoscută sub abrevierea RMT), al cărei ctitor a fost Traian Lalescu. Alături de Lalescu, au stat și alte figuri luminoase de intelectuali printre care vom menționa pe Theodor Angheluță și Victor Vîlcovici.

RMT a ființat peste un sfert de secol, fiind revitalizată astăzi sub titlul „Revista Matematică a elevilor din Timișoara".

Fără a părăsi firul istoriei, să ne concentrăm acum atenția asupra unei probleme — azi celebră — care aparține unui matematician român, și anume lui Dimitrie Pompeiu (1873—1954). Problema este în esență destul de simplă, dar interpretările care i s-au dat ulterior de diverși matematicieni români și străini (acad. Nikola Obreškov — Bulgaria; B. Hilton — Anglia, N.G. Botea, Dan Barbilian, E. Abason etc. — România) i-au pus în evidență originalitatea.

Iată care este problema lui *Pompeiu:*

> „Dacă M este un punct oarecare în planul unui triunghi echilateral ABC, atunci segmentele MA, MB, MC, sînt întotdeauna laturile unui triunghi."

Profesorul Gheorghe Dumitrescu a expus în 1958 (vezi [4]) o soluție algebrică simplă într-un caz particular: fie AD înălțimea triunghiului ABC și să considerăm că din întîmplare am ales punctul M pe prelungirea lui AD, ca în figura (P_1). Pentru ușurință să notăm $AB = AC = BC = a$ și $DM = x$. Avem deci imediat:

$$AD = \frac{a\sqrt{3}}{2} \text{ și } MA = x + \frac{a\sqrt{3}}{2}. \tag{1.1}$$

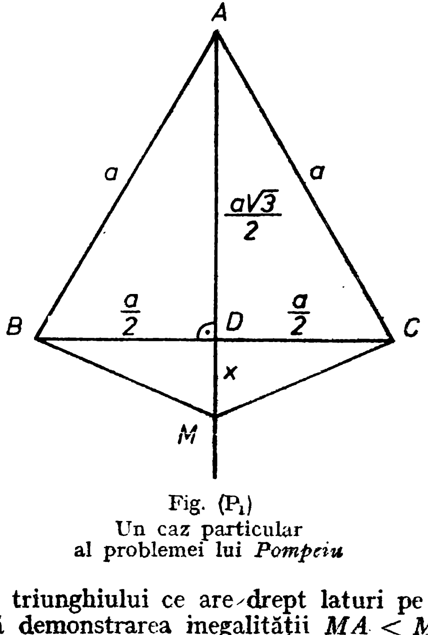

Fig. (P_1)
Un caz particular
al problemei lui *Pompeiu*

Existența triunghiului ce are drept laturi pe MA, MB, MC implică demonstrarea inegalității $MA < MB + MC$ sau $MA < 2\,MB$.

Un calcul simplu ne arată că:

$$MB = \sqrt{x^2 + \frac{a^2}{4}} = \sqrt{\frac{4x^2 + a^2}{4}} = \frac{\sqrt{4x^2 + a^2}}{2} \tag{1.2}$$

şi prin urmare trebuie dovedită inegalitatea:

$$x + a\frac{\sqrt{3}}{2} < \sqrt{4x^2 + a^2}. \qquad (1.3)$$

Cum ambii membri sînt pozitivi, ridicînd la pătrat rezultă:

$$3x^2 - a\sqrt{3}x + \frac{a^2}{4} > 0 \Rightarrow \left(\sqrt{3}x - \frac{a}{2}\right)^2 > 0. \qquad (1.4)$$

Mai puţin cazul $x = \frac{a\sqrt{3}}{6}$, inegalitatea de mai sus este adevărată pentru orice x, şi deci teorema lui *Pompeiu* este demonstrată.

De ce am ales tocmai această problemă pentru a ilustra contribuţia matematicienilor români în domeniul geometriei triunghiului, o vom înţelege mai bine trecînd mai departe la paragraful ce urmează.

1.2. Tainice legături cu teoria probabilităţilor

(o contribuţie românească)

Vă veţi spune, desigur, că acest paragraf debutează curios chiar prin titlu: într-adevăr, ne putem firesc întreba ce legături tainice — căci vizibile în nici un caz nu prea sînt — pot exista între teoria probabilităţilor şi geometria triunghiului? Putem fi acuzaţi bineînţeles de deformaţie profesională. Şi totuşi, interferenţă între cele două domenii atît de diferite, există. Aceasta nu vine decît să demonstreze încă odată în plus unitatea dialectică a ştiinţei, fapt pe care clasicii materialismului dialectic l-au subliniat încă din secolul trecut. Legătura poate fi totuşi întrevăzută, dacă ne vom reaminti că astăzi există chiar o subramură — relativ independentă a teoriei probabilităţilor, numită „teoria probabilităţilor geometrice".

Înainte de a ne clarifica mai bine cu ceea ce este de fapt probabilitatea, vom reaminti că prima problemă de aşa-numite probabilități geometrice a fost „problema acului lui Buffon".

După cum bine știți, Buffon a fost un mare naturalist, care în paralel cu ocupația sa de bază, era pasionat de noua știință care cîștiga din ce în ce mai mult teren — teoria probabilităților.

Problema pusă de Buffon era următoarea:

„Se consideră un parchet format din lame paralele avînd lățimea a; un ac de lungime b este aruncat la întîmplare pe parchet ($b < a$). Să se afle care este probabilitatea ca acul să cadă pe una din liniile despărțitoare ale parchetului".

Imaginea grafică a problemei ar fi cam cea din figura (P_2).

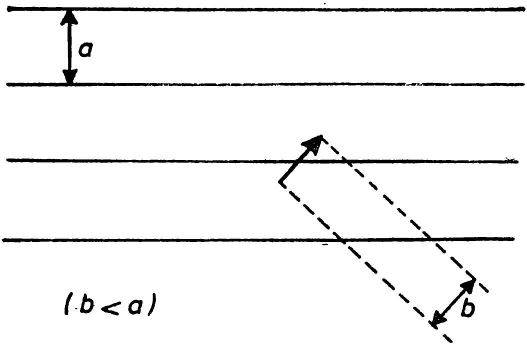

Fig. (P_2)
Acul lui *Buffon*

Problema lui *Buffon* nu este chiar așa de simplă. Soluția ei a necesitat un aparat matematic destul de complicat. Abia în 1860, matematicianul E. Barbier[1] i-a găsit rezolvarea, el arătînd că probabilitatea căutată este $2b/\pi a$.

Acest rezultat a avut o implicație neașteptat de interesantă, și anume la calculul aproximativ al numărului π.

[1] Barbier, E., *Note sur le probleme de l'aiguille et le jeu du point couvert*. În: Math. Pures et Appl., vol. 5, 1860, pp. 273—286.

Iată cum se procedează: se aruncă acul de lungime dată b de n ori pe parchet și se notează cu n_1 numărul de aruncări în care acul respectiv intersectează una din lamele parchetului. Intuitiv, ne dăm seama că probabilitatea „experimentală" a evenimentului „acul taie una din lame" este n_1/n. Prin urmare, se poate aproxima (în limbaj statistic: „estima") probabilitatea calculată $2b/\pi a$ cu numărul n_1/n, și deci:

$$\pi \doteq \frac{an_1}{2nb}. \tag{1.5}$$

Cum a și b sînt cunoscute, putem avea noi înșine curiozitatea de a efectua acest experiment statistic pentru a ne convinge că pînă la urmă, $\pi \doteq 3{,}14$.

Statisticienii britanici M.G. Kendall și P.A.P. Moran au sintetizat într-o lucrare intitulată *Probabilitatea geometrică* (1963) diferitele experimente de acest gen efectuate de-a lungul anilor. Astfel, conform cu acești autori, primul care s-a apropiat de valoarea binecunoscută a lui π a fost Lazzerini în 1901, care cu un raport $b/a = 0{,}83$ și aruncînd acul de 3408 ori, a înregistrat 1808 „încercări favorabile", adică un număr de 1808 cazuri în care acul a căzut pe unele din lame. În această situație, el a găsit: $\pi \doteq 3{,}141592$.

Problema lui *Buffon* a suscitat un interes viu din partea matematicienilor chiar și după rezolvarea ei. I s-au adus numeroase generalizări din care au apărut noi fapte de geometrie, demonstrate cu ajutorul noțiunii de probabilitate (vezi Sylvester, J.J. *On Buffon's problem of the needle*, Acta Mathematica, 1891, vol. 14, pp. 185–205).

Probabilitățile geometrice au dat naștere și la așa-numitele „paradoxuri". Unul dintre aceste paradoxuri este și „paradoxul lui *Bertrand*". Joseph Bertrand (1822–1900), cunoscut matematician francez a enunțat următoarea problemă:

> „Într-un cerc dat se alege o coardă la întîmplare. Să se calculeze probabilitatea ca această coardă să fie mai mare decît latura triunghiului echilateral înscris în cerc."

Dovedirea esenței paradoxului lui *Bertrand* pe cale matematică este ceva mai complicată (vezi [17]). Paradoxul constă de fapt în obținerea pentru probabilitatea căutată a mai multor valori — ceea ce evident nu poate fi acceptat. Astfel, dacă alegem, de exemplu, mijlocul coardei, pentru ca această coardă să fie mai mare decît latura triunghiului echilateral, trebuie ca mijlocul coardei să fie situat într-un cerc concentric cu cercul dat, avînd raza $R/2$. Aria acestui cerc este evident $1/4$ din aria cercului dat, și prin urmare probabilitatea căutată este $1/4$. Coarda poate fi determinată însă și prin distanța de la centru la ea. Astfel, dacă alegem această distanță la întîmplare, probabilitatea căutată va rezulta $1/2$.

În fine, un alt procedeu poate consta în fixarea unei extremități a coardei și alegerea la întîmplare a celeilalte extremități. În acest mod, se obține probabilitatea $1/3$ (calculele în fiecare caz în parte sînt date în [17]. Ele depășesc materia de liceu și nu intră nici în considerațiile noastre). Rezultă deci că pentru probabilitatea căutată se obțin trei valori diferite, ceea ce este absurd.

Explicarea paradoxului lui *Bertrand* constă în următoarele: în fiecare caz s-a determinat coarda folosind un alt experiment aleator. Dacă așa stau lucrurile, atunci fiecărei experiențe întîmplătoare îi corespunde o altă lege de posibilitate. Iată deci un exemplu foarte sugestiv al faptului că modelul matematic al unei situații practice trebuie neapărat să ia în considerare caracteristicile situației respective. Dacă vom face abstracție de aceste caracteristici, atunci cu siguranță că vom obține nenumărate alte paradoxuri.

Nu trebuie însă să tragem concluzia că noțiunea de probabilitate variază în funcție de situația practică în care ea apare. Teoria probabilităților este astăzi o teorie matematică bine formalizată și închegată, care ca orice altă teorie matematică are un sistem riguros de axiome din care decurg în mod logic propozițiile sale. Nu este mai puțin adevărat că punerea pe baze axiomatice a acestei teorii s-a produs relativ tîrziu, abia cînd matematicianul sovietic A.N. Kolmogorov (n. 1903) a publicat la numai 30 de ani o lucrare fundamentală intitulată *Bazele teoriei probabilităților*. Desigur, și înainte de apariția acestei lucrări au existat matematicieni care s-au preocupat de găsirea unui cadru unitar, axiomatic, pentru această teorie. Printre aceștia, trebuie menționat Francesco Paolo Cantelli, celebru statistician italian, printre ai cărui studenți s-a numărat acum mai bine de patru decenii și profesorul Gheorghe Mihoc.

Tînărul cititor este îndemnat să citească — pentru o orientare mai clară — una din lucrările aproape fără egal în lume despre istoria genezei și problematica teoriei probabilităților, lucrare care aparține unui clasic al matematicii maghiare, Alfred Rényi (1921—1970) și intitulată *Dialog despre calculul probabilităților* (Editura științifică și enciclopedică, București, 1973, în traducerea profesorului Silviu Teleman și cu note introductive de dr. docent Marius Iosifescu).

Pentru ceea ce avem noi nevoie aici, este suficientă însă așa-numita definiție clasică a probabilității, și anume:

> „Probabilitatea (unui anumit fenomen, dintr-o clasă dată de fenomene) este raportul dintre numărul de cazuri favorabile producerii fenomenului respectiv și numărul tuturor cazurilor posibile producerii oricărui fenomen din clasa respectivă“[1]

Tot intuiția ne va spune că întotdeauna numărul de cazuri favorabile este mai mic sau cel mult egal cu numărul de cazuri posibile și deci probabilitatea (P) este un număr mai mic sau egal cu unitatea. Pe de altă parte, dacă într-o situație nu există nici un caz favorabil, atunci evident, $P = 0$. Iată deci, că probabilitatea este de fapt un număr cuprins între 0 și 1. Evenimentul cu probabilitatea 1 este numit și „evenimentul sigur“, iar evenimentul cu probabilitatea 0, este numit „evenimentul imposibil“. Exemple se pot da numeroase, chiar din domeniul geometriei sintetice. De pildă, chiar teorema lui *Pompeiu*: probabilitatea ca alegînd la întîmplare un punct M în planul triunghiului echilateral ABC, să putem construi un triunghi cu segmentele MA, MB, MC, este 1 (construcția triunghiului respectiv

[1] Definiția este extrem de elementară pentru a nu face apel la elemente de teoria probabilităților ce depășesc cadrul lucrării.

este un eveniment sigur). Alt exemplu: probabilitatea ca înălțimile într-un triunghi să fie concurente este tot 1 (oricare dintre noi poate demonstra ușor că înălțimile într-un triunghi se intersectează într-un punct). În fine, fiind dat un triunghi ABC cu laturile a, b, c, și suprafața S, probabilitatea ca cercul de rază $abc/4S$ să nu treacă prin vîrfurile A, B, C, este nulă, deoarece după cum se știe, cercul de rază $abc/4S$ este chiar cercul circumscris triunghiului.

Pentru o ilustrare grafică, să considerăm un segment de lungime dată. Pentru ușurință să luăm pe o axă chiar segmentul (0, 1). Ne punem întrebarea: care este probabilitatea ca alegînd la întîmplare un punct M pe (0, 1), segmentul OM să fie mai mic decît 1/3? În mod natural, mulțimea cazurilor favorabile este segmentul (0, 1/3). Atunci, probabilitatea căutată este:

$$P = \frac{\text{lungimea segmentului } (0, 1/3)}{\text{lungimea segmentului } (0, 1)} = \frac{1/3}{1} = 1/3. \qquad (1.6)$$

Trecînd la arii, de exemplu, să considerăm în plan o curbă închisă, convexă, de arie S. În interiorul ei să considerăm o altă curbă cu aceleași proprietăți, dar de arie S_1. Probabilitatea P ca un punct M luat la întîmplare în spațiul închis de prima curbă să cadă în interiorul celei de-a doua curbe, este prin urmare S_1/S.

Una din problemele interesante de probabilități geometrice referitoare la triunghiuri, este celebra „problemă a chibritului". Ea se enunță astfel: un chibrit este rupt la întîmplare în trei părți. Care este probabilitatea ca să se poată forma un triunghi cu aceste trei părți? Desigur, problema are și o formulare și mai putin umoristică, adică:

> „Fiind dat intervalul (0, 1), se aleg la întîmplare două puncte α și β; care este probabilitatea ca cele trei intervale determinate pe (0, 1) să formeze un triunghi?"

Pentru a nu complica mai mult lucrurile, să alegem punctele α și β pe segmentul (0, 1) și să observăm că am făcut alegerea din figura (P_3), unde $\alpha < \beta$. Segmentele ce vor fi laturile triunghiului căutat, au deci lungimile $\alpha, \beta - \alpha, 1 - \beta$.

După cum bine știm, într-un triunghi o latură trebuie să fie mai mică decît suma celorlalte două. Așadar, dacă pe cazul concret va trebui să avem:

$$\alpha < (\beta - \alpha) + (1 - \beta); \quad \beta - \alpha < \alpha + (1 - \beta); \quad 1 - \beta < \alpha + (\beta - \alpha) \qquad (1.7)$$

Fig. (P_3)
Două puncte la întîmplare pe (0, 1)

care devin imediat:

$$0 < \alpha < \frac{1}{2} < \beta < 1; \quad \beta - \alpha < \frac{1}{2}. \qquad (*)$$

Ce se întîmplă însă dacă $\alpha > \beta$?; atunci segmentele ce vor trebui să formeze triunghiul sînt: β, $\alpha - \beta$, $1 - \alpha$ care din aceleași motive de mai sus, vor implica în final inegalitățile:

$$0 < \beta < \frac{1}{2} < \alpha < 1; \quad \alpha - \beta < \frac{1}{2}. \qquad (**)$$

Deocamdată n-am găsit decît condițiile impuse asupra numerelor. Să considerăm acum un sistem rectangular de axe (0α, 0β) și fie $M(\alpha, \beta)$ un punct în pătratul de coordonate (0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1). Deoarece α și β sînt alese întîmplător, și punctul M va fi ales întîmplător în acest pătrat.

Punctele care satisfac sistemele de condițiile (*) și (**) se găsesc în regiunea hașurată din figura (P_4) a cărei arie este evident 1/4 (aria punctelor favorabile). Cum aria punctelor posibil de ales este 1 (aria pătratului), rezultă că probabilitatea căutată este 1/4.

Acad. Gh. Mihoc, a publicat în anul 1977 în revista „Curierul Liceului I.L. Caragiale" din Ploiești (pp. 6—9), soluția unei interesante probleme legată de triunghi, al cărei enunț îi

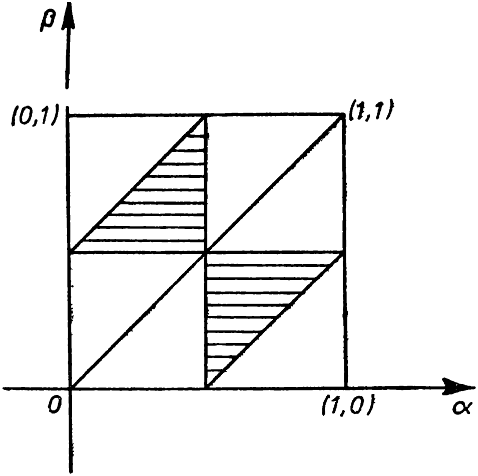

Fig. (P$_4$)
Rezolvarea „problemei chibritului"

aparține de asemenea. Acad. Gh. Mihoc enunțase de fapt această problemă cu aproape un deceniu în urmă ca un divertisment, dar s-a constatat ulterior că ea reprezintă o frumoasă generalizare a problemei chibritului, și că pune în evidență legături nebănuite cu geometria sintetică și calculul probabilităților. Facem aici o paranteză și amintim faptul că celebrul geometru rus N.I. Lobacevski a fost printre primii geometri de „profesie", care a atacat sistematic problema folosirii teoriei probabilităților ca instrument de lucru în geometrie.

Problema acad. Gh. Mihoc

> ***Să se determine probabilitatea ca distanțele de la un punct luat la întîmplare în interiorul unui triunghi dat ABC, la laturile sale să poată forma un triunghi.***

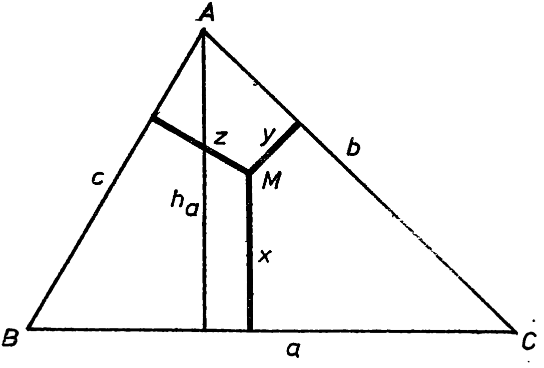

Fig. (P_5)
Problema acad. *Gh. Mihoc*

În figura (P_5) am ales deci la întîmplare un punct M în interiorul triunghiului ABC, de laturi a, b, c, și am notat cu x, y, z, distanțele lui M la laturi. Dacă S este aria triunghiului, nu este prea greu de demonstrat că:

$$ax + by + cz = 2S. \tag{1.8}$$

Condițiile impuse lui x, y, z ca să poată forma un triunghi sînt:

$$x < y + z,\ y < z + x,\ z < x + y. \tag{1.9}$$

Din relația (1.8), scoatem pe z și îl înlocuim în relațiile (1.9) care devin astfel:

$$\begin{gathered}(a + c)x + (b - c)y < 2S;\ (a - c)x + (b + c)y < 2S \\ (a + c)x + (b + c)y < 2S.\end{gathered} \tag{1.11}$$

Nu este, de asemenea, greu de văzut că oricare ar fi alegerea lui M în interiorul triunghiului (exceptînd bineînțeles vîrfurile și laturile), distanțele x și y îndeplinesc condițiile:

$$0 < x < h_a,\ \ 0 < y < h_b, \tag{1.12}$$

unde h_a și h_b sînt înălțimile triunghiului corespunzătoare laturilor a și b.

Inegalitățile (1.11) închid un domeniu delimitat de dreptele:

$$(a + c)x + (b - c)y = 2S; \ (a - c)x + (b + c)y = 2S$$
$$(a - c)x + (b + c)y = 2S. \quad (1.13)$$

Problema care se pune deci este determinarea probabilității ca un punct luat la întîmplare în interiorul dreptunghiului de coordonate (0, 0), (h_a, 0), (0, h_b), (h_a, h_b) să verifice inegalitățile (1.11).

Calculăm aria triunghiului format de dreptele (1.13). Un calcul laborios, dar neinteresant, ne conduce la următoarea expresie a ariei:

$$\text{Aria} = \frac{8cS^2}{(a + b)(b + c)(c + a)}. \quad (1.14)$$

Așadar, probabilitatea cerută este:

$$P = \frac{8cS^2}{(a + b)(b + c)(c + a)h_a h_b}. \quad (1.15)$$

Se știe însă că într-un triunghi au loc relațiile: $ah_a = bh_b = ch_c = 2S$ și deci, probabilitatea se exprimă în funcție de laturi astfel:

$$P = \frac{2abc}{(a + b)(b + c)(c + a)}. \quad (1.16)$$

Acad. Gh. Mihoc face următoarele observații interesante:

Se știe de asemenea că într-un triunghi oarecare are loc inegalitatea

$$(a + b)(b + c)(c + a) \geqslant 8abc, \quad (1.17)$$

relație care rezultă imediat din înmulțirea membru cu membru al inegalităților evidente:

$$(a + b)^2 \geqslant 4ab; \ (b + c)^2 \geqslant 4bc; \ (c + a)^2 \geqslant 4ac. \quad (1.18)$$

Din această cauză, probabilitatea P este majorată astfel:

$$P = \frac{2\,abc}{(a+b)(b+c)(c+a)} \leqslant \frac{1}{4}. \qquad (1.19).$$

Așadar, probabilitatea ca alegînd un punct în interiorul unui triunghi distanțele lui la laturi să formeze un triunghi este mai mică decît 1/4. Probabilitatea este egală cu 1/4 cînd triunghiul este echilateral.

În cazul triunghiului echilateral, se știe că dacă M este un punct din interiorul său, atunci suma distanțelor de la M la laturile triunghiului este constantă oricare ar fi M și anume este egală cu înălțimea triunghiului. Problema revine deci la împărțirea unui segment de lungime egală cu înălțimea unui triunghi echilateral în trei segmente care să poată forma un triunghi. Recunoaștem deci „problema chibritului" pentru care probabilitatea este 1/4.

Iată deci cît de neașteptate pot fi conexiunile între două ramuri de matematică, în aparență atît de diverse!

2. ÎN DIFICULTATE SAU CUM SĂ ÎNVĂŢĂM GEOMETRIA TRIUNGHIULUI

2.1. Un alt punct de vedere

O să începem acest capitol, citînd un pasaj dintr-un foarte util ghid de pregătire la matematică pentru concursul de admitere în învăţămîntul superior; în materialul consacrat geometriei plane, autorii subliniază — pe bună dreptate — următoarele:

> „Dificultăţile principale ale problemelor de geometrie plană constau în caracterul lor nonstandard. Fiecare problemă de geometrie plană comportă un studiu specific în care sînt implicate în afara informaţiilor obţinute în liceu, o anumită obişnuinţă de a rezolva probleme, o gîndire logică bine conturată, ca şi o anumită creativitate."

Aceste lucruri sînt în mare măsură adevărate. „Sperietoarea" examenelor de tot felul, au constituit-o multă vreme — şi o constituie încă — problemele de geometrie plană, îndeosebi cele legate de triunghi.

Faptul nu este întîmplător; problemele de geometria triunghiului nu sînt de fel simple, şi o lungă perioadă de timp — istoric vorbind — au constituit mîndria „profesioniştilor matematicii" din diferite epoci ale dezvoltării societăţii omeneşti.

Au existat — la diferite momente şi în diferite ţări — glasuri care s-au ridicat împotriva geometriei sintetice şi a geometriei triunghiului în particular, sub motivul că logica şi gîndirea elevilor se poate forma şi dezvolta şi fără ajutorul acestei discipline, propunînd în schimb discipline moderne şi foarte direct aplicative, ca teoria probabilităţilor şi statistica matematică.

Autorul acestor rînduri — ca statistician care a lucrat mai bine de un deceniu în diferite ramuri ale industriei, își dă seama poate mai bine decît alți teoreticieni, că o gîndire clară și o deprindere a raționamentului exact nu se poate face sărind etape întregi de dezvoltare a matematicii. Desigur, predarea geometriei — cum sublinia și profesorul N.N. Mihăileanu [13] — necesită încă substanțiale îmbunătățiri. Aceasta nu înseamnă însă de fel eliminarea unei ramuri care — contrar unor idei preconcepute — are importante aplicații într-o sumedenie de discipline tehnice. Pe de altă parte, nu trebuie bineînțeles exagerat rolul geometriei sintetice — cu toată frumusețea ei.

Revenind la citatul de mai înainte, trebuie să remarcăm că nu degeaba sistemul de învățămînt din toate țările a păstrat și va mai păstra probabil încă multă vreme de-acum încolo studiul geometriei sintetice. Lăsînd la o parte aplicațiile directe ale acestei ramuri, acea creativitate de care se vorbea acolo constituie un element esențial. Școala urmărește de fapt nu „producerea" unui automat de rezolvat probleme, ci a unui individ înarmat cu noțiuni, concepte și tehnici de calcul, capabile să-i permită să răspundă anumitor cerințe de ordin teoretic și practic. Dacă în ziua de azi, calculatoarele au ajuns să „creeze" muzică, versuri etc. aceasta se datorează tot omului care a implantat anterior în structura acestuia posibilitățile materiale de a combina note sau cuvinte. Calculatorul nu va fi însă niciodată în stare de adevărata creativitate. El nu va fi niciodată capabil să redea cu de la sine putere magica atmosferă a „morții căprioarei" lui Labiș, sau gravitatea unui lied de Lipatti. După cum la fel nu va fi în stare să descopere proprietăți fascinante ale micuțului poligon cu trei laturi, așa cum numai Lalescu sau Barbilian o puteau face...

Și totuși, cu tot caracterul lor „nonstandard", cu toată „cantitatea de inspirație" necesară, fără îndoială, în rezolvarea problemelor de geometrie sintetică — în particular a celor de geometria triunghiului — , geometria triunghiului se poate învăța ca un tot unitar pe cale logico-deductivă.

Răsfoind paginile „Revistei Matematice din Timişoara", am găsit în numărul 1 din anul 1929 un articol scris de matematicianul C.I. Bujor, intitulat „Extinderi în geometria triunghiului". Chiar pe prima pagină a acestei lucrări se remarca următorul fapt interesant:

> „Elemente ale unui triunghi, puncte şi curbe remarcabile, proprietăti, sînt în strînsă legătură unele cu altele, deduse sau definite cu ajutorul unui singur element. Ca element generator ar putea fi privit oricare dintre ele..."

C.I. Bujor abordează această problemă „dintr-un punct de vedere mai înalt" (vezi N.N. Mihăileanu, idem op. cit. pag. 243, [14]), aplicînd unele metode care depăşesc cadrul cunoştinţelor predate în şcoală.

Ideea unităţii proprietăţilor geometrice ale triunghiului trebuie însă reţinută. Ea a fost demonstrată implicit de către Giovanni Ceva cu mult timp în urmă. G. Ceva nu a prevăzut implicaţiile descoperirii sale. Teorema, care azi îi poartă numele, este încă tratată ca o proprietate oarecare de geometrie sintetică.

Şi totuşi...

2.2. Giovanni Ceva — precursor necunoscut al unei noi geometrii a triunghiului

Giovanni Ceva a fost un matematician italian care a trăit între anii 1647—1734. Istoria culturii italiene îi păstrează un loc important în pleiada de matematicieni ai Renaşterii şi Evului Mediu tîrziu.

În anul 1678 el publică la Milano o lucrare intitulată *Construcţia statică a liniilor drepte concurente* (titlul în limba latină era: De lineis rectis se invicem secantibus statica constructio) în care el insistă în special asupra a ceea ce noi numim astăzi „teorema lui *Menelaus*" (aprox. sec. II, era noastră), demonstrînd-o cu ajutorul unor considerente de mecanică şi dîndu-i, de asemenea, şi o extindere în spaţiu.

Ceva credea că teorema este nouă. Acest lucru poate părea azi curios, dar trebuie să facem observația că abia după anul 1700, Edmund Halley (1656—1742) editează în Anglia operele — să le spunem complete — ale unor mari matematicieni ai antichității, printre care Apollonius, Serenus și Menelaus.

Menelaus a demonstrat — prin considerente sintetice — că: dacă o dreaptă (Δ) taie laturile unui triunghi în punctele A_1, B_1, C_1, atunci are loc relația:

$$\frac{A_1B}{A_1C}\,\frac{B_1C}{B_1A}\cdot\frac{C_1A}{C_1B}=1. \tag{2.1}$$

(Are loc și teorema reciprocă: dacă A_1, B_1, C_1 sînt trei puncte pe laturile triunghiului ABC, atunci dacă are loc 2.1, punctele A_1, B_1, C_1 sînt coliniare).

Ceva a dat în acea lucrare și teorema care îi poartă numele; *Teorema lui Ceva*: dacă M este un punct în planul triunghiului ABC și A_1, B_1, C_1 sînt intersecțiile dreptelor AM, BM, CM, cu laturile BC, CA, AB atunci:

$$\frac{A_1B}{A_1C}\cdot\frac{B_1C}{B_1A}\cdot\frac{C_1A}{C_1B}=1. \tag{2.2}$$

Reciproc: dacă A_1, B_1, C_1 sînt trei puncte pe laturile BC, CA, AB ale triunghiului ABC astfel încît are loc (2.2), atunci AA_1, BB_1, CC_1 sînt trei drepte concurente.

Azi, în limbajul geometriei sintetice s-a încetățenit termenul de „ceviană", prin care se înțelege orice dreaptă care trece prin vîrful unui triunghi.

Vom încerca să arătăm aici, cum prin această problemă se creează posibilitatea unei tratări unitare a multor proprietăți geometrice ale triunghiului, care par la prima vedere disparate.

În fond este vorba de un nou mod de a învăța geometria triunghiului al cărui precursor necunoscut a fost Giovanni Ceva. În ceea ce privește demonstrația *teoremei lui Ceva*, este foarte interesantă cea originală dată de Ceva însuși, prin folosirea unor considerente de mecanică (această demonstrație este reprodusă și în N.N. Mihăileanu, *Istoria mate-*

maticii, vol. I, Editura enciclopedică română, București, 1974, p. 206).

Într-adevăr, să aplicăm în vîrfurile unui triunghi ABC trei forțe paralele F_1, F_2, F_3. (vezi fig. 2.1). Rezultanta forțelor F_1, F_2 este plasată undeva pe dreapta AB în punctul C_1.

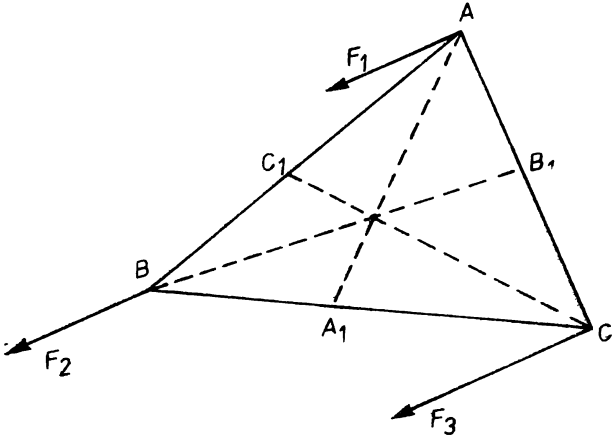

Fig. 2.1.
Demonstrația originală a teoremei lui *Ceva*

Conform unei cunoscute proprietăți date încă de Arhimede, există relația:

$$F_1 \cdot C_1B = F_2 \cdot C_1A \tag{2.3}$$

sau în cuvinte: forțele aplicate la capătul unei bare (vezi fig. 2.2) sînt invers proporționale cu brațele barei, OM și ON.

Scriind acum și celelalte două relații analoage:

$$F_2 \cdot A_1C = F_3 \cdot BA_1, \quad F_3 \cdot AB_1 = F_1 \cdot B_1C \tag{2.4}$$

și înmulțindu-le, obținem:

$$AB_1 \cdot CA_1 \cdot BC_1 = AC_1 \cdot BA_1 \cdot CB_1 \tag{2.5}$$

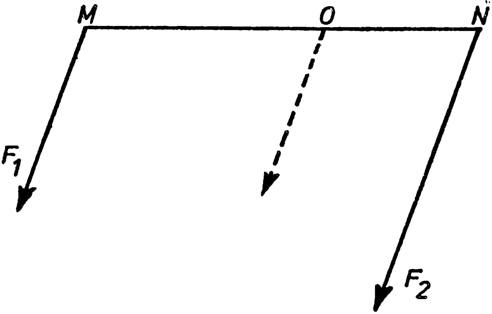

Fig. 2.2.
Proprietatea lui *Arhimede*

sau cu alte cuvinte: produsul a trei segmente neadiacente este egal cu produsul celorlalte trei.

Înainte de a intra mai pe larg în subiectul nostru, să amintim că matematicianul Mihail N. Ghermănescu a dat în anul 1928 o generalizare acestei teoreme a lui *Ceva* în felul următor:

> „Punctele în care dreptele care unesc vîrfurile unui poligon cu un număr impar de laturi cu un punct *M* din planul acestuia întîlnesc laturile opuse ale poligonului, determină pe acestea rapoarte al căror produs este 1" (vezi și C. Mihalescu, *Geometria elementelor remarcabile*, Editura tehnică, București, 1957, p. 400).

Pentru a justifica de ce Giovanni Ceva poate fi considerat un precursor al unui nou mod de abordare al geometriei triunghiului....

2.3. Să rezolvăm cîteva probleme clasice

Vom începe mai întîi cu o problemă pusă și rezolvată chiar de Ceva, ca o aplicație a teoremei sale. Iată care era problema:

1) Să se arate că dreptele care unesc vîrfurile unui triunghi cu punctele de contact ale cercului înscris cu laturile sînt concurente.

Din nou istoria ne-a transmis și a încetățenit punctul (Γ) sub alt nume și anume sub acela al unui cunoscut matematician francez J.D. Gergonne (1771—1859). Desigur, Gergonne nu are nici o vină; el a redescoperit proprietatea lui Ceva folosind cu totul alte considerații. Gergonne a fost un matematician multilateral, el atacînd probleme de geometrie superioară, teoria ecuațiilor, mecanică etc. În cunoscuta sa carte *Istoria matematicii de la Descartes pînă la mijlocul secolului al XIX-lea*, H. Wieleitner, îl menționează pe Gergonne cu realizări în domeniul matematicii de exact 12 ori!

Ceva a dat o soluție simplă pentru *punctul lui Gergonne* — dacă ne putem exprima așa, inversînd cronologiile. Iată care era soluția: se știe că tangentele (cele două) la un cerc care pleacă din același punct sînt egale. Atunci, din figura 2.3 avem imediat:

$$AB_1 = AC_1, \; BC_1 = BA_1, \; CA_1 = CB_1. \tag{2.6}$$

Înmulțind aceste trei relații membru cu membru, găsim conform reciprocei teoremei lui *Ceva* că dreptele AA_1, BB_1, CC_1 sînt concurente. Analog se poate demonstra că aceeași proprietate are loc pentru fiecare cerc exînscris (se obțin așa-numitele *puncte adjuncte ale lui Gergonne*). Fiindcă am adus vorba de cercurile exînscrise, să arătăm o altă aplicație a teoremei lui *Ceva*, și anume:

2) Să se arate că dreptele care unesc vîrfurile cu punctele de contact situate între vîrfurile laturilor opuse ale cercurilor exînscrise, sînt concurente.

Punctul care se obține, este cunoscut în geometria triunghiului sub numele de *punctul lui Nagel* (Ch. Nagel publică la Leipzig în 1836 o lucrare consacrată geometriei triunghiului în care se demonstrează și această proprietate).

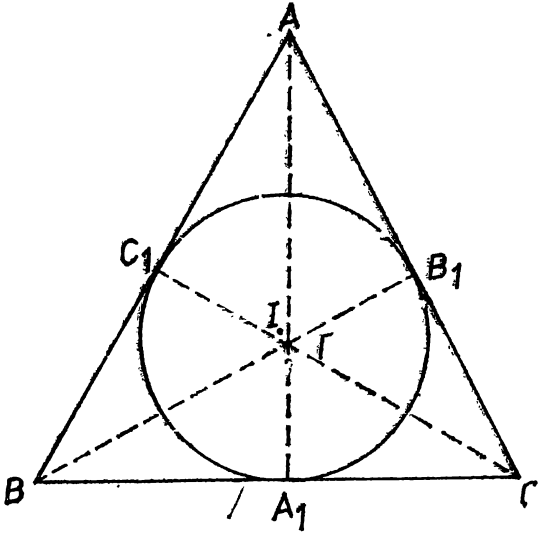

Fig. 2.3.
Punctul lui *Gergonne* (Γ) —
de fapt tot al lui *Ceva*
(Atenție! I $\notin$ CC_1)

Demonstrația este ceva mai complicată și pentru ca lucrurile să fie foarte clare, sîntem nevoiți să introducem o definiție nouă:

„Se spune că două ceviene AA_1 și AA_2 sînt *izotomice*, dacă și picioarele lor A_1 și A_2 sînt simetrice în raport cu mijlocul segmentului BC.

Traian Lalescu în *Geometria triunghiului*, p. 45, arată că „izotomicele celor trei ceviene concurente în M se întîlnesc de asemenea într-un punct M'".

Să arătăm acum că punctele de contact A_1 și A_2 ale cercului înscris, respectiv exînscris triunghiului ABC, de pe latura BC sînt puncte izotomice, adică simetrice în raport cu mijlocul lui BC.

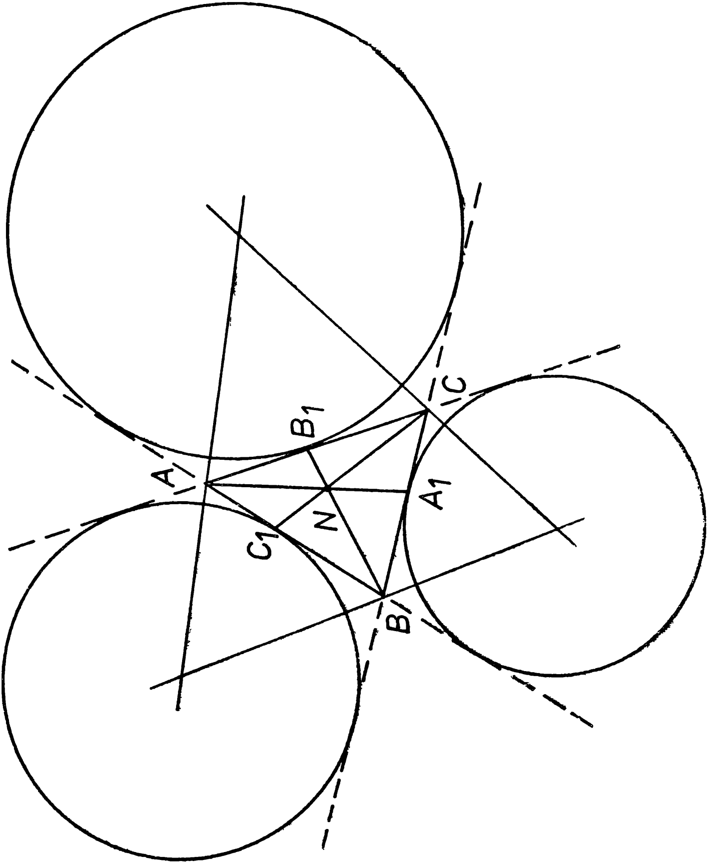

Fig. 2.4.
Punctul lui *Nagel*

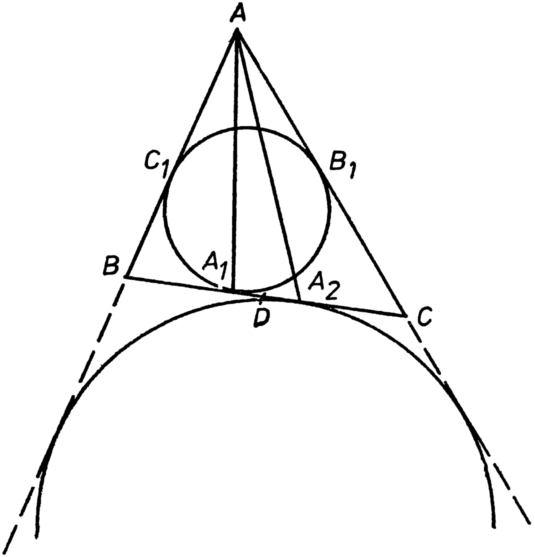

Fig. 2.5.
Două puncte izotomice: A_1 și A_2

Vom folosi tot *Geometria triunghiului*, care indică o soluție elegantă, folosind exprimarea în funcție de laturile triunghiului a, b, c, a segmentelor BA_1, BA_2, A_1C etc.

Astfel, dacă notăm $AC_1 = AB_1 = x$, $BC_1 = BA_1 = y$; $CA_1 = CB_1 = z$ atunci se observă că obținem:

$$x + y = c, \ x + z = b, \ z + y = a; \tag{2.7}$$

de unde imediat:

$$x = p - a; \ y = p - b; \ z = p - c, \ (a + b + c = 2p). \tag{2.8}$$

Analog, se obține:

$$BA_2 = p - c, \tag{2.9}$$

atunci:

$$CA_2 = a - BA_2 = a - p + c = p - b \qquad (2.10)$$

şi deci:

$$A_1A_2 = a - BA_1 - CA_2 = a - p + b - p + b =$$
$$= a + 2b - 2p = a + 2b - a - b - c = b - c, \qquad (2.11)$$

ceea ce implică:

$$A_1D = DA_2 = \frac{b-c}{2},$$

întrucît D este mijlocul lui BC. Dar, pe de altă parte, $BD = a/2$, iar $AD = BD - BA_1$. Avem deci:

$$A_1D = \frac{a}{2} - p + b = \frac{a - a - b - c + 2b}{2} = \frac{b-c}{2}, \qquad (2.12)$$

ceea ce trebuia arătat. Cum CA_1 este egal cu BA_2 rezultă asemănător $DA_2 = (b - c)/2$. Cevienele AA_1 şi AA_2 sînt deci izotomice. Atunci, conform proprietăţii enunţate mai înainte, AA_2, BB_2, CC_2, punctele B_2 și C_2 fiind corespunzătoarele lui A_2 pe laturile AC și AB, se întîlnesc într-un punct. Acesta este deci *punctul lui Nagel*. Ne-am chinuit puțin pînă să ajungem la rezultat!

Punctul lui *Nagel* se bucură de proprietăți frumoase, printre care enunțăm:

a) punctul lui *Nagel* (N), centrul de greutate al triunghiului (G) și centrul cercului înscris (I), sînt coliniare și avem:

$$NG = 2GI. \qquad (2.13)$$

(vezi *Geometria triunghiului* p. 51, 4, 40)

b) dreapta care unește ortocentrul H al triunghiului cu punctul *Nagel* N, este paralelă cu dreapta care unește centrul cercului circumscris O și înscris I, și avem:

$$HN = 2\,OI. \tag{2.14}$$

(idem op. cit., p. 51, 4.42 — *enunț corectat*)[1]

Desigur, toate aceste consecințe ale teoremei lui *Ceva* nu justifică pe deplin afirmația noastră. Va trebui să ne îndreptăm atenția către unele proprietăți, „clasice" să le spunem, adică acele proprietăți care au devenit deja un bun al manualelor școlare.

Să începem deci cu cevienele binecunoscute tuturor: medianele, bisectoarele, înălțimile etc.

3) Să se arate că într-un triunghi, medianele sînt concurente.

Această proprietate este evident foarte cunoscută. Orice elev o poate demonstra destul de ușor. În mod uzual, ea nu se demonstrează cu ajutorul teoremei lui *Ceva*, deși cu aceasta din urmă, concurența medianelor rezultă banal.

Într-adevăr, din figura 2.6 avem conform proprietății medianelor $A_1B = A_1C$, $B_1A = B_1C$ și $C_1A = C_1B$. Așadar, egalitatea lui *Ceva* privind produsele segmentelor neadiacente se îndeplinește în mod natural.

4) Să se arate că înălțimile unui triunghi sînt concurente.

Și această proprietate este binecunoscută. O vom demonstra tot cu ajutorul teoremei lui *Ceva*.

Dacă privim figura 2.7, putem scrie imediat:

$$A_1B = AB \cos B;\ AB_1 = AB \cos A \tag{2.15}$$

$$B_1C = BC \cos C;\ C_1B = BC \cos B \tag{2.16}$$

$$AC_1 = AC \cos A;\ A_1C = AC \cos C. \tag{2.17}$$

[1] În ambele ediții ale lucrării lui Lalescu s-au schimbat literele I și N între ele. Corectarea, demonstrația respectivă, precum și o aplicație sînt efectuate de autor în GMF-B, 1961, nr. 7, p. 407, în nota intitulată „Relativ la punctul *Nagel*".

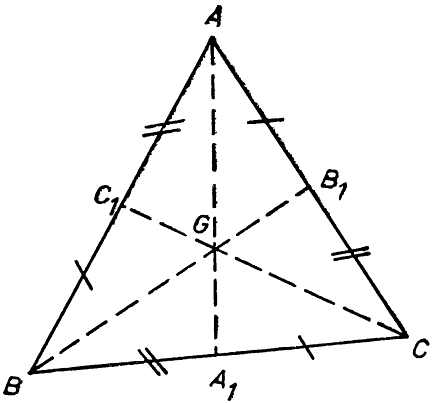

Fig. 2 6.
Demonstrăm concurența medianelor

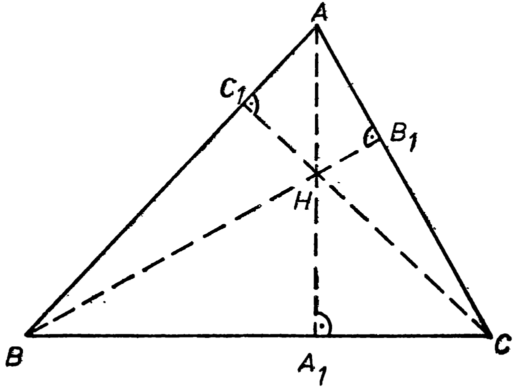

Fig. 2.7.
Demonstrăm concurența înălțimilor

Înmulțind aceste relații membru cu membru, obținem imediat relația lui *Ceva*.

În fine, se poate continua în acest mod și cu alte ceviene. Toate aceste lucrări sugerează că cevienele importante în triunghi se pot trata unitar, cu ajutorul teoremei lui *Ceva*.

Aici stă „cheia" problemei noastre metodologice. Cum să facem însă că toată această „încrengătură" de drepte care taie în lung și-n lat triunghiul, să cadă rînd pe rînd ca niște umile cazuri particulare ale unui fapt mai general?

Continuați deci cu paragraful ce urmează.

2.4. Cevienele de rangul k

Iată cum vom proceda pentru a demonstra, în fine, forța ascunsă a teoremei lui *Ceva*.[1] O să considerăm un triunghi oarecare ABC și din vîrful A ducem ceviana AD, D fiind punctul pe latura opusă, BC.

Cum în matematică există dreptul de a introduce definiții — cu condiția ca obiectul definit să aibă sens, vom introduce și noi următoarea:

Definiție: Numim AD ceviană de rangul k, dacă are loc relația:

$$\frac{BD}{DC}=\left(\frac{c}{b}\right)^k \tag{2.18}$$

unde a, b, c, sînt laturile triunghiului, iar k este un număr real.

Analog, să considerăm că dreptele BE și CF, unde E și F sînt puncte pe laturile AC și AB, sînt ceviene de rangul k, adică:

$$\frac{CE}{EA}=\left(\frac{a}{c}\right)^k, \quad \frac{AF}{FB}=\left(\frac{b}{a}\right)^k. \tag{2.19}$$

Un spirit iscoditor ne poate întreba imediat: bine, sînt de acord cu definiția. Dar există vreun k real astfel încît relația

[1] Vezi „Asupra unor ceviene", GMF-B, 1962, nr. 9, pp. 528—531.

(2.18) să aibă loc? Trebuie să mă conving că relația de definiție nu este o fantomă.

Întrebarea este naturală, dar răspunsul nostru va mulțumi și pe cel mai exigent răutăcios. Dăm mai jos cîteva cazuri particulare:

a) medianele sînt ceviene de rangul zero ($k = 0$). Într-adevăr,

$$\frac{BD}{DC} = \left(\frac{c}{b}\right)^0 = 1 \Rightarrow BD = DC; \qquad (2.20)$$

b) bisectoarele sînt ceviene de rangul unu ($k = 1$), adică:

$$\frac{BD}{DC} = \frac{c}{b} \qquad (2.21)$$

ceea ce reprezintă de fapt cunoscuta teoremă a bisectoarei;

c) simedianele sînt ceviene de rangul doi ($k = 2$), adică:

$$\frac{BD}{DC} = \left(\frac{c}{b}\right)^2. \qquad (2.22)$$

Această relație este adevărată, deoarece reprezintă un caz particular al așa-numitei „teoreme a lui *Steiner*".

Jacob Steiner (1796—1863), numit de istoricul W.W. Rouse Ball[1] drept „cel mai mare geometru de la Apollonius încoace", are contribuții deosebit de importante în știința geometriei. Este interesant să amintim că Steiner — fiu de țăran dintr-un mic cătun al Germaniei medievale, nu a avut posibilitatea să învețe să scrie și să citească pînă la vîrsta de 14 ani! Numai talentul său extraordinar, puterea sa logică nativă, au reușit să atragă atenția unor renumiți savanți ai epocii, care i-au înlesnit accesul la cultură, ulterior el ajungînd șeful catedrei de geometrie de la Universitatea din Berlin. După cum arăta același istoric, „operele lui

[1] W. W. Rouse Ball, *A short account of the history of mathematics*, Dover Publ. Inc., New York, 1960.

Steiner pot fi considerate ca o autoritate clasică în domeniul geometriei sintetice moderne".

Așadar, am arătat că definiția cevienei de rangul k nu este dată fără vreo bază concretă. Desigur, ar fi foarte interesant să arătăm că există cît mai multe valori ale lui k, pentru care se obțin ceviene remarcabile.

Pînă una alta, să demonstrăm o interesantă

Teoremă: În orice triunghi, trei ceviene de același rang sînt concurente.

Lucrul acesta se arată destul de simplu, folosind reciproca teoremei lui *Ceva*. Într-adevăr, înmulțind membru cu membru relațiile (2.18) și (2.19), obținem:

$$\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}\cdot\frac{AF}{FB}=1, \tag{2.23}$$

ceea ce dovedește concurența dreptelor respective.

Faptul este destul de important: de îndată ce vom găsi un k pentru care o astfel de ceviană există, avem asigurată concurența a trei ceviene de același tip.

Să punem acum în evidență cîteva proprietăți ale cevienelor de rangul k. Mai întîi, să demonstrăm următoarea

Propoziție: Orice ceviană de rangul k este locul geometric al punctelor pentru care distanțele la două laturi ale triunghiului sînt proporționale cu acele laturi la puterea $(k-1)$.

Să facem pentru început o figură. Așadar, în figura 2.8 am dus o ceviană k — fie ea AD, și am luat pe ea un punct oarecare M. Din M am dus distanțele y și z la laturile AC și AB și am notat cu φ și θ respectiv unghiurile BAD și DAC. Deocamdată, putem scrie — pe baza unor considerații de arii — următoarea relație:

$$\frac{S_{BAD}}{S_{DAC}}=\frac{BD}{DC}. \tag{2.24}$$

Pe de altă parte, mai putem scrie:

$$\frac{S_{BAD}}{S_{DAC}}=\frac{AD\cdot c\cdot\sin\varphi}{AD\cdot b\cdot\sin\theta}=\frac{c}{b}\cdot\frac{\sin\varphi}{\sin\theta}. \tag{2.25}$$

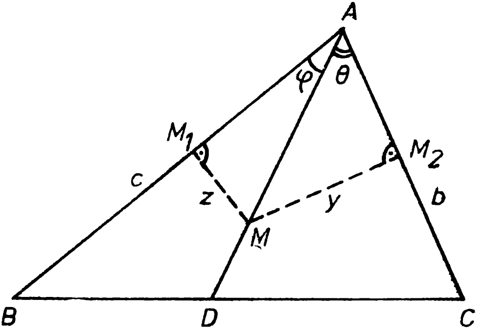

Fig. 2.8.
Demonstrăm o proprietate a cevienelor (k)

Egalînd relațiile (2.24), (2.25) obținem:

$$\frac{BD}{DC}=\frac{c}{b}\cdot\frac{\sin\varphi}{\sin\theta}. \tag{2.26}$$

Dar AD este ceviană de rangul k, deci:

$$\frac{BD}{DC}=\left(\frac{c}{b}\right)^k, \tag{2.27}$$

prin urmare:

$$\frac{\sin\varphi}{\sin\theta}=\left(\frac{c}{b}\right)^{k-1}. \tag{2.28}$$

Intră în joc acum punctul M. Din triunghiurile dreptunghice AM_1M și AM_2M avem imediat:

$$\sin\varphi=\frac{z}{AM},\quad \sin\theta=\frac{y}{AM}, \tag{2.29}$$

adică, de fapt:

$$\frac{\sin\varphi}{\sin\theta}=\frac{z}{y}. \tag{2.30}$$

Egalînd acum (2.28) cu (2.30) se obţine:

$$\frac{z}{c^{k-1}} = \frac{y}{b^{k-1}}. \tag{2.31}$$

Dacă vom duce şi distanţa $MM_3 = x$ la latura BC, atunci din aceleaşi considerente vom obţine:

$$\frac{x}{a^{k-1}} = \frac{y}{b^{k-1}} = \frac{z}{c^{k-1}}. \tag{2.32}$$

Cazuri particulare: să scriem mai întîi relaţiile (2.32) sub forma:

$$\frac{ax}{a^k} = \frac{by}{b^k} = \frac{cz}{c^k}, \tag{2.33}$$

de unde putem deduce:

$$x = \frac{ax + by + cz}{a^k + b^k + c^k} \cdot a^{k-1} = \frac{2a^{k-1} S}{a^k + b^k + c^k}, \tag{2.34}$$

unde $2S = ax + by + cz$.

1) Dacă luăm cevienele de rangul zero ($k = 0$), avem:

$$x = \frac{2S}{3a} = \frac{h_a}{3}, \quad y = \frac{h_b}{3}, \quad z = \frac{h_c}{3}, \tag{2.35}$$

iar de aici rezultă proprietatea:

$$x + y + z = \frac{1}{3}(h_a + h_b + h_c); \tag{2.36}$$

adică suma distanţelor centrului de greutate la laturi este a treia parte din suma înălţimilor triunghiului. Are loc însă şi următoarea inegalitate:

$$h_a + h_b + h_c \geqslant 9r \tag{2.37}$$

(pe care o vom demonstra în capitolul III, § 3.2, dar vezi şi GMF-B nr. 11/1957, p. 565), şi prin urmare:

$$x + y + z \geqslant 3r; \tag{2.38}$$

2) Pentru cevienele de rangul 1 (bisectoarele), avem:

$$x = \frac{2S}{a+b+c} = \frac{2S}{2p} = \frac{S}{p} = r, \tag{2.39}$$

Am regăsit deci proprietatea centrului cercului înscris de a se afla la distanța r de laturile triunghiului.

3) pentru $k = 2$ sîntem în cazul simedianelor; punctul M poartă numele în acest caz de „punctul lui *Lemoine*“ (se notează deobicei prin K).

Emil Lemoine (1840—1912), matematician francez și-a consacrat o mare parte a activității sale „noii înfloriri a geometriei triunghiului“ (Wieleitner, p. 477).

Punctul de concurență al simedianelor era cunoscut încă din 1847, dar el a primit numele lui Lemoine datorită în special proprietăților simedianelor, investigate cu deosebire de acesta.

Din relația (2.32), deducem că:

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}, \tag{2.40}$$

adică punctul lui *Lemoine* se bucură de proprietatea că distanțele sale la laturi sînt proporționale cu laturile respective.

Vom pune acum în evidență alte cîteva proprietăți interesante ale cevienelor de rangul k. Vă aduceți aminte ce înțelegem prin două ceviene izotomice. Ei bine, are loc următoarea

Teoremă: Ceviana izotomică unei ceviene de rangul k este ceviana de rang $(-k)$.

Într-adevăr, dacă AD este ceviană de rang k, atunci:

$$\frac{BD}{DC} = \left(\frac{c}{b}\right)^k. \tag{2.41}$$

Izotomica AD_1 împarte latura BC astfel încît are loc:

$$\frac{BD_1}{D_1C} = \frac{DC}{BD} = \left(\frac{b}{c}\right)^k = \left(\frac{c}{b}\right)^{-k}. \tag{2.42}$$

Teorema este demonstrată (fig. 2.9.).

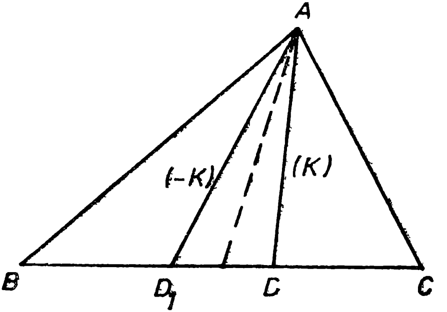

Fig. 2.9.
Izotomica unei ceviene de rang (k)

Consecință importantă:

Se știe acum că bisectoarele sînt ceviene de rangul (1). Atunci izotomicele bisectoarelor există, ele sînt ceviene de rangul (—1) și se numesc *antibisectoare*.

Antibisectoarele sînt deci trei drepte concurente într-un triunghi, punctul lor de intersecție numindu-se *centrul antibisector* al triunghiului. Conform relației (2.34), dacă M este centrul antibisector, iar x, y, z, distanțele de la M, la laturi, atunci:

$$x = \frac{2a^{-1} S}{a^{-1} + b^{-1} + c^{-1}} = \frac{a^{-1} h_a}{a^{-1} + b^{-1} + c^{-1}} \quad \text{etc.} \tag{2.43}$$

Centrul antibisector are o proprietate interesantă, pusă în evidență de figura 2.10. După cum se poate ghici, am dus, prin centrul antibisector, paralele la laturile triunghiului, după cum urmează: $M_1M_4 \parallel AB$, $M_6M_3 \parallel BC$, $M_2M_5 \parallel AC$.

Proprietate: Segmentele M_1M_2, M_3M_4, M_5M_6 sînt egale.

Demonstrația nu e deloc dificilă. Putem scrie următorul șir de relații (dat de asemănarea triunghiurilor MM_1M_2 și ABC):

$$\frac{M_1M_2}{a} = \frac{x}{h_a} = \frac{a^{-1}}{a^{-1} + b^{-1} + c^{-1}}, \tag{2.44}$$

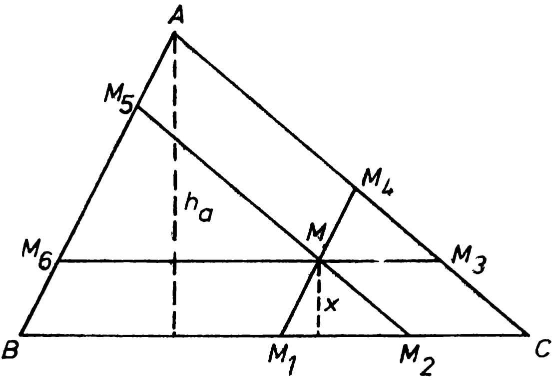

Fig. 2.10.
Paralele la laturi
prin centrul antibisector

ultima relaţie fiind tocmai (2.43), scrisă în alt mod. De aici rezultă:

$$M_1M_2 = \frac{1}{a^{-1} + b^{-1} + c^{-1}}. \tag{2.45}$$

Nu este greu de văzut că M_3M_4 şi M_5M_6 vor avea aceeaşi exprimare. Acum, vă rog priviţi cu atenţie figura 2.11. Am construit pe desenul respectiv, cevienele AA_1 şi AA_2 astfel încît $\sphericalangle BAA_1 = \sphericalangle A_2AC = \alpha$.

Am mai dus şi bisectoarea AA_3, deci $\sphericalangle BAA_3 = \sphericalangle CAA_3$.

Evident, şi unghiurile A_1AA_3 şi A_3AA_2 sînt egale, deoarece sînt obţinute ca diferenţe de unghiuri egale.

Cevienele astfel construite (AA_1, AA_2) se numesc *ceviene izogonale*. Aşadar, două ceviene izogonale se pot obţine, sau construind drepte egal înclinate pe laturile unghiului din care pleacă, sau construindu-le simetric în raport cu bisectoarea unghiului respectiv. Vom arăta acum o proprietate pe care probabil o ştiaţi, dar pe care „mai mult ca sigur" (un

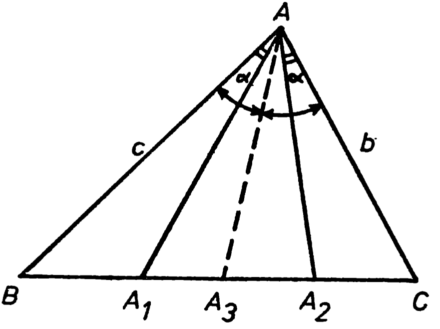

Fig. 2.11.
Ceviene izogonale

probabilist n-ar spune așa ceva niciodată!) că n-ați întîlnit-o sub formularea de mai jos:

> „Într-un triunghi oarecare, raza cercului circumscris OA este izogonală cu înălțimea h_a ce pleacă din același vîrf".

Să privim pentru demonstrație, figura 2.12. Trebuie deci să arătăm în final că $\sphericalangle BAA_2 = \sphericalangle A_1AC$, A_2 fiind punctul pe BC obținut prin prelungirea razei OA. Cu cine este egal $\sphericalangle A_1AC$? Bineînțeles cu $\frac{\pi}{2} - \hat{C}$ deoarece triunghiul AA_1C este dreptunghic. Pe de altă parte, triunghiul AOB este isoscel, deoarece $OA = OB = R$. Unghiul AOB este unghi la centru, deci este egal cu $2\hat{C}$ — pe considerentul subîntinderii arcului BQA. Atunci, în mod natural $\sphericalangle BAO = \sphericalangle ABO = \frac{\pi - 2\hat{C}}{2} = \frac{\pi}{2} - \hat{C}$, adică, de fapt, tot aceeași valoare cu a unghiului A_1AC. Izogonalitatea este demonstrată.

Iată acum o interesantă proprietate referitoare la izogonalitatea cevienelor de rangul k, și anume:

> „Ceviana izogonală cevienei de rangul k este ceviana de rang $(2 - k)$ și reciproc."

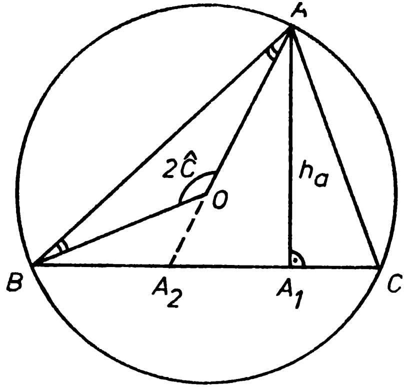

Fig. 2.12.
Raza OA și înălțimea h_a sînt izogonale

Acest lucru se poate dovedi foarte ușor, ținînd cont de definiția unei izogonale și de relația ce caracterizează cevienele de rangul k. Un singur exemplu: știm că simediana este simetrica medianei în raport cu bisectoarea, adică este izogonala medianei. Cum mediana este ceviana de rang zero ($k = 0$), rezultă prin izogonalitate că simediana este ceviana de rang 2, ceea ce am arătat mai înainte.

Încă un exemplu: se știe că izogonala bisectoarei este ea însăși. Dar bisectoarea este ceviana de rang 1 ($k = 1$). Atunci izogonala ei este, conform proprietății enunțate, ceviana de rang $(2 - 1) = 1$, adică tot bisectoarea.

Matematicianul francez Maurice D'Ocagne (1862—1938) a demonstrat încă în anul 1883 următoarea proprietate interesantă, relativ la antibisectoare:

Izogonala antibisectoarei (AD_1) — fie ea AD_2, are proprietatea

$$\frac{BD_2}{D_2C} = \left(\frac{c}{b}\right)^3. \tag{2.46}$$

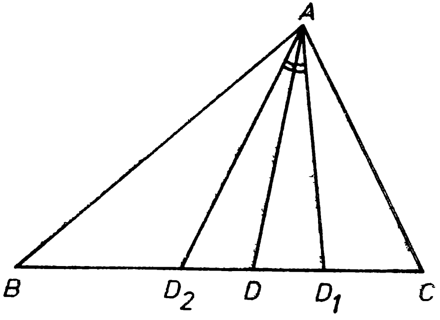

Fig. 2.13.
Proprietatea lui *D'Ocagne*

Această proprietate se poate ușor formula în termeni de ceviene de rangul k, și anume:

Fie AD o ceviană de rangul k. Construim izotomica acesteia, care conform unei teoreme demonstrată anterior, este ceviana de rang $(-k)$. Construim acum izogonala cevienei $(-k)$. Conform proprietății de mai sus, ea este ceviana de rang $(2-(-k)) = 2+k$.

Este clar acum că dacă luăm $k = 1$ se obține proprietatea lui *D'Ocagne*.

Iată deci cum teorema lui *Ceva* este sursa unificatoare a nenumărate proprietăți importante ale triunghiului. Desigur că s-ar putea evidenția și alte proprietăți.[1]

Trebuie să spunem, în încheiere, că ideea de a privi dintr-un unghi nou geometria triunghiului este mai veche. De obicei, prin adjectivul „nou" se înțelegea cuprinderea acelor proprietăți descoperite în epoci mai recente, proprietăți care nu erau cunoscute antichității.

În țara noastră, literatura dedicată proprietăților triunghiului este foarte bogată. Nu putem trece aici în revistă

[1] A se consulta excelenta lucrare a lui S.I. Zetel, *Novaia gheometria treugolnika*, Izdatelstvo Ucipedghiz, Moskva, 1962, din care am preluat unele elemente expuse aici.

toate contribuţiile matematicienilor români. Cititorul este îndemnat să consulte bibliografia, unde s-au inclus multe din lucrările editate în limba română pe această temă.

Pe alte meridiane, remarcăm apariţia în 1903, la Odessa, a lucrării profesorului D. Efremov, intitulată chiar *Noua geometrie a triunghiului*[1], care s-a bucurat de o îndelungată apreciere printre iubitorii matematicii.

Lecţiile de geometrie — lucrare clasică azi, aparţinînd marelui matematician francez Jacques Hadamard constituie o adevărată enciclopedie în ceea ce priveşte proprietăţile triunghiului.

Lista lucrărilor importante în acest domeniu este deosebit de largă. Ne oprim totuşi aici, în speranţa că v-am trezit curiozitatea pentru noul mod de abordare a geometriei triunghiului.

---

[1] Efremov, D., *Novaia gheometria treugolnika*, Izdatelstvo Vestnika Opîtnoi Fiziki i Elementarnoi Matematiki, Odessa, 1903.

Capitolul III

3. OASPEȚI ÎN RING

3.1. Mirajul unghiurilor drepte

Probabil că dacă ați rezistat să citiți cele scrise pînă aici, sînteți fără să vreți curioși să știți ce mai ascunde și acest subtitlu. Enigma e parțial rezolvată prin cele două cuvinte trădătoare. Și acum, ca să dăm intenția în vileag, o să mărturisim că ne vom ocupa de cîteva proprietăți ale triunghiurilor dreptunghice și de puțină trigonometrie — consecință directă a proprietăților acestora.

Primul gînd ne duce — cum e și firesc — la Pitagora și la discipolii săi. După cum bine se știe, egiptenii, babilonenii, caldeenii, cunoșteau diferite forme particulare ale teoremei lui *Pitagora*. De fapt — și acest lucru este interesant — nu se știe precis care a fost demonstrația inițială dată de Pitagora celebrei sale teoreme. Aproape peste tot s-a încetățenit demonstrația care folosește construcția în exteriorul triunghiului a cîte un pătrat pe fiecare latură.

S-au dat, de-a lungul timpului, foarte multe demonstrații teoremei lui *Pitagora*. E.E. Loomis le-a adunat într-o carte publicată în anul 1940[1] și în care a însumat nu mai puțin de 366 demonstrații distincte ale teoremei.

Iată una dintre aceste demonstrații (vezi figura 3.1):

Triunghiul ABC — dreptunghic în A este „completat" cu două triunghiuri „parazite", după cum urmează: se prelungește latura AB cu $BA_1 = b$. Apoi, în A_1 se ridică o perpendiculară pe BA_1 de lungime $A_1B_1 = C$. Se unește apoi B_1 cu B și C și astfel se obține trapezul dreptunghic AA_1B_1C. Nu mai e cazul să pierdem vremea argumentînd că

---

[1] Loomis, E. E. S., *The Pythagorean Proposition*, Edwards Brothers Co., Ann Arbor, Michigan, 1940.

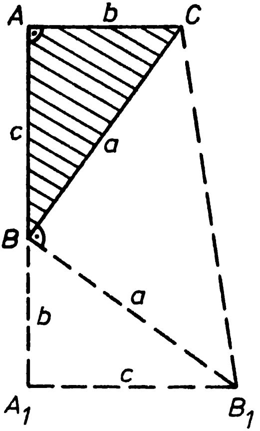

Fig. 3.1.
O demonstrație a teoremei lui *Pitagora*

unghiul B_1BC este și el de 90°. Scriem acum aria trapezului după formula clasică:

$$S_{AA_1B_1C} = \frac{1}{2}(AC + A_1B_1) \cdot AA_1 = \frac{(b+c)^2}{2}, \qquad (3.1)$$

iar apoi o scriem făcînd puțină „triangulație", adică:

$$S_{AA_1B_1C} = S_{BAC} + S_{BA_1B_1} + S_{CBB_1} \qquad (3.2)$$

și care se transformă în:

$$S_{AA_1B_1C} = \frac{1}{2}bc + \frac{1}{2}bc + \frac{1}{2}a^2 = \frac{2bc + a^2}{2}. \qquad (3.3)$$

Cum (3.1) și (3.3) reprezintă același lucru, se deduce prin egalare

$$b^2 + c^2 = a^2$$

sau „puntea măgarilor"[1] cum a fost denumită de unii profesori de altă dată, această facil de demonstrat, dar importantă teoremă. Denumirea de „puntea măgarilor" are următoarea explicație: teorema lui *Pitagora* este fără îndoială una dintre teoremele de bază ale geometriei și, contrar așteptărilor, este și deosebit de simplu de demonstrat; din această cauză, pînă și cel mai slab pregătit elev din lume ar trebui s-o cunoască. Cine „n-a trecut nici măcar puntea măgarilor" — deci cine nu știe nici măcar teorema lui Pitagora — este într-adevăr slab pregătit.

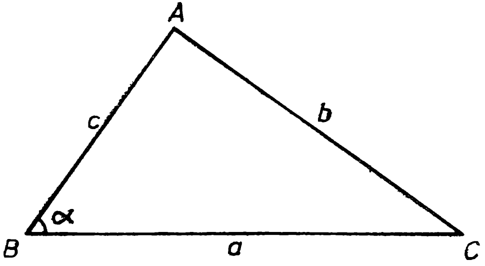

Fig. 3.2.
Noi dezvăluiri
ale triunghiului dreptunghic

Prima consecință imediată a teoremei lui *Pitagora*, este:

$$\left(\frac{b}{a}\right)^2 + \left(\frac{c}{a}\right)^2 = 1 \tag{3.4}$$

și cum b/a și c/a sînt nu mai puțin cunoscutele expresii, $\sin\alpha$ și $\cos\alpha$ (vezi fig. 3.2), apare proprietatea fundamentală a trigonometriei: $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ cu întregul ei cortegiu de relații. În legătură cu acest cortegiu, matematicianul chinez

[1] V. Littman, în lucrarea sa *Teorema Pifagora* (Fizmatghiz, Moskva, 1960, p. 8), dă denumirile în cîteva limbi ale „pseudonimului" teoremei; astfel, în l. rusă, „most oslov", în l. franceză „le pont aux ânes"; în l. germană, „die Eselbrücke".

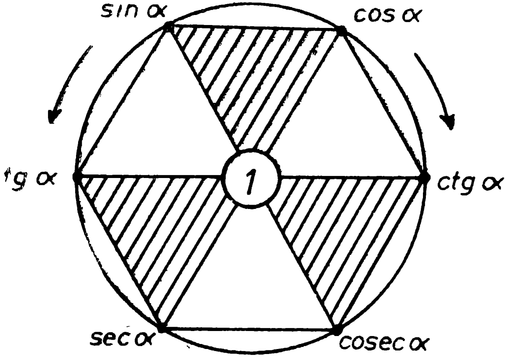

Fig. 3.3.
Geometria în sprijinul „ţinerii de minte"

Dun-Tzin-Dao a imaginat următoarea figură mnemotehnică (fig. 3.3):
Schema lui Dao este foarte sugestivă: iată, la polii opuşi ai exagonului se găsesc funcţiile trigonometrice inverse una alteia, adică, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{ctg} \alpha}$, $\sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha}$ etc. Dacă-l împărţim pe $\cos \alpha$ la $\sin \alpha$ săgeata ne arată $\operatorname{ctg} \alpha$, iar dacă procedăm invers, săgeata ne indică $\operatorname{tg} \alpha$. Aceste relaţii sînt suficiente pentru a deduce apoi „algebriceşte", că de exemplu $1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \sec^2\alpha$, şi altele.

Fiindcă am adus vorba de trigonometrie, să arătăm că triunghiul dreptunghic ne e folositor şi la demonstrarea geometrică a unei formule de tipul:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha. \qquad (3.5)$$

Demonstraţiile geometrice pentru formulele de trigonometrie sînt o meteahnă mai veche a matematicienilor. Formula de mai sus are de multă vreme o demonstraţie deja „obosită" — ce se dă cu ajutorul teoremei lui *Ptolemeu*, referitoare la o proprietate de bază a unui patrulater înscris în cerc. Profesorul N.N. Mihăileanu se exprimă chiar astfel despre această teoremă: „teorema lui *Ptolemeu* conține formula de adițiune a sinusului și cosinusului“ (op. cit. p. 59).

Triunghiul dreptunghic conține și el această formulă dacă îl ajutăm să ne-o dezvăluie. Iată cum procedăm: în triunghiul dreptunghic ABC luăm un punct oarecare pe cateta AC — fie el B_1 (vezi fig. 3.4). Din el, ducem apoi o perpen-

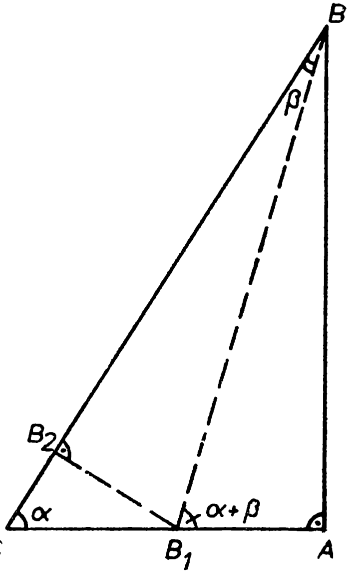

Fig. 3.4.
Se demonstrează geometric
$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha$

diculară pe BC care o întîlnește pe aceasta în B_2. Să notăm acum unghiul C cu α și $\sphericalangle CBB_1$ cu β. Se vede imediat că $\sphericalangle BB_1A = \alpha + \beta$ fiind exterior și neadiacent cu vreunul dintre cele două unghiuri de mai sus. Triunghiurile ABC și

CB_2B_1 sînt evident asemenea. Să scriem deci relația între laturi:

$$\frac{AB}{B_1B_2} = \frac{BC}{CB_1}, \quad AB = \frac{B_1B_2(BB_2 + B_2C)}{CB_1}. \tag{3.6}$$

Acum lucrurile sînt clare: nu trebuie decît să urmărim ce funcție trigonometrică exprimă fiecare dintre rapoartele de segmente implicate în relația (3.7) de mai jos, obținută prin împărțirea ultimei egalități prin BB_1:

$$\frac{AB}{BB_1} = \frac{B_1B_2}{CB_1} \cdot \frac{BB_2}{BB_1} + \frac{B_2C}{CB_1} \cdot \frac{B_1B_2}{BB_1}. \tag{3.7}$$

Astfel, în triunghiul BAB_1, $\frac{AB}{BB_1} = \sin(\alpha + \beta)$; în triunghiul BB_1C, $\frac{B_1B_2}{CB_1} = \sin\alpha$, $\frac{B_2C}{CB_1} = \cos\alpha$, iar în triunghiul BB_2B_1, $\frac{BB_2}{BB_1} = \cos\beta$, $\frac{B_1B_2}{BB_2} = \sin\beta$.

O simplă privire pe relația (3.7) ne spune că ea este de fapt (3.5), deghizată în elemente liniare.

„Răutăciosul" ne poate reproșa imediat că am dedus într-adevăr formula lui $\sin(\alpha + \beta)$, dar numai pentru cazul $\alpha + \beta < 90°$. Ce ne facem dacă $\alpha + \beta > 90°$? În marea lui blîndețe, el ne face hatîrul și ne cere să considerăm cazul $90° < \alpha + \beta < 180°$. Voi cum ați demonstra (3.5) în acest caz? Iată o altă problemă pe care v-o las pradă propriei curiozități...

Să mergem acum mai departe: se pare că teorema lui *Pitagora* n-a fost prea maleabilă la generalizări — în sensul că de îndată ce s-a obținut o generalizare, s-a părăsit triunghiul inițial.

Toți știm așa-numita „teoremă a lui *Pitagora* generalizată", care exprimă de fapt valoarea cosinusului unui unghi în funcție de laturi într-un triunghi oarecare.

Vom încerca aici să prezentăm o generalizare a „punţii", fără să trădăm unghiul drept. Luăm deci un triunghi dreptunghic ABC cu laturile a, b, c şi din A coborîm înălţimea — fie ea AA_1 (vezi fig. 3.5). Fie acum B_1 şi C_1 proiecţiile lui A_1 pe catetele AC, respectiv AB. Din B_1 şi C_1 ducem perpendiculare pe ipotenuza BC şi notăm cu A_2 respectiv $C^{(1)}$, picioarele acestor perpendiculare. Deocamdată ne oprim aici, să vedem ce putem deduce. În triunghiul dreptunghic A_1B_1C avem:

$$B_1C = A_1C \cos C = (AC \cos C) \cos C = b \cdot \frac{b}{a} \cdot \frac{b}{a} = \frac{b^3}{a^2}. \quad (3.8)$$

Asemănător, deducem:

$$BC_1 = BA_1 \cos B = (AB \cos B) \cos B = C \cdot \frac{c}{a} \cdot \frac{c}{a} = \frac{c^3}{a^2}. \quad (3.9)$$

Ar trebui acum să tot coborîm perpendiculare, cînd pe catete, cînd pe ipotenuză, din picioarele acestor perpendiculare. Acest lucru am încercat să-l sugerăm în figura 3.5.

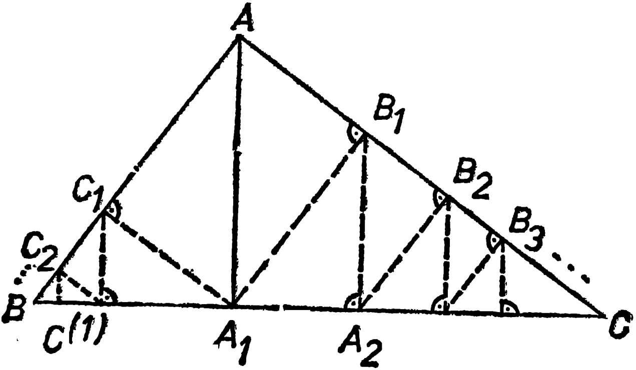

Fig. 3.5.
Încercăm o altă generalizare
a teoremei lui *Pitagora*

Nu este deci greu de văzut, că la un moment dat — şi anume la momentul n — vom obţine:

$$B_nC = \frac{b^{2n+1}}{a^{2n}}, \quad C_nB = \frac{c^{2n+1}}{a^{2n}} \tag{3.10}$$

(se observă că pentru $n = 1$ se regăsesc 3.8 şi 3.9).

Pentru uşurinţă, să notăm $B_nC = u$ şi $C_nB = v$. Dacă le ridicăm pe fiecare la pătrat, apoi scoatem rădăcina de ordinul $2n + 1$ şi le însumăm, vom aveá:

$$u^{\frac{2}{2n+1}} + v^{\frac{2}{2n+1}} = a^{\frac{2}{2n+1}}. \tag{3.11}$$

Pentru noi, $n = 0$ ne dă B_0C, respectiv C_0B, care înseamnă de fapt AC şi AB şi deci 3.11 se transformă în teorema lui *Pitagora* cea iniţială. Aşadar, am obţinut o generalizare a teoremei noastre, fără a deforma triunghiul dreptunghic.

Figura 3.5 nu ne-a spus încă tot. Dacă vom încerca să exprimăm acum segmentele CA_2 şi $BC^{(1)}$, vom găsi imediat:

$$CA_2 = \frac{b^4}{a^3}, \quad BC^{(1)} = \frac{c^4}{a^3}. \tag{3.12}$$

Mergînd din aproape în aproape, deducem expresiile:

$$CA_n = \frac{b^{2n}}{a^{2n-1}}, \quad BC^{(n)} = \frac{c^{2n}}{a^{2n-1}} \tag{3.13}$$

(pentru $n = 1$ ajungem la 3.12).

Dacă notăm pentru uşurinţă: $C_nA = p$ şi $BC^{(n)} = q$, atunci, ţinînd cont că $b^2 + c^2 = a^2$ se obţine relaţia:

$$p^{\frac{1}{n}} + q^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{1}{n}}. \tag{3.14}$$

Teorema lui *Pitagora* cît şi cele deduse ulterior, fac parte dintr-o categorie de relaţii numite metrice. Acea parte din geometria sintetică, care are drept obiect de studiu stabilirea diferitelor relaţii între elementele liniare (segmente) ale unui corp geometric, se numeşte chiar „geometrie metrică".

Deşi numele sugerează o anumită unitate de măsură — şi în mod natural, deşi orice segment are o anumită măsură fizică, o anumită mărime care se poate exprima în diferite moduri echivalente — totuşi, *relaţiile metrice sînt în final relaţii între simboluri, datorită omogenităţii lor.*

Într-adevăr, să luăm chiar teorema lui *Pitagora*: $b^2 + c^2 = a^2$. Se observă că atît în membrul stîng cît şi în membrul drept apare cîte un polinom omogen de gradul 2 în b şi c, respectiv în a. Să presupunem că măsurăm laturile în centimetri. Avem deci:

$$b^2(cm^2) + c^2(cm^2) = a^2(cm^2). \tag{3.15}$$

De obicei, lucrăm cu triunghiuri „abstracte", adică nu ne interesează mărimea efectivă a elementelor triunghiului; orice relaţie metrică odată demonstrată, ea este adevărată independent de unitatea de măsură. Valabilitatea unei relaţii metrice trebuie să aibă în primul rînd suportul logico-deductiv. Această valabilitate nu este imprimată de faptul că o anumită relaţie se verifică numeric într-un anumit caz, deoarece această verificare poate avea loc cu totul întîmplător, numai pentru acel caz (din nou caracterul statistic).

Verificarea numerică constituie însă un criteriu numai dacă proprietatea metrică (în cazul nostru) are caracterul de teoremă reciprocă (şi bineînţeles, şi de teoremă directă). E cazul, de exemplu, chiar cu teorema lui *Pitagora*. De fapt, în practica rezolvării problemelor, folosim mai intens reciproca unei anumite teoreme; în cazul teoremei lui *Pitagora*, acest lucru se întîmplă frecvent. Ni se dă, de exemplu, de rezolvat următoarea problemă: se consideră triunghiul ABC cu laturile $BC = 15$ m, $AB = 9$ m şi $AC = 12$ m, şi se cere să se calculeze înălţimea ce pleacă din vîrful A.

În mod reflex, cînd avem de-a face cu o problemă de geometrie a triunghiului, primul nostru gînd ar trebui să fie următorul: oare triunghiul dat este cumva vreun triunghi special? (echilateral, isoscel, dreptunghic etc.), fiindcă, oricum, într-un triunghi special, anumite proprietăţi se deduc mai uşor. Dacă pornim rezolvarea problemei de mai sus fără să ne punem o astfel de întrebare atunci nu avem decît să aplicăm formula cunoscută:

$$h_a = \frac{2}{a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}, \qquad (3.16)$$

unde h_a este înălțimea ce cade pe latura $a = BC = 15$ m, iar $2p = a + b + c$, $b = BC = 12$ m, $c = AB = 9$ m — și lucrurile sînt rezolvate. Dar de ce să facem atîtea calcule, cînd se vede imediat că: $15^2 = 225 = 9^2(81) + 12^2(144)$, adică triunghiul dat este dreptunghic, conform reciprocei teoremei lui *Pitagora*. În acest caz, avem:

$$h_a = \frac{bc}{a} = \frac{9 \times 12\ \text{cm}^2}{15\ \text{cm}} = 7{,}2\ \text{cm}. \qquad (3.17)$$

Demonstrația reciprocei teoremei lui *Pitagora* este ceva mai complicată decît teorema însăși, dar și acest lucru poate fi evitat dacă procedăm în felul următor: ne reamintim (sau facem cunoștință pentru prima oară) cu o importantă teoremă de logică matematică:

Teorema lui Hauber[1]: presupunem că proprietățile disjuncte $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$, $\mathcal{P}_3$, ... sînt în așa fel încît:

a) întotdeauna are loc una din ele;

b) proprietățile date implică la rîndul lor alte proprietăți, $\mathcal{P}_1 \to P_1$, $\mathcal{P}_2 \to P_2$, $\mathcal{P}_3 \to P_3$, ..., de asemenea disjuncte între ele.

Atunci sînt adevărate următoarele teoreme reciproce:

„dacă are loc P_1, atunci are loc și $\mathcal{P}_1$";

„dacă are loc P_2, atunci are loc și $\mathcal{P}_2$" etc.

Cu ajutorul acestei teoreme — care din păcate este destul de puțin popularizată — multe teoreme particulare din geometrie sau algebră ar rezulta imediat, făcîndu-se economie de timp și energie.

---

[1] M o d e n o v, P. S. i N o v o s e l o v, S. I., *Posobie po matematike dlia postupaiușcih v vuzî*, Izdatelstvo Moskovskogo Universiteta, Moskva, 1961, pp. 88—89

Iată, să o aplicăm în cazul nostru. Considerăm un triunghi oarecare ABC. Există bineînțeles 3 cazuri posibile:

(1) Unghiul A este ascuțit (propoziția $\mathcal{P}_1$);

(2) Unghiul A este drept (propoziția $\mathcal{P}_2$);

(3) Unghiul A este obtuz (propoziția $\mathcal{P}_3$).

Punctul a) al teoremei lui *Hauber* este îndeplinit: evident, un triunghi se găsește într-una din situațiile 1), 2) sau 3), care se exclud reciproc. Implicațiile lui $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$, $\mathcal{P}_3$ materializate mai sus, sînt:

1') dacă $\hat{A} < 90°$ atunci $a^2 < b^2 + c^2$ (propoziția P_1);

2') dacă $\hat{A} = 90°$ atunci $a^2 = b^2 + c^2$ (propoziția P_2);

3') dacă $\hat{A} > 90°$ atunci $a^2 > b^2 + c^2$ (propoziția P_3).

Și propozițiile P_1, P_2, P_3 se exclud reciproc. Prin urmare, dacă într-un triunghi are loc relația $b^2 + c^2 = a^2$, atunci conform teoremei lui *Hauber* unghiul A este drept. Am obținut deci reciproca teoremei lui *Pitagora*, fără vreo demonstrație specială, ci doar ca o consecință a unei propoziții de logică.

Pentru ca lucrurile să fie complete, să demonstrăm și teorema lui *Hauber*. O facem prin metoda reducerii la absurd. Presupunem deci că are loc, de exemplu, P_1, dar că nu rezultă $\mathcal{P}_1$. Atunci înseamnă că trebuie să aibă loc oricare din propozițiile rămase $\mathcal{P}_2$, $\mathcal{P}_3$, ... Să presupunem pentru fixarea ideilor că are loc $\mathcal{P}_2$. Dar $\mathcal{P}_2$, conform condiției teoremei, implică P_2. Rezultă deci că $\mathcal{P}_2$ a implicat două propoziții P_1 și P_2 care se exclud reciproc. Prin urmare, s-a ajuns la o contradicție, provenită din faptul că s-a presupus că P_1 nu implică $\mathcal{P}_1$. Teorema este demonstrată.

Două lucruri ar mai fi de arătat: că într-un triunghi în care un unghi este mai mic decît un unghi drept are loc relația între laturi $a^2 < b^2 + c^2$ și că în cazul în care același unghi este mai mare decît un unghi drept, relația dintre laturi se modifică corespunzător: $a^2 > b^2 + c^2$. Vă rezervăm plăcerea acestei demonstrații (n-o pierdeți!).

Să revenim acum la problema unităților de măsură, a omogenității pe care am atins-o în treacăt mai înainte.

Principiul omogenității — căci în fond despre el este vorba, sugerează în mod neașteptat soluții elegante și simple la multe probleme de geometrie elementară. Acest lucru se poate ușor arăta dacă ținem seama de următoarele adevăruri:

1) orice relație omogenă între lungimile unor segmente ale unor corpuri geometrice nu depinde de unitatea de măsură (l-am exemplificat chiar noi prin teorema lui *Pitagora*; este adevărată și reciproca acestei afirmații);

2) dacă avem un șir de rapoarte egale, atunci orice funcție omogenă de gradul 1, aplicată atît numărătorilor cît și numitorilor acestor rapoarte, este un raport egal cu rapoartele date.

Cel mai simplu exemplu:

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} \left(= \frac{x + y + z}{a + b + c} \right).$$

3) orice relație omogenă rămîne adevărată dacă înlocuim valorile ce intervin în ea, prin mărimi proporționale cu acestea și reciproc.

Mulți dintre noi cunosc aceste proprietăți simple: e de bănuit însă că nu mulți cunosc aplicațiile lor în geometrie. Să ilustrăm aceasta prin cîteva exemple:

I — să se arate că într-un triunghi dreptunghic are loc relația:

$$\left| \frac{1}{c} - \frac{1}{b} \right| < \frac{1}{h_a} < \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \qquad (3.18)$$

unde b și c sînt catetele, iar h înălțimea corespunzătoare ipotenuzei.

Soluție: ne vom propune să arătăm ceva mai general și anume că într-un triunghi oarecare, are loc relația:

$$\left| \frac{1}{h_b} - \frac{1}{h_c} \right| < \frac{1}{h_a} < \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} \qquad (3.19)$$

unde h_a, h_b, h_c, sînt înălțimile corespunzătoare laturilor a, b, c. Este limpede că relația 3.18 este un caz particular al relației 3.19, fiindcă b și c sînt în același timp și înălțimi dacă triunghiul este dreptunghic. Să ne reamintim acum că în orice triunghi are loc dubla inegalitate (evidentă!):

$$|b - c| < a < b + c. \tag{3.20}$$

Pe de altă parte, tot în orice triunghi, dublul suprafeței poate fi exprimat prin oricare din termenii relațiilor:

$$ah_a = bh_b = ch_c \tag{3.21}$$

care se mai scrie:

$$\frac{a}{\frac{1}{h_a}} = \frac{b}{\frac{1}{h_b}} = \frac{c}{\frac{1}{h_c}}. \tag{3.32}$$

Conform cu punctul 3) în relația 3.20 putem înlocui a, b, c prin mărimile proporționale $1/h_a$, $1/h_b$, $1/h_c$.

II — să se arate că într-un triunghi dreptunghic:

$$\frac{1}{h_a^2} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}. \tag{3.23}$$

III — fiind date două triunghiuri dreptunghice asemenea, cu laturile a, b, c, respectiv a_1, b_1, c_1, să se arate că:

$$aa_1 = bb_1 + cc_1. \tag{3.24}$$

Soluție: relația de asemănare $\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1}$ mai poate fi scrisă: $\frac{aa_1}{a_1^2} = \frac{bb_1}{b_1^2} = \frac{cc_1}{c_1^2}$.

Dacă aplicăm acum proprietatea 2) a omogenității, avem:

$$\frac{aa_1}{a_1^2} = \frac{bb_1 + cc_1}{b_1^2 + c_1^2}, \tag{3.25}$$

dar $a_1^2 = b_1^2 + c_1^2$ deci (3.24) este dovedită.

Vă lăsăm acum spre delectare personală următoarea *Problemă*. Se dă un triunghi dreptunghic în A și fie AA_1 înălțimea relativă la ipotenuză. Construim cercurile înscrise în triunghiurile ABC, ABA_1, ACA_1 și le notăm razele cu r, r_1, r_2. Să se arate că au loc următoarele relații:

$$r^2 = r_1^2 + r_2^2 \tag{3.26}$$

$$ar = br_1 + cr_2 \tag{3.27}$$

$$ac = b \cdot AA_1 + c \cdot BA_1 \tag{3.28}$$

$$ab = b \cdot CA_1 + c \cdot AA_1. \tag{3.29}$$

Nu știm dacă v-a rămas gîndul la o afirmație făcută de noi mai înainte, prin care evitam generalizarea teoremei lui *Pitagora* în cazul triunghiului oarecare. Dacă stăm să ne gîndim bine, teorema lui *Pitagora* exprimă de fapt egalitatea unor arii. Teorema lui *Pitagora* generalizată — așa cum o învățăm în școală și care este în final — după cum am mai spus — exprimarea cosinusului unui unghi în funcție de laturi, nu pune în evidență explicit o egalitate de arii.

„Adevărata" teoremă generalizată ar trebui să demonstreze tocmai egalitatea ariilor unor patrulatere construite pe laturile unui triunghi oarecare.

O astfel de teoremă există. Ea este probabil mai puțin cunoscută, deși la vremea ei a fost destul de apreciată. „Gazeta Matematică și Fizică", Seria B, în anul 1957 i-a consacrat o prezentare destul de largă (vezi: Udrescu, V.; *Teorema lui Clairaut*, vol. VIII, nr. 5, pp. 241—248). Teorema aparține unui cunoscut matematician francez — Alexis Clairaut (1713—1765), al cărui nume a rămas în istoria matematicii prin lucrările sale de teoria ecuațiilor diferențiale („ecuația lui *Clairaut*").

Clairaut a fost un matematician înzestrat cu mult talent și la numai 28 de ani el a fost primit în Academia de Științe. În 1736 a efectuat împreună cu alt matematician francez — Pierre Louis Moreau de Maupertuis (1698—1759), prima măsurare exactă a arcului de meridian terestru. Ei s-au deplasat pentru această măsurare tocmai în Laponia, unde conform teoriilor geografice din acea epocă erau îndeplinite toate condițiile fizico-geografice pentru o astfel de determinare.

În timpul liber, Clairaut se ocupa cu... geometria. Una din descoperirile sale interesante în acest domeniu este și generalizarea cu adevărat naturală a cunoscutei teoreme a lui *Pitagora*.

Iată cum sună

Teorema lui Clairaut: se consideră triunghiul oarecare ABC. În exteriorul său, construim pe laturile AB și AC paralelogramele arbitrare AA_1B_1B și AA_2C_1C. Fie acum M punctul de intersecție al laturilor A_1B_1 și A_2C_1. Prelungim MA dincolo de A, pînă cînd se obține $A_3 = MA \cap BC$. Pe dreapta MA_3, dincolo de A_3, alegem un punct A_4 astfel ca $A_3A_4 = AM$. Construim acum paralelogramul BCC_2B_2, unde BB_2 este paralelă și egală cu A_3A_4.

În aceste condiții: suma suprafețelor paralelogramelor arbitrare AA_1B_1B și AA_2C_1C este egală cu suprafața paralelogramului BCC_2B_2.

Toată construcția este arătată în figura 3.6. Demonstrația este destul de simplă; prelungim mai întîi BB_2 pînă ce acesta taie pe A_1B_1 în B_3. Analog, prelungim CC_2 pînă ce obținem punctul C_3 ca intersecție a lui CC_2 cu C_1A_2. În figura respectivă se observă imediat egalitățile:

$$AM = BB_3 = BB_2 = CC_2 = CC_3;\ MB_3 = AB;\ MC = AC. \quad (3.30)$$

Aceste egalități ne conduc la egalitățile de arii:

$$\begin{aligned} S_{AA_1B_1B} &= S_{BB_3MA};\quad S_{AA_2C_1C} = S_{CC_3MA};\\ S_{BB_3C_3C} &= S_{BB_2C_2C};\quad S_{MB_3C_3} = S_{ABC}. \end{aligned} \quad (3.31)$$

Acum, se poate scrie imediat:

$$S_{AA_1B_1B} + S_{AA_2C_1C} = S_{BB_3MA} + S_{CC_3MA} = S_{BB_3MC_3C} - S_{ABC} =$$
$$= S_{MB_3C_3} + S_{BB_3C_3C} - S_{ABC} = S_{BB_3C_3C} = S_{BB_2C_2C}. \quad (3.32)$$

Teorema este demonstrată. Este clar că teorema lui *Pitagora* este un caz particular al acestei teoreme, dacă degene-

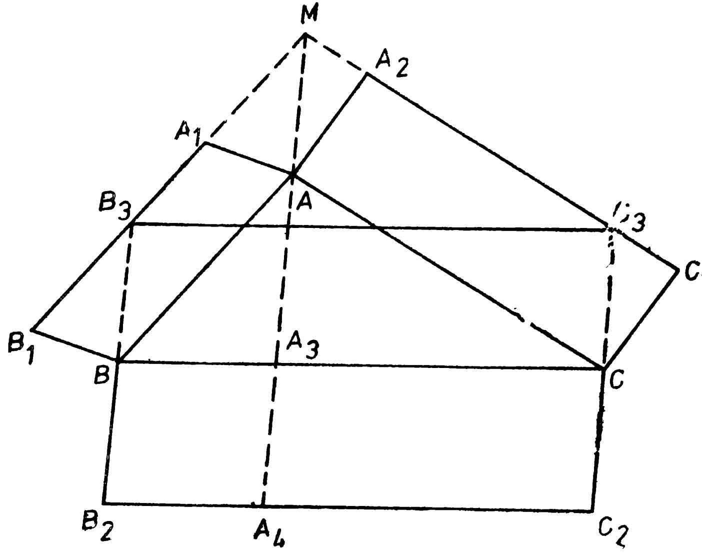

Fig. 3.6.
eorema lui *Clairaut* — sau adevărata teoremă a lui *Pitagora* generalizată

răm paralelogramele în pătrate și luăm $A = 90°$. Figura este cea indicată în 3.7. Am construit deci pătratele AA_1B_1B și AA_2C_1C pe laturile AB și AC și apoi, prin același procedeu, determinăm paralelogramul BCC_2B_2 pe latura BC, paralelogram care trebuie să demonstrăm că este de fapt un pătrat. Avem însă evident:

$$MA = BC = A_3A_4 \tag{3.33}$$

(deoarece triunghiurile ABC și A_1AA_2 sînt egale).

Pe de altă parte, M, A, și A_3 sînt coliniare prin construcție, deci $\sphericalangle MAA_1 = \sphericalangle ABC = \sphericalangle CAA_3$. Întrucît $AC \perp BC$, rezultă imediat că și BB_2C_2C este pătrat. Teorema lui *Clairaut* ne spune deci că $AB^2 + AC^2 = BC^2$, fiindcă aria

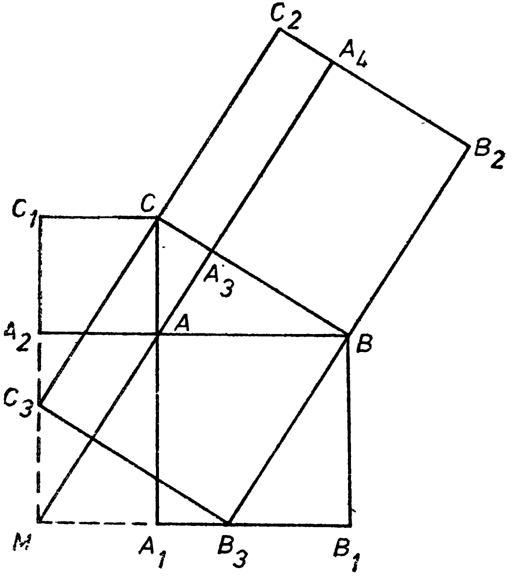

Fig. 3.7.
Ce devine construcția lui *Clairaut*
în cazul $\hat{A} = 90°$

pătratului știm bine ce reprezintă. Iată deci cadrul natural al generalizării teoremei lui *Pitagora*.

Fiindcă ne-am obișnuit ca orice lucru nou să nu se încheie „brusc și deodată", propunem să vă încercați forțele cu un loc geometric, și anume:

Problemă: fie ABC un triunghi oarecare. În exterior construim paralelogramele arbitrare AA_1B_1B și AA_2C_1C. Prelungim A_1B_1 și A_2C_1 pînă cînd acestea se întîlnesc în M. Să se afle locul geometric al punctului M, dacă

$$S_{AA_1B_1B} + S_{AA_2C_1C} = \text{constant} \tag{3.34}$$

(această problemă a fost pusă tot de Clairaut).

Indicație: nu se dă, întrucît dacă urmăriți atent demonstrația teoremei lui *Clairaut*, locul rezultă de la sine. Nu-i așa că este o dreaptă?

În fine, ca să ne convingem că triunghiul dreptunghic este foarte important, nu ne mai rămîne decît să arătăm că de fapt, toate triunghiurile sînt... dreptunghice!

Bineînțeles că nimeni nu ne va crede, și iar bineînțeles că nici noi n-o credem. Totuși, pentru a dezminți acest nonsens, să descoperim fisura în demonstrația ce urmează.

Considerăm un triunghi oarecare ABC, cu laturile a, b, c; unghiurile α, β, γ și înălțimea h_c care împarte latura opusă AB în segmentele $AD = p$ și $DB = q$ $(p + q = c)$. Totul vă este înfățișat în figura 3.8. Nu este greu de văzut că au loc relațiile:

$$\sin \alpha = \frac{h}{b}, \quad \cos \alpha = \frac{p}{b}, \quad \sin \beta = \frac{h}{a}, \quad \cos \beta = \frac{q}{a}. \qquad (3.35)$$

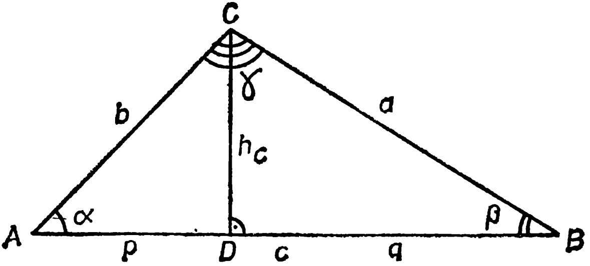

Fig. 3.8.
Toate triunghiurile sînt dreptunghice (! ?)

Pe de altă parte, identitatea:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha \qquad (3.36)$$

ne furnizează imediat:

$$\sin(\alpha + \beta) = \frac{h}{b} \cdot \frac{q}{a} + \frac{p}{b} \cdot \frac{h}{a} = \frac{h(p + q)}{ab} = \frac{h \cdot c}{ab}. \qquad (3.37)$$

Teorema sinusului ne dă de asemenea:

$$a = 2R \sin \alpha, \quad b = 2R \sin \beta, \quad c = 2R \sin \gamma, \tag{3.38}$$

unde R este, bineînțeles, raza cercului circumscris triunghiului ABC. Prin urmare:

$$\sin(\alpha + \beta) = \frac{k \sin \gamma}{2R \sin \alpha \sin \beta}. \tag{3.39}$$

Mai observăm în fine că:

$$k = b \sin \alpha = 2R \sin \alpha \sin \beta \tag{3.40}$$

și deci:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \gamma \tag{3.41}$$

adică practic $\alpha + \beta = \gamma$ (3.42) și iată deci că triunghiul a reieșit dreptunghic.

Care este de fapt punctul slab al demonstrației? Toți sîntem de acord că de la relația (3.35) pînă la (3.41) nimic nu este în neregulă. Dar în fond nici de la (3.41) la (3.42) nu este nici o greșeală, numai că relația (3.42) este doar *unul* dintre cazurile posibile ale relației (3.41). De fapt, (3.41) are următoarea soluție:

$$\alpha + \beta = \begin{cases} 2k\pi + \gamma \\ (2k + 1)\pi - \gamma \end{cases}; \ k = 0,\ 1,\ \ldots \tag{3.43}$$

Cazul 1: $k = 0$; aceasta înseamnă că într-adevăr un triunghi poate fi și dreptunghic ($\alpha + \beta = \gamma$).

Cazul 2: $k = 0$; aceasta mai înseamnă $\alpha + \beta = \pi - \gamma$, ceea ce este regăsirea unui adevăr deja binecunoscut (suma unghiurilor într-un triunghi este 180°).

De acum încolo, cazurile $k = 1, 2, \ldots$ intră în domeniul fanteziei. Un triunghi pentru care de exemplu:

$$\alpha + \beta = 2\pi - \gamma \qquad (k = 1) \tag{3.44}$$

nu poate evident exista etc.

Iată deci o demonstrație care nu este „vicioasă“ prin sinea ei — în sensul construirii unei figuri geometrice voit eronate sau al vreunor simplificări de factori nepermise, adică tot arsenalul uzual în astfel de situații „cu haz".

Absurdul este obținut doar prin neconsiderarea tuturor cazurilor posibile ale unei ecuații trigonometrice.

Să vă mai prezentăm ceva neobișnuit: într-un triunghi dreptunghic, o catetă este egală cu ipotenuza. Nu credeți? Atunci încercați să descoperiți unde e „tragerea pe sfoară".

Atenție deci la figura 3.9. Triunghiul ABC este dreptunghic în A. Punctul M este punctul de intersecție dintre

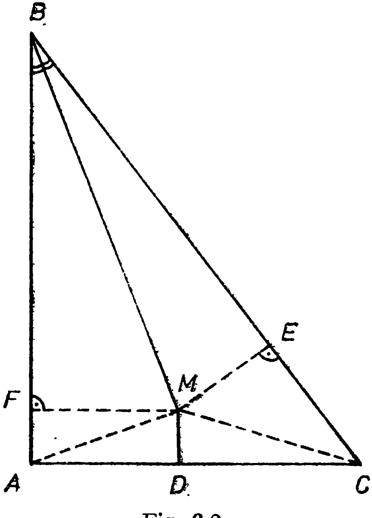

Fig. 3.9.
Oare $AB = BC$?

bisectoarea unghiului B și mediatoarea laturii AC. Din M au fost coborîte perpendicularele ME și MF pe laturile BC, respectiv AB. Acum să urmărim raționamentul. Triunghiul BFM este egal cu triunghiul BEM. Lucrul este evident: ipotenuză comună, iar $MF = ME$ fiindcă M se află pe bisectoare. Rezultă deci: $BF = BE$. Cum M se află și pe mediatoarea lui AC, rezultă $MA = MC$. Urmează deci că și triunghiurile MFA și MEC sînt egale. Adică, $AF = EC$; scriem atunci: $BF + AF = BE + EC$, sau $AB = BC$?

Aparent lucrurile stau așa. În deducerea demonstrației nu am făcut decît să aplicăm proprietăți adevărate și binecunoscute. Rămîne deci de bănuit un singur lucru: figura este incorect executată.

De fapt, punctul M nu se află acolo unde se pretinde a fi, ci în cu totul altă parte. Figura 3.10 ne lămurește imediat.

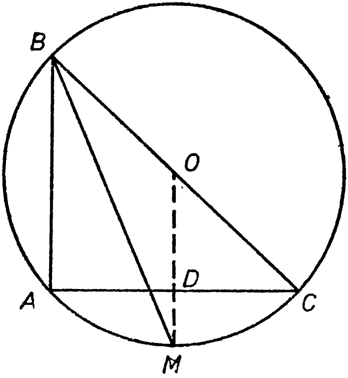

Fig. 3.10.
Cum stau de fapt lucrurile

Demonstrați că în realitate, M se află în afara triunghiului și anume pe cercul circumscris. Cu acest exemplu ați văzut ce mult contează o figură corect executată. „Geometria este arta de a raționa corect pe figuri greșite" — această maximă, preferată încă de unii dintre noi, ne conduce de cele mai multe ori la concluzii false. De ce să ne chinuim, irosindu-ne puterile raționînd corect pe figuri incorecte, cînd putem raționa corect pe figuri corecte?

3.2. Revendicările algebrei

Vom începe acest paragraf cu o istorisire a unei pățanii întîmplate unui prieten al meu, algebrist. Să lămurim mai întîi ce este acela un „algebrist", fiindcă multora poate li se pare termenul cam pretențios. Ei bine, toți sîntem de acord, probabil, că matematica e „mare", adică vastă. Specializarea într-un anumit domeniu al ei este caracteristică epocii moderne, impusă tocmai de dezvoltarea de-a dreptul colosală a științelor matematice. La facultățile de matematică din întreaga lume, studenții se întîlnesc poate împreună, numai doi sau trei ani sub același amfiteatru; apoi se despart pe grupuri de specialități. Unii devin analiști, alții geometri alții statisticieni etc. După un timp oarecare, doi matematicieni din ramuri diferite — de exemplu, teoria funcțiilor de variabilă complexă și statistica matematică, pot avea un limbaj atît de diferit încît este foarte plauzibil ca să nu se poată înțelege între ei decît după o îndelungată acomodare a fiecăruia cu domeniul celuilalt.

Algebristul se consacră în mod evident algebrei. Din păcate — sau din fericire — și algebra este extrem de vastă, încît și aici au apărut subdomenii cu „subspecialiștii" lor. Există, de exemplu, și o așa-numită „geometrie algebrică".

Din păcate — și aici nostalgia matematicienilor este neprefăcută —, epocile în care un singur om putea cuprinde — cu un efort mai mare sau mai mic — toate cunoștințele matematice ale predecesorilor și contemporanilor, au trecut de foarte multă vreme. Pascal, Descartes, Fermat, Bernoulli etc., și cu atît mai mult iluștrii lor predecesori ai Renașterii italiene, sau și mai înapoi în timp, vestiții exponenți ai culturii arabo-persane, se puteau lăuda — și pe drept cuvînt — că „știau toată matematica" pe care o cunoșteau vechii greci, vechii indieni, vechii chinezi etc. Desigur, acest lucru era perfect natural, deoarece volumul cunoștințelor acumulate în acele etape ale dezvoltării societății era totuși redus. Astăzi, oricare dintre corespondenții cu bogată activitate la „Gazeta Matematică", poate rivaliza și întrece în unele privințe (cel puțin ca volum de informații) pe celebrii matematicieni ai Evului Mediu.

Dar să revenim la pățania prin care a trecut prietenul meu. După un număr relativ mare de ani de la absolvirea facultății, timp în care a lucrat ca profesor de matematică la un liceu în București s-a gîndit să-și adune rezultatele obținute în domeniul algebrei într-o broșură, în care să prezinte și alte aspecte ale științei pe care o îndrăgea atît de mult.

Zis și făcut; într-o zi, a luat troleibuzul și s-a prezentat la Casa Scînteii la redacția unei edituri. Acolo, a fost primit de un redactor de specialitate și invitat să-și spună păsul. Prietenul meu a început o adevărată tiradă despre importanța fundamentală a algebrei în ansamblul științelor matematice, despre faptul că algebra intervine zilnic în viața noastră etc., etc.

Redactorul — care probabil se întîlnea nu prea rar cu entuziaști ai diverselor discipline — i-a replicat pe bună dreptate că „dacă stăm strîmb și judecăm drept", cum spune românul, aritmetica e de fapt ramura de matematică de a cărei urmărire nu putem scăpa; toți facem socoteli: cît cheltuim pe lună pentru țigări, cîte zile mai avem pînă la ziua de naștere a persoanei *X*, ce dobîndă primim în 10 ani pentru cei 5 000 de lei depuși azi la CEC, și așa mai departe. Ba redactorul i-a mai spus că în viața de toate zilele intervin și numerele negative; într-o zi, uitîndu-ne portmoneul acasă, împrumutăm de la atotprezentul Popescu o sumă de bani, fiindcă tocmai cu o zi înainte am zărit la „Unirea" un nou tip de brățară care — credem noi — i-ar place persoanei *Y* — și nu vrem să pierdem ocazia etc., etc.

Orice datorie făcută este în fond un „buget negativ". Și redactorul nostru a sintetizat discuția astfel: ținînd cont de importanța aritmeticii în viața de zi cu zi, ar însemna că odată pe lună cel puțin, să apară o carte de aritmetică. Totuși, acest lucru nu se întîmplă, cum e și firesc. Așa și cu algebra: dacă fără ea nu putem trăi (așa cum spui dumneata), atunci de ce nu păstrăm fiecare sub pernă cîte o carte de algebră? Desigur, exagerez puțin — a subliniat redactorul — dar trebuie să privim lucrurile în dimensiunea lor reală. Totuşi, şi o nouă carte de algebră poate deveni un „bestseller", deşi s-au scris destule pînă acum. Ceea ce îi trebuie pentru aceasta este însă prezentarea unor lucruri noi, de largă respiraţie, adică de o mai mare aplicabilitate, sau înfăţişarea unor lucruri vechi, cunoscute sub o formă nouă, care să sugereze aspecte nebănuite pînă atunci. Mai ales că un profesor de matematică trebuie să se adreseze în primul rînd tinerilor, să vină în ajutorul lor în prezentarea cît mai atractivă a unei ştiinţe care prin însăşi natura ei necesită mult talent şi dăruire pentru a fi îndrăgită de tineri.

Redactorul i-a mai spus prietenului meu următoarele: gîndeşte-te că eu sînt un cititor al cărţii dumitale, mai precis un tînăr cititor, elev de liceu sau tînăr absolvent care se pregăteşte să urmeze mai departe o şcoală tehnică, o facultate sau pur şi simplu să intre direct în activitatea productivă. Cum mă poate ajuta o astfel de carte? Ce lucruri noi îmi oferă?

Trebuie să mă convingi — ca pe un cititor oarecare, luat la întîmplare, că lucrarea pe care vrei s-o publici e interesantă şi că am ce să învăţ din ea.

Spiritul didactic al amicului meu s-a trezit atunci imediat. O să vă relatez aici cum a argumentat el necesitatea unei cunoaşteri mai profunde a algebrei şi cum părţi ale ei pot ajuta pe tinerii elevi sau absolvenţi sau candidaţi la diferite examene.

Toată lumea ştie ce sursă reală de neplăceri o constituie inegalităţile trigonometrice, mai ales cînd acestea se referă la unghiurile unui triunghi. Chiar eu — spunea prietenul meu — elev fiind „mă-ngălbeneam" cînd aveam de demonstrat, de exemplu, că într-un triunghi ascuţitunghic are loc inegalitatea:

$$\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C > 2. \qquad (3.45)$$

Toate aceste inegalităţi mi se păreau că necesită o mare abilitate de calcul şi o mare doză de inspiraţie. Îndrăgostindu-mă între timp de algebră (de gustibus... — comentariul nostru!), am constatat treptat că, de fapt, aceste inegalităţi nu sînt decît niște inegalități algebrice condiționate, fiindcă $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180°$. La fel stau lucrurile și cu identitățile trigonometrice. Mai mult decît atît, diferitele inegalități între elementele liniare ale unui triunghi se pot deduce cu ajutorul inegalităților algebrice. Analiza matematică vine și ea în ajutorul nostru; diferite inegalități de funcții pot fi cu succes folosite pentru demonstrarea multora dintre inegalitățile cu pricina.

Dar pledoaria cea mai eficientă este cea prin intermediul exemplelor. Iată pentru început cîteva inegalități „clasice", care se pot aplica în acest gen de probleme (nu fac decît transcriu aici exemplele pe care algebristul nostru le-a luat drept „martori ai apărării").

1) Dacă $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sînt numere pozitive, atunci:

$$\min_{1 \leqslant i \leqslant n}\{x_i\} \leqslant H_n(x) \leqslant G_n(x) \leqslant A_n(x) \leqslant M_n(x) \leqslant \max_{1 \leqslant i \leqslant n}\{x_i\} \tag{3.46}$$

unde:

$$H_n(x) = \frac{x}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n}} \quad \text{este media armonică} \tag{3.47}$$

$$G_n(x) = \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdot \ldots \cdot x_n} \quad \text{este media geometrică} \tag{3.48}$$

$$A_n(x) = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} \quad \text{este media aritmetică} \tag{3.49}$$

$$M_n(x) = \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}{n}} \quad \text{este media pătratică} \tag{3.50}$$

Exemplu: să se arate că într-un triunghi ascuțitunghic, are loc inegalitatea:

$$\sin A + \sin B + \sin C \geqslant 3\left(\frac{S}{2R^2}\right)^{1/3}, \tag{3.51}$$

notațiile fiind cele obișnuite.

Soluție: vom folosi inegalitatea $G_n(x) \leqslant A_n(x)$ (3.52) pentru $n = 3$, adică:

$$\sqrt[3]{x_1 x_2 x_3} \leqslant \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}. \tag{3.53}$$

Alegem $x_1 = \sin A$, $x_2 = \sin B$, $x_3 = \sin C$ și înlocuim:

$$\sin A + \sin B + \sin C \geqslant 3^3 \sqrt[3]{\sin A \sin B \sin C}, \tag{3.54}$$

dar:

$$\sin A \ \sin B \sin C = S/2R^2 \tag{3.55}$$

(vezi manualul de trigonometrie), de unde rezultă imediat (3.51).

2) Dacă $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sînt numere pozitive, atunci:

$$(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n}\right) \geqslant n^2. \tag{3.56}$$

Această inegalitate este de fapt:

$$H_n(x) \leqslant A_n(x); \tag{3.57}$$

aranjată însă altfel. Să scriem (3.56) pentru $n = 3$. Avem:

$$(x_1 + x_2 + x_3)\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3}\right) \geqslant 9. \tag{3.58}$$

Această ultimă inegalitate are foarte multe aplicații cu ajutorul ei putîndu-se demonstra o „pleiadă" întreagă de inegalități relative la elementele unui triunghi.

Exemple:

a) să se arate că într-un triunghi există relația:

$$h_a + h_b + h_c \geqslant 9r, \tag{3.59}$$

notațiile fiind cele obișnuite.

Soluție: se alege $x_1 = h_a$, $x_2 = h_b$, $x_3 = h_c$ și se ține cont că:

$$\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{1}{r}. \tag{3.60}$$

Într-adevăr, suprafața unui triunghi poate fi scrisă

$$S = \frac{1}{2} a h_a = \frac{1}{2} b h_b = \frac{1}{2} c h_c = pr \tag{3.61}$$

și deci

$$\frac{1}{h_a} = \frac{a}{2S}, \quad \frac{1}{h_b} = \frac{b}{2S}, \quad \frac{1}{h_c} = \frac{c}{2S}, \quad \frac{1}{r} = \frac{2p}{2S}. \tag{3.62}$$

Relația (3.60) este acum evidentă. Așadar:

$$\frac{h_a + h_b + h_c}{r} \geqslant 9 \qquad \text{q.e.d.}$$

b) Să se arate că într-un triunghi are loc inegalitatea:

$$r_a + r_b + r_c \geqslant 9r, \tag{3.63}$$

notațiile fiind cele uzuale.

Soluție. Alegem de această dată în loc de x_1, x_2, x_3 pe r_a, r_b, r_c, adică razele cercurilor exînscrise triunghiului.

Nu este greu de văzut că suprafața triunghiului, S, se mai poate scrie și astfel:

$$S = r_a(p - a) = r_b(p - b) = r_c(p - c) = pr \tag{3.64}$$

și prin urmare:

$$\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} = \frac{p - a}{S} + \frac{p - b}{S} + \frac{p - c}{S} = \frac{3p - 2p}{S} = \frac{1}{r}. \tag{3.65}$$

Inegalitatea cerută este acum evidentă.

c) Să se arate că într-un triunghi, ascuțitunghic are loc inegalitatea:

$$\operatorname{tg} A \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} B \operatorname{tg} C + \operatorname{tg} C \operatorname{tg} A \geqslant 9. \tag{3.66}$$

Soluție. Ne reamintim pentru început următoarea identitate:

$$\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C = \operatorname{tg} A \operatorname{tg} B \operatorname{tg} C \tag{3.67}$$

care „cu vorbe" ar suna cam așa: într-un triunghi, suma tangentelor unghiurilor este egală cu produsul lor. Acest lucru se dovedește foarte ușor, dacă ținem seama de formula generală:

$$\operatorname{tg}(A + B + C) = \frac{\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C - \operatorname{tg} A \operatorname{tg} B \operatorname{tg} C}{1 - (\operatorname{tg} A \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} B \operatorname{tg} C + \operatorname{tg} C \operatorname{tg} A)}. \quad (3.68)$$

Cum $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180°$, iar $\operatorname{tg} 180° = 0$, atunci (3.67) rezultă imediat. Scriind acum inegalitatea:

$$(x_1 + x_2 + x_3)(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1) \geqslant 9x_1x_2x_3 \quad (3.69)$$

și alegînd $x_1 = \operatorname{tg} A$, $x_2 = \operatorname{tg} B$, $x_3 = \operatorname{tg} C$, conform cu (3.67) obținem rapid relația cerută.

d) Să încercăm acum să demonstrăm o inegalitate binecunoscută azi, și anume:

$$R \geqslant 2r, \quad (3.70)$$

care a fost pentru prima oară demonstrată de Leonhard Euler (1707—1783).

Euler a fost un spirit enciclopedic; el a abordat diverse ramuri de matematică și s-a ocupat în același timp de fizică și astronomie. A fost ales membru al Academiei de Științe din Petersburg, unde a trăit o lungă perioadă a vieții. Conform tradiției acelor timpuri, Euler și-a scris majoritatea lucrărilor în limba latină (de exemplu, una din operele sale de bază în astronomie, se intitulează *Theoria motuum planetarum et cometarum*, 1744 — Teoria mișcării planetelor și a cometelor).

În ceea ce privește matematica elementară, Euler a arătat o deosebită atracție pentru geometria triunghiului, domeniu în care a pus în evidență proprietăți interesante. În istoria matematicii a rămas înscris așa-numitul „cerc al lui *Euler*" sau cercul celor nouă puncte, Euler demonstrînd că într-un triunghi oarecare:

> „Picioarele înălțimilor, picioarele medianelor și mijloacele segmentelor determinate de vîrfurile triunghiului și ortocentru, sînt conciclice".

În ceea ce privește inegalitatea $R \geqslant 2r$, Euler a demonstrat geometric că, de fapt, distanța dintre centrele cercurilor înscris (I) și circumscris (O) unui triunghi oarecare, este dată de:

$$OI = \sqrt{R(R - 2r)}. \tag{3.71}$$

Cum OI este pozitivă, evident, $R > 2r$, egalitatea $R = 2r$ avînd loc cînd O coincide cu I, adică atunci cînd triunghiul este echilateral.

Să demonstrăm acum $R \geqslant 2r$ cu ajutorul inegalităților algebrice. Alegem în (3.69) drept x_1, x_2, x_3 tot razele cercurilor exînscrise triunghiului. Atunci:

$$(r_a + r_b + r_c)(r_a r_b + r_b r_c + r_c r_a) \geqslant 9 r_a r_b r_c. \tag{3.72}$$

Pe de altă parte:

$$r_a + r_b + r_c = 4R + r, \quad r_a r_b + r_b r_c + r_c r_a = p^2$$

$$r_a r_b r_c = p^2 r$$

(aceste relații se găsesc dovedite în P r e d o e s c u M. I. și G h i l i c e a n u M. T.; *Probleme de trigonometrie*, vol. II, Ministerul Învățămîntului și Culturii, București, 1959, p. 396)

Așadar:

$$(4R + r)p^2 \geqslant 9p^2 r \tag{3.73}$$

de unde rezultă imediat $R \geqslant 2r$.

e) Să se arate că într-un triunghi ascuțitunghic:

$$\operatorname{cosec} A + \operatorname{cosec} B + \operatorname{cosec} C \geqslant \frac{9}{4} \sec \frac{A}{2} \sec \frac{B}{2} \sec \frac{C}{2}. \tag{3.74}$$

Soluție: scriem inegalitatea:

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} \geqslant \frac{9}{x_1 + x_2 + x_3} \tag{3.75}$$

și alegem $x_1 = \sin A$, $x_2 = \sin B$, $x_3 = \sin C$ ținînd apoi cont că:

$$\sin A + \sin B + \sin C = 4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}. \tag{3.76}$$

Atunci (3.75) devine imediat:

$$\sum \operatorname{cosec} A \geqslant \frac{9}{4} \prod \sec \frac{A}{2} \tag{3.77}$$

adică tocmai (3.74).

Desigur, inegalitățile algebrice pe care le-am folosit mai sus pot furniza o sumedenie de alte relații între elementele unui triunghi oarecare, inegalități mai mult sau mai puțin interesante. Există însă și alte inegalități algebrice simple, care ne ajută în demonstrarea unor inegalități trigonometrice relativ dificile, dacă am încerca să le deducem pe cale directă.

Iată un exemplu:

3) Dacă x, y, z sînt numere reale oarecare, atunci:

$$x^2 + y^2 + z^2 \geqslant xy + yz + zx \tag{3.78}$$

(aceasta este o inegalitate banală chiar și pentru elevii din anii mici). Totuși, dacă ni se cere să demonstrăm că în orice triunghi:

$$\operatorname{ctg}^2 A + \operatorname{ctg}^2 B + \operatorname{ctg}^2 C \geqslant 1, \tag{3.79}$$

atunci această inegalitate nu mai pare chiar atît de banală — cel puțin la prima vedere.

Să ne reamintim însă de relația:

$$\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C = \operatorname{tg} A \operatorname{tg} B \operatorname{tg} C. \tag{3.80}$$

Transformînd tangentele în cotangente, obținem rapid:

$$\sum \operatorname{ctg} A \operatorname{ctg} B = 1. \tag{3.81}$$

Alegînd acum în (3.78) $x = \operatorname{ctg} A$, $y = \operatorname{ctg} B$, $z = \operatorname{ctg} C$ avem:

$$\sum \operatorname{ctg}^2 A \geqslant \sum \operatorname{ctg} A \operatorname{ctg} B = 1, \tag{3.82}$$

adică tocmai ceea ce trebuia arătat. Simplu, nu-i așa?

În legătură cu inegalitățile algebrice, trebuie să remarcăm că în acest domeniu există multe lucrări, astăzi deja celebre.

În anul 1934 apare lucrarea matematicienilor G.H. Hardy, J.E. Littlewood și G. Pólya intitulată chiar *Inegalități* (ediția a doua în 1952; tradusă în limba rusă în anul 1948, cu completări ale cercetătorilor sovietici în acest domeniu). Doi ani mai tîrziu, apare lucrarea matematicianului sovietic D.A. Krîjanovski, intitulată *Elemente ale teoriei inegalităților*, multă vreme considerată o lucrare de bază în acest domeniu. În perimetrul balcanic, matematicienii iugoslavi creează o adevărată școală în teoria inegalităților, începînd cu M. Petrović (1932, *Calcule cu numere oarecare*, Belgrad) și continuînd cu cunoscuta carte a lui D.S. Mitrinović (*Nejednakosti*, Belgrad, 1965), în care un capitol special este consacrat inegalităților între elementele unui triunghi.

În țara noastră, „Gazeta Matematică" a publicat de-a lungul anilor interesante inegalități, cu aplicații în diferite ramuri ale matematicii, nu numai în geometrie.

Din lucrarea lui Mitrinović, vom reproduce aici cîteva aplicații în geometrie ale inegalităților algebrice. Mai întîi însă, o să ne reamintim cîteva definiții:

A — Se spune că funcția $f(x)$, $x \in [\alpha, \beta]$ este convexă în *sensul lui Jensen* pe segmentul $[\alpha, \beta]$ dacă pentru orice a și b, $a, b \in [\alpha, \beta]$, are loc inegalitatea:

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leqslant \frac{f(a)+f(b)}{2}. \tag{J}$$

B — Se spune că funcția $f(x)$, $x \in [\alpha, \beta]$ este concavă în *sensul lui Jensen*, dacă $-f(x)$, $x \in [\alpha, \beta]$ este convexă în același sens.

Definiția (J) a fost dată de J.L.W.V. Jensen în anul 1905. Un an mai tîrziu, Jensen demonstrează o inegalitate importantă pentru numeroase aplicații.

Inegalitatea lui Jensen:

Dacă $f(x)$ este o funcție convexă în *sensul lui Jensen* $x \in [\alpha, \beta]$, atunci pentru orice $a_i \in [\alpha, \beta]$, $i = 1, 2, \ldots, n$ are loc relația:

$$f\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i\right) \leqslant \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(a_i). \tag{3.83}$$

Aplicație: să se arate că într-un triunghi oarecare, are loc inegalitatea:

$$\sin A + \sin B + \sin C \leq \frac{3}{2}\sqrt{3}, \tag{3.84}$$

egalitatea îndeplinindu-se cînd triunghiul este echilateral (Mitrinović, loc. cit. p. 122).

Soluție: vom aplica inegalitatea lui *Jensen*. Să considerăm funcția $f(x) = \sin x$ pe segmentul $[0, \pi]$. După cum se știe, pe acest segment ea este concavă conform definiției clasice, întrucît $f''(x) \leq 0$ pentru $x \in [0, \pi]$. Atunci, luînd două puncte $x_1, x_2 \in [0, \pi]$, funcția

$$\frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} = \frac{\sin x_1 + \sin x_2}{2} \tag{3.85}$$

devine:

$$\frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} = \sin\frac{x_1 + x_2}{2}\cos\frac{x_1 - x_2}{2} \leq \sin\frac{x_1 + x_2}{2}, \tag{3.86}$$

deoarece $0 \leq \cos\frac{x_1 - x_2}{2} \leq 1$ pentru orice $(x_1 - x_2)/2$, adică:

$$\frac{\sin x_1 + \sin x_2}{2} \leq \sin\frac{x_1 + x_2}{2}. \tag{3.87}$$

Inegalitatea lui *Jensen*, aplicată pentru $\sin x$, $x \in [0, \pi]$ și $x_i \in [0, \pi]$, $i = 1, 2, \ldots, n$, ne dă:

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \sin x_i \leq \sin\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right). \tag{3.88}$$

Atunci, luînd $x_1 = \hat{A}$, $x_2 = \hat{B}$, $x_3 = \hat{C}$, cu $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180°$, $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}, > 0$, avem imediat:

$$\frac{\sin A + \sin B + \sin C}{3} \leq \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \tag{3.89}$$

și deci (3.84) a rezultat imediat.

4) Dacă x, y, z, sînt numere reale pozitive, atunci are loc inegalitatea

$$x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 \geqslant xyz(x + y + z) \qquad (3.90)$$

(ea face obiectul problemei 2.1.15 din cartea lui Mitrinović, p. 111).

Vom arăta aici că utilizînd (3.90) putem obține o interesantă inegalitate și anume:

Dacă $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$ sînt unghiurile unui triunghi, atunci:

$$\mathrm{tg}^2\frac{A}{2} + \mathrm{tg}^2\frac{B}{2} + \mathrm{tg}^2\frac{C}{2} \geqslant 1. \qquad (3.91)$$

Iată cum procedăm: dacă x, y, z sînt pozitive, atunci să alegem $x = b + c - a$, $y = c + a - b$, $z = a + b - c$, unde a, b, c sînt laturile triunghiului. Condiția x, y, z, este respectată, deoarece în orice triunghi suma a două laturi este mai mică decît a treia. Notînd ca deobicei $2p = a + b + c$, și înlocuind în (3.90), obținem ușor:

$$(p - a)^2(p - b)^2 + (p - b)^2(p - c)^2 + (p - c)^2(p - a)^2 \geqslant$$
$$\geqslant p(p - a)(p - b)(p - c). \qquad (3.92)$$

Împărțind cu membrul drept, avem:

$$\frac{(p - a)(p - b)}{p(p - c)} + \frac{(p - b)(p - c)}{p(p - a)} + \frac{(p - c)(p - a)}{p(p - b)} \geqslant 1. \qquad (3.93)$$

Dar dacă ne reamintim formula:

$$\mathrm{tg}\,\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p - b)(p - c)}{p(p - a)}} \quad \text{etc.} \qquad (3.94)$$

atunci (3.91) este evidentă.

În fine, pentru a pune capăt acestei „inflații" de inegalități algebrice cu ramificații puternice în trigonometrie, să mai înfățișăm o frumoasă demonstrație dată de Mitrinović (p. 124 și 128) pentru celebra inegalitate a lui *Euler:* $R \geqslant 2r$.

Arătăm, mai întîi, că dacă a, b, c sînt laturile unui triunghi oarecare, atunci:

$$(a + b - c)(b + c - a)(c + a - b) \leqslant abc. \qquad (3.95)$$

Să presupunem că (3.95) nu ar fi adevărată. Atunci, în mod firesc trebuie să aibă loc:

$$(a + b - c)(b + c - a)(c + a - b) > abc. \qquad (3.96)$$

Dacă notăm: $b + c - a = x$, $c + a - b = y$, $a + b - c = z$, atunci rezultă:

$$a = \frac{y + z}{2}, \quad b = \frac{z + x}{2}, \quad c = \frac{x + y}{2} \qquad (3.97)$$

şi deci (3.96) devíne:

$$xyz > \frac{1}{8}(y + z)(z + x)(x + y). \qquad (3.98)$$

Să ţinem seama că dacă a, b, c sînt laturile unui triunghi, atunci evident $x, y, z > 0$. Urmează că (3.98) nu poate avea loc, deoarece conform propoziţiei 1) din acest paragraf:

Media aritmetică $\geqslant$ Media geometrică,

adică:

$$\frac{y + z}{2} \geqslant \sqrt{yx}, \quad \frac{z + x}{2} \geqslant \sqrt{zx}, \quad \frac{x + y}{2} \geqslant \sqrt{xy} \qquad (3.99)$$

şi înmulţind membru cu membru aceste inegalităţi, obţinem:

$$(y + z)(z + x)(x + y) \geqslant 8xyz. \qquad (3.100)$$

Contradicţia a provenit din faptul că am presupus (3.95) neadevărată. Revenim acum la inegalitatea lui *Euler*; scriem raportul:

$$\frac{r}{R} = \frac{S/p}{abc/4S} = \frac{4S^2}{pabc} = \frac{4p(p - a)(p - b)(p - c)}{pabc} =$$

$$= \frac{(b + c - a)(c + a - b)(a + b - c)}{2abc} \leqslant \frac{abc}{2abc} = \frac{1}{2}$$

(am aplicat aici formulele cunoscute $S = pr = abc/4R =$ formula lui *Heron*, precum şi (3.95)).

Ca să nu mai lungim vorba, pledoaria amicului meu a convins (probabil că între atîtea inegalităţi l-aţi şi uitat !). Inegalităţile algebrice sînt un izvor nesecat de rezultate în domeniul geometriei triunghiului. „Gazeta Matematică" ne dovedeşte cu prisosinţă acest lucru. La sfîrşitul acestei broşuri, am cules cîteva din frumoasele probleme pe această temă publicate în ţara noastră.

Să nu rămînem cu impresia că numai domeniul inegalităţilor algebrice ne ajută în rezolvarea problemelor legate de triunghi.

Multă vreme în paginile revistelor de matematici elementare din lumea întreagă, un loc deosebit l-a ocupat următorul gen de problemă: în ce condiţii laturile sau alte elemente liniare (sau nu) pot fi exprimate în numere întregi? (evident, este vorba de numere naturale, fiindcă aici au sens numai numerele întregi şi pozitive).

Problema se reduce pînă la urmă la o problemă de algebră, şi anume la rezolvarea unor ecuaţii în numere întregi. E vorba aici de o adevărată disciplină, „subramură a algebrei". Despre rezolvarea ecuaţiilor în numere întregi s-au scris nenumărate lucrări. Nu avem spaţiu necesar să le enumerăm pe toate — vom menţiona doar o carte foarte cunoscută a matematicianului polonez W. Sierpinski intitulată *Asupra rezolvării ecuaţiilor în numere întregi* (ediţia rusă: *O reşenii uravnenii v ţelîh cislah,* Fizmatghiz, Moskva, 1961).

Originea acestei probleme în legătură cu triunghiul datează încă din antichitate; vinovat: triunghiul dreptunghic. Într-adevăr, relaţia lui *Pitagora,* şi anume:

$$x^2 + y^2 = z^2 \tag{3.101}$$

dă următoarele soluţii în numere întregi:

$$x = m^2 - n^2, \quad y = 2mn, \quad z = m^2 + n^2, \quad m,\ n \in Z \setminus \{0\}, \qquad mn > 0, \quad m > n. \tag{3.102}$$

Relaţia (3.101) se mai poate deci interpreta şi astfel:

„Dacă un triunghi are un unghi de 90°, atunci laturile sale pot fi şi numere naturale".

Numerele x, y, z, exprimate ca mai înainte, se numesc „numere pitagorice". Este interesant să dăm și alte exemple de acest gen; să începem deci cu:

Exemplul (*a*): Dacă într-un triunghi, un unghi este de $60°$, atunci laturile sale pot fi și numere naturale (acest exemplu cît și cele ce urmează sînt luate din: Vodă V. Gh. *Asupra unor triunghiuri speciale*. În: Gazeta Matematică, no. 10/1077, pp. 399—401).

Într-adevăr, fie ABC un triunghi în care $\hat{A} = 60°$. Să notăm $AC = x$; $BC = z$, $AB = y$. Aplicăm teorema cosinusului:

$$\cos 60° = \frac{x^2 + y^2 - z^2}{2xy} = 1/2. \tag{3.103}$$

Așadar am obținut ecuația:

$$x^2 - xy + y^2 = z^2, \tag{3.104}$$

pe care trebuie s-o rezolvăm în numere întregi. Soluția acestei ecuații este:

$$\begin{gathered} x = (m^2 - n^2)k,\ y = m(m - 2n)k,\ z = (m^2 - mn + n^2)k \\ m,\ n \in Z \setminus \{0\},\ mn > 0,\ k \in Z^+ \setminus \{0\},\ m > 2n. \end{gathered} \tag{3.105}$$

Exemplul (*b*): Dacă într-un triunghi, un unghi este de $120°$, atunci laturile sale pot fi și numere naturale.

Aici aplicăm tot teorema cosinusului:

$$\cos 120° = \frac{x^2 + y^2 - z^2}{2xy} = -1/2, \tag{3.106}$$

adică de fapt am obțibut ecuația:

$$x^2 + xy + y^2 = z^2 \tag{3.107}$$

care seamănă cu ecuația de la exemplul precedent. Soluția ei este:

$$\begin{gathered} x = (m^2 - n^2)k,\ y = m(2m - n)k,\ z = (m^2 - mn + n^2)k \\ m, n \in Z \setminus \{0\},\ k \in Z^+ \setminus \{0\},\ mn > 0,\ m > \frac{n}{2}. \end{gathered} \tag{3.108}$$

Exemplul (c): dacă într-un triunghi, un unghi este dublul altuia, atunci laturile sale pot fi şi numere naturale.

Acest exemplu ar fi deci o generalizare a celor două exemple de mai sus. Fie deci un triunghi ABC cu $\hat{B} = \alpha$, şi $\hat{A} = 2\alpha$. Notăm laturile ca în figura 3.11 şi anume $AB = z$, $AC = y$, $BC = x$. Construim bisectoarea AA_1 a unghiului A. Atunci: $\sphericalangle A_1BA = \sphericalangle BAA_1 = \sphericalangle A_1AC = \alpha$ iar $\sphericalangle CA_1A = \alpha$ (unghi exterior). Triunghiul BA_1A este deci isoscel, iar triunghiul CA_1A este asemenea cu triunghiul ABC.

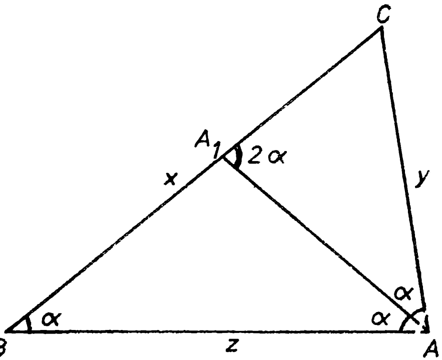

Fig. 3.11.

Un triunghi pentru care $\hat{A} = 2\hat{B}$

Din această asemănare, rezultă:

$$\frac{z}{AA_1} = \frac{y}{CA_1} = \frac{x}{y} \tag{3.109}$$

din care $zy = xAA_1$; dar $AA_1 = A_1B$ (triunghiul BAA_1 isoscel). Pe de altă parte, teorema bisectoarei ne furnizează:

$$\frac{y}{CA_1} = \frac{z}{BA_1} = \frac{y+z}{x} \text{ din care } BA_1 = AA_1 = \frac{xz}{y+z}. \tag{3.110}$$

Înlocuind AA_1 în relația $zy = x \cdot AA_1$, obținem în final:

$$y(y+z) = x^2. \tag{3.111}$$

Am reușit deci să găsim o relație care leagă laturile x, y, z ale triunghiului cu proprietatea considerată. Să arătăm acum că (3.111) are soluții în numere întregi. Mai întîi scriem teorema sinusului în triunghiul ABC:

$$\frac{x}{\sin 2\alpha} = \frac{y}{\sin \alpha} \Rightarrow \frac{x}{2y} = \cos \alpha. \tag{3.112}$$

O primă condiție apare deci natural: $x < 2y$. (3.113)

Pe de altă parte, (3.111) se mai poate aranja și sub forma:

$$z = \frac{x^2 - y^2}{y} = \frac{(x+y)(x-y)}{y} = \left(\frac{x}{y} + 1\right)(x - y). \tag{3.114}$$

Se știe însă că într-un triunghi oarecare au loc relațiile:

$$z > x - y, \quad z < x + y \tag{3.115}$$

de unde imediat:

$$1 < \frac{x}{y} < 2. \tag{3.116}$$

Să trecem acum la rezolvarea efectivă a ecuației; ea mai poate fi scrisă:

$$\frac{x}{y} = \frac{y}{x} + \frac{z}{x}. \tag{3.117}$$

Să punem $\frac{x}{y} = \frac{m}{n}$ unde $m, n \in Z \setminus \{0\}$ și deci:

$$\frac{z}{x} = \frac{m^2 - n^2}{mn}. \tag{3.118}$$

Mai putem încă scrie $\frac{x}{y} = \frac{mn}{n^2}$ și deci soluțiile întregi sînt:

$$x = mn, \ y = n^2, \ z = m^2 - n^2, \tag{3.119}$$

cu condiția suplimentară $1 < \frac{m}{n} < 2$.

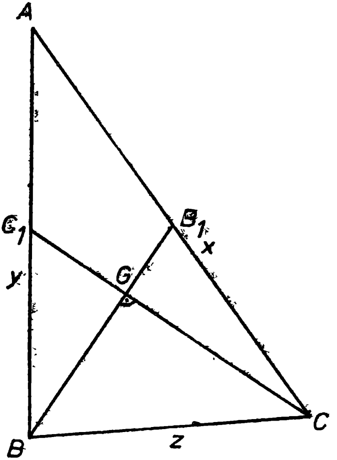

Fig. 3.12.
Un triunghi cu două mediane perpendiculare

Exemplul (*d*): Dacă într-un triunghi, două mediane sînt perpendiculare, atunci laturile sale pot fi şi numere naturale.

Iată o problemă interesantă; în primul rînd, trebuie să găsim relaţia dintre laturile unui triunghi în care două mediane sînt perpendiculare. Scriem deci expresiile medianelor respective (fig. 3.12):

$$BB_1 = \left[\frac{1}{2}(y^2 + z^2) - \frac{1}{4}x^2\right]^{1/2}; \tag{3.120}$$

$$CC_1 = \left[\frac{1}{2}(x^2 + z^2) - \frac{1}{4}y^2\right]^{1/2}. \tag{3.121}$$

Ne reamintim acum că medianele într-un triunghi se întîlnesc — printre altele — la 2/3 de vîrf şi 1/3 de bază; aşadar:

$$BG = \frac{2}{3}BB_1; \quad CG = \frac{2}{3}CC_1. \tag{3.122}$$

Dar triunghiul BGC este dreptunghic, deci:

$$BG^2 + GC^2 = BC^2. \tag{3.123}$$

Înlocuind elementele respective, găsim:

$$\frac{4}{9}\left[\frac{1}{2}(y^2+z^2)-\frac{1}{4}x^2\right]+\frac{4}{9}\left[\frac{1}{2}(x^2+z^2)-\frac{1}{4}y^2\right]=z^2, \tag{3.124}$$

care după un calcul elementar, se transformă în:

$$x^2 + y^2 = 5z^2 \tag{3.125}$$

și care reprezintă relația căutată. Această ecuație are ca soluții:

$$x = 2(m^2 + mn - n^2),\ y = n^2 + 4mn - m^2,\ z = m^2 + n^2$$
$$m, n \in Z \setminus \{0\}. \tag{3.126}$$

4. UN FIZICIAN ÎN RINGUL CU TREI COLȚURI: EVANGELISTA TORRICELLI

4.1. Torricelli urmărea de fapt un punct

Ne-am obișnuit deja, încă de cînd am făcut cunoștință cu creația lui Giovanni Ceva, că fizica poate fi un ajutor nebănuit în demonstrarea și chiar descoperirea unor fapte tipice de geometrie sintetică.

Anticii și oamenii de știință ai Evului Mediu erau poate mai puțin rigizi decît sînt unii dintre noi astăzi, în împărțirea cunoștințelor specifice în stricte ramuri de specialitate. Nu e mai puțin adevărat — și asta am mai spus-o parcă aici — că în acele epoci era mult mai ușor să fii „interdisciplinar", tocmai datorită volumului relativ redus de cunoștințe.

Ideea de a rezolva anumite probleme ale unei anumite discipline apelînd la „forțe exterioare", adică la cunoștințe dintr-o disciplină aparent destul de depărtată, este foarte fecundă, iar istoria științei a consemnat exemple strălucite; dintre cele mai recente, consemnăm contribuția statisticii matematice în rezolvarea problemei stabilității proceselor tehnologice (Shewhart, 1924, [27]), sau contribuția hotărîtoare a unor probleme de teoria comunicației în apariția noii discipline — binecunoscută astăzi — Teoria informației (Shannon, 1948, [26]).

Despre Torricelli, după cîte știm cu toții, se învață în școală și ne întîlnim cu el la fizică, atunci cînd studiem barometrul și presiunea atmosferică.

Evangelista Torricelli s-a născut la Faenza, în 1608, și a murit la Florența în 1647, deci la numai 39 de ani. A fost elevul preferat al lui Galileo Galilei (1564—1642), care l-a îndemnat mereu să abordeze fizica pe baze experimentale.

Istoria științei îl menționează însă pe Torricelli și ca matematician, cu frumoase realizări, în special în teoria curbelor de ordin superior (printre altele, Torricelli a fost primul care a studiat curba exponențială de tipul a^x; de asemenea, el a introdus așa-numita „strofoidă" — curbă descrisă prin ecuația $(x^2 + y^2)(x - a)^2 = a^2y^2$, $a > 0$).

Dacă s-a ocupat de matematică, Torricelli nu putea — conform tradiției epocii — să ocolească geometria sintetică, și mai ales geometria triunghiului. Într-adevăr, geometria triunghiului îi datorează lui Torricelli o interesantă proprietate, care din păcate este mai puțin cunoscută de tinerii pasionați de matematică de astăzi, dar care este într-un fel cheia a nenumărate probleme.

Iată care este teorema lui *Torricelli*:

Pe laturile triunghiului ABC, construim în exterior triunghiurile echilaterale ABC_1, ACB_1, BCA_1.
Atunci:

a) cercurile circumscrise triunghiurilor echilaterale se taie într-un punct T.

b) dreptele AA_1, BB_1, CC_1 sînt concurente în punctul T.

c) are loc egalitatea $AA_1 = BB_1 = CC_1$.

d) dacă T se află în interiorul triunghiului, atunci suma $TA + TB + TC$ este minimă.

e) centrele cercurilor circumscrise triunghiurilor echilaterale construite, sînt vîrfurile unui triunghi echilateral.

Teorema, se găsește reprodusă (cu o schiță de demonstrație) și în *Istoria matematicii* a profesorului N.N. Mihăileanu (nu vom mai insista deci asupra punctelor care se găsesc clarificate). Vom face unele observații și vom da anumite demonstrații noi.

Să remarcăm pentru început următoarele: cercurile circumscrise triunghiurilor echilaterale astfel construite, se numesc „cercurile *Torricelli*", iar punctul T — după cum nu e greu de ghicit — „punctul lui *Torricelli*". Acum o primă serie de observații:

1) dacă $\hat{A} < 120°$, punctul lui *Torricelli* (T) este interior triunghiului ABC;

2) dacă $\hat{A} > 120°$, punctul lui *Torricelli* (T) este exterior triunghiului ABC;

3) dacă $\hat{A} = 120°$, atunci punctul lui *Torricelli* coincide cu vîrful A.

Torricelli a arătat egalitatea segmentelor AA_1, BB_1, CC_1, dar nu a avut curiozitatea să calculeze aceste segmente în funcție de elementele triunghiului ABC. Nu este greu de arătat că:

$$AA_1 = BB_1 = CC_1 = \left[\frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2) + 2S\sqrt{3}\right]^{1/2}. \quad (4.1)$$

Această valoare are o semnificație aparte, deoarece este chiar valoarea sumei $TA + TB + TC$! Într-adevăr, de îndată ce știm că punctul T se află pe cercurile circumscrise triunghiurilor echilaterale construite pe laturi, atunci are loc relația:

$$TB + TC = TA_1. \quad (4.2)$$

Relația (4.2) exprimă de fapt următoarea proprietate interesantă: dacă T este un punct pe cercul circumscris unui triunghi echilateral (fie el BCA_1), atunci suma distanțelor la vîrfurile apropiate (care delimitează arcul de cerc pe care se găsește T), este egală cu distanța la cel de-al treilea vîrf (fig. 4.1.).

Istoria acestei proprietăți este și mai interesantă: în anul 1646 Francisc van Schooten (1615—1666, deși datele sînt sub semnul întrebării; după W.W. Rouse-Ball, ar fi murit în 1661. Ca realizări, el este citat prin ideea folosirii coordonatelor carteziene în spațiul tridimensional. După Wieleitner, cronologia este 1615—1660. Francisc van Schooten Jr., care a trăit între 1637 și 1679, a fost unul dintre premergătorii teoriei probabilităților) a publicat în Olanda, la Leyda, o lucrare despre conice, în care a demonstrat și această relație (4.2).

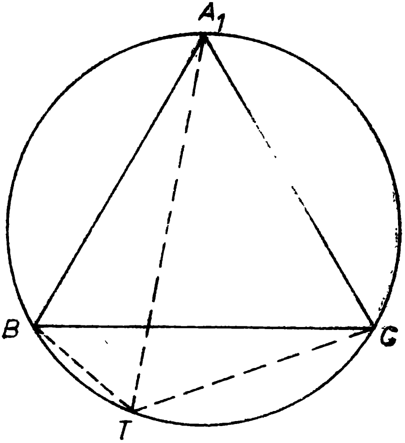

Fig. 4 1.
Proprietatea lui *Van Schooten* (1646)

Este foarte plauzibil ca Torricelli să nu fi avut posibilitatea să cunoască cartea lui van Schooten. Pe de altă parte, Torricelli dăduse o demonstrație distinctă de cea a lui van Schooten pentru punctul d) al teoremei. Fr. Van Schooten, a folosit pentru demonstrație teorema lui *Ptolemeu* (aprox. 85—165, era noastră): într-un patrulater inscriptibil, produsul diagonalelor este egal cu suma produselor laturilor opuse.

Patrulaterul TBA_1C este evident inscriptibil, și deci:

$$TA_1 \cdot BC = A_1C \cdot TB + A_1B \cdot TC. \qquad (4.3)$$

Dar $BC = A_1C = A_1B$, fiindcă triunghiul A_1BC este echilateral și rezultă imediat (4.2) după simplificare.

Relația (4.2) este intim legată de teorema lui *Dimitrie Pompeiu* pe care am enunțat-o în capitolul anterior. Ținînd cont de (4.2), putem face următoarea observație la teorema lui *Pompeiu*:

> „Cercul circumscris triunghiului echilateral este locul geometric al punctelor pentru care triunghiul lui *Pompeiu* este degenerat" (vezi și *GMF-B*, nr. 8/1961, p. 502).

Acum este foarte simplu să arătăm că:

$$TA + TB + TC = AA_1. \tag{4.4}$$

Într-adevăr, relația *van Schooten* ne dă:

$$TB + TC = TA_1 \Rightarrow TA_1 + TA = AA_1. \tag{4.5}$$

Urmează să mai vedem că AA_1 este într-adevăr minimul sumei, și să calculăm acest minim. Să presupunem că T_1 este un punct oarecare pe cercul BCA_1, diferit de T. Atunci:

$$T_1A + T_1B + T_1C = TA_1 + TA > AA_1 \tag{4.6}$$

(am aplicat relația *van Schooten*, plus faptul că suma a două laturi într-un triunghi — T_1AA_1 — este mai mare decît a treia), și deci a rezultat:

$$T_1A + T_1B + T_1C > TA + TB + TC. \tag{4.7}$$

Deci, pentru orice punct diferit de T care se află pe unul din cercurile *Torricelli*, suma respectivă depășește suma pentru cazul punctului *Torricelli*. Sîntem datori acum să luăm și un punct oarecare M care să nu se găsească pe vreunul din cercurile *Torricelli* (fig. 4.2). Evident, $MA + MA_1 > AA_1$. Acum intră în joc celebra teoremă a lui *Pompeiu*: cu segmentele MA_1, MB, MC se poate construi un triunghi. Așadar:

$$MB + MC > MA_1. \tag{4.8}$$

Adunînd relația (4.8) cu cea scrisă mai înainte, obținem:

$$MA + MB + MC > AA_1. \tag{4.9}$$

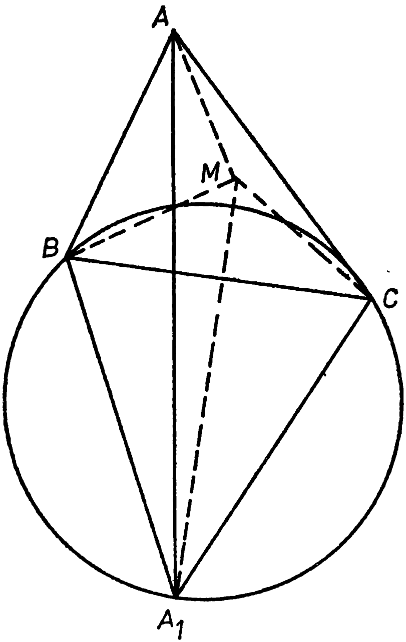

Fig. 4.2.
Dimitrie Pompeiu în ajutorul lui Torricelli
(proprietatea de minimum)

Am arătat, în fine, că punctul lui *Torricelli* este cel care face minimă suma: $TA + TB + TC$. Calculul acestei sume este simplu: din triunghiul AA_1B, teorema lui *Pitagora* ne dă:

$$AA_1^2 = AB^2 + A_1B^2 - 2AB \cdot AB_1 \cos (ABA_1) =$$
$$= c^2 + a^2 - 2ac \cdot \cos(\hat{B} + 60°) = c^2 + a^2 - ac \cdot \cos \hat{B} +$$
$$+ ac \sqrt{3} \sin \hat{B}. \qquad (4.10)$$

Pe de altă parte, aceeași teoremă — de data aceasta în triunghiul inițial —, ne furnizează:

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ac \cos B. \qquad (4.11)$$

Înlocuind în (4.10), obținem (dacă ținem seama de formula $2S = ac \sin B$):

$$AA_1^2 = c^2 + a^2 + \frac{b^2 - c^2 - a^2}{2} + 2S\sqrt{3}. \qquad (4.12)$$

Să analizăm acum observația 2) făcută mai sus; dacă $\hat{A} > 120°$ este ușor de văzut că punctul lui *Torricelli* cade în exteriorul triunghiului ABC. Mai interesant este următorul fapt: în acest caz ($\hat{A} > 120°$) punctul lui *Torricelli* nu mai are proprietatea de minimum enunțată la punctul d) al teoremei pentru cazul T interior triunghiului.[1]

Pentru a demonstra acest lucru, avem nevoie de trei proprietăți preliminare:

I — dacă d_a, d_b, d_c sînt distanțele unui punct oarecare M din planul interior triunghiului ABC la laturi, atunci are loc relația:

$$\frac{d_a}{h_a} + \frac{d_b}{h_b} + \frac{d_c}{h_c} = 1, \qquad (4.13)$$

unde h_a, h_b, h_c sînt înălțimile triunghiului (vezi fig. 4.3). Pentru demonstrație, unim punctul M cu vîrfurile A, B, C, și să notăm cu S_1, S_2, S_3, ariile triunghiurilor BMC, CMA, AMB; avem evident: $2S = ah_a$, $2S_1 = ad_a$ etc., ..., adică, de fapt:

$$\frac{S_1}{S} = \frac{d_a}{h_a}, \quad \frac{S_2}{S} = \frac{d_b}{h_b}, \quad \frac{S_3}{S} = \frac{d_c}{h_c} \qquad (4.14)$$

Adunînd membru cu membru aceste egalități, obținem:

$$\frac{S_1 + S_2 + S_3}{S} = \frac{d_a}{h_a} + \frac{d_b}{h_b} + \frac{d_c}{h_c}. \qquad (4.15)$$

[1] Vezi cartea lui S.I. Zetel, citată anterior.

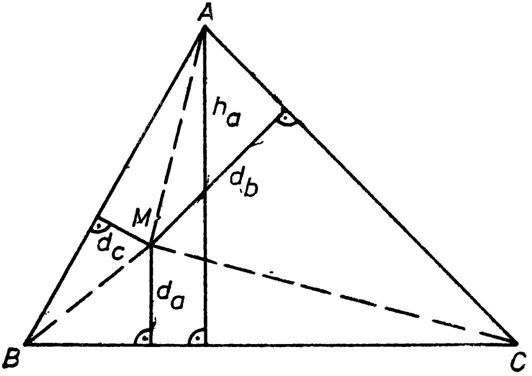

Fig. 4.3.
Demonstrăm proprietatea 1

Cum $S = S_1 + S_2 + S_3$, relația (4.13) rezultă imediat.

II — dacă M este un punct situat pe baza BC a unui triunghi isoscel atunci suma distanțelor sale d_b, d_c la laturile AB, AC este egală cu înălțimea h_b dusă din vîrful B, adică:

$$d_b + d_c = h_b \quad (= h_c) \tag{4.16}$$

Relația (4.16) rezultă destul de ușor; într-adevăr, din figura 4.4, putem scrie:

$$S_{AMB} = \frac{1}{2} AB \cdot d_b, \quad S_{AMC} = \frac{1}{2} AC \cdot d_c. \tag{4.17}$$

Dar, pe de altă parte, cum $AB = AC$, relația (4.16) rezultă și ea evident.

Consecință: dacă triunghiul ABC este echilateral, atunci, oricare ar fi M pe una din laturi:

$$d_1 + d_2 = \frac{a\sqrt{3}}{2}, \tag{4.18}$$

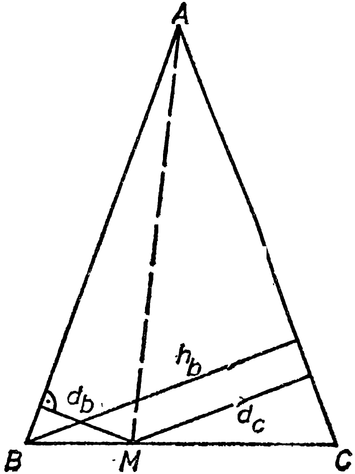

Fig. 4.4.
Demonstrăm proprietatea II

unde a este latura triunghiului echilateral, iar d_1, d_2, distanțele lui M la celelalte două laturi,
III — în fine, această ultimă proprietate auxiliară o vom enunța astfel:
Într-un triunghi isoscel $ABC(AB = AC)$ în care $\hat{A} < 60°$, suma distanțelor unui punct din planul triunghiului la laturi este mai mare decît înălțimea corespunzătoare laturilor egale, adică:

$$d_a + d_b + d_c > h_b \ (= h_c). \qquad (4.19)$$

Într-adevăr, conform cu proprietatea (I), putem scrie:

$$\frac{d_a}{h_a} + \frac{d_b}{h_b} + \frac{d_c}{h_c} = 1 \qquad (4.20)$$

care devine:

$$\frac{d_a}{h_a} + \frac{d_b + d_c}{h_b} = 1. \qquad (4.21)$$

Dacă $\hat{A} < 60°$, atunci $h_a > h_b (= h_c)$ și deci (4.21) devine o inegalitate, adică:

$$\frac{d_a}{h_b} + \frac{d_b + d_c}{h_b} > 1 \qquad (4.22)$$

deoarece

$$\frac{1}{h_b} < \frac{1}{h_a} \quad \text{și deci} \quad \frac{d_a}{h_b} < \frac{d}{h_a}.$$

Prin urmare:

$$d_a + d_b + d_c > h_b \ (= h_c). \qquad (4.23)$$

În cazul în care punctul se află pe BC, conform proprietății II, $d_b + d_c = h_b (= h_c)$ și relația (4.13) devine o identitate.

Sîntem în măsură acum să demonstrăm că dacă T se află în exteriorul triunghiului ABC, atunci proprietatea de minimum a sumei $TA + TB + TC$ nu mai este valabilă. Să privim deci cu atenție figura 4.5. Am construit acolo triunghiul ABC cu $\hat{A} > 120°$. Prin punctele B și C ducem perpendicularele Δ_1 și Δ_2 pe AB respectiv AC. Aceste perpendiculare se întîlnesc în punctul F. Fixăm pe Δ_1 și Δ_2 două puncte D și E astfel încît D, A, E să fie coliniare și triunghiul DFE să fie isoscel ($DF = EF$). Acest lucru este posibil și iată cum: ducem bisectoarea unghiului BFC și pe aceasta construim perpendiculara care trece prin vîrful A. Punctele în care această perpendiculară taie pe Δ_1 și Δ_2, sînt tocmai punctele căutate D și E.

Să facem acum apel la proprietățile demonstrate mai înainte. Conform proprietății II, suma $AB + AC$ este egală cu înălțimea corespunzătoare vîrfului E (sau D) a triunghiului isoscel DEF. Din punctul M oarecare în planul

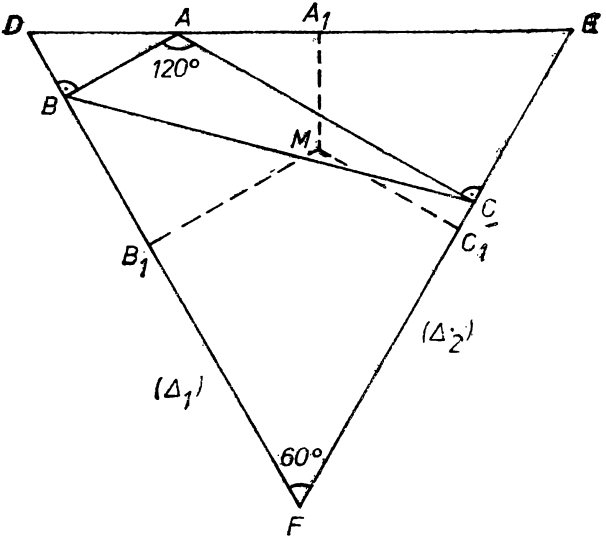

Fig. 4.5.
Proprietatea de minimum a punctului *Torricelli* nu mai are loc dacă $\hat{A} > 10°$

triunghiului ABC construim distanţele MA_1, MB_1, MC_1 la laturile triunghiului isoscel. Conform proprietăţii III, are loc relaţia: $MA_1 + MB_1 + MC_1 > AB + AC$ (= înălţimea corespunzătoare vîrfului D a triunghiului isoscel DEF).

Dacă unim pe M cu vîrfurile A, B, C, atunci avem evident:

$$MA > MA_1, \ MB > MB_1, \ MC > MC_1 \qquad (4.24)$$

deoarece „oblica este mai mare decît perpendiculara". Rezultă deci că:

$$MA + MB + MC > AB + AC \qquad (4.25)$$

și prin urmare minimul este atins atunci cînd $P = A$ și nu cînd P coincide cu punctul lui *Torricelli*.

Nu știu dacă ați urmărit foarte atent demonstrația; dacă da, atunci cu siguranță că ați remarcat că mai sîntem datori — conform proprietății III pe care am aplicat-o — să mai arătăm că unghiul DFE este mai mic decît 60°. Să privim pentru aceasta patrulaterul inscriptibil $ABFC(\sphericalangle ABF = \sphericalangle ACF = 90°)$. Dacă $\hat{A} > 120°$, atunci obligatoriu $\sphericalangle DFE < 60°$, deoarece împreună trebuie să însumeze tot 180°. Proprietatea este acum complet demonstrată.

4.2. Apare în scenă un conducător de oști: Napoleon Bonaparte

Vă întrebați poate ce legătură are celebrul strateg militar cu geometria triunghiului, și mai precis cu teorema lui *Torricelli*? Știm că Napoleon Bonaparte (1769—1821) a fost inițial ofițer de artilerie. În școlile militare de artilerie, chiar și în acele timpuri, se predau cunoștințe de matematică foarte solide, care cuprindeau o arie largă din domeniile matematicii.

Napoleon avea o înclinație deosebită pentru știință — deși dacă vă aduceți aminte — nu întotdeauna a fost la fel de receptiv la noutățile științifice și tehnice. Să ne rememorăm episodul Robert Fulton (1765—1815) — inventatorul tracțiunii cu abur pe apă, pe care împăratul de mai tîrziu l-a respins în repetate rînduri, neîncrezător în posibilitățile unui astfel de mijloc de transport.

Printre altele, Napoleon era pasionat de geometrie — care se dovedise un instrument foarte util în problemele de balistică, domeniu în care el excela atît în teorie, cît și în practică. Înconjurat de o pleiadă de renumiți savanți ai epocii — printre care să nu-l uităm pe Pierre Simon de Laplace (1749—1827) unul dintre cei care au pus bazele teoriei probabilităților și statisticii matematice —, Napoleon a venit în contact nemijlocit cu cele mai diferite realizări științifice ale vremii.

Istoria — și mai ales cea apocrifă, atribuie de multe ori unor oameni celebri descoperiri pe care aceștia nu le-au făcut vreodată, dar care erau plauzibil de a fi făcute de aceștia. Multe teoreme de geometrie, de exemplu, poartă nume de iluștri matematicieni care, de fapt, doar le-au folosit în deducerea altora. Desigur, astăzi aceste lucruri sînt mai puțin importante pentru noi decît faptele descoperite în sine.

Numele lui Napoleon a rămas atașat în geometria triunghiului de punctul e) al teoremei lui *Torricelli*. Dacă notăm cu O_1, O_2, O_3, centrele cercurilor circumscrise triunghiurilor echilaterale ABC_1, ACB_1 și BCA_1, atunci triunghiul $O_1O_2O_3$ poartă numele de „triunghiul exterior al lui *Napoleon*".

Construind triunghiurile echilaterale — de data aceasta „în interiorul" triunghiului ABC, așa cum arată figura 4.6,

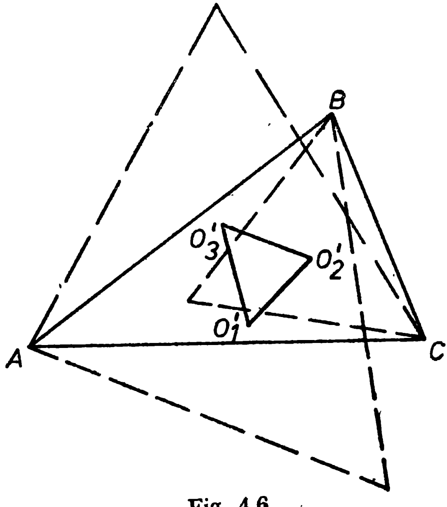

Fig. 4.6.
Triunghiul interior al lui *Napoleon*

atunci centrele corespunzătoare O'_1, O'_2, O'_3 formează un triunghi echilateral numit „triunghiul interior al lui *Napoleon*".

Pentru ușurință, triunghiurile $O_1O_2O_3$ și $O'_1O'_2O'_3$ au fost numite în general „triunghiurile lui *Napoleon*".

Matematicianul sovietic V.V. Lebedev [9] a publicat în 1962 o interesantă lucrare intitulată *Cîteva proprietăți ale triunghiurilor lui Napoleon*, din care vă vom prezenta cîteva rezultate, care pun în evidență unele legături interesante între elementele unui triunghi. Mai întîi, să construim și triunghiul exterior al lui *Napoleon* — vezi figura 4.7. Să calculăm latura O_1O_2 din triunghiul O_1BO_2. Observăm mai

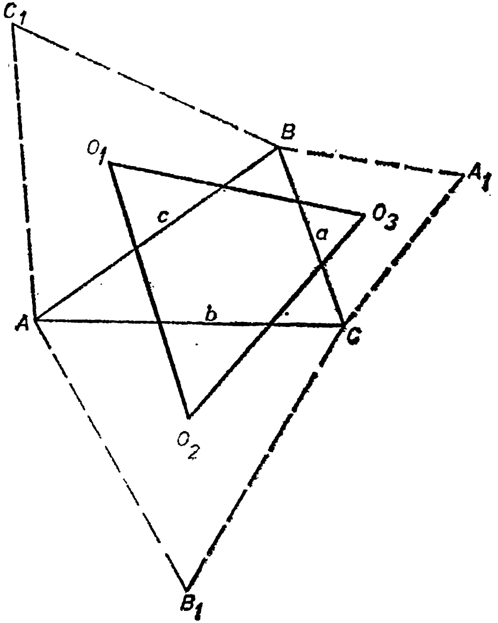

Fig. 4.7.
Triunghiul exterior al lui *Napoleon*

întîi că O_1B respectiv O_2B fiind raze vectoare ale cercurilor circumscrise triunghiurilor echilaterale ABC_1 şi BCA_1, ele sînt respectiv egale cu $c/\sqrt{3}$ şi $a/\sqrt{3}$, iar unghiul O_1BO_2 este de fapt $(60° + B)$. Atunci, teorema lui *Pitagora* generalizată ne dă:

$$O_1O_2^2 = \frac{c^2}{3} + \frac{a^2}{3} - \frac{2ac}{3}\cos(60° + \hat{B}) =$$

$$= \frac{a^2 + c^2}{3} - \frac{2ac}{3}\left(\frac{1}{2}\cos B - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin B\right) =$$

$$= \frac{a^2 + b^2 + c^2 + 4S\sqrt{3}}{6}; \tag{4.26}$$

unde S este, ca deobicei, suprafaţa triunghiului ABC.

Se poate deduce — absolut la fel — că pentru triunghiul interior se obţine:

$$O_1'O_2'^2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2 - 4S\sqrt{3}}{6}. \tag{4.27}$$

Consecinţă: În orice triunghi are loc inegalitatea:

$$a^2 + b^2 + c^2 \geqslant 4S\sqrt{3}. \tag{4.28}$$

Iată deci o nouă demonstraţie (geometrică) a unei inegalităţi destul de laborios de abordat pe alte căi.

V.V. Lebedev introduce acum următorul raport:

$$\frac{O_1'O_2'}{O_1O_2} = k \tag{4.29}$$

pe care-l numeşte „coeficient de deformare" şi care permite deducerea unor interesante proprietăţi. Să observăm mai întîi că:

1) dacă triunghiul iniţial ABC este echilateral, adică $a = b = c$, atunci,

$$k^2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2 - 4S\sqrt{3}}{a^2 + b^2 + c^2 + 4S\sqrt{3}} \tag{4.30}$$

devine:

$$k^2 = \frac{3a^2 - 3a^2}{3a^2 + 3a^2} = 0; \tag{4.31}$$

2) dacă triunghiul inițial este degenerat, adică $S = 0$, atunci coeficientul de deformare este nul. Prin urmare, pentru un triunghi oarecare ABC, are loc relația:

$$0 \leqslant k \leqslant 1. \tag{4.32}$$

Mai putem încă scrie:

$$\frac{1 - k^2}{1 + k^2} = \frac{4S\sqrt{3}}{a^2 + b^2 + c^2}, \tag{4.33}$$

relație care ne ajută să găsim condiția necesară și suficientă ca două triunghiuri ABC și $A'B'C'$ să aibă același coeficient de deformare.

Într-adevăr, să presupunem că aceste triunghiuri au același k. Atunci, conform cu (4.33), rezultă:

$$\frac{S}{S_1} = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}, \tag{4.34}$$

unde literele indexate cu 1 sînt elementele corespondente în triunghiul $A'B'C'$. Reciproca, dacă are loc (4.34), atunci un calcul simplu ne aduce la relația:

$$\frac{a^2 + b^2 + c^2 - 4S\sqrt{3}}{a^2 + b^2 + c^2 + 4S\sqrt{3}} = \frac{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 - 4S_1\sqrt{3}}{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 + 4S_1\sqrt{3}}, \tag{4.35}$$

adică de fapt $k^2 = k_1^2$.

Să deschidem acum *Geometria triunghiului* — a marelui nostru matematician Traian Lalescu, la pagina 152. Capitolul XVII care se află acolo, este intitulat „Unghiul și punctele lui *Brocard*".

Henri Brocard, matematician francez născut în 1845 are contribuții interesante în ceea ce numim noi astăzi geometria modernă a triunghiului. Moartea lui Brocard rămîne încă o enigmă pentru istorici. La un moment dat, Brocard a dispărut: se presupune că ar fi murit atît de sărac, încît a trebuit înmormîntat în groapa comună a vreunui cimitir din Paris, pierzîndu-i-se astfel urma (se pare că ultima lucrare publicată de Brocard este aceea privitoare la viața lui Gaspard Monge, 1746—1818, în revista „L'Intermediaire des Mathematiciens", 1906, vol. XIII, pp. 118—119).

În 1875, Brocard a rezolvat următoarea problemă:

> „să se găsească în planul triunghiului ABC un punct Ω astfel încît $\sphericalangle \Omega AB = \sphericalangle \Omega BC = \sphericalangle \Omega CA$".

Punctul Ω se numește „punctul lui *Brocard*", iar unghiul egal cu fiecare din unghiurile de mai sus, se numește „unghiul lui *Brocard*".

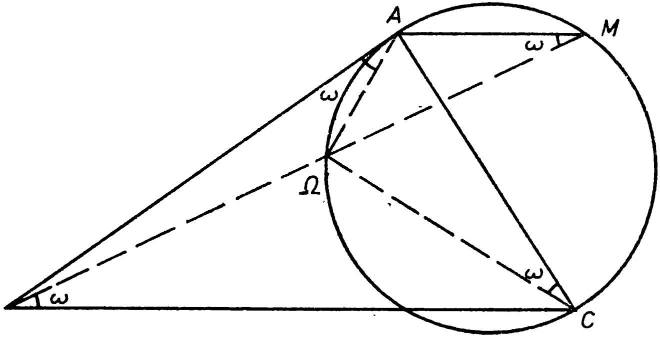

Fig. 4.8.
Construcția punctului *Brocard*

Iată cum a rezolvat Brocard această problemă: se construiește cercul ce trece prin punctele A și C și este tangent la latura AB în A; prin A se duce dreapta AM(M pe cerc) paralelă la BC. Punctul de intersecție al dreptei BM cu cercul, este punctul căutat Ω.

Demonstrația acestui fapt este simplă: să notăm $\sphericalangle \Omega BC = \omega$. Atunci unghiul AMB este tot ω din cauză că MB este o secantă ce taie două paralele, AM și BC. Dar $\sphericalangle \Omega CA = \frac{1}{2}$ măs arc $(\Omega A) = \omega$ deoarece $\widehat{\Omega A}$ este subîntins și de $\sphericalangle AM\Omega$. Atunci, tangenta BA la cerc și coarda $A\Omega$ formează tot unghiul ω căci acesta subîntinde tot arcul $A\Omega$.

Un calcul — dat integral în *Geometria triunghiului*, ne arată că:

$$\operatorname{ctg} \omega = \operatorname{ctg} A + \operatorname{ctg} B + \operatorname{ctg} C \tag{4.36}$$

sau:

$$\operatorname{tg} \omega = \frac{4S}{a^2 + b^2 + c^2} \tag{4.37}$$

(a se observa că unghiul lui *Brocard* pentru triunghiul echilateral este de 30°).

V.V. Lebedev arată că:

> „O condiție necesară și suficientă ca două triunghiuri să aibă același coeficient de deformare este ca acestea să aibă unghiurile lui *Brocard* egale".

Dăm aici o altă demonstrație față de cea propusă de Lebedev. Folosim relația (4.37); presupunînd unghiurile *Brocard* egale, avem:

$$\frac{4S}{a^2 + b^2 + c^2} = \frac{4S_1}{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2} \ (\operatorname{tg} \omega = \operatorname{tg} \omega_1). \tag{4.38}$$

Nu avem decît să înmulțim cu 3 ambii membri pentru a obține relația (4.33). Reciproc, pornind de la (4.38) și simplificînd cu $\sqrt{3}$ se obține evident $\operatorname{tg} \omega = \operatorname{tg} \omega_1$.

Încă trei proprietăți legate de coeficientul de deformare:

> A — fiind dat triunghiul ABC și triunghiul $A_1B_1C_1$, ale cărui laturi sînt medianele m_a; m_b; m_c

ale triunghiului dat, cele două triunghiuri au același coeficient de deformare.

Demonstrația este banală, deoarece avem imediat:

$$\frac{m_a^2 + m_b^2 + m_c^2}{a^2 + b^2 + c^2} = \frac{3}{4}; \qquad \frac{S_{A_1B_1C_1}}{S} = \frac{3}{4}, \qquad (4.39)$$

ceea ce dovedește proprietatea.

B — Dacă ABC este un triunghi isoscel, unghiul de la vîrf fiind θ, atunci coeficientul de deformare are expresia:

$$k = \frac{\sin\left(\frac{\theta}{2} - 30^\circ\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2} + 30^\circ\right)} \qquad \text{dacă } \theta \geqslant 60^\circ;$$

$$k = \frac{\sin\left(30^\circ - \frac{\theta}{2}\right)}{\sin\left(30^\circ + \frac{\theta}{2}\right)} \qquad \text{dacă } \theta < 60^\circ.$$

Demonstrația se bazează pe calculul direct al coeficientului de deformare în cazul triunghiului isoscel.

C — Dacă două triunghiuri isoscele au același coeficient de deformare, atunci ele sînt sau asemenea (unghiurile de la vîrf egale $\theta_1 = \theta_2$) sau are loc relația:

$$\operatorname{tg}\frac{\theta_1}{2}\operatorname{tg}\frac{\theta_2}{2} = \frac{1}{3}.$$

Demonstrația pornește de la expresia lui k dat de proprietatea B.

Iată prin urmare cum stau lucrurile cu triunghiurile lui *Napoleon*: o parte a teoremei lui *Torricelli* pe care pasionații de geometrie ai epocii moderne au dezvoltat-o, găsindu-i noi proprietăți deosebit de interesante.[1]

[1] Vezi și lucrarea: Popescu, T., *Retrospectivă matematică*, Editura Litera, București, 1977.

5. UN TRIUNGHI CIUDAT: TRIUNGHIUL PODAR

După cîte ați observat pînă acum, există o sumedenie de triunghiuri speciale atașate unui triunghi dat, astfel că, în mod natural ne putem pune întrebarea: pe care să le mai studiem, care dintre ele merită o atenție mai deosebită? Greu de spus!

Că lumea triunghiului este totuși mică, ne-o dovedește din nou teorema lui *Pompeiu*, despre care am discutat îndelung. Iată cum: să presupunem că triunghiul ABC din teorema lui *Pompeiu* nu este echilateral, ci oarecare. Alegem un punct arbitrar M în planul triunghiului ABC — și pentru fixarea ideilor să-l luăm în interior. Coborîm perpendiculare din M pe laturile AB, BC, CA, și fie C_1, A_1, B_1 picioarele acestor perpendiculare, după cum arată și figura 5.1.

Să unim punctul M cu vîrfurile A, B, C ale triunghiului și să formăm de asemenea și triunghiul $A_1B_1C_1$. Patrulaterele AB_1MC_1, BC_1MA_1, A_1MB_1C sînt inscriptibile, deoarece au fiecare cîte două unghiuri opuse egale cu 90° (MA_1, MB_1, MC_1 fiind perpendiculare pe laturile BC, CA, AB).

Dacă triunghiul ABC ar fi fost echilateral, atunci teorema lui *Pompeiu* ne-ar fi asigurat că segmentele AM, BM, CM erau întotdeauna laturile unui triunghi. Cum triunghiul ABC este oarecare, doar o alegere întîmplătoare a lui M poate furniza acest caz favorabil.

Ce corecție trebuie adusă? Să ne concentrăm puțin atenția asupra patrulaterului inscriptibil AB_1MC_1. Aici, AM este de fapt diametrul cercului pe care „zac" punctele A, M, B_1 și C_1. Atunci, nu e greu de văzut că:

$$B_1C_1 = AM \sin A \qquad (5.1)$$

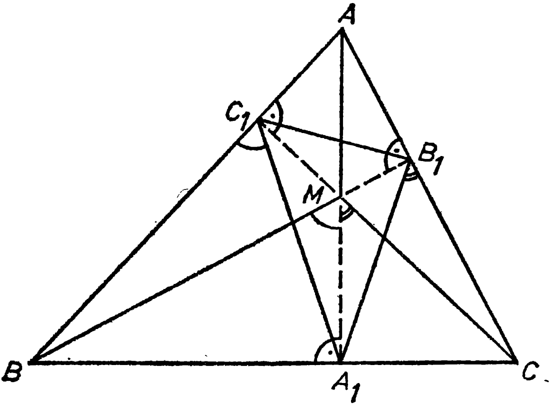

Fig. 5.1.
Un triunghi ciudat: $A_1B_1C_1$

Teorema sinusurilor ne dă mai departe:

$$B_1C_1 = AM \cdot BC \cdot \left(\frac{1}{2R}\right), \tag{5.2}$$

R fiind raza cercului circumscris triunghiului ABC. Analog:

$$A_1B_1 = MC \cdot AB \cdot \left(\frac{1}{2R}\right), \qquad A_1C_1 = MB \cdot AC \cdot \left(\frac{1}{2R}\right) \tag{5.3}$$

Aceste relații — pe care în mod deliberat le-am scris ceva mai curios, ca așezare grafică — pun în evidență faptul că laturile triunghiului $A_1B_1C_1$ sînt proporționale cu $AM \cdot BC$, $MC \cdot AB$, $MB \cdot AC$.

Ca o consecință directă, dacă A, B, C, M, sînt patru puncte oarecare în plan, atunci are loc relația:

$$AM \cdot BC \leqslant MB \cdot AC + MC \cdot AB. \tag{5.4}$$

Relațiile (5.1) și (5.3) mai arată ceva și anume: „dacă M este un punct oarecare în planul triunghiului ABC, atunci cu segmentele $AM \sin A$, $MB \sin B$ și $MC \sin C$ se poate construi întotdeauna un triunghi."

Triunghiul căutat este desigur triunghiul $A_1B_1C_1$ obținut prin procedeul descris mai înainte.

Acum, nu mai este decît un fapt banal să remarcăm că dacă $BC = AC = AB$, atunci relația (5.4) și analoagele ei, particularizează teorema lui *Pompeiu!*

Iată deci, că triunghiul $A_1B_1C_1$ este un triunghi destul de interesant. Ca să devină și mai interesant, să-i calculăm pentru început unghiurile, în funcție de unghiurile A, B, C, ale triunghiului inițial și de unghiurile BMC, CMA, și AMB sub care „vedem" laturile BC, CA, AB din M.

Într-adevăr, nu este greu de observat că:

$$\sphericalangle BMA_1 = \sphericalangle BC_1A_1 \text{ și } \sphericalangle A_1MC = \sphericalangle A_1B_1C. \tag{5.5}$$

Prin însumare deducem:

$$\sphericalangle BMC = \sphericalangle BC_1A_1 + \sphericalangle CB_1A_1 = \sphericalangle B_1AC_1 + \sphericalangle B_1A_1C_1 \tag{5.6}$$

adică:

$$\sphericalangle BMC = \hat{A} + \hat{A}_1 \text{ sau } \hat{A}_1 = \sphericalangle BMC - \hat{A}. \tag{5.7}$$

Partea interesantă a acestui fapt vine dacă alegem punctul M pe cercul circumscris triunghiului ABC. În acest caz, $\sphericalangle BMC = \hat{A}$ și deci $\hat{A}_1 = 0$. Dar dacă $\hat{A}_1 = 0$, atunci punctele B_1, A_1, C_1 sînt situate pe aceeași dreaptă.

Cei care cunosc acum cartea lui Lalescu, au recunoscut imediat

Teorema lui Simson:

> „Proiecțiile unui punct de pe cercul circumscris unui triunghi, pe laturile acestuia, sînt coliniare". (*Geometria triunghiului*, cap. II, p. 19; are loc și teorema reciprocă — idem op. cit. p. 19—20).

Triunghiul nostru $A_1B_1C_1$ obținut deci cu proiecțiile pe laturi ale unui punct oarecare M pe laturile triunghiului, poartă numele de *triunghi podar*.

Teorema lui *Simson* pune în evidență următorul fapt: „cercul circumscris al triunghiului ABC este locul geometric al punctelor pentru care triunghiurile podare asociate sînt degenerate".

Proprietățile triunghiurilor podare au făcut și fac încă obiectul a numeroase note, observații și probleme propuse, în revistele de matematici elementare din lume.

Iată pentru început, o proprietate descrisă în [14] pp. 80—81: „Triunghiurile podare ale punctelor unui cerc *Apollonius* sînt isoscele și reciproc".

Pentru a nu lăsa lucrurile la jumătate, vă vom spune aici ce se înțelege printr-un cerc al lui *Apollonius*. Fie AD și AD_1 bisectoarele unghiului A al triunghiului ABC. Cercul descris pe segmentul DD_1 ca diametru, se numește cerc al lui *Apollonius* relativ la vîrful A.

Este credem ușor de bănuit că despre proprietățile cercurilor *Apollonius* se poate vorbi foarte mult. Nu o să mai amintim aici decît că prin analogie cu proprietatea enunțată mai sus, profesorul Andrei Dobrescu[1] a dedus care este locul geometric al punctelor ale căror triunghiuri podare față de un triunghi dat, sînt dreptunghice (vezi revista „Pozitiva", anul I, no. 9—10, 1941, pp. 309—317).

Să deducem acum cîteva din proprietățile „clasice" ale triunghiului podar.

I. Dacă d_a, d_b, d_c sînt distanțele punctului M la laturile triunghiului ABC, iar h_a, h_b, h_c sînt înălțimile acestuia, atunci:

$$\frac{d_a}{h_a} + \frac{d_b}{h_b} + \frac{d_c}{h_c} = 1. \tag{5.8}$$

Demonstrația este simplă, deoarece se pot scrie imediat relațiile:

$$2S = ah_a, \; 2S_{BMC} = ad_a, \; 2S_{AMC} = bd_b, \; 2S_{AMB} = cd_c$$

[1] Fost profesor de geometrie la Universitatea din București. Autor al lucrării *Curs de geometrie diferențială*, E.S.D.P. București, 1961.

din care rezultă imediat:

$$\frac{S_{BMC}}{S} = \frac{d_a}{h_a}, \quad \frac{S_{AMC}}{S} = \frac{d_b}{h_b}, \quad \frac{S_{AMB}}{S} = \frac{d_c}{h_c}, \tag{5.9}$$

iar prin însumare, deducem (5.8).

II. Dacă triunghiul ABC este echilateral, atunci:

$$d_a + d_b + d_c = \text{constant } (= a\sqrt{3}/2). \tag{5.10}$$

Proprietatea rezultă imediat din I, deoarece $h_a = h_b = h_c = a\sqrt{3}/2$ unde $BC = CA = AB = a$.

III. Dacă A_1, B_1, C_1 sînt proiecțiile lui M pe laturile triunghiului ABC, atunci are loc relația:

$$A_1B^2 + B_1C^2 + C_1A^2 = A_1C^2 + B_1A^2 + C_1B^2 \tag{5.11}$$

și reciproc: dacă punctele de pe laturile unui triunghi ABC satisfac relația (5.11), atunci perpendicularele în aceste puncte pe laturile triunghiului sînt concurente.

Demonstrația este directă; avem, de exemplu:

$$A_1B^2 - A_1C^2 = MB^2 - MC^2 \text{ și analoagele,} \tag{5.12}$$

care prin însumare dau (5.11). Reciproca se demonstrează tot la fel de ușor.

Consecințe:

1) mediatoarele într-un triunghi sînt concurente;

2) înălțimile într-un triunghi sînt concurente (iată deci cum proprietățile triunghiului podar ne ajută să demonstrăm concurența unor elemente importante ale triunghiului).

Să continuăm șirul acestor proprietăți cu altele și mai interesante. Vă aduceți, cred, aminte cine era punctul lui *Lemoine* într-un triunghi (notat cu K). L-am prezentat în capitolul II paragraful 2.4 și era punctul în care se întîlneau cele trei simediane ale triunghiului. Relația (2.40) din acel capitol ne arăta că distanțele punctului lui *Lemoine* la laturi, sînt proporționale cu laturile triunghiului.

Fie acum A_1, B_1, C_1 proiecțiile punctului lui *Lemoine* (K) pe laturi. Imediat se poate observa că triunghiurile KB_1C_1 și ABC au unghiurile din K și A suplementare. În acest caz, se poate scrie:

$$\frac{S_{KB_1C_1}}{S} = \frac{KB_1 \cdot KC_1}{AB \cdot AC} = \frac{d_b}{b} \cdot \frac{d_c}{c} \tag{5.13}$$

deoarece $\sin K = \sin A$, d_b și d_c fiind distanțele lui K la laturile AB și AC. Dacă ținem cont de relația:

$$\frac{d_a}{a} = \frac{d_b}{b} = \frac{d_c}{c} \tag{5.14}$$

rezultă că triunghiurile KB_1C_1, KC_1A_1 și KA_1B_1 au ariile egale.

Pe de altă parte, se știe că numai centrul de greutate se bucură de această proprietate de a forma triunghiuri echivalente prin unirea sa cu vîrfurile triunghiului. Prin urmare, se deduce următoarea proprietate interesantă: „punctul lui *Lemoine* este centrul de greutate al triunghiului său podar."

Mergem acum mai departe: ne propunem să calculăm aria triunghiului podar în cazul cîtorva puncte remarcabile. Pornim de la o problemă propusă mai demult de profesorul C. Ionescu-Țiu, în *GMF-B* nr. 10—1958, p. 612, și anume:

> „Din centrul de greutate G al unui triunghi ABC se duc perpendicularele GA_1, GB_1, GC_1 pe laturile triunghiului. Să se exprime aria triunghiului $A_1B_1C_1$ în funcție de aria triunghiului ABC."

Recunoaștem deci că se cere calculul ariei triunghiului podar corespunzător centrului de greutate al triunghiului inițial. Vom încerca să generalizăm această problemă, „împușcînd — cum se spune — mai mulți iepuri deodată". Pentru asta, să se reamintim că medianele triunghiului — care se intersectează în centrul de greutate — sînt ceviene de rangul

0 (zero), conform teoriei expuse în capitolul II. Ne propunem deci să calculăm mai întîi aria triunghiului podar corespunzător punctului de intersecție a trei ceviene de același rang (fie el k), urmînd ca apoi prin particularizări ale lui k să obținem diferite expresii, specifice pentru punctele remarcabile.

Fie deci M punctul de intersecție a trei ceviene de rang k și $A_1B_1C_1$ triunghiul podar corespunzător (fig. 5.2).

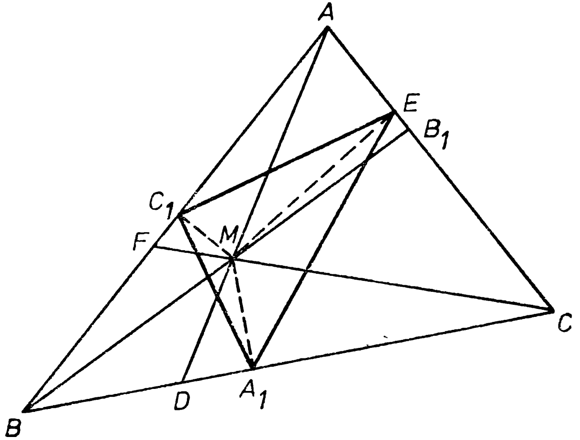

Fig. 5 2.
Triunghiul podar corespunzător punctului de intersecție al cevienelor de rang (k)

Întrucît în patrulaterul inscriptibil AC_1MB_1 avem $\hat{A} + \sphericalangle C_1MB_1 = 180°$ deci $\sin A = \sin C_1MB_1$, putem scrie imediat:

$$\frac{S_{B_1MC_1}}{S} = \frac{MC_1 \cdot MB_1}{bc} \tag{5.15}$$

Dar în capitolul II am arătat că expresia distanțelor de la punctul de intersecție al cevienelor de rang k la laturile triunghiului, sînt date de expresiile:

$$MA_1 = \frac{2Sa^{k-1}}{a^k + b^k + c^k}, \quad MB_1 = \frac{2Sb^{k-1}}{a^k + b^k + c^k},$$

$$MC_1 = \frac{2Sc^{k-1}}{a^k + b^k + c^k}. \tag{5.16}$$

Atunci, înlocuind în (5.15) obținem:

$$S_{B_1MC_1} = \frac{4S^3b^{k-2}c^{k-2}}{(a^k + b^k + c^k)^2} \tag{5.17}$$

și evident, suprafețele analoage. Prin însumarea acestor relații de tip (5.17) se deduce:

$$S_{A_1B_1C_1} = \frac{4S^3(a^{k-2}b^{k-2} + b^{k-2}c^{k-2} + c^{k-2}a^{k-2})}{(a^k + b^k + c^k)^2}, \tag{5.18}$$

care este aria căutată a triunghiului podar asociat punctului M.

Urmează acum particularizările:

i) cazul centrului de greutate ($k = 0$):

$$S_{A_1B_1C_1} = \frac{4(a^2 + b^2 + c^2)}{9a^2b^2c^2} \cdot S^3; \tag{5.19}$$

ii) cazul centrului cercului înscris ($k = 1$):

$$S_{A_1B_1C_1} = \frac{4\left(\frac{1}{ab} + \frac{1}{bc} + \frac{1}{ca}\right)}{(a + b + c)^2} \cdot S^3; \tag{5.20}$$

iii) cazul punctului lui *Lemoine* ($k = 2$):

$$S_{A_1B_1C_1} = \frac{12S^3}{(a^2 + b^2 + c^2)^2}; \tag{5.21}$$

iv) cazul centrului antibisector ($k = -1$):

$$S_{A_1B_1C_1} = \frac{4\left(\frac{1}{a^3b^3} + \frac{1}{b^3c^3} + \frac{1}{c^3a^3}\right)}{\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)^2} \cdot S^3. \tag{5.22}$$

Vă mai amintiți de punctul lui *Brocard*? Dacă da, atunci să trecem direct în problemă și să demonstrăm că:

IV. — Triunghiul podar corespunzător punctului *Brocard* (Ω) al triunghiului ABC are același unghi *Brocard* ca și triunghiul inițial.

Demonstrația nu e prea dificilă; fie deci Ω punctul lui *Brocard* și ω unghiul lui *Brocard*. Construim triunghiul podar asociat lui și unim Ω cu vîrfurile triunghiului. Scriem mai întîi relația de proporționalitate (5.2) în cazul concret din figura 5.3.

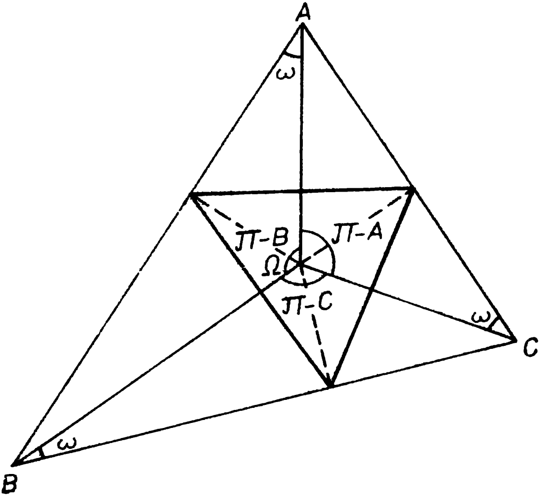

Fig. 5.3·
Triunghiul podar corespunzător punctului *Brocard*

Avem deci:

$$\frac{B_1C_1}{BC \cdot A\Omega} = \frac{A_1C_1}{AC \cdot B\Omega} = \frac{A_1B_1}{AB \cdot C\Omega} = \frac{1}{2R}. \tag{5.23}$$

Expresiile segmentelor $A\Omega$, $B\Omega$, $C\Omega$, sînt gata calculate în lucrarea *Probleme de trigonometrie*, Partea a II-a, Trigonometrie plană, M.I.C., 1958, p. 48; şi anume:

$$A\Omega = \frac{b \sin \omega}{\sin A} = \frac{2Rb \sin \omega}{a}. \tag{5.24}$$

Prin urmare, (5.23) devine:

$$\frac{B_1C_1 \cdot a}{ab \cdot 2R \sin \omega} = \frac{A_1C_1 \cdot b}{bc \cdot 2R \sin \omega} = \frac{A_1B_1 \cdot c}{ca \cdot 2R \sin \omega} = \frac{1}{2R}, \tag{5.25}$$

de unde imediat:

$$\frac{B_1C_1}{a} = \frac{A_1C_1}{b} = \frac{A_1B_1}{c} = \sin \omega. \tag{5.26}$$

Propoziţia este deci demonstrată.

O consecinţă imediată a relaţiei (5.26) este următoarea relaţie:

$$\frac{S_{A_1B_1C_1}}{S} = \sin^2 \omega. \tag{5.27}$$

Dar, după cum se poate uşor calcula, expresia sinusului unghiului *Brocard* este:

$$\sin \omega = \frac{2S}{\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}} \tag{5.28}$$

şi deci se obţine în final relaţia:

$$S_{A_1B_1C_1} = \frac{4S^3}{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}. \tag{5.29}$$

Ar fi interesant acum să calculăm şi laturile cîtorva triunghiuri podare asociate unor puncte remarcabile. Să începem cu centrul de greutate, fiindcă în legătură cu el, ştim că:

$$AG = \frac{2}{3} m_a = \frac{1}{3} \sqrt{2(b^2 + c^2) - a^2}, \text{ etc.} \tag{5.30}$$

În acest caz avem imediat:

$$\frac{3B_1C_1}{a\sqrt{2(b^2+c^2)-a^2}} = \frac{1}{2R}, \tag{5.31}$$

de unde se obține latura dorită:

$$B_1C_1 = \frac{a\sqrt{2(b^2+c^2)-a^2}}{6R}. \tag{5.32}$$

Nici cu centrul cercului înscris nu este prea greu: în acest caz putem scrie, de exemplu:

$$AI^2 = (p-a)^2 + r^2, \tag{5.33}$$

deoarece în acest caz distanțele lui I la laturi sînt egale între ele și egale cu r, iar $AB_1 = p - a$. Înlocuim în (5.33) pe r^2 prin formula:

$$r^2 = \frac{S^2}{p^2} = \frac{p(p-a)(p-b)(p-c)}{p^2}. \tag{5.34}$$

și obținem:

$$AI^2 = (p-a)^2 + \frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}. \tag{5.35}$$

De acum încolo, un calcul simplu ne conduce la expresia:

$$AI = \sqrt{\frac{bc(p-a)}{p}}, \tag{5.36}$$

care combinată cu:

$$\frac{B_1C_1}{a \cdot AI} = \frac{1}{2R} \tag{5.37}$$

ne dă:

$$B_1C_1 = 2(p-a)\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}} \tag{5.38}$$

și analoagele.

Să încercăm acum și cu centrul cercului circumscris. Fie deci $A_1B_1C_1$ triunghiul podar asociat centrului O (vezi figura 5.4).

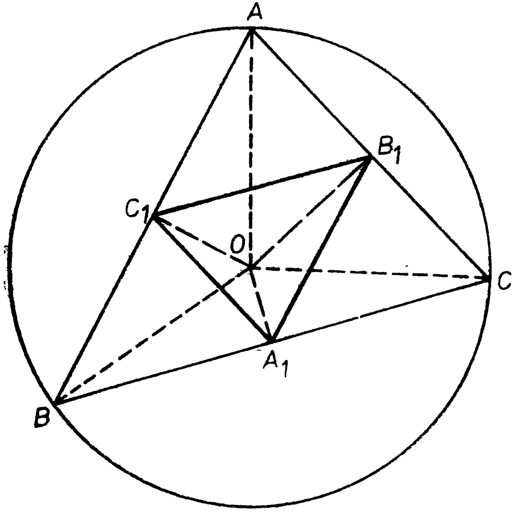

Fig. 5.4.
Triunghiul podar corespunzător centrului cercului circumscris

Punctul O se află la distanțe egale de vîrfurile A, B, C, și anume $OA = OB = OC = R$. Punctele A_1, B_1, C_1 împart din acest motiv laturile BC, CA, AB în segmente egale. Prin urmare, B_1C_1, C_1A_1 și A_1B_1 sînt linii mijlocii în triunghiul ABC; și deci:

$$B_1C_1 = a/2, \; C_1A_1 = b/2, \; A_1B_1 = c/2.$$

Prin calcul, am fi ajuns mult mai greu la acest rezultat simplu. Iată cum: „ne prefacem" deci că nu observăm că B_1C_1, de exemplu, este linie mijlocie în triunghiul ABC.

Folosim atunci, patrulaterul inscriptibil AB_1OC_1, care are următoarele elemente:

$$OA = R,\ AB_1 = \frac{b}{2},\ AC_1 = \frac{c}{2},\ OB_1 = \sqrt{R^2 - \frac{b^2}{4}},$$

$$OC_1 = \sqrt{R^2 - \frac{c^2}{4}},\ B_1C_1 = x.$$

Aplicăm acum teorema lui *Ptolemeu*:

$$R \cdot x = \frac{c}{2} \cdot \sqrt{R^2 - \frac{b^2}{4}} + \frac{b}{2} \cdot \sqrt{R^2 - \frac{c^2}{4}},$$

de unde, după transformări succesive avem:

$$x = \frac{1}{4R}(c \cdot \sqrt{4R^2 - b^2} + b \cdot \sqrt{4R^2 - c^2}) =$$

$$= \frac{1}{4R}(2Rc \cdot \cos B + 2R \cdot b \cos C) = \frac{1}{2}(c \cdot \cos B + b \cdot \cos C) =$$

$$= \frac{1}{2}(2R \sin C \cos B + 2R \sin B \cos C) = R \sin (B + C) =$$

$$= R \sin A = \frac{2R \sin A}{2} = \frac{a}{2}.$$

E drept, muncă mai multă decît în demonstrația precedentă.

N-o să mai continuăm prea multă vreme cu triunghiul podar. Credem că i-am pus în evidență destule proprietăți. Totuși, în încheiere vom reproduce o frumoasă teoremă aparținînd unui matematician român, dr. Gheorghe Oprișan (n. 1944, absolvent al Facultății de Matematică-Mecanică, Universitatea București, promoția 1967, lector la Institutul Politehnic din București), teoremă pe care a publicat-o încă pe cînd era elev la Curtea de Argeș, în 1961.

Teorema este următoarea:

„Locul geometric al punctelor pentru care aria triunghiului podar față de un triunghi oarecare ABC este constantă, este un cerc concentric cu cercul circumscris triunghiului ABC."
(vezi GMF-B, nr. 9/1961, pp. 530–533).

Demonstrația este destul de lungă, dar suficient de interesantă pentru a o reda aici, cu unele mici modificări (vezi figura 5.5).

Fie M un punct în interiorul triunghiului oarecare ABC. Notăm cu α', β', γ' intersecțiile cevienelor corespunzătoare

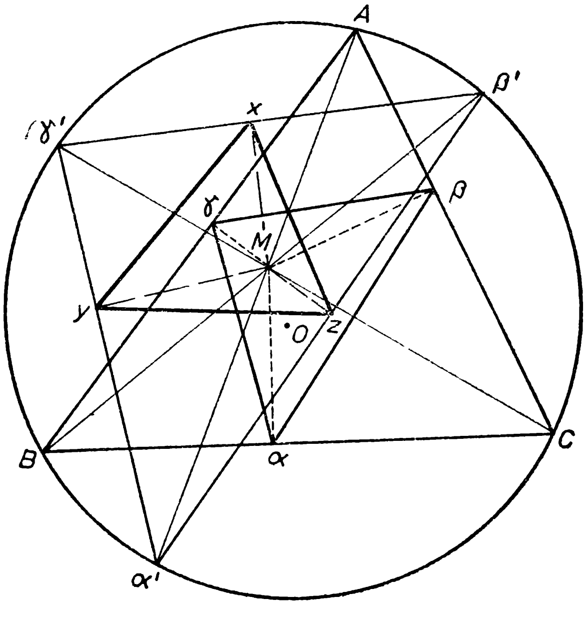

Fig. 5.5.
Un loc geometric în legătură cu triunghiul podar (G.M.F., nr. 9/1961, p. 531)

lui M cu cercul circumscris triunghiului ABC. Fie, de asemenea, $\alpha\beta\gamma$ triunghiul podar corespunzător lui M și fie xyz triunghiul podar al lui M, de această dată față de triunghiul $\alpha'\beta'\gamma'$. Mai introducem următoarele notații:

u_a, u_b, u_c — distanțele de la M la vîrfurile triunghiului ABC
u_a', u_b', u_c' — distanțele de la M la vîrfurile triunghiului $\alpha'\beta'\gamma'$

Fie acum R_1 și R_2 razele cercurilor circumscrise triunghiurilor $\alpha\beta\gamma$ și xyz, iar s și S suprafețele triunghiurilor $\alpha\beta\gamma$ și ABC. Putem scrie atunci imediat:

$$\beta\gamma = \frac{4s}{\alpha\beta \cdot \alpha\gamma} : R_1 \qquad \text{(triunghiul } \alpha\beta\gamma) \tag{5.43}$$

Pe de altă parte, ținînd cont că u_a este diametrul cercului circumscris triunghiului $A\beta\gamma$, putem deduce:

$$\beta\gamma = \frac{2 \operatorname{aria}(A\beta\gamma)}{A\gamma \cdot A\beta} : u_a. \tag{5.44}$$

Întrucît triunghiurile ABC și $A\beta\gamma$ au un unghi egal, se poate scrie:

$$\frac{S_{AB\gamma}}{S} = \frac{A\gamma \cdot A\beta}{AB \cdot AC}. \tag{5.45}$$

În această situație, relația (5.44) devine:

$$\beta\gamma = \frac{2S}{AB \cdot AC} : u_a. \tag{5.46}$$

Se observă, de asemenea, că din relațiile (5.43) și (5.46) se poate deduce:

$$R_1 \cdot \frac{4s}{\alpha\beta \cdot \alpha\gamma} = \frac{2S}{AB \cdot AC} : u_a \tag{5.47}$$

care implică:

$$2R_1 = \frac{S : (AB \cdot AC)}{s : (\alpha\beta \cdot \alpha\gamma)}. \tag{5.48}$$

Prin analogie, din triunghiurile $C\gamma\beta$, și $B\alpha\gamma$, se obține:

$$2R_1 = \frac{S : (AB \cdot AC)}{s : (\alpha\beta \cdot \alpha\gamma)} \cdot u_a = \frac{S : (BC \cdot BA)}{s : (\beta\gamma \cdot \beta\alpha)} \cdot u_b =$$

$$= \frac{S : (CA \cdot CB)}{s : (\gamma\alpha \cdot \gamma\beta)} \cdot u_c. \tag{5.49}$$

Notînd acum cu S' aria triunghiului $\alpha'\beta'\gamma'$, și cu s' aria triunghiului xyz, se deduce folosind același procedeu, că:

$$2R_2 = \frac{S' : (\alpha'\beta' \cdot \alpha'\gamma')}{s' : (xy \cdot xz)} \cdot u_a' = \frac{S' : (\beta'\gamma' \cdot \beta'\alpha')}{s' : (yz \cdot yx)} \cdot u_b' =$$

$$= \frac{S' : (\gamma'\alpha' \cdot \gamma'\beta')}{s' : (zx \cdot zy)} \cdot u_c'. \tag{5.50}$$

Patrulaterele inscriptibile $MB\alpha\gamma$ și $MC\alpha\beta$ ne spun însă că:

$$\sphericalangle M\alpha\gamma = \sphericalangle MB\gamma,\ \sphericalangle M\alpha\beta = \sphericalangle MC\beta$$

iar cum:

$$\sphericalangle MB\gamma = \sphericalangle M\alpha'\beta',\ \sphericalangle M\alpha\beta = \sphericalangle M\alpha'\gamma'.$$

rezultă și:

$$\sphericalangle M\alpha\gamma = \sphericalangle M\alpha'\beta',\ \sphericalangle M\alpha\beta = \sphericalangle M\alpha'\gamma'.$$

Însumînd aceste relații, obținem $\sphericalangle \alpha = \sphericalangle \alpha'$ și analoagele ei, și anume: $\sphericalangle \beta = \sphericalangle \beta'$, $\sphericalangle \gamma = \sphericalangle \gamma'$.

În mod asemănător, rezultă că: $\hat{A} = \hat{x}$, $\hat{B} = \hat{y}$ și $\hat{C} = \hat{z}$, ceea ce arată de fapt că triunghiurile ABC și xyz sînt asemenea. Se poate deci scrie șirul de relații:

$$\frac{s}{S'} = \frac{\alpha\beta \cdot \alpha\gamma}{\alpha'\beta' \cdot \alpha'\gamma'}, \qquad \frac{S}{s'} = \frac{AB \cdot AC}{xy \cdot yz}$$

$$\frac{s}{S'} = \frac{\beta\gamma \cdot \beta\alpha}{\beta'\gamma' \cdot \beta'\alpha'}, \qquad \frac{S}{s'} = \frac{BC \cdot BA}{yz \cdot yx}$$

$$\frac{s}{S'} = \frac{\gamma\alpha \cdot \gamma\beta}{\gamma'\alpha' \cdot \gamma'\beta'}, \qquad \frac{S}{s'} = \frac{CA \cdot CB}{xz \cdot zy}$$

relații datorită cărora (5.50) devine:

$$2R_2 = \frac{s : (\alpha\beta \cdot \alpha\gamma)}{S : (AB \cdot AC)} \cdot u_a' = \frac{s : (\alpha\beta \cdot \beta\gamma)}{S : (BC \cdot BA)} \cdot u_b' =$$

$$= \frac{s : (\alpha\gamma \cdot \beta\gamma)}{S : (CA \cdot CB)} \cdot u_c'. \tag{5.51}$$

Se consideră acum triunghiul $MB\alpha'$: avînd în vedere că: $\sphericalangle M\alpha'B = \hat{C}$ și $\sphericalangle MB\alpha' = \sphericalangle \gamma' = \sphericalangle \gamma$ rezultă imediat că:

$$\frac{u_b}{u_a'} = \frac{\gamma\beta \cdot \gamma\alpha}{CA \cdot CB} \cdot \frac{S}{s}.$$

Obținînd celelalte două relații analoage, prin înmulțire, deducem:

$$\frac{u_a u_b u_c}{u_a' u_b' u_c'} = \left(\frac{\alpha\beta \cdot \alpha\gamma \cdot \beta\gamma}{BC \cdot CA \cdot AB}\right)^2 \cdot \frac{S^3}{s^3}. \tag{5.52}$$

Relațiile (5.49) și (5.51) dau:

$$\frac{R_1^3}{R_2^3} = \frac{u_a \cdot u_b \cdot u_c}{u_a' \cdot u_b' \cdot u_c'} \cdot \frac{S^6}{s^6} \left(\frac{\alpha\beta \cdot \beta\gamma \cdot \gamma\alpha}{BC \cdot CA \cdot AB}\right)^4$$

care combinată cu (5.52) furnizează egalitatea:

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{S^3}{s^3} \left(\frac{\alpha\beta \cdot \beta\gamma \cdot \gamma\alpha}{BC \cdot CA \cdot AB}\right)^2.$$

Pe de altă parte, formulele clasice $BC \cdot CA \cdot AB = 4RS$ și $\alpha\beta \cdot \beta\gamma \cdot \gamma\alpha = 4R_1 s$ dau:

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{S}{s} \cdot \frac{R_1^2}{R^2}, \qquad R_1 R_2 = \frac{R^2 s}{S}.$$

Pe de altă parte, nu este deloc greu de văzut că:

$$4R_1R_2 = u_a \cdot u_a' = u_b \cdot u_b' = u_c \cdot u_c' = \rho,$$

unde prin ρ s-a notat puterea punctului M față de cercul circumscris triunghiului ABC. Prin urmare:

$$\rho = 4R_1R_2 = \frac{4R^2s}{S} \qquad \text{de unde} \qquad \frac{s}{S} = \frac{\rho}{4R^2}.$$

Ținînd cont că în realitate $\rho = R^2 - OM^2$, se obține în final:

$$\frac{s}{S} = \frac{R^2 - OM^2}{4R^2}.$$

Această ultimă relație ne spune că dacă vrem ca suprafața s să fie constantă trebuie ca și distanța OM să fie constantă. Cu această ultimă observație teorema este demonstrată.

Să mai facem, în încheiere, observația că dacă M se află chiar pe cercul circumscris triunghiului ABC, atunci $R = OM$ și deci $s = 0$, ceea ce arată că triunghiul podar este degenerat. Se obține din nou dreapta lui *Simson!*

Cam atît deci despre triunghiul podar — acest triunghi cu proprietăți atît de surprinzătoare.

6. MAXIME ŞI MINIME ÎN GEOMETRIA TRIUNGHIULUI

Să deschidem acum o *Culegere de probleme de analiză matematică* (C. Coşniţă şi F. Turtoiu, Editura tehnică, Bucureşti, 1962, p. 182, problema 84); citim următorul enunţ:

„să se studieze variaţia ariei triunghiului podar al unui punct mobil faţă de un triunghi dat fix."

Desigur, n-am ales problema întîmplător; ne-am legat special de triunghiul podar fiindcă tot îl aveam proaspăt în minte din capitolul anterior. Vă întrebaţi poate ce caută o astfel de problemă într-o carte de analiză matematică. Ei bine, dacă am văzut că algebra ne ajută atît de mult în felurite aspecte de geometrie a triunghiului, e de bănuit că nici analiza nu se va lăsa mai prejos. Problema de mai sus ne întreabă indirect următorul lucru: ştiţi că minimul ariei triunghiului podar este zero, şi acest minim este atins cînd punctul M variabil în planul triunghiului ABC face „imprudenţa" să-şi aleagă ca loc de plimbare cercul circumscris triunghiului. Bun! asta o ştim, am repetat-o de cîteva ori pînă acum, este vorba de dreapta lui *Simson* şi cu asta lucrurile sînt lămurite.

Cînd însă sus-numita arie este maximă? Fiindcă e uşor de ghicit că de îndată ce ea îşi atinge un minim, va exista poate (?!) şi o poziţie a lui M pentru care aria $A_1B_1C_1$ să fie cea mai mare.

Aşadar, ca să dăm lucrurilor o formulare mai la obiect, să notăm cu x, y, z, distanţele lui M la laturile $BC = a$, $AB = c$, $CA = b$ — date, ale triunghiului ABC. Ştim că (pentru asta vezi capitolele precedente):

$$ax + by + cz = 2S \text{ (constantă).} \tag{6.1}$$

Mai știm că aria triunghiului podar este:

$$S_{A_1B_1C_1} = \frac{1}{4R}\,(ayz + bzx + cxy). \tag{6.2}$$

Iată deci că problema de geometrie s-a transformat pe nesimțite într-o problemă de analiză, și anume:

„fiind dată funcția

$$F(x,\ y,\ z) = \frac{1}{4R}\,(ayz + bzx + cxy) \tag{6.3}$$

să i se determine extremele, știind că

$$\varphi(x,\ y,\ z) = ax + by + cz - 2S = 0\text{“}. \tag{6.4}$$

O problemă de acest tip se numește problemă de extremum legat (sau condiționat). Denumirea nu este neintuitivă. Avem, de fapt, de găsit extremele unei funcții de mai multe variabile, pentru care variabilele respective sînt legate între ele printr-o anumită relație.

Rezolvarea problemelor de extremum legat a fost fundamentată teoretic încă de multă vreme, de către matematicianul francez Louis de Lagrange (1736—1813), a cărui activitate științifică a îmbrățișat o arie largă de preocupări, începînd cu astronomia și terminînd cu metrologia, știința tînără, care își punea bazele în anii tumultuoși care au precedat Revoluția franceză. O prezentare riguroasă și modernă a metodei propuse de Lagrange se găsește în lucrarea „*Analiza matematică*, de M. Nicolescu, N. Dinculeanu și S. Marcus, vol. I, ediția a IV-a, București, Editura didactică și pedagogică, 1971, pp. 682—689. Metoda se mai numește și „metoda multiplicatorilor lui *Lagrange*“ și ea constă practic din următorii pași (considerînd, de exemplu, că avem de-a face cu o funcție $F(x, y, z)$ de trei variabile x, y, z, al cărei extrem vrem să-l determinăm):

1) se construiește funcția auxiliară:

$$u(x,\ y,\ z) = F(x,\ y,\ z) + \lambda \cdot \varphi(x,\ y,\ z); \tag{6.5}$$

2) se formează sistemul de ecuații:

$$\varphi(x, y, z) = 0, \quad \frac{\partial u(x, y, z)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial u(x, y, z)}{\partial y} = 0,$$

$$\frac{\partial u(x, y, z)}{\partial z} = 0, \tag{6.6}$$

care, prin rezolvare, furnizează valoarea extremului căutat. Aici φ reprezintă „legătura" (relația suplimentară) dintre variabile, iar λ este un parametru necunoscut.

Desigur, cineva ne poate, pe bună dreptate, întreba: bine, este extremum, dar ce fel de extremum: maxim sau minim? Lucrurile ar necesita bineînțeles o precizare fundamentată; dar de obicei în problemele de geometrie, natura extremului este imediat pusă în evidență de însăși problema în cauză.

Iată, în problema noastră, lucrurile sînt clare, chiar dacă ea ar fi fost formulată mai ermetic, adică dacă s-ar fi cerut extremele ariei triunghiului podar; cum în acest caz minimul este zero, celălalt extrem — dacă există — nu poate fi decît un maxim.

Să atacăm deci concret problema propusă; formăm funcția

$$u(x, y, z) = \frac{1}{4R}(ayz + bzx + cxy) + \lambda(ax + by + cz - 2S) \tag{6.7}$$

și anulăm pe rînd derivatele ei în raport cu x, y, z.

$$\frac{\partial u(x, y, z)}{\partial x} = \frac{1}{4R}(bz + cy) + \lambda \cdot a \tag{6.8}$$

$$\frac{\partial u(x, y, z)}{\partial y} = \frac{1}{4R}(az + cz) + \lambda \cdot b \tag{6.9}$$

$$\frac{\partial u(x, y, z)}{\partial z} = \frac{1}{4R}(ay + bx) + \lambda \cdot c \tag{6.10}$$

Sistemul de ecuații se completează cu:

$$ax + by + cz = 2S. \tag{6.11}$$

Necunoscutele sînt x, y, z și λ; sistemul are deci patru ecuații cu patru necunoscute, determinantul principal se vede că este nenul — deci criteriul de compatibilitate este satisfăcut, așa că totul se reduce acum la un calcul simplu pe care nu-l mai facem. Ne rezervăm forțele pentru alte probleme cu conținut ceva mai „geometric".

Iată un astfel de caz:

> „să se găsească minimul lungimii bisectoarei unuia din unghiurile ascuțite ale unui triunghi dreptunghic în care înălțimea corespunzătoare ipotenuzei este cunoscută" (C. Coșniță și F. Turtoiu, *Culegere de probleme*, Editura tehnică, București, 1966, p. 237).

Să facem mai întîi o figură (vezi figura 6.1) și apoi să luăm — nu cum ni se indică în culegere — bisectoarea unghiului B, ci pe aceea a unghiului C — asta numai ca să nu ne influențăm de soluția dată acolo. Așadar, fie $CC_1 = z$

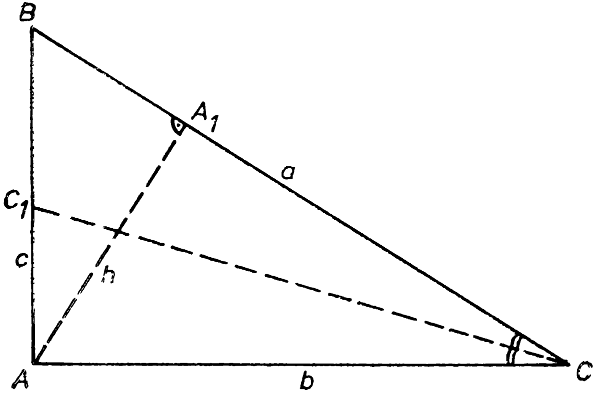

Fig. 6.1.
O problemă de extremum

(bisectoarea necunoscută) și $AA_1 = h$ (înălțimea cunoscută). Din triunghiul C_1AC rezultă imediat:

$$\cos\frac{C}{2} = \frac{b}{CC_1} \quad \text{adică } x = \frac{b}{\cos\frac{C}{2}}. \tag{6.12}$$

La rîndul său, triunghiul AA_1C ne furnizează:

$$\sin C = \frac{h}{b} \quad \text{adică } b = \frac{h}{\sin C}. \tag{6.13}$$

Am ajuns deci în final la expresia:

$$z = \frac{h}{\sin C \cos\frac{C}{2}}. \tag{6.14}$$

Problema aflării extremului funcției $z = z(C)$ se poate rezolva simplu, prin derivare în raport cu C. Nu vom proceda totuși așa, ci vom face uz de următoarea interesantă

Teoremă:

„fiind date $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — cantități variabile reale și pozitive și $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ numere reale și pozitive, cu condiția:

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = \text{constant}, \tag{6.15}$$

atunci produsul:

$$P(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1^{\alpha_1} \cdot x_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot x_n^{\alpha_n} \tag{6.16}$$

este maxim, atunci cînd:

$$\frac{x_1}{\alpha_1} = \frac{x_2}{\alpha_2} = \ldots = \frac{x_n}{\alpha_n}." \tag{6.17}$$

Recunoașteți, cred, în această teoremă generalizarea unui fapt îndeobște cunoscut: dintre toate dreptunghiurile de perimetru constant, pătratul este cel de arie maximă.

În cazul problemei noastre, să observăm că minimul lui z are loc odată cu atingerea maximului numitorului sin C cos $C/2$.

Acest numitor se mai poate scrie:

$$(\sin^2 C)^{1/2} \cdot \left(\cos^2 \frac{C}{2}\right)^{1/2} \tag{6.18}$$

sau încă:

$$\left(4 \sin^2 \frac{C}{2} \cos^2 \frac{C}{2}\right)^{1/2} \cdot \left(\cos^2 \frac{C}{2}\right)^{1/2} = 2\left(\sin^2 \frac{C}{2}\right)^{1/2}\left(\cos^2 \frac{C}{2}\right)^{2}. \tag{6.19}$$

Acum să distribuim rolurile, conform teoremei enunțate cîteva clipe mai înainte. Ele sînt:

$$x_1 = \sin^2 \frac{C}{2}, \ \alpha_1 = \frac{1}{2}, \ x_2 = \cos^2 \frac{C}{2}, \ \alpha_2 = 1. \tag{6.20}$$

Se vede deci că:

$$x_1 + x_2 = \sin^2 \frac{C}{2} + \cos^2 \frac{C}{2} = 1 \text{ (constant)} \tag{6.21}$$

deci maximul are loc cînd:

$$\frac{\sin^2 \frac{C}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{\cos^2 \frac{C}{2}}{1}, \tag{6.22}$$

adică nici mai mult nici mai puțin, cînd:

$$\operatorname{tg} \frac{C}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}. \tag{6.23}$$

Nu avem acum decît să exprimăm sin C și cos $\frac{C}{2}$ în funcție de tg $\frac{C}{2}$ ca să-l aflăm pe z. Nu mai pierdem timpul, nu-i așa?

Teorema de mai sus admite și o „duală“ la fel de interesantă cu numeroase aplicații. Această „duală“ se enunță astfel:

„Dacă $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sînt cantități variabile reale și pozitive iar $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ sînt numere reale pozitive astfel încît:

$$x_1^{\alpha_1} \cdot x_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot x_n^{\alpha_n} = \text{constant}, \tag{6.24}$$

atunci suma:

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n \tag{6.25}$$

este minimă, atunci cînd:

$$\frac{x_1}{\alpha_1} = \frac{x_2}{\alpha_2} = \ldots = \frac{x_n}{\alpha_n}.\text{“} \tag{6.26}$$

Iată și o aplicație imediată:

„Dintre toate triunghiurile de arie constantă, cel de perimetru minim este triunghiul echilateral“.

Într-adevăr, din formula lui *Heron*, rezultă:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} =$$
$$= p^{1/2}(p-a)^{1/2}(p-b)^{1/2}(p-c)^{1/2} = \text{constant}. \tag{6.27}$$

Notînd:

$$x = p - a,\ y = p - b,\ z = p - c \tag{6.28}$$

obținem:

$$S = (x+y+z)^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{2}} z^{\frac{1}{2}} = \text{constant} \tag{6.29}$$

sau:

$$S = \sqrt{3}\left(\frac{x+y+z}{3}\right)^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{2}} z^{\frac{1}{2}} = \text{constant}. \tag{6.30}$$

Suma factorilor:

$$\frac{x+y+z}{3} + x + y + z = \frac{2}{3}p \tag{6.31}$$

devine minimă, cînd:

$$\frac{\frac{x+y+z}{3}}{\frac{1}{2}}=\frac{x}{\frac{1}{2}}=\frac{y}{\frac{1}{2}}=\frac{z}{\frac{1}{2}} \qquad (6.32)$$

adică atunci cînd $x = y = z = (x + y + z)/3$ ceea ce implică un triunghi echilateral.

Vă enunţ acum o teoremă cu aplicaţii directe în trigonometrie:

> „Dacă suma a n unghiuri variabile pozitive este constantă şi egală cel mult cu 90°, atunci produsul tangentelor acestor unghiuri este maximum, dacă unghiurile sînt egale".

Ar fi poate cazul să mai dăm şi o mică demonstraţie; pentru uşurinţă să alegem $n = 2$. Adică, avem de fapt:

$$x_1 + x_2 = \alpha \left(\leqslant \frac{\pi}{2}\right) \qquad (6.33)$$

şi căutăm maximul expresiei:

$$F(x_1, x_2) = \operatorname{tg} x_1 \cdot \operatorname{tg} x_2. \qquad (6.34)$$

Formăm deci funcţia auxiliară:

$$u(x_1, x_2) = \operatorname{tg} x_1 \cdot \operatorname{tg} x_2 + \lambda \cdot (x_1 + x_2 - \alpha) \qquad (6.35)$$

şi deci sistemul de rezolvat este:

$$\frac{\partial u(x_1, x_2)}{\partial x_1} = \frac{1}{\cos^2 x_1} \cdot \operatorname{tg} x_2 + \lambda = 0 \qquad (6.36)$$

$$\frac{\partial u(x_1, x_2)}{\partial x_2} = \operatorname{tg} x_1 \cdot \frac{1}{\cos^2 x_2} + \lambda = 0 \qquad (6.37)$$

$$x_1 + x_2 = \alpha. \qquad (6.38)$$

Din primele două ecuaţii ale sistemului, deducem:

$$\frac{\operatorname{tg} x_2}{\cos^2 x_1} = \frac{\operatorname{tg} x_1}{\cos^2 x_2} \qquad (6.39)$$

sau $\sin x_1 \cos x_1 = \sin x_2 \cos x_2$ sau încă $\sin 2x_1 = \sin 2x_2$. Cum $x_1 + x_2 \leqslant \frac{\pi}{2}$ rezultă ceea ce doream să arătăm: $x_1 = x_2 (= \alpha/2)$. Valoarea maximului este deci $\operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}$. Desigur, demonstrația se putea da și pe cale directă. Dacă sînteți curioși, o găsiți în lucrarea *Complemente de matematici* (A. Kahane, Editura tehnică, București, 1958, p. 46).

Să facem și o aplicație la această teoremă:

> „Dintre toate triunghiurile circumscrise aceluiași cerc de rază dată r, să se găsească cel de arie minimă".

Ei bine, „arta" în rezolvarea acestei probleme constă în exprimarea ariei triunghiului în funcție de r și de tangentele unghiurilor, ca să putem aplica teorema respectivă.

O astfel de formulă care să dea aria în acest mod, există:

$$S = \frac{r^2}{\operatorname{tg} \frac{A}{2} \operatorname{tg} \frac{B}{2} \operatorname{tg} \frac{C}{2}}. \tag{6.40}$$

Este bineînțeles clar că S va fi minimă, atunci cînd produsul de la numitor va fi maxim. Dar $\frac{A}{2} + \frac{B}{2} + \frac{C}{2} = \frac{\pi}{2}$ (constant) și deci rezultă imediat — conform teoremei — că $\frac{A}{2} = \frac{B}{2} = \frac{C}{2}$ adică triunghiul căutat este echilateral.

Minimul acestei arii este:

$$S = 3r^2 \sqrt{3}. \tag{6.41}$$

În legătură cu aceste probleme de maxime și minime în geometria triunghiului, trebuie să amintim că în țara noastră, una dintre primele culegeri de probleme care includeau aceste interesante chestiuni datează din 1901 și aparține inginerului Vasile Cristescu, unul dintre fondatorii Gazetei Matematice. În 1938, profesorul Gh. Th. Gheorghiu, a revăzut și adăugit partea a doua a acestei culegeri, care cuprindea „trigonometria plană". Aici se găsesc numeroase probleme de maxim și minim relative la triunghi. O parte din aceste probleme au fost reluate și în culegerea alcătuită de M. Predoescu și M. Ghiliceanu, pe care am menționat-o ceva mai în urmă.

De exemplu: care este maximul expresiei

$$\frac{4Rr}{p^2}\ ? \tag{6.42}$$

Iată o soluție simplă: $4Rr = abc/p$, deoarece $r = \dfrac{S}{p}$, iar $4R = \dfrac{abc}{S}$. Expresia se mai scrie deci:

$$\frac{abc}{p^3} = \frac{a}{p}\cdot\frac{b}{p}\cdot\frac{c}{p}. \tag{6.43}$$

Dar suma factorilor este constantă:

$$\frac{a}{p} + \frac{b}{p} + \frac{c}{p} = \frac{a+b+c}{p} = \frac{2p}{p} = 2 \tag{6.44}$$

și deci maximul se atinge pentru:

$$\frac{a}{p} = \frac{b}{p} = \frac{c}{p},$$

adică pentru triunghiul echilateral. Nu e greu de văzut și că acest maxim are valoarea 8/27.

Nu întotdeauna problemele de maxim și de minim într-un triunghi sînt rezolvabile direct prin aplicarea teoremelor expuse anterior. Iată, de pildă, o problemă de dată ceva mai recentă, propusă spre rezolvare în „Gazeta Matematică" nr. 2/1978 p. 82, și pe care ne luăm libertatea s-o reformulăm astfel:

> „Într-un triunghi oarecare ABC, produsul razelor cercurilor înscris și circumscris este constant. Să se calculeze minimul expresiei:

$$E = a^2 + b^2 + c^2\text{"} \tag{6.45}$$

Firește, dacă nu vrem să ne punem fantezia în mișcare, putem apela la analiza matematică.

Vom alege însă o cale mai elegantă din punctul nostru de vedere. Demonstrăm mai întîi următoarea

Propoziție:

dacă $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sînt numere reale pozitive iar p și q sînt numere naturale cu proprietatea că $p + q = n$, atunci are loc inegalitatea:

$$(x_1^p + x_2^p + \ldots + x_n^p)(x_1^q + x_2^q + \ldots + x_n^q) \geqslant n^2 \cdot x_1 x_2 \ldots x_n. \tag{6.46}$$

Demonstrarea acestei propoziții se face extrem de simplu: știm acum (sau știam mai de demult) că media aritmetică a n numere pozitive este mai mare, sau cel puțin egală cu media lor geometrică — și deci putem scrie:

$$\frac{x_1^p + x_2^p + \ldots + x_n^p}{n} \geqslant \sqrt[n]{x_1^p \cdot x_2^p \cdot \ldots \cdot x_n^p} \tag{6.47}$$

$$\frac{x_1^q + x_2^q + \ldots + x_n^q}{n} \geqslant \sqrt[n]{x_1^q \cdot x_2^q \cdot \ldots \cdot x_n^q}\,. \tag{6.48}$$

Înmulțind membru cu membru aceste inegalități, și ținînd cont că $p + q = n$, relația (6.46) se obține imediat. Acum e limpede ce urmează; alegem $n = 3$, $x_1 = a$, $x_2 = b$, $x_3 = c$, $p = 1$, $q = 2$ și prin urmare:

$$(a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2) \geqslant 9abc \tag{6.49}$$

sau încă:

$$a^2 + b^2 + c^2 \geqslant 9 \cdot \frac{abc}{2p}\,. \tag{6.50}$$

Dar, pe de altă parte:

$$S = \frac{abc}{4R} = pr \text{ de unde } abc = 4pRr \tag{6.51}$$

și în fine:

$$\underline{a^2 + b^2 + c^2 \geqslant 18Rr} \text{ (constant)}. \tag{6.52}$$

Iată deci că minimul căutat este expresia $18Rr$.

Din această problemă se pune în evidență următorul fapt: maximul sau minimul unei expresii între elementele triunghiului poate rezulta și dintr-o inegalitate algebrică — dacă bineînțeles reușim să demonstrăm o anumită inegalitate între elementele implicate.

Un singur exemplu: Mitrinovic (op. cit. p. 129) ne spune că în orice triunghi are loc dubla inegalitate:

$$3\sqrt{3}r \leqslant p \leqslant \frac{3\sqrt{3}}{2}R. \tag{6.53}$$

Ceva din această dublă inegalitate recunoaștem: astfel, dacă facem abstracție de termenul central (p), rămîne:

$$3\sqrt{3}r \leqslant \frac{3\sqrt{3}}{2}R \tag{6.54}$$

ceea ce nu este altceva decît inegalitatea lui *Euler*: $R \geqslant 2r$.

Și acum, dacă v-am fi formulat problema:

„Într-un triunghi, razele cercurilor înscris și circumscris sînt constante. Să se afle maximul și minimul expresiei

$$E = a + b + c\text{“} \tag{6.55}$$

sau problema:

„Să se afle triunghiul de arie maximă pentru care produsul razelor cercurilor înscris și circumscris este constant“,

ați fi aplicat și într-un caz și în celălalt, dubla inegalitate (6.53).

Problemele de maxim și minim în triunghi — ca de altfel toate problemele de geometrie sintetică sînt o sursă inepuizabilă de antrenare a fanteziei. Putem imagina nenumărate situații în care să apară determinarea unui maxim sau al vreunui minim. Cititorii noștri cărora le-au plăcut mai mult acest gen de probleme pot consulta mai în detaliu lucrarea indicată la începutul acestui capitol.

Acum, vă rog să vă așezați la masa sau la biroul vostru de lucru. Rugați apoi pe cei ai casei să nu vă întrerupă prea des.[1] Luați-vă instrumentele „geometrice“ (creioane bine ascuțite de diferite culori, compas, riglă, gumă, raportor) și bineînțeles nu uitați broșura de față. Atacați cu răbdare și încredere capitolul care urmează. Succes!

---

[1] Cei care au urechi de auzit să vadă (cele scrise aici, evident!)

7. PRINŞI ÎN RING

— cîteva probleme de geometria triunghiului

Iată, am ajuns la piatra de încercare a itinerarului nostru prin geometria triunghiului. Fără să vrem, ne-am lăsat prinşi în ring. Acum sîntem faţă în faţă cu adversarul. Nimeni nu ne poate ajuta; antrenorul ne-a povăţuit, ne-a dăscălit, ne-a alergat prin pădurea de ceviene, dar acum nu mai poate face nimic.

În ring eşti întotdeauna singur. Aparent, e drept, deoarece dintr-unul din colţuri pîndeşte adversarul.

Meciul începe.

Repriza I: triunghiul dreptunghic

1) Într-un triunghi dreptunghic are loc relaţia:

$$2r \leqslant a(\sqrt{2}-1)$$

notaţiile fiind cele obişnuite.
(Matematica v şkole, 1962, nr. 2, p. 85)

2) Să se arate că într-un triunghi are loc relaţia

$$0{,}4 < \frac{r}{h_a} < 0{,}5$$

notaţiile fiind cele obişnuite.
(V.B. Lidskii, ş.a., p. 58 [10])

3) Să se determine unghiurile unui triunghi dreptunghic în care două mediane sînt perpendiculare între ele.
(D.S. Liudmilov, p. 157, [11])

4) Într-un triunghi dreptunghic, raportul h_a/i_a este constant. Să se arate atunci că și mărimea $\sin B + \sin C$ este constantă.

5) Să se determine unghiurile unui triunghi dreptunghic știind că R/r este constant (notații uzuale).
(V.B. Lidskii, ș.a., p. 52, [10])

6) Laturile a, b, c, ale unui triunghi ABC oarecare, sînt micșorate cu o aceeași mărime x. Să se determine această mărime astfel ca noile laturi să fie laturile unui triunghi dreptunghic.

7) Pe laturile unui unghi drept se dă segmentul $AB = b$, unde distanța de la vîrful unghiului la punctul A este egală cu a. Să se găsească pe cealaltă latură un punct M astfel ca segmentul AB să se vadă din punctul M sub un unghi dat α. *Discuție.*

8) Într-un triunghi dreptunghic se dau cateta c și unghiul B. Cu cît trebuie mărit unghiul B astfel încît cealaltă catetă să crească cu q cm?

9) Într-un triunghi dreptunghic se dă unghiul B. Să se arate că există relația: $m_b = [(4 + \mathrm{tg}^2 B)/(4\,\mathrm{tg}^2 B + 1)]^{1/2} \cdot m_c$.

10) Să se arate că perimetrul oricărui triunghi dreptunghic în A este egal cu $2r \,\mathrm{ctg}\, B/2 \,\mathrm{ctg}\, C/2$. Să se exprime aria triunghiului în funcție de raza cercului înscris și unghiul B, unde $\hat{B} \leqslant 45°$.
(Eliferie M. Rogai, GMF-B, 4531, p. 43).

11) Fie ABC un triunghi dreptunghic. Din vîrful drept A, se duce dreapta $AD (D \in BC)$ și se notează $BD = p$; $DC = q$, $\sphericalangle BAD = \alpha$, $\sphericalangle ADC = \varphi$, $\sphericalangle DAC = \beta$. Să se arate că:

$$\mathrm{ctg}\ \varphi = \frac{p\,\mathrm{ctg}\,\alpha - q\,\mathrm{ctg}\,\beta}{p + q}$$

(„formula celor trei revelmente"; arătaţi că este adevărată şi atunci cînd triunghiul este oarecare. Vezi GMF-B, 1961. pp. 86—87, soluţia dată de Bejan Costel).

12) Într-un triunghi dreptunghic ABC se duce mediana din B. Să se arate că unghiul α făcut de această mediană cu ipotenuza BC este dat de

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{tg} B}{2 + \operatorname{tg}^2 B}.$$

(C. Menciu, GMF-B, 1961, 4755, p. 373)

13) Să se arate că într-un triunghi dreptunghic în care un unghi este de 15°, înălţimea corespunzătoare ipotenuzei este un sfert din ipotenuză.

14) Fie BC ipotenuza unui triunghi dreptunghic cu vîrful A mobil în plan. Să se determine triunghiurile dreptunghice ABC pentru care distanţa dintre centrul de greutate şi centrul cercului înscris este minimă.
(Matematika v şkole, 1962, nr. 5, p. 91)

15) Mediana şi înălţimea coborîte dintr-un vîrf oarecare al triunghiului ABC fac cu laturile unghiului din care au fost coborîte, unghiuri egale. Arătaţi că triunghiul ABC este dreptunghic.
(Matematica v şkole, 1962, nr. 6, p. 85)

16) Să se arate că dacă într-un triunghi, $S = R^2 + r^2 - OI^2$, notaţiile fiind cele uzuale, atunci triunghiul este dreptunghic, şi reciproc.
(Z.A. Skopeţ, Matematika v şkole, 1963, nr. 3, p. 89)

17) Laturile unui triunghi dreptunghic formează o progresie geometrică. Să se găsească unghiul cel mai mic al triunghiului.
(D.S. Liudmilov, p. 157, [11])

18) Fie ABC un triunghi dreptunghic. Să se arate că mărimile h_a, $h_a + a$, $b + c$ pot fi laturile unui triunghi. În plus, să se arate că triunghiul respectiv este dreptunghic.
(V.B. Lidskii, p. 57 [10])

19) Fie G punctul de intersecție al medianelor unui triunghi oarecare ABC. Dacă are loc relația:

$$\operatorname{ctg} A = 2(\operatorname{ctg} B + \operatorname{ctg} C)$$

atunci triunghiul BCG este dreptunghic, și reciproc.
(A.V. Niculescu, Pozitiva, 1940, p. 151)

20) Fie AD înălțimea unui triunghi dreptunghic. Cercul cu diametrul AD taie catetele AB și AC în E și F. Să se arate că $EF = AD$ și că EF este antiparalelă la BC.
(V. Dorneanu, GM, XXXII, p. 276)

21) Triunghiul ABC este dreptunghic în A. Ce valoare trebuie să aibă unghiul B astfel ca să avem

$$\operatorname{tg}^2 B + \operatorname{tg}^2 C = 14?$$

(C. Ionescu-Țiu, Maria Vidrașcu, p. 60, [7])

22) Într-un triunghi dreptunghic are loc relația:

$$\operatorname{tg} B/2 = b/(a + c).$$

23) Să se arate că într-un triunghi dreptunghic ABC, suma laturilor unghiului drept este egală cu suma diametrelor celor două cercuri înscris și circumscris.

24) Să se arate că raza cercului înscris într-un triunghi dreptunghic este mai mică decît jumătatea oricărei catete.

25) Să se arate că un triunghi dreptunghic este și isoscel, dacă bisectoarea unghiului drept este medie armonică între mediana și înălțimea ce pleacă din unghiul drept.

26) Se consideră un triunghi ABC dreptunghic în A, în care:

$$\frac{a + b}{c} = k \text{ (constant)}.$$

Se cere să se calculeze $\operatorname{tg}\frac{B}{2}$. Pentru ce valori ale lui k unghiul B este cel mai mic unghi al triunghiului?
(E. Mărgăritescu, ş.a. p. 259[1])

27) Într-un triunghi dreptunghic, dreapta care unește vîrful unghiului drept cu centrul pătratului construit pe ipotenuză, este bisectoarea unghiului drept.

28) Fie ABC un triunghi oarecare, și H ortocentrul său. Ce relație trebuie să existe între unghiurile sale astfel ca segmentele HA, HB, HC să fie laturile unui triunghi dreptunghic.

29) Pe laturile unui triunghi dreptunghic $ABC(\hat{A} = 90°)$ se iau punctele A', B', C' ce împart laturile BC, CA, AB, în același raport k. Să se arate că:

$$\frac{S_{A'B'C'}}{S_{ABC}} = 1 - \frac{3k}{(1+k)^2}.$$

(C. Mihu, GMF-B, 1957, nr. 5, p. 258)

30) Într-un triunghi oarecare, are loc relația (demonstrați!):

$$R + r = (b + c - AH)/2,$$

unde H este ortocentrul. Ținînd cont că într-un triunghi dreptunghic A coincide cu H, atunci putem spune că:

$$R + r = (b + c)/2?$$

(variație pe tema propusă de G.I. Bercea, GMF-B, 1957, p. 212)

31) Fie AH înălțimea triunghiului $ABC(\hat{A} = 90°)$ și D simetricul lui H față de mijlocul ipotenuzei BC. Să se arate că dacă E și F sînt proiecțiile lui D pe AC și AB, atunci:

$$BC \cdot DE \cdot DF = AH^3.$$

(Gh. Buicliu, SGM, III, nr. 4, 1937, p. 75)

---

[1] Mărgăritescu, E., ş. a., *Culegere de probleme de trigonometrie pentru licee*, Editura didactică și pedagogică, București, 1970.

32) În orice triunghi dreptunghic avem relația:

$$r^2 + r_a^2 + r_b^2 + r_c^2 = 2a^2.$$

(N.N. Mihăileanu, S.G.M., III, 1937, nr. 5, p. 114)

33) Fiind dat triunghiul $ABC(A = 90°)$ să se determine pe cateta AB un punct M astfel ca $MA + AC = MB + BC$.
(M.M. Vișinescu, GMF-B, 1957, nr. 12, p. 654)

34) Înălțimea, bisectoarea și mediana trasate prin vîrful unui triunghi, împart unghiul din acest vîrf în patru părți egale. Să se arate că în acest caz triunghiul este dreptunghic.
(GMF-B, 1957, nr. 3, p. 162)

35) Într-un triunghi dreptunghic $ABC(\hat{C} = 90°)$, are loc inegalitatea:

$$\cos^2\frac{A - B}{2} \geqslant \frac{2ab}{c}.$$

(Matematica v școle, nr. 4, 1959, p. 59)

Repriza a II-a: triunghiul oarecar

1) Să se arate că în orice triunghi:

$$i_a^2 + i_b^2 + i_c^2 \leqslant p^2 \leqslant m_a^2 + m_b^2 + m_c^2,$$

notațiile fiind cele obișnuite.
(Z.A. Skopeț, Matematika v școle, 1963, nr. 3, p. 89)

2) Dacă A, B, C, sînt unghiurile unui triunghi, atunci:

$$\cos A + \cos B + \cos C \leqslant \frac{3}{2}.$$

(Mitrinović, p. 123[1])

[1] M i t r i n o v i ć, D. S., *Nejednakosti*, Izdavaćko Preduzeće Građevinska Knjiga, Beograd, 1965.

3) Să se arate că în orice triunghi, suma pătratelor a două laturi este mai mare sau cel puțin egală cu de patru ori aria sa.

(Hadîrcă, I., GMF-B, 1963, nr. 8, p. 498)

4) Să se arate că într-un triunghi oarecare, există relația:

$$\sum \frac{\cos^2 A + \cos^2 B}{\cos A + \cos B} \geqslant 1 + \frac{p_0}{p},$$ p_0 fiind semiperimetrul triunghiului ortic.

(Vodă, V. Gh., GMF-B, 1962, nr. 3, p. 153)

5) Să se calculeze raportul p_0/p în funcție de r_a, r_b, r_c, unde p_0 reprezintă semiperimetrul triunghiului ortic, restul notațiilor fiind obișnuite.

(vezi GMF-B, 1961, nr. 8, soluția dată de *N. Gh. Tătulescu*)

6) În orice triunghi are loc inegalitatea:

$$8 \cos A \cos B \cos C \leqslant 1,$$

egalitatea fiind îndeplinită cînd $\hat{A} = \hat{B} = \hat{C}$.

(vezi GMF-B, 1961, nr. 1, soluția dată de *Albu Toma*)

7) În orice triunghi

$$\frac{r_a}{h_a} + \frac{r_b}{h_b} + \frac{r_c}{h_c} \geqslant 3.$$

(vezi GMF-B, 1961, nr 1, „Stabilitatea unor inegalități", p. 14)

8) În orice triunghi:

$$h_a^n r_a^{2n} + h_b^n r_b^{2n} + h_c^n r_c^{2n} \geqslant 3(r_a r_b r_c)^n, \quad n \in N.$$

(idem op. cit., p. 13)

9) Dacă A, B, C, sînt unghiurile unui triunghi, atunci:

$$\cos A + \sqrt{2} (\cos B + \cos C) \leqslant 2.$$

(Mitrinović, D. S., op. cit. 125)

10) Dacă mărimile pozitive a, b, c, sînt laturile unui triunghi, atunci să se arate că și mărimile:

$$x = \sqrt[n]{a},\ y = \sqrt[n]{b},\ z = \sqrt[n]{c}$$

sînt laturile unui triunghi. (idem, op. cit. p. 128)

11) În orice triunghi ascuțitunghic are loc inegalitatea:

$$h_a + h_b + h_c \leqslant 3(R + r),$$

notațiile fiind cele obișnuite.
(L. Carlitz, Amer. Math. Monthly, 1963, p. 758)

12) *Problema lui P. Erdös*: în orice triunghi ascuțitunghic are loc inegalitatea:

$$R + r \leqslant \max(h_a, h_b, h_c).$$

(Matematika v școle, 1962, nr. 6, p. 87; o problemă foarte frumoasă, iar soluția dată în revista respectivă pune în evidență noi legături.)

13) Dacă A, B, C, sînt unghiurile unui triunghi, atunci cu mărimile $\cos A/2$, $\cos B/2$, $\cos C/2$, se poate construi un triunghi.
(Matematika v școle, 1963, nr. 3, p. 89)

14) Într-un triunghi oarecare, are loc inegalitatea:

$$\sqrt[n]{\sin A} + \sqrt[n]{\sin B} > \sqrt[n]{\sin C},\ n \geqslant 2,\ n \in N.$$

(Maizus, S.I., Matematica v școle, 1974, nr. 3, p. 80)

15) În orice triunghi avem relația:

$$2S = IA^2 \sin A + IB^2 \sin B + IC^2 \sin C,$$

unde I este centrul cercului înscris.

(Matematika v școle, 1974, nr. 4, p. 79)

16) Să se demonstreze inegalitatea:

$$\sum \operatorname{tg} A(\operatorname{ctg} B + \operatorname{ctg} C) \geqslant 6.$$

(GMF-B, 1957, nr. 8, p. 427)

17) În triunghiul oarecare $ABC(\hat{B} > \hat{A} > \hat{C})$, dreapta lui *Euler* face cu tangentele în vîrfurile triunghiului la cercul circumscris, unghiurile α, β, γ. Să se demonstreze că:

$$\frac{\cos^2 \alpha}{\cos \beta \cos \gamma} \geqslant \frac{7}{2}.$$

(Radu Stroe, GMF-B, 1958, nr. 9, p. 432)

18) În triunghiul oarecare ABC, ortocentrul împarte înălțimea din A în raportul m/n. Să se calculeze expresia:

$$E = \operatorname{tg} B \operatorname{tg} C.$$

(M. Rădulescu, GMF-B, 1960, nr. 6, p. 353)

19) Fiind dat un trunghi oarecare ABC, și un punct M în plan, să se găsească locul geometric al punctului M pentru care $MB^2 + MC^2 \geqslant MA^2$.
(V. Gh. Vodă, GMF-B, 1960, nr. 11, p. 685)

20) Fie $A_1B_1C_1$ triunghiul ortic al triunghiului ABC; $A_2B_2C_2$ triunghiul ortic al triunghiului $A_1B_1C_1$, ș.a.m.d., iar $A_{n+1}B_{n+1}C_{n+1}$ triunghiul ortic al triunghiului $A_nB_nC_n$. Să se arate că:

$$2^n p_1 S_n = p_{n+1} S_{ABC}.$$

(V. Vîrgolici, GMF-B, 1960, nr. 10, p. 617)

21) Într-un triunghi oarecare ABC se consideră cevienele BNE și CNF, N fiind un punct oarecare pe înălțimea AA' Dreapta EF întîlnește latura BC în M. Să se calculeze segmentul MA în funcție de laturile triunghiului.
(D.C. Panu, GMF-B, 1960, nr, 4, p. 238)

22) Să se arate că într-un triunghi oarecare:

$$\sum (bcr_a)^n = (pS)^n,$$

notațiile fiind cele obișnuite.
(Eugen Șt. Iacob, „Foaia matematică", 1926, III, nr. 7, p. 115)

23) Să se afle maximul expresiei:

$$\frac{\cos A \cos B \cos C}{\sin^2 A \sin^2 B \sin^2 C}.$$

(I. Luca, „Pozitiva“, 1941, I, nr. 9—10, p. 342)

24) Între elementele unui triunghi oarecare, avem:

$$\frac{\Sigma(r_a + r_b)^3}{\Sigma r_a^6} \geqslant \frac{8}{rp^2}.$$

(Eugen St. Iacob, GM,LI, 1946, nr. 3, p. 688)

25) Să se afle care dintre toate triunghiurile circumscrise aceluiași cerc face minimum produsul $h_a^\alpha h_b^\beta h_c^\gamma$ unde α, β, γ sînt numere pozitive, iar h_a, h_b, h_c sînt înălțimile triunghiului.
(G. Theiler, GM, XXXII, 1927, nr. 10, p. 398)

26) Să se arate că între unghiurile unui triunghi ascuțitunghic ABC există inegalitatea:

$$\operatorname{tg}^n A + \operatorname{tg}^n B + \operatorname{tg}^n C > 3 + \frac{3n}{2},$$

unde n este un număr natural.

(GMF-B, 1964, nr. 6, p. 265)

27) Fie M un punct oarecare pe cercul înscris într-un triunghi oarecare ABC. Să se arate că:

$$a \cdot MA^2 + b \cdot MB^2 + c \cdot MC^2 = 2Sr + abc.$$

(idem op. cit.)

28) A, B, C, fiind unghiurile unui triunghi variabil în care avem

$$\operatorname{ctg} A + \operatorname{ctg} B + \operatorname{ctg} C = \text{constant},$$

să se găsească maximul și minimul expresiei:

$$\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C.$$

(Luca, L., GM, XLII, 1936, nr. 4, p. 198)

29) Într-un triunghi ABC fie α și β segmentele LB și LA determinate pe latura AB de piciorul bisectoarei interioare L, a unghiului C. Să se demonstreze relațiile:

$$(a^2 - \alpha^2)(b^2 - \beta^2) = CL^2, \ ab - \alpha\beta = CL^2.$$

Ce devin aceste relații în cazul bisectoarei exterioare?
(Traian Lalescu, GM, XXII, 1916, nr. 2, p. 64)

30) M fiind un punct în planul triunghiului ABC, iar O centrul cercului circumscris, să se arate că avem:

$$\sum a^2(MA^2 - MB^2)(MA^2 - MC^2) = 16 \ S^2 \cdot MO^2.$$

(Șerban Gheorghiu, GM, XLVII, 1942, nr. 7, p. 342)

NOTĂ: Autorul acestei probleme este unul din pionierii statisticii matematice în România. A trăit între anii 1896—1957. În lucrarea *Complemente de geometrie sintetică*, EDP, București, 1965, p. 276, profesorul N.N. Mihăileanu, are următoarea apreciere asupra activității lui Ș. Gheorghiu: „deși nu s-a realizat ca matematician la nivelul predecesorilor, el specializîndu-se în statistica matematică (!? — semnele noastre), ca redactor la „Gazeta Matematică", a pus cultura sa superioară în serviciul ridicării calității problemelor de geometrie. A propus un număr foarte mare de probleme de o rară frumusețe." După părerea noastră, această apreciere este contradictorie și conține în același timp o subapreciere lipsită de temei a unei ramuri de matematică, despre care acad. Gh. Mihoc afirma pe bună dreptate că „poate satisface exigențele celui mai pretențios cercetător".
Locul lui Șerban Gheorghiu în cultura românească rămîne tocmai prin aportul lui la dezvoltarea statisticii autohtone.

31) Dintre toate triunghiurile care au o latură comună și același perimetru, triunghiul isoscel este cel de arie maximă.

32) Dintre toate triunghiurile care au o latură comună şi aceeaşi suprafaţă, triunghiul isoscel este cel de perimetru minim.

33) Dintre toate triunghiurile cu acelaşi perimetru, triunghiul echilateral are aria maximă.

34) Dintre toate triunghiurile care au aceeaşi suprafaţă, triunghiul echilateral este cel de perimetru minim.

35) Să se găsească maximul expresiei:

$$r\sqrt{Rr}/S,$$

notaţiile fiind cele obişnuite într-un triunghi.

36) Aceeaşi problemă pentru expresia:

$$Rr/p^2.$$

37) Generalizarea problemei anterioare: se cere maximul expresiei:

$$\frac{R^m r^{m+n}}{p^{2m+n}}.$$

38) Dintre toate triunghiurile de acelaşi perimetru, să se determine acela care face minimă expresia:

$$\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}.$$

39) Dacă H este ortocentrul unui triunghi ABC, care este minimul expresiei:

$$\frac{AB}{CH}+\frac{AC}{BH}+\frac{BC}{AH}?$$

40) Aceeaşi problemă pentru expresia:

$$\frac{abc}{AH\cdot BH\cdot CH}.$$

1) Într-un triunghi ABC, tangentele unghiurilor B, A, C sînt în progresie armonică. Se cunosc mărimile laturilor b, c și anume $b = 2q$ cm, și $c = q$ cm. Să se calculeze aria triunghiului.

2) Să se arate că într-un triunghi ABC în care două laturi sînt invers proporționale cu bisectoarele corespunzătoare, unghiurile respective sînt în progresie aritmetică.
(Liudmilov, D.S., p. 163 [11])

3) Medianele corespunzătoare laturilor a și b ale unui triunghi se taie sub un unghi drept. Să se determine latura a treia a triunghiului. *Discuție.*
(V.B. Lidskii, p. 51 [10])

4) Din vîrfurile A, B, C ale unui triunghi se duc cevienele AA_1 BB_1, CC_1, astfel încît fiecare dintre ele împarte perimetrul triunghiului în două părți egale. Să se arate că AA_1, BB_1, CC_1, sînt concurente.
(Matematika v școle, 1962, nr. 6, p. 85)

5) Unghiurile unui triunghi verifică relația $2 \operatorname{tg} A = \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C$. Să se arate că această relație este echivalentă cu fiecare dintre relațiile:

$$\operatorname{tg} A \operatorname{tg} B = 3; \cos (B - C) = 2 \cos A.$$

(GM, 1976, nr. 12, p. 460)

6) În triunghiul ABC se cunosc laturile a, b, c. Dacă m_a, m_b, m_c sînt medianele, iar l_a; l_b; l_c sînt simedianele, atunci să se arate că expresia:

$$\frac{m_a^2}{l_a^2} + \frac{m_b^2}{l_b^2} + \frac{m_c^2}{l_c^2}$$

este constantă.
(G.D. Sorescu, GMF-B, 1960, p. 282)

7) Să se determine unghiurile triunghiului ABC, dacă suprafața sa S se exprimă cu ajutorul laturilor a, b, prin formula:

$$S = (a^2 + b^2)/4.$$

(Mihalkovici, I.T., Matematika v şkole, 1974, nr. 5, p. 80)

8) Unghiul A al triunghiului ABC este de $60°$. Să se calculeze celelalte două unghiuri, știind că:

$$2 \cos B - 1 = \frac{a + b}{a + c}.$$

(Sukonnik, Ia. N., Matematika v şkole, 1974, nr. 4, p. 79)

9) Într-un triunghi în care centrul de greutate este coliniar cu două din punctele de tangență ale cercului înscris, există relația:

$$\cos \frac{C - B}{2} = 3 \cos \frac{C + B}{2}.$$

Laturile cu punctele de tangență sînt cele ce formează unghiul A.

(Hadîrcă, I., GMF-B., nr. 8, p. 428)

10) Dacă într-un triunghi ABC înălțimea h_a este medie proporțională între razele r_b și r_c ale cercurilor exînscrise, atunci triunghiul este isoscel.

(Vasilescu, Fl., GM, XX, 1914, nr. 1, p. 37)

11) Să se arate că dacă bisectoarea, mediana și simediana ce pornesc respectiv din cele trei vîrfuri ale unui triunghi oarecare sînt concurente, triunghiul are laturile în progresie geometrică.

(GMF-B, 1960, nr. 1, p. 38)

12) Să se afle relația dintre unghiurile unui triunghi ABC, în care înălțimea din A, bisectoarea din B (interioară) și mediana din C sînt concurente.

(GMF-B, 1958, nr. 11, p. 673)

13) Într-un triunghi raza cercului circumscris este triplul razei cercului înscris; să se arate că

$$\frac{r_a}{h_a} + \frac{r_b}{h_b} + \frac{r_c}{h_c} = 5.$$

(A. Radev, GM, XXXII, 1927, nr. 9, p. 357)

14) Fie D piciorul medianei AD într-un triunghi ABC, iar M mijlocul acestei mediane. Să se arate că dacă mediatoarea segmentului MD trece prin ortocentrul H al triunghiului ABC, atunci laturile acestuia a, b, c, satisfac relația:

$$b^2 + c^2 = \frac{5}{2} a^2$$

și reciproc.

(vezi GMF-B, 1960, nr. 8, p. 458, soluția dată de Gh. D. Simionescu)

15) Să se demonstreze că un triunghi este isoscel, dacă are două bisectoare egale.

(problema nu este banală — vezi și GM, XXII, 1916, nr. 2, pp. 33—35, soluția trigonometrică dată de Vasile Cristescu)

16) Din toate triunghiurile care au laturile în progresie aritmetică, să se afle maximul unghiului opus laturii mijlocii.

(Alexandru Pantazi, GM, XX, 1915, nr. 10, p. 392)

NOTĂ: Al. Pantazi (1896—1948) este unul dintre marii geometri. Deși Pantazi s-a ocupat îndeosebi cu geometria superioară — lucrarea sa de bază fiind *Elemente de geometrie diferențială proiectivă a curbelor și suprafețelor* (1942) — în preocupările sale au intrat și matematicile actuale și statistica matematică.
Simona Pantazi (1936—1976) fiica marelui geometru s-a stins și ea în plină tinerețe. S-a ocupat cu geometria superioară, iar în ultima perioadă a vieții sale a lucrat la Centrul de Statistică Matematică din București unde s-a ocupat cu aplicarea teoriei probabilităților și statisticii matematice în unele probleme de geometrie.

17) Dacă într-un triunghi are loc relația: $r_a^2 + 2r_a r_c = p^2$ atunci triunghiul este isoscel.

18) Ce fel de triunghi este acela în care are loc relația

$$OH = R(2 \cos A - 1)?$$

19) Dacă într-un triunghi are loc relația:

$$r_a + r_b + r_c = p\sqrt{3}$$

atunci el este echilateral.

20) Dacă r_9 este raza cercului celor două puncte ale triunghiului ABC, atunci are loc inegalitatea:

$$r_9 \geqslant \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}$$

Ce devine relația în cazul triunghiului isoscel $(b = c)$? Dar în cazul triunghiului echilateral?

21) Să se determine unghiurile unui triunghi în care unul din unghiuri este A, iar bisectoarea interioară și exterioară a acestui unghi sînt egale între ele,

22) În ce triunghiuri avem relația:

$$HB^2 = HA^2 + HC^2$$

23) În triunghiul ABC, unghiul dintre înălțimea AA_1 cu dreapta care unește ortocentrul H cu mijlocul M al laturii BC este de 45°. Să se arate că expresia $E = \operatorname{tg} B - \operatorname{tg} C$ este întotdeauna constantă, dacă un astfel de triunghi există.

24) Să se stabilească în ce fel de triunghiuri, expresia

$$a \cdot \operatorname{ctg} A + b \cdot \operatorname{ctg} B + c \cdot \operatorname{ctg} C$$

este constantă.

25) Ce fel de triunghi este acela în care

$$\frac{p_0}{p} = 1 - \cos A$$

(p_0 este semiperimetrul triunghiului oritic).
(V. Gh. Vodă)

26) Condiția necesară și suficientă ca un triunghi să fie echilateral, este:

$$\sum \frac{1}{(m_a + m_b + m_c)^2} = \frac{9R^2}{4S^2}.$$

(Hohlenko, Iu. I., Matematika v șkole, 1974, nr. 2, p. 77)[1]

[1] Am strecurat deliberat o greșeală; unde? (ușor de depistat!)

Capitolul VIII

8. SOLUȚII ȘI INDICAȚII DE REZOLVARE PENTRU UNELE PROBLEME PROPUSE ÎN CAPITOLUL VII

În acest capitol vom prezenta soluții sau indicații pentru rezolvarea problemelor propuse în capitolul VII. Asupra modului în care am ales problemele la care s-au dat soluții sau indicații, sîntem datori cu următoarele explicații:

1) pentru problemele ale căror rezolvări au mai apărut în limba română, nu sînt date soluții, ci doar indicații; este menționat locul exact de unde a fost culeasă problema, iar cititorul interesat poate face apel direct la sursă (de obicei, „Gazeta Matematică");

2) pentru unele probleme apărute în reviste sau cărți în diferite limbi străine, au fost date soluții sau indicații, însoțite — acolo unde este cazul — de figuri, deoarece se presupune că pentru tînărul cititor este mai dificil accesul la sursa directă.

În consecință, în prezentul capitol apar „pe reprize" — următoarele soluții și indicații:

A. Triunghiul dreptunghic

1) Din figura A.1 se observă imediat că: $2r = b + c - a$. Înlocuind, se obține succesiv $b + c - a \leqslant a(\sqrt{2} - 1)$, $\frac{b + c}{a} - 1 \leqslant \sqrt{2} - 1$ $b + c \leqslant a\sqrt{2}$, $b^2 + c^2 + 2bc \leqslant a^2$, $2bc \leqslant a^2 = b^2 + c^2$
aceasta din urmă fiind evidentă.

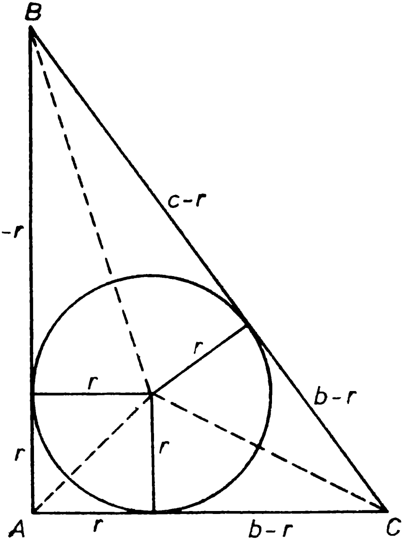

Fig. A. 1.
O inegalitate între elementele unui triunghi dreptunghic

2) Se folosește proprietatea: într-un triunghi dreptunghic înălțimea corespunzătoare ipotenuzei este egală cu produsul catetelor împărțit la ipotenuză, precum și relația $2r = b + c - a$, problema reducîndu-se la o inegalitate între numere pozitive care satisfac $a^2 = b^2 + c^2$.

3) Fig. A.3 ne arată că mediana $AO = a/2$ (raza cercului circumscris), iar conform teoremei medianei $CC_1^2 = (4b^2 + c^2)/4$.

Pe de altă parte, $AM = \frac{2}{3} AO$ și $MC = \frac{2}{3} CC_1$ deci:

$$\frac{4}{9} \cdot \frac{4b^2 + c^2}{4} + \frac{4}{9} \cdot \frac{a^2}{4} = b^2.$$

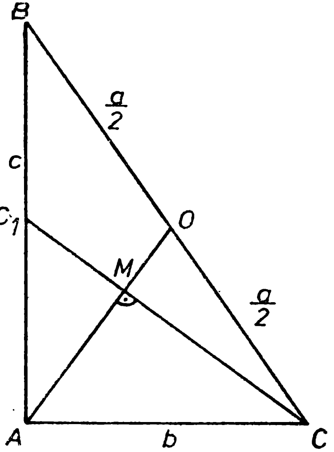

Fig. A. 3.
Medianele CC_1 și AO sînt perpendiculare

Efectuînd calculele și ținînd seama că triunghiul este dreptunghic, găsim $\frac{b}{c} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ adică $\hat{B} = \operatorname{arctg} 1/\sqrt{2}$.

4) Exprimăm elementele h_a și i_a în funcție de laturile triunghiului. Conform teoremei bisectoarei, $i_a = \frac{2bc}{b+c} \cdot \cos\frac{A}{2} = \frac{\sqrt{2}\,bc}{b+c}$, iar $h_a = bc/a$, deci:

$$\frac{h_a}{i_a} = \frac{bc}{a} \cdot \frac{b+c}{\sqrt{2}\,bc} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{b+c}{a} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{b}{a} + \frac{c}{a}\right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}(\sin B + \sin C) = \text{constant}.$$

5) Se știe că în triunghiul dreptunghic $R = R/2$ și $2r = b + c - a$.

Atunci rezultă $\frac{b+c-a}{a} = \frac{1}{k}$, $\sin B + \sin C = \frac{k+1}{k}$,

$\hat{B} + \hat{C} = 90^\circ$ etc.

6) Se scrie $a - x$, $b - x$, $c - x$, și se aplică teorema lui *Pitagora*.

7) Să notăm $OM = x$. Atunci $BM = \sqrt{x^2 + (a+b)^2}$, iar $AM = \sqrt{x^2 + a^2}$ și $\sphericalangle OMA = \operatorname{arctg} \frac{a}{x}$.

Așadar, $\operatorname{tg} (\alpha + \sphericalangle OMA) = (a+b)/x$, care este ecuația ce furnizează pe x (fig. A.7).

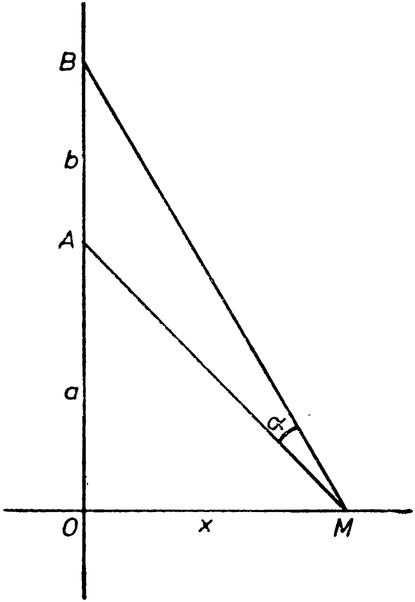

Fig. A.7.
Determinarea punctului M

8) Se scrie $AC = c \cdot \text{tg } B$, $BC = c/\cos B$, apoi se formează ecuația

$$\text{tg } (B + x) = (c \cdot \text{tg } B + q)/c$$

9) Se exprimă toate elementele în funcție de laturi și se ridică relația de demonstrat la pătrat.

10) Se duc bisectoarele BB_1 și CC_1 din B și C și se notează M_1, M_2, M_3 proiecțiile centrului cercului înscris pe BC, CA, AB.
Avem $AM_2 = AM_3 = r$, $CM_2 = CM_1$; $BM_1 = BM_3$. Dar $BM_1 + M_1C = BC$, etc. Pe de altă parte,

$$BM_3 = r \text{ ctg } (B/2), \text{ și } CM_2 = r \text{ ctg } (C/2).$$

Relația cerută rezultă acum prin simplă însumare:

$$2p = 2r + 2M_2C + 2BM_1.$$

11) Se ține cont că $\hat{\alpha} + \hat{\beta} = 90°$ iar $\hat{\varphi} = 180° - (\hat{C} + \hat{\beta})$ și se exprimă apoi $\sphericalangle ADB = 180° - \hat{\varphi}$, ctg α în triunghiul ADB și respectiv ctg β și ctg φ în triunghiul ADC.

12) Se scrie $\text{tg } B = b/c$, iar apoi din triunghiul BMC se exprimă tg α în funcție de $BC = a$ și $MC = b/2$ (se ține seama evident că $a^2 = b^2 + c^2$).

13) Se exprimă elementele ce intervin în funcție de unghiul de 15°, și se aplică apoi teorema înălțimii (fig. A.13).

14) Dacă ipotenuza BC este fixă, atunci A este mobil pe cercul cu diametru BC; distanța dintre G și I, conform cu geometria triunghiului (Lalescu) are expresia:

$$GI = \frac{1}{3}\sqrt{9r^2 - 3p^2 + 2(a^2 + b^2 + c^2)} =$$

$$= \frac{1}{3}\sqrt{(6a^2 + 9r^2 - 3p^2}.$$

Atunci GI este minimă, dacă $9r^2 = 3p^2$ etc.

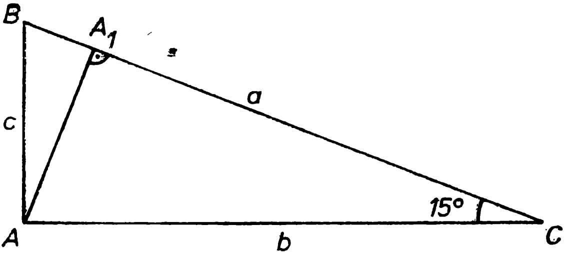

Fig. A.13
Dacă $C = 15°$, atunci $4AA_1 = BC$

15) Dreptele m_a și h_a sînt izogonale. Să arătăm că acest lucru nu poate avea loc decît într-un triunghi dreptunghic (fig. A.15). Triunghiul AOB este isoscel, deoarece $AO = OB = BC/2$, deci $\sphericalangle OAB = \sphericalangle OCA$. Dar $\sphericalangle BAA_1 = \sphericalangle ACO$ fiindcă triunghiurile dreptunghice ABC și ABA_1 sînt asemenea, avînd un unghi comun, ABA_1. Prin urmare, în triunghiul dreptunghic

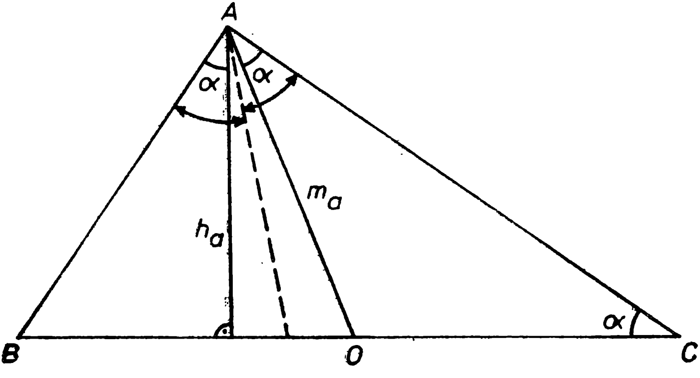

Fig. A.15.
Într-un triunghi dreptunghic mediana m_a și înălțimea h_a sînt izogonale

ABC mediana m_a și înălțimea h_a sînt izogonale. Într-un triunghi oarecare, izogonala medianei este simediana. Dar simediana coincide cu înălțimea numai dacă triunghiul este dreptunghic.

16) Se folosește relația lui *Euler*: $OI^2 = R^2 - 2Rr$ și formula $S = pr$. Se obține: $p = r + 2R$. Se poate înlocui acum r și R prin expresiile lor prin laturi. Calculul conduce la teorema lui *Pitagora*. Invers, dacă triunghiul este dreptunghic, atunci are loc $p = r + 2R$. Într-adevăr, $2r = b + c - a$ și $2R = a$. Rezultă imediat $2p = 2r + 4R = b + c - a + 2a = a + b + c$.

17) Presupunem că progresia este astfel încît $a^2 = bc$. Atunci $1 = \frac{b}{a} \cdot \frac{c}{a}$ sau $\sin B \sin C = 1$, și cum $\hat{B} + \hat{C} = 90°$, se rezolvă sistemul, determinîndu-se unghiul cel mai mic.

18) Are loc într-adevăr relația $(b + c)^2 + h_a^2 = (a + h_a)^2$ care se reduce la $bc = ah_a$.

19) Se scriu expresiile ctg A, ctg B etc. în funcție de laturi, și anume $(b^2 + c^2 - a^2)/4S$ etc. Înlocuind în relația dată se regăsește teorema lui *Pitagora*.

20) Se scriu efectiv măsurile unghiurilor B, C, E, F. Rezultă apoi că EF trece prin centrul cercului de diametru AD și deci este și el diametru, adică egal cu AD.

21) Deoarece $\hat{B} + \hat{C} = 90°$, $\operatorname{tg} B = 1/\operatorname{tg} C$ și deci relația se reduce la $\operatorname{tg}^4 B - 14 \operatorname{tg} B + 1 = 0$ care se mai poate scrie $(\operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C)^2 - 2 \operatorname{tg} B \operatorname{tg} C = 14$ etc.

22) Se înlocuiesc $b = 2r \sin B$ etc., și se obține:

$$\operatorname{tg}\frac{B}{2} = \frac{\sin B}{1 + \sin C}, \quad \frac{\sin\frac{B}{2}}{\cos\frac{B}{2}} = \frac{2\cos\frac{B}{2}\sin\frac{B}{2}}{1 + \sin C} \ldots \sin C = \cos B.$$

23) Trebuie arătat că $2r + 2R = b + c$. Ştim că $2r = b + c - a$, iar $2R = a$.

24) Să arătăm, de exemplu, că $r \leq b/2$. Se înlocuieşte $r = S/p$ şi $S = bc/2$. Rezultă imediat.

25) Media armonică se scrie în acest caz: $\frac{2}{i_a} = \frac{1}{m_a} + \frac{1}{h_a}$. Se înlocuieşte apoi $i_a = \sqrt{2}bc/(b + c)$, $m_a = a/2$, $h_a = bc/a$. Se reduce la teorema lui *Pitagora*.

26) Patrulaterul $ABOC$ este inscriptibil, deoarece unghiurile opuse A şi O sînt drepte (fig. A.26). Cum $\sphericalangle OBC = \sphericalangle BCO = 45°$ rezultă că şi $\sphericalangle OAC = 45° (= \sphericalangle OBC)$ respectiv $\sphericalangle OAB = 45°$ $(= \sphericalangle BCO)$.
Proprietatea este demonstrată.

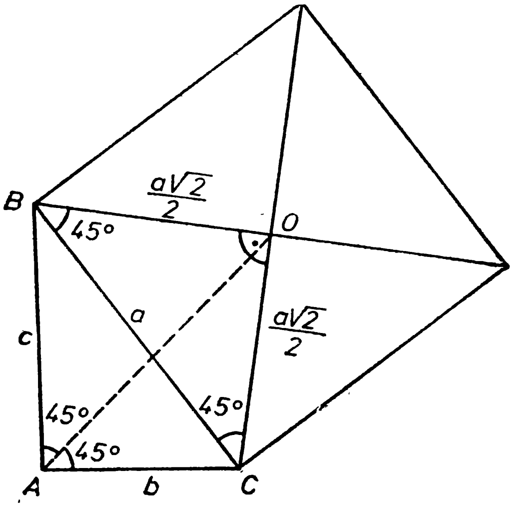

Fig. A.26.
ABOC este patrulater inscriptibil

28) Se exprimă mărimile AH, BH, CH, în funcție de elementele triunghiului. $AH = 2R \cos A$ etc. Deci relația este $\cos^2 A = \cos^2 B + \cos^2 C$.

29) Se exprimă suprafețele cu ajutorul formulei lui *Heron*, apoi se ține cont de raportul între segmentele determinate de A' B', C' pe laturile BC, CA, AB. Calcul direct.

30) Se înlocuiește $b = 2R \sin B$ etc., $AH = 2R \cos A$ și se împarte cu R. Raportul r/R se înlocuiește cu expresia echivalentă:

$$\cos A + \cos B + \cos C - 1.$$

31) Se calculează fiecare segment în parte; se ține seama că înălțimea unui triunghi dreptunghic este produsul catetelor împărțit la ipotenuză.

32) Se aplică formulele cunoscute $r = S/p$, $r_a = S/(p - a)$ etc. și se ține cont că $2S = bc$, iar $a^2 = b^2 + c^2$.

33) Se calculează MA și MB în funcție de elementele inițiale ale triunghiului.

34) Se aplică proprietatea izogonalelor.

36) Are loc evident: $\frac{1}{2}(\sin A + \sin B) \geqslant \sqrt{\sin A \sin B}$ dacă A și B sînt unghiuri ascuțite, sau echivalent:

$\sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2} \geqslant \sqrt{\sin A \sin B}$, dar $\frac{A+B}{2} = 45°$

deci $\sin \frac{A+B}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\sin A = a/c$, $\sin B = b/c$, și deci

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \cos \frac{A-B}{2} \geqslant \sqrt{\frac{ab}{c^2}} \text{ etc.}$$

1) Se știe că $m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2)$; se scriu apoi pe rînd expresiile bisectoarelor $i_a = 2bc\sqrt{(p(p-a)}/$ $/(b+c)$.

Cum $\sqrt{bc} \leqslant (b+c)/2$, obținem $i_a \leqslant \sqrt{p(p-a)}$. Deci $i_a^2 + i_b^2 + i_c^2 \leqslant p(3p - a - b - c) = p^2$.
Se înlocuiește $4p^2 = (a+b+c)^2$ și rezultă inegalitatea evidentă:

$$a^2 + b^2 + c^2 \geqslant ab + bc + ca.$$

2) *Soluția 1* (dată de D.S. Mitrinović, p. 123): se pornește de la proprietatea evidentă a sumei pătratelor a două numere de a fi mai mare decît zero. Numerele se aleg astfel:

$$(\cos A + \cos B - 1)^2 + (\sin A - \sin B)^2 \geqslant 0,$$

care se reduce la $\cos A + \cos B - \cos(A+B) \leqslant \frac{3}{2}$.

Cum $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180°$, inegalitatea cerută este imediată.

Soluția 2 (dată în „Matematika v școle", 1963, nr. 2, pp. 91–92):
Dacă triunghiul este echilateral, atunci are loc egalitatea. Presupunem că triunghiul este oarecare, și fie AB latura cea mai mică (fig. B.2). Construim pe laturile AC și BC, segmentele $AM = AB$ și $BN = AB$. Aplicăm pe aceste segmente vectorii respectivi, orientați ca în fig. B.2.

Are loc evident $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN}$. Ridicăm această relație la pătrat și obținem: $\overrightarrow{MN}^2 = MN^2 =$ $= 3AB^2 + 2(\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{BN} \cdot \overrightarrow{MA})$. Pe de altă parte: $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{AB} = -AB^2 \cdot \cos A$, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BN} =$ $= -AB^2 \cos B$, $\overrightarrow{BN} \cdot \overrightarrow{MA} = -AB^2 \cos C$.

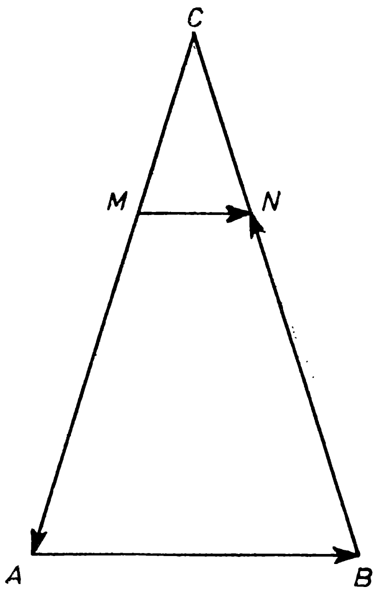

Fig. B.2.
O demonstrație vectorială

Prin urmare: $MN^2 = 3AB^2 - 2AB^2(\cos A + \cos B + \cos C) > 0$.

Inegalitatea $\cos A + \cos B + \cos C < \frac{3}{2}$ rezultă imediat.

3) Trebuie deci arătat că $a^2 + b^2 \geqslant 4S$. Se înlocuiește $a = 2R \sin A$, $b = 2R \sin B$, $S = 2R^2 \sin A \sin B \sin C$; și se ține seama că $\hat{C} = \pi - (\hat{A} + \hat{B})$.

4) Se ține cont de relațiile $p_0 R = pr$ $\cos A + \cos B + \cos C = 1 + r/R$. Calcul direct.

5) Revine la calculul lui r și R din relația precedentă, în funcție de elementele cerute. Se folosesc relațiile:

$$S = pr = r_a(p-a) = r_b(p-b) = r_c(p-c) = \\ = abc/4R.$$

6) Se poate folosi un calcul direct prin înlocuirea lui cos A etc. în funcție de laturi.

7) Se poate înlocui $r_a = S/(p-a)$, $h_a = 2S/a$ etc., obținîndu-se o inegalitate cunoscută între laturile triunghiului.

8) Aceeași idee. Suprafața la puterea $3n$ se simplifică.

9) Inegalitatea se mai poate scrie:

$$\sqrt{2}(\cos B + \cos C) - \cos(B + C) \leqslant 2.$$

Se consideră funcția de două variabile:

$$f(B, C) = \sqrt{2}(\cos B + \cos C) - \cos(B + C).$$

Derivatele parțiale sînt respectiv:

$$\frac{\partial f}{\partial B} = -\sqrt{2}(\sin B) + \sin(B + C),$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial B^2} = -\sqrt{2}\cos B + \cos(B + C)$$

$$\frac{\partial f}{\partial C} = -\sqrt{2}\sin C + \sin(B + C);$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial C^2} = -\sqrt{2}\cos C + \cos(B + C)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial B \partial C} = \cos(B + C).$$

Conform unei cunoscute teoreme de analiză, funcția $f(B, C)$ își atinge maximul pentru $\frac{\partial f}{\partial B} = 0$, $\frac{\partial f}{\partial C} = 0$ în anumite condiții referitoare la derivatele de ordinul II. Ecuațiile de mai sus au pentru $0 < \hat{B} + \hat{C} < 180°$ și $\hat{B}$, $\hat{C} > 0$, soluția $\hat{B} = \hat{C} = \pi/4$, iar:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial B^2}\bigg|_{\hat{B}=\hat{C}=\frac{\pi}{4}} = \frac{\partial^2 f}{\partial C^2}\bigg|_{\hat{B}=\hat{C}=\frac{\pi}{4}} = -1, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial B \partial C}\bigg|_{\hat{B}=\hat{C}=\frac{\pi}{4}} = 0$$

În acest caz, $f_{max}(B, C) = 2$. Prin urmare inegalitatea este demonstrată.

Notă: această soluție depășește întrucîtva materia predată în școală. Am ales-o totuși pentru a arăta cum diverse ramuri de matematică se întrepătrund; o demonstrație mai simplă — în sensul aplicării stricte a materiei predate în școală — se poate da imediat, înlocuind, de exemplu, cos A etc., cu exprimările lor corespunzătoare prin laturi.

10) *Soluția dată de Olga Mitrinović*: fără a restrînge generalitatea problemei, se poate presupune că $0 < a < b < c$(*). Întrucît a, b, c sînt laturile unui triunghi, avem $c < a + b$. Relația (*) se mai poate scrie: $0 < \sqrt[4]{a} < \sqrt[4]{b} < \sqrt[4]{c}$. Trebuie să mai arătăm că și $\sqrt[4]{c} < \sqrt[4]{b} + \sqrt[4]{a}$. Ridicăm la puterea n și obținem: $c > a + b + f(a, b)$ unde $f(a, b)$ însumează ceilalți termeni din dezvoltarea binomului. Evident, atunci ar rezulta $c \geqslant a + b$, ceea ce contrazice faptul că a, b, c, sînt laturile unui triunghi.

11) Se înlocuiesc pe rînd elementele care apar, în funcție de laturi și suprafața triunghiului.

12) *Soluția dată în „Matematika v școle"*: Fie O centrul cercului circumscris. Din O ducem perpendiculare — fie ele OM_1, OM_2, OM_3 — pe laturile BC, CA, AB, iar în patrulaterele OM_1CM_2, OM_2AM_3, OM_3BM_1 aplicăm teorema lui *Ptolemeu*:

$$OM_1 \cdot \frac{b}{2} + OM_2 \cdot \frac{a}{2} = R \cdot \frac{c}{2};\ OM_2 \cdot \frac{c}{2} + OM_3 \cdot \frac{b}{2} = R \cdot \frac{a}{2}$$

$$OM_3 \cdot \frac{a}{2} + OM_1 \cdot \frac{c}{2} = R \cdot \frac{b}{2}.$$

Adunînd membru cu membru aceste relații, se poate scrie:

$$OM_1 \cdot p + OM_2 \cdot p + OM_3 \cdot p - \left(OM_1 \cdot \frac{a}{2} + OM_2 \cdot \frac{b}{2} + OM_3 \cdot \frac{c}{2}\right) = Rp$$

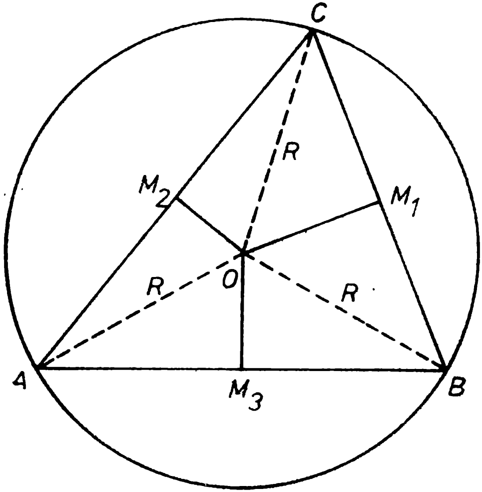

Fig. B.12.
Rezolvăm problema lui *Erdős*

sau

$$(OM_1 + OM_2 + OM_3)p - S = Rp.$$

Ţinînd cont că $S = pr$, se obţine:

$$R + r = OM_1 + OM_2 + OM_3.$$

Dar $S = \frac{1}{2} c \cdot h_c$, iar $S_{OAB} = \frac{1}{2} c \cdot OM_3$, de unde

$$OM_3 = \frac{S_{OAB}}{S} \cdot h_c$$

Analog:

$$OM_1 = \frac{S_{OBC}}{S} \cdot h_a, \; OM_2 = \frac{S_{OCA}}{S} \cdot h_b.$$

Aşadar:

$$OM_1 + OM_2 + OM_3 = R + r = \frac{1}{S} (h_a S_{OBC} + h_b S_{OCA} + \\ + h_c \cdot S_{OAB}).$$

Să presupunem acum că max $(h_a, h_c, h_c) = h_c$. Atunci, $h_a \leq h_c$, $h_b \leq h_c$, şi deci:

$$R + r \leq \frac{h_c}{S} (S_{OBC} + S_{OCA} + S_{OAB}) = h_c.$$

Consecinţe interesante: din inegalitatea lui *Erdös* rezultă că:

$$R \leq \frac{2S}{c} - \frac{S}{p} = \frac{S}{pc} (a + b) = \frac{a + b}{c} \cdot r.$$

Atunci:

$$\frac{R}{r} \leq \frac{a + b}{c}.$$

Pe de altă parte, din inegalitatea lui *Euler* $R \geq 2r$, rezultă că

$$2 \leq \frac{R}{r} \leq \frac{a + b}{c} \quad (c \leq a, \, c \leq b)$$

şi care deci sînt limitele intervalului în care variază raportul R/r.

Nota noastră: să mai observăm că datorită relaţiei lui *Ţiţeica* şi anume:

$$\frac{R}{r} = \frac{p}{p_0}$$

unde p_0 este semiperimetrul triunghiului ortic, avem şi:

$$2 \leqslant \frac{p}{p_0} \leqslant \frac{a+b}{c}. \quad (c \leqslant a, \quad c \leqslant b)$$

Egalitatea are loc în cazul triunghiului echilateral.

13) Se reduce la a arăta că are loc una din relaţiile:

$$\cos\frac{A}{2} + \cos\frac{B}{2} > \cos\frac{C}{2}.$$

Se ţine cont de faptul că: $\frac{C}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{A+B}{2}$ şi se aplică formula sumei cosinusurilor etc.

14) Se aplică metoda inducţiei matematice. Astfel, pentru $n = 2$, avem:

$$\sqrt{\sin A} + \sqrt{\sin B} > \sqrt{\sin (A+B)}.$$

Ridicînd la pătrat, avem:

$$\sin A + \sin B + 2\sqrt{\sin A \sin B} > \sin (A+B)$$

sau

$$\frac{\sin A \sin B}{2} + \sqrt{\sin A \sin B} > \frac{1}{2}\sin (A+B).$$

Se folosesc apoi diferite inegalităţi între diferite tipuri de medii, inegalitatea lui *Jensen* etc.

15) Se foloseşte relaţia: $IA^2 = r^2 + (p-a)^2$ etc.; calculul reducîndu-se la a exprima membrul drept în funcţie de laturi.

16) Se înlocuiesc pe rînd ctg A, ctg B, ctg C în funcție de laturi.

17) Se ține cont de proprietățile dreptei lui *Euler*. Calcul direct al unghiurilor.

18) Se ține seama de expresiile ce dau AH și HA_1 unde A_1 este piciorul înălțimii, apoi se înlocuiește $AH/HA_1 = m/n$.

19) Se iau diferite poziții particulare ale lui M și se exprimă distanțele MA, MB, MC în funcție de elementele triunghiului.

20) Calcul direct, ținînd cont de formula suprafeței triunghiului ortic în funcție de elementele triunghiului inițial.

21) Se aplică relația lui *Stewart*.

22) Se înlocuiește $r_a = S/(p - a)$; urmează apoi un calcul direct.

23) Vezi capitolul VI.

24) Se înlocuiesc razele cercurilor exînscrise în funcție de laturi.

25) Vezi capitolul VI.

26) Se poate aplica metoda inducției matematice.

27) Calcul direct al segmentelor MA, MB, MC în funcție de laturi și alte elemente ale triunghiului.

28) Vezi capitolul VI.

29) Se folosesc expresiile lungimii bisectoarei și ale segmentelor determinate de aceasta pe laturi.

30) Se calculează lungimile segmentelor implicate în funcție de elementele triunghiului.

31) —40) Vezi capitolul VI.

1) Se scrie relaţia $\frac{2}{\operatorname{tg} A} = \frac{1}{\operatorname{tg} B} + \frac{1}{\operatorname{tg} C}$ şi se exprimă aria în funcţie de b, c şi $\sin A$, apoi transformînd $\sin A$ în funcţie de $\operatorname{tg} A$.

2) Să considerăm triunghiul ABC în care am construit bisectoarele AE şi BF. Fie $BC > AC$ şi $\hat{A} > \hat{B}$. Să arătăm mai întîi că $BF > AE$. Din teorema sinusurilor în triunghiul ABF și ABE, putem scrie:

$$BF = \frac{AB \sin A}{\sin\left(A + \frac{B}{2}\right)}; \quad AE = \frac{AB \sin B}{\sin\left(B + \frac{A}{2}\right)}.$$

Trebuie deci să arătăm că:

$$\sin A \sin\left(B + \frac{A}{2}\right) > \sin B \sin\left(A + \frac{B}{2}\right).$$

Putem scrie succesiv:

$$\sin A \sin\left(B + \frac{A}{2}\right) - \sin B \sin\left(A + \frac{B}{2}\right) =$$

$$= \sin\frac{A}{2}\left(2\cos\frac{A}{2}\right)\sin\left(B + \frac{A}{2}\right) - \sin\frac{B}{2}\left(2\cos\frac{B}{2}\right)\sin\left(A + \frac{B}{2}\right) =$$

$$= \sin\frac{A}{2}[\sin B + \sin(A + B)] - \sin\frac{B}{2}[\sin A + \sin(A + B)] =$$

$$= 2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2} - 2\sin\frac{B}{2}\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2} +$$

$$+ \sin(A + B)\left(\sin\frac{A}{2} - \sin\frac{B}{2}\right) = 2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\left(\cos\frac{B}{2} - \cos\frac{A}{2}\right) +$$

$$+ \sin(A + B)\left(\sin\frac{A}{2} - \sin\frac{B}{2}\right) > 0.$$

Așadar, pentru $\hat{A} > \hat{B}$, avem $\cos\frac{B}{2} > \cos\frac{A}{2}$, $\sin\frac{A}{2} > \sin\frac{B}{2}$.

Mai departe, dacă $BC > AC$, atunci din condiția problemei:

$$\frac{BF}{AE} = \frac{BC}{AC}, \quad \frac{\sin A \sin\left(B + \frac{A}{2}\right)}{\sin\left(A + \frac{B}{2}\right)\sin B} = \frac{\sin A}{\sin B}, \quad \sin\left(B + \frac{A}{2}\right) =$$

$$= \sin\left(A + \frac{B}{2}\right) \Rightarrow \hat{A} + \frac{\hat{B}}{2} = \hat{B} + \frac{\hat{A}}{2},$$

ceea ce contrazice condițiile problemei (ar rezulta $\hat{A} = \hat{B}$),

sau $\left(\hat{A} + \frac{\hat{B}}{2}\right) + \left(\hat{B} + \frac{\hat{A}}{2}\right) = 180°$, de unde $\hat{A} + \hat{B} = 120°$ și deci $\hat{C} = 60°$.

Unghiurile triunghiului sînt deci $\hat{A}$, $60°$, $120° - \hat{A}$, care formează o progresie aritmetică.

I. Se scriu medianele în funcție de laturi și se aplică teorema lui *Pitagora* în triunghiul format cu segmentele de mediane corespunzătoare și latura triunghiului.

II. În triunghiul ABC fie G centrul de greutate obținut ca intersecție a medianelor AD și BE. Fie $AC = b$, $BC = a$ și $GD = x$, iar $ME = y$.
Aplicînd teorema medianei în triunghiurile AGB, BDG, AGE, găsim:

$$4x^2 + y^2 = \frac{b^2}{4}; \quad 4x^2 + 4y^2 = c^2, \quad 4x^2 + 16y^2 = a^2.$$

Eliminînd pe x și y se găsește: $5c^2 = a^2 + b^2$.

Condiția de existență a triunghiului cu laturile a, b, c are forma:

$$5(a+b)^2 > a^2 + b^2.$$

Prima relație este satisfăcută pentru orice a, b, c, iar a doua devine

$$a^2 - \frac{5}{2}ab + b^2 < 0,$$

ceea ce implică:

$$\frac{1}{2} < \frac{a}{b} < 2.$$

4) Se scrie pentru fiecare ceviană în parte că, de exemplu, $AB + BA_1 = A_1C + CA$, etc. și se aplică reciproca teoremei lui *Ceva.*

5) Calcul direct în relațiile date, transformînd tangentele în raportul sinus/cosinus.

6) Se înlocuiesc mediana și simediana în funcție de laturi.

7) Se scrie suprafața $S = \frac{1}{2} ab \sin C$, se egalează cu forma dată, se înlocuiesc laturile prin forma dată de teorema sinusurilor.

8) Se aplică teorema sinusurilor și se ține seama că $\hat{A} = 60°$.

9) Se transformă relația dată conform formulei $\cos(m+n) = \cos m \cos n - \sin m \sin n$, și se ține seama de implicația geometrică a coliniarității centrului de greutate cu două din punctele de tangență ale cercului înscris.

10) Se înlocuiesc pe rînd h_a, r_b și r_c în funcție de laturi.

11) Se aplică teorema lui *Ceva*, ținînd cont de mărimea segmentelor determinate pe laturile opuse de cele trei ceviene particulare.

12) Același raționament.

13) Dacă $R = 3r$, se înlocuiesc apoi elementele implicate prin laturi, iar în relaţia precedentă se ţine seama că $abcp = 12S^2$.

14) Exprimare în funcţie de laturile triunghiului.

15) Se exprimă lungimile celor două bisectoare cu formula cunoscută şi se egalează.

16) Vezi capitolul VI.

17) Exprimare în funcţie de laturi.

18) Se exprimă segmentul OH în funcţie de elementele triunghiului deducîndu-se o relaţie între unghiuri.

19) Vezi problema 17.

20) Se ţine seama de mărimea razei cercului lui *Euler*.

21) Se egalează expresiile ce dau lungimile celor două bisectoare.

22) Se exprimă segmentele HA, HB, HC în funcţie de elementele triunghiului, găsindu-se în final o relaţie între unghiuri.

23) Se calculează pe rînd tg B, tg C în funcţie de laturi, ţinînd cont de unghiul particular care intervine în construcţia geometrică.

25) Se ţine cont de formula:

$$\cos A + \cos B + \cos C = 1 + \frac{r}{R}$$

şi de relaţia lui *Ţiţeica*:

$$p_0 R = pr.$$

26) Exprimare în funcţie de laturi.

[1] B r a d i s, V. M., ş. a., *Oşibki v Matematiscekih Rassujdeniah*, Izdatelstvo „Ucipedghiz", Moskva, 1959.

[2] C o u r a n t, R., R o b b i n s, H., . *Ce este matematica? Expunere elementară a ideilor şi metodelor*, Editura ştiinţifică, Bucureşti, 1969. (la p. 365 se află aşa-numita problemă a triunghiului lui *Schwartz*, şi anume: „Într-un triunghi ascuţitunghic, să se înscrie un alt triunghi de perimetru minim". Demonstraţi că triunghiul căutat este triunghiul ortic al triunghiului respectiv.)

[3] D r ă g h i c e s c u, D., L e o n t e, Al., V r a c i u, G., *Ghid de pregătire la matematică pentru concursul de admitere în învăţămîntul superior*, Editura Scrisul românesc, Craiova, 1976.

[4] D u m i t r e s c u, G h., *Algebra*, Manual pentru clasa a VIII-a. Editura de Stat Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1958.

[5] F r o d a, Al., *Eroare şi paradox în matematică*, Editura enciclopedică română, Bucureşti, 1971.

[6] G u i a ş u, S., ş. a., *Matematica şi informaţia*, Editura ştiinţifică, Bucureşti, 1965.

[7] I o n e s c u, Ţ i u, C., V i d r a ş c u, M., *Exerciţii şi probleme de trigonometrie*, Editura didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1969.

[8] L a l e s c u, T., *Geometria triunghiului* (traducere îngrijită de conf. univ. O. Sacter, după ediţia a II-a, apărută în limba franceză în anul 1937), Editura tineretului, Bucureşti, 1958.

[9] L e b e d e v, V. V., *Nekotorîie svoistva treugolnikov Napoleona.* În: „Matematika v şkole", nr. 6, 1962, pp. 64—67.

[10] L i d s k i i, V. B., ş. a., *Zadaci po elementarnoi matematiki*, Izdatelstvo Fizmatghiz, Moskva, 1962.

[11] L i u d m i l o v, D. S., *Zadaci bez cislovîh dannîh*, Izdatelstvo Ucipedghiz, Moskva, 1961

[12] M i h a l e s c u, C., *Geometria elementelor remarcabile*, Editura tehnică, Bucureşti, 1959.

[13] M i h ă i l e a n u, N. N., *Complemente de geometrie sintetică*, Editura didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1965.

[14] M i h ă i l e a n u, N. N., *Istoria matematicii* (Antichitatea. Evul Mediu. Renaşterea şi secolul al 17-lea), vol. 1, Edit. enciclopedică română, Bucureşti, 1974.

[15] M i h ă i l e a n u, N. N., *Lecţii complementare de geometrie*, Editura didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1976.

[16] P o l y a, G., *Matematica şi raţionamentele plauzibile*, vol. 1—2, Editura Ştiinţifică, Bucureşti, 1962.

[17] *** *Probabilitate şi informaţie*, Editura ştiinţifică, Bucureşti, 1966.

[18] Ţ i ţ e i c a, G., *Culegere de probleme de geometrie*, ed. a V-a, (revăzută de Gh. D. Simionescu), Editura tehnică, Bucureşti, 1965.

[19] *** *Despre activitatea extraşcolară la matematici a cercului „Dimitrie Pompeiu" de la şcoala medie no. 12, Spiru Haret, din Bucureşti.* În: GMF-B, nr. 8, 1961, pp. 501—503.

[20] V o d ă, V. Gh., *Stabilirea unor inegalităţi.* În: GMF-B, nr. 1, 1961, pp. 13—15.

[21] V o d ă, V. Gh., *Demonstraţii trigonometrice ale unor teoreme de geometrie.* În: GMF-B, nr. 2, 1961, pp. 88—91.

[22] V o d ă, V. Gh., *Din activitatea cercului de matematici pe capitală, pentru clasa a X-a.* În: GMF-B, nr. 5, 1961, pp. 310—312.

[23] V o d ă, V. G h., *Două inegalităţi*. În: GMF-B, nr. 1, 1962, p. 29.

[24] V o d ă, V. G h., *Observaţii la problema 5006*. În: GMF-B, nr. 1, 1963, pp. 35—36.

[25] W i e l e i t n e r, H., Istoria matematicii de la Descartes pînă la mijlocul secolului al XIX-lea, Editura ştiinţifică, Bucureşti, 1964.

Bibliografie auxiliară:

[26] I a g l o m, A. M., I a g l o m, I. M., *Probabilitate şi informaţie*, Editura didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1963.

[27] V o d ă, V. G h., *Gîndirea statistică — un mod de gîndire al viitorului*. Editura Albatros, Bucureşti, 1977.
([26] conţine referiri la lucrările lui C. Shannon privind teoria informaţiei, iar [27], conţine referiri la lucrările lui W.A. Shewhart privind controlul proceselor tehnologice)

CUPRINS

Lector : GHEORGHE FOLESCU
Tehnoredactor : MARIANA PUŞCAŞU

Bun de tipar 25.IV.1979. Apărut 1979.
Comanda nr. 1509. Tiraj 82.000 ex.
Coli de tipar : 12,5.

Comanda nr. 90 065
Combinatul Poligrafic „Casa Scînteii"
Bucureşti — Piaţa Scînteii nr. 1
Republica Socialistă România