EGMONT COLERUS

DE LA TABLA INMULŢIRII LA INTEGRALĂ

ÎN ROMÂNEŞTE DE:

Conf. univ. S. TELEMAN • Lector univ. C. TELEMAN

SUPRACOPERTA ŞI COPERTA DE:

HARY GUTTMAN

EGMONT COLERUS

DE LA TABLA ÎNMULȚIRII LA INTEGRALĂ

EDITURA ȘTIINȚIFICĂ
BUCUREȘTI, 1967

EGMONT COLERUS

VOM EINMALEINS ZUM INTEGRAL

MATHEMATIK FÜR JEDERMANN

Paul Zsolnay Verlag
Berlin, Wien, Leipzig, 1939

Matematica este ca o capcană. Cel prins în ea rareori găsește calea care să-l readucă în starea de spirit anterioară. Ar dura prea mult explicarea motivelor acestui fenomen caracteristic. De aceea vrem doar să stabilim consecințele lui.

Prima consecință a asemănării matematicii cu o „capcană" este marea lipsă de pedagogi ai matematicii. Foarte rar se întrunesc talentul la matematică cu expunerea clară a matematicii. De aici rezultă a doua consecință, și anume „complexul de inferioritate față de matematică" al unor pături largi de oameni instruiți sau dornici de a se instrui.

Nu vreau să fiu înțeles greșit. Nu vreau să atac ci, dimpotrivă, mă aflu eu însumi în situația de apărător, deoarece este ceva cu totul neobișnuit ca un laic să-și permită să expună cea mai riguroasă dintre toate științele.

Am observat propriile mele suferințe și suferințele colegilor mei de școală, de aceea am trecut la înfăptuirea intenției de a descrie felul în care am trăit matematica într-un stadiu relativ incipient al formării mele și trebuie să mă feresc eu însumi în mod conștient de „capcana" pe care o cunosc și din care peste cîțiva ani nu voi mai putea ieși.

Am mai avut un motiv hotărîtor care m-a determinat să întreprind această lucrare. Se știe că matematica, metodele matematice și întregul univers al noțiunilor matematice pătrund din ce în ce mai mult în toate științele și chiar în viața zilnică. Și este cu totul nesatisfăcător, aproape un scandal cultural, faptul că cititorul unei lucrări de nivel nu prea înalt se află dintr-o dată în fața unui noian de hieroglife, care îl înspăimîntă și-l îndepărtează; sau că el trebuie să se lase pe seama unui număr mic de inițiați, care-l tratează cu ironie. Nu mă refer în nici un caz la culmile teoriei relativității sau ale teoriei cuantelor, ci la lucruri care pot apărea în orice revistă de economie sau de medicină, fără a mai menționa statistica, care este din ce în mai matematicizată. Mai mult, matematica își croiește drum într-un mod mai puțin vizibil în limbajul de toate zilele. Găsim, de pildă, în gazete expresii ca „valori medii", „temperaturi medii", „acțiuni optime", „puncte critice", „cîmpuri de forță" ș.a.m.d., expresii care sînt împrumutate din matematică și din fizica matematică.

Nu este nicidecum necesar ca aceste cuvinte să fie considerate ca simple sunete sau ca în fața lor să ne simțim disprețuiți sau inculți, deoarece conținutul acestor cuvinte este tot atît de important pe cît este de figurat și tot atît de inteligibil pe cît este de accesibil învățării.

Desigur, se presupune o anumită străduință neîncetată pentru a învăța. Aproximativ cu 300 de ani î.e.n., cel mai mare geometru al Greciei, Euclid, întrebat fiind în Alexandria de regele său Ptolemeus Philadelphus dacă există o metodă „comodă" de predare a matematicii, a răspuns cu îndrăzneală: „În matematică nu există cale pentru regi". Din recunoașterea acestui adevăr nu rezultă însă cituși de puțin că trebuie să deznădăjduim și să ne dăm bătuți, deoarece între „calea pentru regi" și „ascensiunea Himalaiei" există, potrivit legii tranziției neîntrerupte și principiului continuității, nenumărate căi de mijloc.

Învățați eminenți și distinși, ca Georg Scheffers, S.P. Thompson și Gerhard Kowalewski, au înțeles pe deplin această situație și au încercat să construiască aceste trepte intermediare. Lucrările de inițiere ale acestor trei mari pedagogi reprezintă o contribuție de neprețuit la tezaurul culturii. Nimic mai departe de mine decît cutezanța de a concura fie cu plasticitatea minunată a exprimării lui Scheffers, fie cu precizia și eleganța fermecătoare a lui Kowalewski, ori cu umorul divin și bogăția conținutului din lucrările lui Thompson. Însă — și acest „însă" este hotărîtor — toate cele trei lucrări de inițiere citate, lucrări clasice ale genului, presupun ceva ce nu poate fi presupus dacă vrem să înlăturăm cu desăvîrșire „complexul de inferioritate față de matematică", și anume o pregătire la nivelul liceului sau cel puțin stăpînirea matematicii elementare. Cînd am început să învăț mai departe și am urmat cursul de matematică superioară și de statistică, care se ținea la Institutul federal austriac de statistică, am constatat prin proprie experiență cît de des, cu toată dragostea pentru matematică și cu toate cele învățate în liceu, ne lipsesc tocmai noțiunile elementare. Acest eveniment din viața mea a fost adevărata cauză care a declanșat prezenta încercare, cu deplinul respect mărturisit față de adevărata știință. Am învățat că există trei feluri de motive care îndeamnă la redactarea unei astfel de cărți, fie pentru uzul propriu, fie de a o primi ca ajutor din partea unui „coleg de școală".

În primul rînd se întîmplă ca doritorii de cultură, fie ei medici, economiști, comercianți, industriași, ziariști, naturaliști sau chiar militari, funcționari, muncitori, fete tinere sau școlari, să dorească să cunoască lumea noțiunilor „neplăcutei" matematici pe o altă cale decît aceea școlărească, să pornească de la tabla înmulțirii pînă la integrală pe alt drum, pentru a-și însuși ceea ce este mai general și, în acest mod să ajungă, la o anumită liniște interioară. Este posibil ca doritorii de cultură să aspire la mai mult. Atunci ei se vor putea lăsa, după modesta mea introducere, cu toată încrederea, pe mîna sigură a unui Scheffers, Thompson sau Kowalewski și pe această cale vor putea ajunge oricît de departe vor dori, pînă cînd vor cădea în „capcană" și nu vor mai înțelege nimic din risipa de cuvinte și din naivitatea mea. Acești cititori vor fi mîndria mea, chiar dacă ulterior mă vor disprețui profund. Se mai poate întîmpla ca școlarii să se servească de cartea mea ca de un auxiliar proscris. Pentru aceasta, rog pe toți pedagogii să-mi acorde iertare și să nu mă denunțe ca „corupător al tineretului". Declar acestor tineri că, incontestabil, în cazul contradicțiilor nu trebuie să mă creadă pe mine, ci pe profesorul lor de matematică.

Și pentru că am vorbit despre profesori, pentru mine este o datorie pe cît de plăcută, pe atît de imperioasă, de a mulțumi distinsului matematician Dr. Walther Neugebauer, care, în calitate de titular al cursului sus-menționat, m-a condus în adevăratul miez al matematicii și m-a făcut să înțeleg pe deplin adevărata măreție a acestei științe. Poetul Novalis a spus: „Viața zeilor este matematica. Toți trimișii zeilor trebuie să fie matematicieni... Matematicienii sînt singurii fericiți. Adevăratul matematician este un entuziast prin fire. Fără entuziasm nu poate fi nici matematică".

M-aș considera fericit dacă aș ști că am reușit să transmit cititorilor mei măcar o adiere a acestui spirit, deoarece, din păcate, „complexul de inferioritate față de matematică" produce, ca orice complex de acest fel, sentimentul urii și al resentimentului. Marea matematiciană greacă Hypatia, singura femeie căreia i s-a recunoscut un loc important în istoria matematicii, nu a fost, desigur, omorîtă cu pietre de plebe numai din fanatism religios, după cum nici eu, aşa cum consideră cîţiva duşmani consecvenţi şi necruţători ai matematicii, n-am făcut nici un serviciu marelui Leibniz, prin faptul că am cutezat şi — după opinia categoric exprimată a unor oameni cu adevărat competenţi — am reuşit să arăt că matematica a constituit punctul central al geniului său.

Voi încerca să combat prin lucrarea de faţă repulsia faţă de cea mai pură, aproape aş spune cea mai sfîntă dintre toate ştiinţele.

Şi acum voi expune pe scurt „distribuţia rolurilor" din cartea mea. În măsura în care acest lucru este posibil în matematică, ştiinţă care s-a înfăptuit prin conlucrarea mileniilor, am scris singur acest volum. Matematicianul Dr. Walther Neugebauer l-a parcurs după terminarea lui, pentru a linişti pe cititorii cu spirit critic, şi mi-a dat cîteva indicaţii preţioase. Nu vreau totuşi să atribui nici o responsabilitate acestui specialist, aceasta cu atît mai mult cu cît am urmat, poate prea adesea, sfatul matematicianului francez Pierre Boutroux, de a alterna metoda de predare.

Trebuie să mulţumesc, de asemenea, foarte mult şi pictorului Hans Strohofer, membru al Casei artiştilor din Viena, care nu a socotit mai prejos de demnitatea sa de artist consacrat de a desena, după indicaţiile mele, figurile din text.

Faptul că întreaga mea strădanie s-a putut realiza într-o epocă plină de dificultăţi şi opreliştí îl datoresc dragostei dezinteresate şi neabătute pentru cultură a prietenului şi editorului meu Paul Zsolnay şi sprijinului activ al prietenului şi sfătuitorului meu in artibus Director Felix Costa. Editarea conştiincioasă a cărţii şi străduinţa de a-i da o înfăţişare atractivă şi plăcută va constitui totuşi un merit chiar dacă dezertarea mea din domeniul artei pure se va dovedi un eşec.

Iar acum, deoarece nu se poate altfel, dat fiind că în matematică nu există cale pentru regi, trebuie ca cititorul împreună cu mine să lucrăm împreună, intens, pentru a ajunge de la înmulţire pînă la integrală. Sper că, în principiu, voi fi oferit posibilitatea pentru atingerea acestui scop. Adversarii mei vor avea apoi cuvîntul.

Viena, 8 sept. 1934

EGMONT COLERUS

CAPITOLUL I

„O ADEVĂRATĂ CABALĂ“

În sala de așteptare a medicului stă un pacient. El presimte că nu va fi primit curînd. De aceea se hotărăște să-și petreacă timpul citind. Pe masă sînt răspîndite tot felul de prospecte de stațiuni climaterice și linii maritime. Se simte deosebit de atras de o ilustrație care, după toate aparențele, redă oarecum întreaga măreție a mărilor Sudului și a orașelor tropicale. Pacientul deschide curios broșurica și rămîne dezamăgit, deoarece nu înțelege aproape nimic. Prospectul, care se pare că recomandă o linie maritimă spre America de Sud, este redactat — nici măcar de aceasta nu este sigur pacientul — în limba portugheză. Cu toate acestea pacientul nu renunță la studiu. Imaginile vapoarelor, ale porturilor sînt tot atît de frumoase pe cît sînt de lesne de înțeles. Încă ceva mai poate înțelege cititorul, fără a avea nevoie de o traducere: lungile coloane de cifre, asocierile de cifre, calculele intercalate în text, indicațiile referitoare la plecări și sosiri.

Știu, veți spune că exemplul meu este copilăresc, de la sine înțeles, dacă nu chiar naiv. Cine s-a îndoit vreodată că astăzi aproape toate popoarele civilizate folosesc aceleași semne pentru cifre? Ce ar putea fi aici de mirare sau problematic? Așadar, păcat de introducere. Într-un text portughez cifra 3 are aceeași semnificație ca într-un text german sau englez. Iar înmulțirea $5\,214 \times 7 = 36\,498$ este și ea independentă de țara în care este efectuată. Și cu aceasta — punct !

Recunosc întru totul că nu se poate spune mai nimic împotriva acestei argumentări furioase și a rezultatului ei. Protestez numai împotriva faptului că acest raționament vrea să curme orice altă discuție. Afirm — dimpotrivă — că tocmai o analiză mai amănunțită a exemplului nostru pueril ne va face să pătrundem mai adînc în enigmele cele mai ascunse ale matematicii și ne va înlesni cunoașterea unui număr mare de noțiuni fundamentale.

Adversarul meu a scăpat ceva din vedere. Mai întîi, numai aparent procesul este același atunci cînd un german sau un portughez citește prospectul și mînuiește cifrele, deoarece portughezul întrebuințează alte cuvinte pentru cifre decît germanul. Iar englezul, francezul, suedezul — din nou altele. Această pronunțare diferită a cifrelor pătrunde adînc în tainele sistemului cifric. Așa, de exemplu, germanul spune pentru 24 *vier-und-zwanzig*, iar englezul, din contra, spune *twenty-four*, adică douăzeci și patru. Pentru optzeci francezul nu spune *octante*, ceea ce ar fi o continuare logică la *trente*, *quarante* ș.a.m.d., ci ne face surpriza reprezentării sub forma unei înmulțiri, adică *quatre-vingt*, ceea ce s-ar putea traduce cu „patru ori douăzeci".

Înainte de a lămuri mai îndeaproape aceste mistere aș mai vrea să vă previn asupra pericolului de a ne exprima în grupuri de cifre. De exemplu, este cunoscută păcăleala prin care cineva este rugat să scrie numărul unsprezece mii unsprezece sute unsprezece. Cine aude acest număr scrie cu seninătate 11 111, care se citește precum se știe unsprezece mii o sută unsprezece. Unsprezece mii unsprezece sute unsprezece trebuie scris corect 12 111, deoarece se adună 11 000 cu 1 100 și cu 11.

Constatăm deci, în primul rînd, că scrierea noastră cifrică internațională este legată condiționat de cealaltă scriere, literală, și se supune, în orice caz, cu totul altor legi. Scrierea cifrică este prin ea însăși numai o scriere a noțiunilor, în timp ce literele nu sînt apriori simboluri pentru noțiuni, ci pentru sunete: din acestea se formează apoi cuvintele care sînt simboluri ale noțiunilor. Noțiunea 3 cere un singur semn în scrierea cifrică. În transcriere literală obținem pe trei, în limba germană *Drei*, printr-o anumită asociere a literelor *d*, *e*, *i* și *r*. Pe franțuzește *trois* rezultă din combinarea a cinci litere.

Toate acestea nu reprezintă însă decît începutul discuțiilor noastre. Sîntem la poalele muntelui de cifre pe care vrem să-l escaladăm. Pînă acum am vorbit numai despre cifre și numere și de loc despre acea minunată construcție numită sistemul de numerație și care ar trebui să fie mîndria supremă a spiritului omenesc.

Adversarul meu îmi va face iar o obiecție ușor de ghicit. Va spune: „Dacă prin sistemul de numerație înțelegi ceea ce învață orice copil în primele clase ale școlii elementare, deci așa-numita scriere decadică sau sistemul zecimal, atunci lasă-ne mai bine în pace. Cunoaștem această scriere, o folosim zilnic și nu avem intenția să-ți stimulăm dorința de a scrie acordîndu-ți atenție. Dacă vrei să te apropii de teoria numerelor, de cercetările lui Gauss, Dirichlet, Dedekind, Kronecker și alți mari savanți, atunci află că închidem de pe acum cartea și o vom înapoia librarului. În acest caz nu ți-ai îndeplinit promisiunea de a nu face ipoteze și de a te limita la strictul necesar".

„Ai dreptate, dragul meu adversar" — este răspunsul pe care îl dau. „Nu te-ai gîndit însă la faptul că pentru mine discutarea tainelor sistemului de numerație nu este un scop în sine. Nu am cîtuși de puțin intenția de a preda un adevărat curs de teoria numerelor. Dar nici nu am intenția să explic numai de ce două mii cinci sute patrusprezece se scrie tocmai 2 514. Mai bine zis nu vreau să mă limitez la asemenea explicații. Pentru că nu am voie să presupun nimic trebuie să mă refer la ceea ce este în general cunoscut, pentru a putea face inteligibile chiar din primul capitol noțiuni matematice dificile. Acuma vreau însă să întrerup dialogul nostru și să continui logic cu cercetările".

Este cazul să cităm aici pe unul dintre cei mai mari oameni din istoria gîndirii: Gottfried Wilhelm Leibniz (1646—1716), panistoricul, atotștiutorul. După cum se știe, Leibniz a fost și unul din cei mai mari matematicieni, pionierul analizei infinitezimale, cunoscută și sub numele de calcul infinitezimal sau „matematici superioare". Leibniz însuși și-a numit teoria sa generală a simbolurilor („a semnelor cu înțelesuri" am putea spune popular) *cabbala vera*, adică o adevărată cabală. Presupun că toată lumea știe ce înseamnă cabală, cabalistic etc. Cabala cuprinde tot ce se referă la magie, vrăji, farmece, forțe mistice, legate prin cuvinte și simboluri. Iar semnele matematice fac parte integrantă din calculul cu simboluri al lui Leibniz, din orice teorie generală a simbolurilor.

Sînt conștient de faptul că această primă schiță a creației lui Leibniz nu poate fi înțeleasă dintr-o dată. De aceea vom simplifica la maximum ideile lui Leibniz, adaptîndu-le scopurilor noastre, și vom reține că însuși modul matematic de a scrie reprezintă o anumită magie, o „adevărată cabală". Ne mai putem clarifica gîndurile printr-o mică incursiune în istoria matematicii sau mai bine zis în istoria calculului cifric. Adversarul meu nu a avut dreptate cînd a vorbit cu atîta dispreț despre obișnuitul nostru sistem zecimal. Cel mai important și neprețuit merit al acestui sistem constă în faptul că el poate fi învățat de un elev din școala elementară. Din punct de vedere istoric, situația este însă cu totul alta. Exercițiile de astăzi ale elevului din școală elementară erau acum cîteva milenii subiecte de competiție pentru cei mai mari matematicieni. Pe atunci nu exista mecanismul așa-zis automat al sistemului numeric, adevărata cabală a scrierii corecte.

Îngăduiți-mi aici, înainte de toate, o mică digresiune. Am vorbit despre un mod corect de a scrie. Ne referearm la sistem ca un tot. Pe lîngă această semnificație adîncă a cuvîntului „mod de a scrie" atrag atenția că un cunoscător al tuturor semnelor magice matematice se descurcă ușor și sigur în aceste semne numai dacă respectă două reguli aparent banale. Mai întîi trebuie să scrie cît se poate de clar și citeț. Să nu mîzgălească, să nu amestece chestiuni diferite, să nu facă socoteli ajutătoare pe marginea hîrtiei sau în locurile libere. În al doilea rînd, începătorul — și acest stadiu de începător este de lungă durată în științele matematicii — nu are voie să-și piardă răbdarea și să sară etape intermediare sau să facă calcule mintale. Ne-am fixat definitiv asupra „cabalei", iar semnele magice trebuie să fie scrise. Dacă există cineva care pune mare preț pe efectuarea calculelor oricît de complicate, pe dinafară, atunci ar fi bine ca acel cineva să facă înainte de culcare calcule, să noteze rezultatele și a doua zi să le verifice pas cu pas cu ajutorul adevăratei cabale. Acesta este un sfat aproape sportiv. Profesorul de scrimă, antrenorul de tenis, profesorul de box își obligă la început elevii să execute fiecare lovitură cu mare precizie, fază cu fază. Stilul personal și tempo-ul individual se dezvoltă apoi de la sine, prin perfecționarea mișcărilor fundamentale; din păcate, tot așa se dezvoltă și superficialitatea și neglijența.

Să ne întoarcem iarăși la subiectul principal. Am amintit că operațiile cu cifre, care ne par astăzi lucruri simple, nu au fost întotdeauna considerate ca atare. Adevărata cabală a devenit bun obștesc al Occidentului de-abia în secolul al XII-lea al e.n. Amintim iarăși, simplificînd, că pe atunci își disputau rangul două școli de calcul, cea a abaciștilor și cea a algoritmiștilor. Abacul este străvechea „tablă de calcul" utilizată încă din antichitate. Să ne închipuim o tablă pe care sînt trase linii verticale. Fiecare coloană reprezintă o

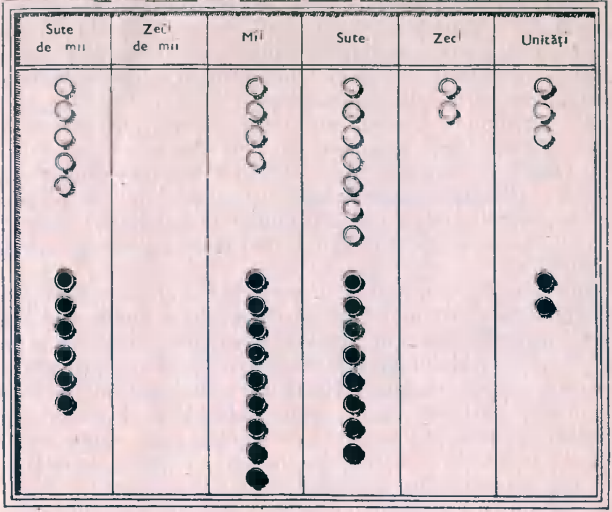


FIG. 1

anumită clasă de numere, și anume: unități, zeci, sute, mii ș.a.m.d. Pentru a socoti cu abacul trebuie să plasăm în fiecare coloană un număr corespunzător de *monede* sau de *tablete*. Să zicem că am avea de adunat pe 504 723 cu 609 802.

După cum se vede, prin numărarea tabletelor albe (primul număr) și negre (al doilea număr) ajungem la un rezultat corect, 1 114 525. În acest calcul cu abacul nu se folosește încă zero. În afară de aceasta mai trebuie luat în considerație că 15 sute sînt echivalente cu o mie și cinci sute, că 14 mii înseamnă zece mii și 4 mii și că 11 sute de mii înseamnă un milion și o sută de mii. Nu vom insista mai mult asupra calculului cu abace. Vom recunoaște însă că „adevărata cabală“ a celeilalte școli, a algoritmiștilor, trebuia să cîștige competiția.

Am ajuns la un punct care necesită maximum de atenție din partea noastră. Anticipăm cu explicația unor cuvinte. Cuvîntul algoritm reprezintă o modificare a numelui lui Muhamed ben Musa Al-Horezmi. Acest matematician din Arabia de răsărit, cu numele de Al-Horezmi, era originar din Corasan și a trăit mai tîrziu în Bagdad. Între anii 800 și 825 ai e.n. a scris, între altele, o lucrare fundamentală asupra calculului cu semnele grafice ale numerelor sau cifrele indiene (așa-zise arabe), utilizînd sistemul pozițional. El cunoștea și zero-ul și l-a scris sub forma unui mic cerc. Pe diferite căi, prin Cruciade, dar și prin intermediul universităților arabe din Toledo, Sevilla și Granada, operele arabe în traducere latină au ajuns să fie cunoscute și de savanții occidentali și, o dată cu acestea, a devenit cunoscută și cartea lui Al-Horezmi despre cifrele indiene.

Repetăm: algoritmiștii au introdus în Occident, sub numele de „algoritm", sistemul pozițional cu cifrele indiene. Astfel s-a făcut primul pas spre „adevărata cabală", deoarece acum rezultatele calculelor nu mai erau date de abace greoaie, ci o scriere magică permitea efectuarea celor mai încîlcite și complicate operații, cu siguranță infailibilă. Pentru toată această magie nu era nevoie decît de cele zece semne de la 0 la 9, de o foaie de hîrtie, un condei și de tabla înmulțirii.

Astăzi este aproape imposibil să ne transpunem în dispoziția sufletească a calculatorilor care trebuiau să înmulțească pe 85 243 cu 9 621 nu pe abac ci pe un petic de hîrtie. Fiori de fericire trebuie să-i fi trecut pe respectivii calculatori. De cîte ori n-au avut impresia că au ajuns în vîrful turnului Babel, de unde cerul poate fi ușor atins cu mîna.

Sîntem însă siliți să ne reîntoarcem din această incursiune istorică în regiuni mai liniștite. Am înțeles de nevoie că cuvîntul algoritm înseamnă procedeu grafic de calcul pe baza unei anumite notații simbolice. În plus, totul se desfășoară într-un sistem închis care face aparent automat o parte din efortul de gîndire și ne permite accesul în domenii în care imaginația noastră este neputincioasă sau se pierde. Trebuie deci să cercetăm mai amănunțit originea puterii magice a acestui algoritm special numit sistem decadic sau zecimal.

SISTEMUL ZECIMAL

În primul rînd, ne va uimi simplitatea extraordinară a sistemului, menționată mai înainte. Tot materialul cu care vom avea de-a face este dat de cele zece simboluri pentru cifre. Dacă mai adăugăm și cîteva simboluri de legătură, ca de exemplu semnele „plus", „minus", „ori" și „de împărțit la" (+, −, ×, :) și, în sfîrșit, semnul egalității (=), înseamnă că stăpînim, în calitate de algoritmicieni destoinici, o mare parte a calculului numeric. Firește, arta noastră algoritmică mai conține o ipoteză esențială, aparent simplă, dar care este chiar cheia secretului, și anume sistemul pozițional.

Ca exemplu frapant de scriere nepozițională amintim cifrele romane. Să presupunem că un „algoritmist" din Roma ar fi rugat să adune pe MDCCCXLIX cu MMCXXIV. Chiar începînd de la zeci și unități ar fi pus în mare încurcătură, ar recurge la abac și ar trebui să recunoască că în fond nu stăpînește nici un algoritm. Un adept al algoritmului din sistemul indian nici nu și-ar da măcar osteneala să scrie numerele 1 849 și 2 124 unul sub celălalt. După cîteva secunde ar face cunoscut rezultatul adunării: 3 973.

Acum vrem să atacăm problema direct. Prin sistem pozițional înțelegem un anumit mod de a scrie numerele, în cadrul căruia orice cifră are altă valoare, în funcție de poziția pe care o ocupă în număr, chiar atunci cînd este vorba de aceeași *cifră*. Și într-adevăr, dacă respectăm regula valorilor descrescătoare de la stînga spre dreapta, cifra trei pe ultimul loc are valoarea 3, pe penultimul loc valoarea 30, pe antepenultimul loc valoarea 300, pe anteantepenultimul loc valoarea 3 000 ș.a.m.d. Despre fracțiile zecimale nu pomenim deocamdată nimic. Vom lucra pentru moment numai cu numere întregi, amintindu-ne de afirmația lui Kronecker că numerele întregi vin de la Dumnezeu, iar restul reprezintă opera omului.

Chiar din exemplul nostru cu numărul trei vedem că valoarea poziției cifrei crește de zece ori cînd ne deplasăm cu un loc de la dreapta spre stînga. De aici provine denumirea de sistem zecimal sau decadic. Numărul zece se numește baza sistemului.

Deși anticipăm foarte mult, am vrea totuși, pentru a simplifica expunerea ulterioară, să introducem o nouă noțiune. Și anume noțiunea de putere. Este vorba numai de înmulțirea unui număr cu el însuși, operație pentru care se utilizează o notație prescurtată. Deocamdată nu vrem să insistăm asupra „ridicării la putere“, ci vrem să clarificăm noțiunea folosind cîteva exemple. Zece ori zece se mai numește și „zece la puterea a doua“ și se scrie 10^2. Zece ori zece ori zece se numește și „zece la a treia“ sau „zece la puterea a treia“ și se scrie 10^3: $10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10^4$; $10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10^5$ etc. Bineînțeles că aceste numere mai pot fi și calculate. Așa, de exemplu, $10^2 = 100$, $10^5 = 100\,000$, $5^2 = 5 \times 5 = 25$, $6^3 = 6 \times 6 \times 6 = 216$ ș.a.m.d. Puterea întîi a unui număr se definește ca fiind egală cu numărul însuși, deoarece în acest caz numărul apare o singură dată ca factor în înmulțire. Așadar, $10^1 = 10$, $5^1 = 5$, $29^1 = 29$ ș.a.m.d. În cazul puterii întîi indicele unu de sus nu se mai scrie. Mai trebuie să definim încă o putere al cărei rezultat ciudat nu poate fi însă explicat aici. Și anume, puterea zero. Vom cere, în acest caz, ca numărul să nu apară de loc ca factor în înmulțirea cu el însuși. Aceasta înseamnă 10^0 sau, în cuvinte, zece la puterea zero. Oricine ar spune, și pe drept cuvînt, că această cerere este o adevărată absurditate. „Nu înmulți un număr, cu el însuși, fă o socoteală (adică o înmulțire) în care singurul factor permis, și anume numărul dat, apare de zero ori, adică niciodată. Spune-mi te rog rezultatul!“. Aceasta este problema. După cum am spus, deocamdată trebuie să vă rog să mă iertați și vă comunic că orice și absolut orice număr diferit de zero ridicat la puterea zero dă ca rezultat unu. Așadar, $10^0 = 1$, $25^0 = 1$, $275\,859^0 = 1$ și așa mai departe, cu orice mărime.

Deci repetăm: orice număr la puterea zero dă unu. Ridicînd numărul la puterea unu obținem numărul însuși. La puterea a doua — numărul înmulțit cu el însuși. La puterea a treia — numărul înmulțit cu el însuși și încă o dată cu el însuși etc. În particular, pentru numărul zece: $10^0 = 1$, $10^1 = 10$, $10^2 = 100$, $10^3 = 1\,000$, $10^4 = 10\,000$, ...

Studiind acest șir de numere, o persoană cu spirit de observație va remarca că, în cazul lui zece, numărul scris mic în dreapta sus (așa-numitul indice de putere sau exponent) indică numărul de zero-uri ale puterii corespunzătoare a lui zece. Desigur, o relație importantă și instructivă în sistemul de numerație. Dar nu vrem să ne mai pierdem vremea, ci vom ataca plini de curaj înălțimile și povîrnișurile sistemului de numerație. Căci acum dispunem de tot echipamentul necesar pentru cercetarea algoritmului cifric.

Cînd am studiat abacul am observat cu toții că orice număr al sistemului zecimal se compune dintr-o anumită cantitate de unități, zeci, sute ș.a.m.d. Acum ne vom da osteneala să găsim un mod de scriere potrivit, care să dezvăluie structura internă a oricărui număr, fără să fie nevoie să apelăm la greoiul abac (tabla de calcul). După toate cele spuse n-ar trebui să ne fie greu să descoperim acest mod de scriere. Este vorba de scrierea aditivă, care reprezintă o sumă de puteri. Expresiile savante nu trebuie să înspăimînte pe nimeni, căci un exemplu va lămuri imediat procedeul. Să presupunem că ar trebui să dezvoltăm pe 1 483 706 într-o asemenea sumă de puteri. Cu cunoștințele noastre de pînă acum sîntem în măsură să o facem. Vom scrie deci, deocamdată primitiv:

$$6 \times 1 + 0 \times 10 + 7 \times (10 \times 10) + 3 \times (10 \times 10 \times 10) +$$
$$+ 8 \times (10 \times 10 \times 10 \times 10) + 4 \times (10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10) +$$
$$+ 1 \times (10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10).$$

Vom observa, mai întîi, că orice număr înmulțit cu zero dă tot zero și deci, invers, pot să-l consider pe zero ca produsul dintre un număr oarecare și zero. Folosim aici intenționat această inversare pentru a completa sistematic suma în raport cu poziția zecilor. În afară de aceasta, vrem să mai facem și alte simplificări. Mai întîi vrem să renunțăm la semnul incomod $\times$ pentru înmulțire și să folosim în locul lui punctul, așa cum se obișnuiește în matematici. Apoi vom scrie expresiile din paranteză ca puteri. Și, în sfîrșit, vom observa că, în interiorul unei asemenea sume, cifrele care stau în fața puterilor se numesc coeficienți: 6, 0, 7, 3, 8, 4, 1 — pe scurt, cifrele din care se compune numărul dat — apar în sumă de puteri doar cu „coeficienţi". Această noţiune trebuie reţinută. În momentul de faţă nu putem spune nimic mai mult despre ea.

Aşadar, vom scrie aici, corect din punct de vedere matematic,

$$1\,483\,706 = 6\cdot 10^0 + 0\cdot 10^1 + 7\cdot 10^2 + 3\cdot 10^3 + 8\cdot 10^4 + 4\cdot 10^5 + 1\cdot 10^6.$$

Cu acestea a fost complet elucidată structura internă a sistemului zecimal poziţional. „Discuţia", adică dezbaterea problemei, cu tot pericolul de a plictisi, nu vrem să o lăsăm pe seama cititorului, ci o vom susţine împreună cu el. Observăm, mai întîi, că am păstrat aşa-numita ordine a mărimilor. Puterile lui zece se succed în sumă în ordinea 10^0, 10^1, 10^2, 10^3 etc.; coeficienţii nu modifică cu nimic această succesiune. Numărul $9\cdot 10^0$ (adică $9\cdot 1 = 9$) trebuie să rămînă la stînga lui $0\cdot 10^1$ (adică $0\cdot 10 = 0$), deoarece acest zero pe locul zecilor arată că în număr există cel puţin 10 zeci, dat fiind că nici un număr nu trebuie să înceapă cu zero. Ca exemplu, să luăm numărul 109, care sub formă de sumă se scrie ca $9\cdot 10^0 + 0\cdot 10^1 + 1\cdot 10^2$. Am amintit deja că 10^0 este egal cu 1. Mai departe, este limpede că, teoretic, suma poate fi prelungită pînă la nesfîrşit. Aceasta înseamnă că nu există nici un număr atît de mare încît să nu poată fi scris sub forma unei asemenea sume de puteri crescătoare ale lui zece, cu coeficienţi adecvaţi. Desigur, orice sumă de acest fel poate fi transcrisă ca număr în sistemul cu baza zece. $5\cdot 10^0 + 7\cdot 10^1 + 0\cdot 10^2 + 8\cdot 10^3 + 9\cdot 10^4 + 3\cdot 10^5$ nu este altceva decît numărul 398 075; pentru convingere repetăm în cuvinte: cinci unităţi, 7 zeci, zero sute, 8 mii, 9 zeci de mii, 3 sute de mii. Menţionăm abia aici, în mod intenţionat, că un sistem de numeraţie perfect mai presupune că aşa-numitele „clase" (puterile lui zece) pot fi exprimate verbal, cu cuvinte adecvate (zece, sută, mie etc.). Condiţia nu este riguros îndeplinită în sistemul nostru. Este ciudat că avem denumiri proprii numai pentru 10^1, 10^2 şi 10^3, adică zece, sută, mie. Zece mii şi o sută de mii sînt asocieri prin înmulţire. 10^6, sau milionul, are iarăşi denumire proprie. O mie de milioane (10^9), sau miliardul, este următoarea expresie proprie. Urmează apoi puterile milionului, bilionul ($1\,000\,000^2 = 10^{12}$), trilionul ($1\,000\,000^3 = 10^{18}$), cvadrilionul ($1\,000\,000^4 = 10^{24}$), cvintilionul ($1\,000\,000^5 = 10^{30}$) ş.a.m.d. După părerea mea, cauza acestei neregularităţi o constituie necesităţile practice, apărute istoric. Banii şi organizarea armatei nu necesitau decît denumiri pînă la mie. De-abia averea lui Marco Polo a impus necesitatea introducerii noţiunii de milion. Unităţile extrem de mari (bilionul etc.) sînt numite şi în vorbirea curentă „cifre astronomice" şi îşi trădează astfel geneza şi domeniul de aplicabilitate.

Repetăm în concluzie: sistemul zecimal, sau sistemul decadic, împreună cu sistemul poziţional, constituie un algoritm. El ne permite să efectuăm deocamdată, cu foarte mare uşurinţă, toate calculele de adunări, scăderi, înmulţiri şi împărţiri, cu regulile pe care le cunoaştem încă din şcoala elementară. Sistemul zecimal constă din simboluri proprii de noţiuni complet distincte de litere şi care reprezintă valorile de la 0 la 9. Baza sistemului este numărul ce urmează după 9, numită zece şi scrisă 10. Pentru următoarele „clase" (puteri ale lui zece) există, uneori, expresii proprii, ca sută, mie, milion, miliard etc.

Ne-am ridicat atît de sus în cunoaşterea numerelor, încît avem o privire de ansamblu asupra tuturor ramificaţiilor sistemului zecimal. Ne aflăm însă foarte departe de culme. Ce vom vedea cînd o vom atinge? Există şi alte perspective? Sau acest munte de cifre este numai un podiş, o întindere izolată de piatră?

Să poposim şi să medităm. Cu ocazia aceasta ne vin în minte idei tulburătoare. Ce semnificaţie are faptul că în limba germană se folosesc cuvintele *elf* (unsprezece) şi *zwölf* (doisprezece) [1], iar apoi spunem *dreizehn* (treisprezece), *vierzehn* (patrusprezece) ş.a.m.d.? Ce semnificaţie are enigmaticul *quatre-vingt* al francezului? Din punctul de vedere al sistemului zecimal acestea sînt perturbaţii, excepţii. Nu încape nici o îndoială în această privinţă. *Quatre-vingt* (de patru ori douăzeci) are o asemănare structurală frapantă cu patruzeci, iar *elf* şi *zwölf* par o continuare directă a numerelor de la 1 la 10. La prima vedere, aceste denumiri par că nu se potrivesc. De ce nu spunem în loc de *elf*, *einzehn* şi în loc

---

[1] În limba germană *elf* şi *zwölf* au denumiri speciale, diferite ca structură de cea a numerelor cuprinse între doisprezece şi douăzeci, astfel încît în textul original întrebarea are sens. — *N. T.*

de *zwölf*, *zweizehn*[1]? De ce este chiar zece baza sistemului nostru de numerație? Se deosebește oare zece prin ceva de celelalte numere? Este oare sistemul zecimal de origine divină? Sau acest sistem își are originea în faptul că omul are 10 degete la mîini și că strămoșii noștri numărau la început pe degete?

Nu vom lăsa însă pe cititori să se frămînte prea mult. De aceea le vom șopti: teoretic, sistemul cu baza zece nu se deosebește prin nimic, dar absolut prin nimic, de un sistem de numerație cu orice altă bază. Istoria a cunoscut și sisteme de numerație cu baza 60, cu baza 5, 20, și 12. Marele Leibniz a descoperit în 1690, la Roma, cel mai ciudat sistem, sistemul cu baza doi (diadic sau aritmetica binară), în care se folosesc numai cifrele 0 și 1. De fapt *quatrevingt* este în realitate un rest anacronic al unui sistem celt de numerație cu baza 20 (degetele de la mîini și de la picioare) și care s-a strecurat și în limba franceză.

---

[1] *Einzehn* s-ar traduce mot-a-mot „unu și zece", iar *zweizehn* „doi și zece" și ar fi formate conform regulii de alcătuire în limba germană a denumirilor lui treisprezece, patrusprezece etc. — *N.T.*

CAPITOLUL III

SISTEMELE DE NUMERAȚIE CU DIFERITE BAZE

Deoarece cunoaștem acum atît de bine structura, construcția sistemului zecimal, vom încerca cu tot curajul să stabilim noi înșine un alt sistem [1]. Vom alege mai întîi o bază mai mică decît zece, de exemplu numărul 6. Vom construi noul algoritm strict după modelul sistemului zecimal, pentru a vedea cît de departe putem ajunge. Mai întîi, foarte simplu și evident: în sistemul zecimal aveam zece semne, zece simboluri pentru cifre, și anume: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Vom deduce deci că pentru sistemul nostru cu baza șase ne vor ajunge șase cifre: 0, 1, 2, 3, 4, 5. Cum vom scrie acum numerele șase, șapte, opt, nouă? Să ne gîndim la seria de puteri. Baza la puterea întîi se scria 10^1. Sau pur și simplu 10. Era deci primul număr cu două cifre. De aceea și în sistemul nostru cu baza șase vom nota baza cu 10, dar, în cazul de față, această notație are semnificația șase, nu zece.

Vom înainta pas cu pas și vom scrie întîi primele douăzeci de numere din sistemul zecimal, iar dedesubt primele douăzeci de numere — deci aceleași numere ca valoare — din sistemul cu baza șase.

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20
1, 2, 3, 4, 5, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 30, 31, 32

După cum se vede, această notație este o consecință directă a faptului că în sistemul respectiv nu putem scrie în alt mod, căci numai cu cinci cifre și zero numărul șase nu poate fi scris altfel decît 10. La fel ca atunci cînd dispunem de nouă cifre și de zero, numărul doisprezece nu poate fi scris altfel decît 12.

Să trecem acuma la studiul claselor. În notația sistemului zecimal, acestea au valorile 6^0, 6^1, 6^2, 6^3, 6^4 etc. Adică, tot în sistemul zecimal, valorile 1, 6, 36, 216, 1 296 etc.

---

[1] Un cititor mai puțin exersat poate renunța la toate amănuntele de calcul din acest capitol.

Se poate deci scrie imediat, sub formă de sumă, orice număr din sistemul cu baza șase: $2 \cdot 6^0 + 4 \cdot 6^1 + 0 \cdot 6^2 + 3 \cdot 6^3 + 5 \cdot 6^4$, ceea ce înseamnă: $2 \cdot 1 + 4 \cdot 6 + 0 \cdot 36 + 3 \cdot 216 + 5 \cdot 1\,296$; scris în notația zecimală, rezultatul va fi 7 154. Să observăm că, ca și în scrierea zecimală, „coeficienții" nu au voie să depășească baza, deoarece în caz contrar ordinea mărimilor ar fi încălcată și numărul nu ar putea fi transcris în sistemul cu baza șase. Acuma însă urmează pasul îndrăzneț. Vrem să transcriem numărul de mai sus în sistemul cu baza șase. În acest scop nu avem nimic altceva de făcut decît să scriem alăturat coeficienții, în ordinea puterilor descrescătoare. Așadar, în sistemul cu baza șase numărul se scrie 53 042. Deoarece aceasta nu înseamnă altceva decît $2 \cdot 6^0 + 4 \cdot 6^1 + 0 \cdot 6^2 + 3 \cdot 6^3 + 5 \cdot 6^4$! Și afirmăm că 53 042 (în sistemul cu baza șase) este egal cu 7 154 (în sistemul zecimal). Pentru convingere vrem să facem proba și să scriem ambele numere ca sume

7 154 (sistemul zecimal) $= 4 \cdot 10^0 + 5 \cdot 10^1 + 1 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10^3$
53 042 (sistemul cu baza șase) $= 2 \cdot 6^0 + 4 \cdot 6^1 + 0 \cdot 6^2 + 3 \cdot 6^3 + 5 \cdot 6^4$
sau $4 \cdot 1 + 5 \cdot 10 + 1 \cdot 100 + 7 \cdot 1\,000$ trebuie să fie egal cu
$2 \cdot 1 + 4 \cdot 6 + 0 \cdot 36 + 3 \cdot 216 + 5 \cdot 1\,296$.

Evident, afirmația de mai înainte este exactă, deoarece atît primul cît și al doilea rînd dau ca rezultat (în scrierea zecimală) numărul 7 154.

Să părăsim acum sistemul cu baza zece și să dezvoltăm numărul 53 042 (în sistemul cu baza șase) în suma sistemului propriu. Obținem atunci

$$53\,042 = 2 \cdot 10^0 + 4 \cdot 10^1 + 0 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10^3 + 5 \cdot 10^4,$$

unde 10 nu mai înseamnă zece din sistemul zecimal, ci are valoarea șase (6) din sistemul zecimal.

Vrem însă și mai mult, anume vrem să vedem dacă acest sistem cu baza șase se dovedește a fi un bun algoritm, adică dacă este potrivit pentru operațiile cunoscute: adunare, înmulțire ș.a.m.d. În acest scop trebuie să mai pregătim un auxiliar, și anume tabla înmulțirii în sistemul cu baza șase. La prima vedere, aceasta pare a fi un exercițiu de calcul al unei persoane care a înnebunit subit. Puțină gîndire și o privire pe rîndurile de cifre, precum și faptul că nu putem lucra decît cu șase semne pentru cifre, vor potoli repede spiritele.

Îndrăznim deci să scriem această tablă a înmulțirii diabolică:

1·1 = 1	2·1 = 2	3·1 = 3	4·1 = 4	5·1 = 5
1·2 = 2	2·2 = 4	3·2 = 10	4·2 = 12	5·2 = 14
1·3 = 3	2·3 = 10	3·3 = 13	4·3 = 20	5·3 = 23
1·4 = 4	2·4 = 12	3·4 = 20	4·4 = 24	5·4 = 32
1·5 = 5	2·5 = 14	3·5 = 23	4·5 = 32	5·5 = 41

Acum vom aduna, scădea, înmulți și împărți ca și cînd nu am fi auzit nimic despre sistemul zecimal. Mai întîi o adunare:

$$\begin{array}{r} 4\,325 \\ 5\,041 \\ \hline 13\,410 \end{array}$$

De cîte ori suma a două cifre este 6, trebuie să-l avem în minte pe zece. Deci 1 și cu 5 fac 10, rămîne unu. Patru și cu unu fac cinci, plus doi fac 11, rămîne unu. Zero plus unu fac unu, plus trei fac patru. Cinci plus patru fac treisprezece. Desigur că n-ar trebui să spunem zece, unsprezece și treisprezece ci poate șase, unspreșase și treispreșase. Dificultatea constă deci în modul de exprimare. Dacă am avea cuvintele potrivite pentru clase, atunci orice sistem este tot atît de ușor de mînuit ca și cel zecimal. Acum o scădere:

$$\begin{array}{r} 5\,201 \\ -\;3\,544 \\ \hline 1\,213 \end{array}$$

În cuvinte: unsprezece fără patru fac trei, rămîne unu. Patru plus unu fac cinci. Cinci scăzut din zece (șase) fac unu, rămîne unu. Cinci plus unu fac zece (șase), scăzînd rezultatul din doisprezece obținem doi, rămîne unu. Trei plus unu fac patru. Scăzut din cinci rămîne unu.

Acum înmulțirea promisă, în care ne vom folosi de tabla înmulțirii.

$$\begin{array}{l} 3425\cdot 31 \\ \hline 15123 \\ \quad 3425 \\ \hline 155055 \end{array}$$

Înmulțirea vrem s-o verificăm prin transcriere și recalculare în sistemul zecimal

3 425 (sistemul cu baza șase) $= 5\cdot6^0+2\cdot6^1+4\cdot6^2+3\cdot6^3=809$ (sistemul zecimal),

31 (sistemul cu baza șase) $= 1\cdot6^0+3\cdot6^1 = 19$ (sistemul zecimal).

Înmulțirea în sistemul zecimal ne dă

```
  809·19
   7281
  -----
  15371
```

Dacă am calculat corect și dacă este adevărată ipoteza noastră că legile algoritmului în sistemul cu baza șase sînt aceleași ca și în cel cu baza zece, atunci 15 371 (în sistemul cu baza zece) trebuie să fie egal cu 155 055 (în sistemul cu baza șase), adică dezvoltat în sumă $1\cdot10^0+7\cdot10^1+3\cdot10^2+5\cdot10^3+1\cdot10^4=5\cdot6^0+5\cdot6^1+0\cdot6^2+5\cdot6^3+5\cdot6^4+1\cdot6^5$. Spre bucuria noastră, cele două sume sînt într-adevăr egale, fapt de care ne putem convinge ușor. Mai avem de verificat numai împărțirea în sistemul cu baza șase, pe care o vom expune imediat. Sîntem îndrăzneți și nu ne temem de numere mari. Atunci

```
2004013 : 425 = 2 413 (total în sistemul cu baza șase)
 3100
  1041
   2123
    000
```

După cum se spune, împărțirea s-a făcut exact. Desigur, și la împărțire trebuie să fim mereu atenți la faptul că avem de-a face cu sistemul cu baza șase, chiar de la prima încercare, necesară la orice împărțire, în orice sistem. Cînd începem o împărțire trebuie să ne întrebăm de cîte ori se cuprinde împărțitorul în deîmpărțit. În cazul de față, de cîte ori se cuprinde 425 în primul grup de cifre, 2 004? În sistemul zecimal am fi încercat cu patru. În sistemul cu baza șase trebuie să avem în vedere că 20 este, ca valoare, egal cu doisprezece, pe cînd cifra 4 are aceeași valoare în ambele sisteme.

Dat fiind că după 20 mai urmează un zero, pe cînd după 4 urmează 2, situația se prezintă ca și cum am avea de împărțit (în sistemul zecimal) pe 120 prin 42. Ar trebui deci să încercăm întîi cu 2. Pentru locul al doilea trebuie să facem încercări pentru 31 împărțit la 4. 31 înseamnă însă 19 în sistemul zecimal. Atunci scriem de probă 4, ș.a.m.d. De altfel, ca și în sistemul zecimal, la aceste încercări poate și trebuie să fie folosită tabla înmulțirii a sistemului, deci tabla înmulțirii „diabolice" [1].

Ca proaspeți specialiști în teoria numerelor, vrem să avem și deplină siguranță asupra corectitudinii împărțirii. Pentru aceasta există două căi. Prima constă în transcrierea întregii operații în sistemul zecimal, în care sîntem evident mai siguri. De data aceasta sîntem însă prea mîndri pentru a alege această cale banală. Vrem să fim cît se poate de siguri de algoritmul nostru. Vom conchide: școlarul care nu este sigur de împărțirea pe care a făcut-o face proba înmulțind cîtul cu împărțitorul și verificînd dacă obține deîmpărțitul în urma acestei operații. Schematic:

Deîmpărțitul: împărțitor = cîtul.
Împărțitorul × cîtul = deîmpărțitul.

Pentru că nu mai vrem să apelăm la sistemul zecimal și ne considerăm elevi pentru sistemul cu baza șase, vom înmulți (totul în sistemul cu baza șase) numerele

$$\begin{array}{r}
2413 \cdot 425 \\
\hline
14500 \\
5230 \\
21313 \\
\hline
2004013
\end{array}$$

Sîntem mulțumiți. Verificarea a reușit și am obținut deîmpărțitul. Adversarul nostru ne-a supravegheat de aproape și ne acuză de incorectitudine. El ne atrage atenția asupra faptului că nu am scris ca în schemă, împărțitorul de înmulțit cu cîtul, ci invers, cîtul de înmulțit cu împărțitorul. Deși toată lumea este de acord cu noi afirmînd că nu are importanță ordinea factorilor, deoarece $5 \cdot 4$ este egal cu $4 \cdot 5$, îi

[1] Datorită acestui fapt este de prisos să ne mai întoarcem, la fiecare încercare, la sistemul zecimal!

rămînem totuși recunoscători adversarului nostru și profităm de această ocazie pentru a face o mică digresiune.

Adunarea și înmulțirea sînt așa-numitele operații fundamentale. Ele reunesc și multiplică; generează o însumare, o sinteză. De aceea, în termeni științifici ele sînt numite operații sintetice. Spre deosebire de acestea, scăderea și împărțirea împuținează, descompun. Ele sînt numite operații analitice. Este evident — sau, mai prudent, este probabil — ca atît grupul operațiilor de însumare cît și grupul operațiilor de reducere să aibă proprietăți comune de grup. Totuși, pentru moment nu vrem să adîncim mai mult problemele. Vom folosi replica adversarului nostru numai pentru a stabili că, spre deosebire de scădere și împărțire, adunarea și înmulțirea au o proprietate foarte importantă, cunoscută tuturor: părțile lor componente, termenii, sau membrii lor, sau cum vrem să îi numim, pot fi permutate fără modificarea rezultatului. $5 + 4 + 7 = 4 + 7 + 5 = 7 + 4 + 5$ etc. De asemenea, $4 \cdot 5 \cdot 7 = 5 \cdot 7 \cdot 4 = 7 \cdot 5 \cdot 4$ etc. Regulă: în cazul operațiilor sintetice este valabil principiul comutativității termenilor. În cazul operațiilor analitice, care, în treacăt fie zis, conțin, la nivelul nostru, numai doi termeni, nu mai este valabil principiul enunțat mai înainte. Aceste două operații par orientate într-un singur sens. Este o deosebire fundamentală între a scădea pe 4 din 5 și pe 5 din 4. Tot aceeași deosebire este și între împărțirea lui 12 la 3 și împărțirea lui 3 la 12. Recunoaștem că în cazul nostru această digresiune pare o inutilă discuție pentru un lucru de la sine înțeles. De aceea trebuie arătat că există operații sintetice și analitice superioare, la care situația nu este chiar atît de simplă și merită o oarecare atenție.

Să ne întoarcem din nou la sistemul nostru de numerație. Încercările în sistemul cu baza șase ne-au făcut curioși. Sîntem într-adevăr convinși că magia algoritmului persistă, oricare ar fi numărul mai mic decît zece, ales ca bază; nimic nu ne-a demonstrat însă că un număr mai mare decît zece ar fi indicat și pentru un sistem pozițional. Din motive de strictă economie de calcul nu ne vom complica, alegînd pe 50 ca număr de bază. Desigur, aceasta ar fi cu putință, dar puterile lui 50 cresc cu o viteză uluitoare, astfel încît am pierde orice fel de control. În plus, ne-ar mai trebui, bineînțeles, tot atîtea semne pentru cifre cîte unități conține numărul de bază. De unde am putea lua aceste semne, dacă nu vrem să pierdem zile întregi inventîndu-le și învățîndu-le!

Ne mulțumim, deci, ca numărul de bază să fie mai mare decît zece și, ca veritabili cabaliști, îl alegem în acest scop pe 13. Aceasta și cu intenția de a demonstra că și un număr prim — adică un număr care nu se divide cu nici un alt număr întreg — poate fi bază a unui sistem. Să mai facem aici încă o observație. Numărul zece — baza sistemului zecimal — se împarte numai la 5 și la 2. Numărul 12 este însă divizibil cu 2, 3, 4 și 6. Din această cauză s-a propus de mai multe ori, cu toată seriozitatea, renunțarea la sistemul zecimal și înlocuirea lui cu un sistem cu baza 12. Avantajele ar fi inestimabile pentru sistemele monetar, de măsuri și greutăți, fără a mai socoti că împărțirea zilei în ore (cadranul ceasornicului), și a cercului în unghiuri, ar fi ușor de unificat cu sistemul cu baza 12. Un contraargument împotriva sistemului cu baza 12 ar fi faptul că avem 10 degete la mîini și în general construcția corpului omenesc, pentru care, în linii mari, sînt indicate numerele cinci și doi (ochi, urechi, brațe, picioare, degete). În plus, întregul sistem metric, cu multiplii și submultiplii lui zecimali, este legat de lungimea meridianului pămîntesc, deoarece metrul a fost definit, în timpul revoluției franceze, ca a zecea milioana parte a sfertului de meridian pămîntesc. Toate celelalte unități de măsură, ca litrul, kilogramul etc., sînt legate de metru, tot pe baza sistemului zecimal. Și, în sfîrșit, o coincidență cosmică — cea mai importantă constantă universală — viteza luminii — este aproximativ egală cu 300 000 km/s [1].

Există deci puține perspective ca să învățăm în curînd un alt sistem de numerație. Cu toate acestea ne vom ocupa puțin de sistemul în baza 13, mai mult din considerente de principiu, decît din motive practice. În primul rînd vom scrie, pentru comparație, unele sub altele primele cifre, de data

[1] Dacă am fi definit metrul în sistemul cu baza 12 ca 1/10 000 000 din sfertul meridianului pămîntesc, atunci viteza luminii în acest sistem ar fi fost de 26 ori mai mare, adică 260 000 „kilometri" ai sistemului cu baza 12. Deci nu am mai fi avut o cifră „rotundă".

aceasta primele 13 cifre din sistemul zecimal și din sistemul cu baza 13.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	10	11	12
16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
13	14	15	16	17	18	19	1A	1B	1C	20	21	22	23	24

În sistemul cu baza 13 avem nevoie, dacă ținem seama și de zero, de 13 semne pentru cifre; de aceea am apelat, după cum se poate constata, la literele latine majusculele A, B, C. În timp ce la sistemul cu baza șase unele cifre au fost eliminate și n-au apărut de loc în scriere, la sistemul cu baza 13 situația este contrară. Sistemul cu baza zece omite trei cifre ale sistemului cu baza 13 (A, B, C).

Și aici am putea scrie o tablă a înmulțirii „diabolică", în care $5 \cdot 8 = 31$ și $7 \cdot 7 = 3A$ etc.; lăsăm însă acest exercițiu, precum și constatarea $A \cdot B = 86$, pe seama acelor cititori care doresc să adîncească teoria sistemelor de numerație.

Totuși trebuie să justificăm într-un mod oarecare sistemul cu baza 13. În acest scop alegem o înmulțire. Și anume, înmulțirea lui 92B cu A7, ceea ce în jargonul sistemului cu baza 13 s-ar citi nouăsutedouăzecișibe de înmulțit cu azecișișapte. Atunci

$$\begin{array}{r} \underline{92B \cdot A7} \\ 7126 \\ \underline{4C6C} \\ 761CC \end{array}$$

În cuvinte: A ori B fac 86, rămîn 8. A ori 2 fac 17 plus 8 fac 22, rămîn 2. A ori 9 fac 6C plus 2 fac 71. Mai departe: 7 ori B fac 5C, rămîn 5 · 7 ori 2 fac 11 plus 5 fac 16, rămîne 1. 7 ori 9 fac 4B plus 1 fac 4C. Apoi urmează adunarea. Prima poziție: C. A doua poziție: 6 + 6 fac iar C. A treia poziție: C + 2 = 11, rămîne 1. A patra poziție: 4 + + 1 = 5 plus 1 fac 6. Poziția a cincea: 7. Rezultatul este 76 1CC.

Deoarece nu vrem să ne chinuim prea mult, vom risca o banalitate și anume vom face verificarea în sistemul zecimal. Prin dezvoltarea în sumă,

$$\begin{aligned}92B \text{ (sistemul cu baza 13)} &= B \cdot 13^0 + 2 \cdot 13^1 + 9 \cdot 13^2 = \\ &= 11 \cdot 1 + 2 \cdot 13 + 9 \cdot 169 = \\ &= 1\,558 \text{ (sistemul zecimal);}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}A7 \text{ (sistemul cu baza 13)} &= 7 \cdot 13^0 + A \cdot 13^1 = \\ &= 7 \cdot 1 + 10 \cdot 13 = 137 \text{ (sistemul zecimal).}\end{aligned}$$

Înmulțim acum în sistemul zecimal:

$$\begin{array}{r} 1\,558 \cdot 137 \\ 4674 \\ 10906 \\ \hline 2\,13446 \end{array}$$

În sistemul cu baza 13 rezultatul a fost 76 1CC, număr care trebuie să fie egal cu 213 446 în sistemul zecimal.

Înseamnă că: $C \cdot 13^0 + C \cdot 13^1 + 1 \cdot 13^2 + 6 \cdot 13^3 + 7 \cdot 13^4$ trebuie să fie egal cu 213 446 (în sistemul zecimal). Dacă transcriem în sistemul zecimal și calculăm puterile lui 13 obținem

$$12 \cdot 13^0 + 12 \cdot 13^1 + 1 \cdot 169 + 6 \cdot 2\,197 + 7 \cdot 28\,561 =$$

$$= 12 + 156 + 169 + 13\,182 + 199\,927 = 213\,446.$$

Cu aceasta am obținut rezultatul scontat și am demonstrat că și în sistemul cu baza 13, deci într-un sistem în care baza este un număr mai mare decît 10, rămîn valabile regulile de calcul ale sistemului pozițional. Trebuie însă să subliniem că un matematician nu ar considera valabilă o asemenea „demonstrație". În cel mai bun caz matematicianul ar spune că raționamentul nostru este o confirmare sau verificare. Totuși noi ne vom mulțumi cu „demonstrația" noastră fără mare valoare, deoarece în cazul de față ea este univocă și simplă.

Am ajuns dintr-o dată pe vîrful muntelui de numere. Truda ascensiunii, desișul spinos de cifre și calcule ne siliseră să stăm cu privirea în pămînt. Acum însă, după toate greutățile, după atîta transpirație și răbdare, putem să ne înălțăm privirile. Ce vedem oare? Vedem și bănuim nenumărate văi care toate seamănă cu valea sistemului zecimal și totuși se deosebesc de ea prin multiplicitate și mărime. Toate duc spre infinit, spre nemărginit. În toate văile există locuri și locușoare pentru toate numerele naturale. Și totuși, în fiecare vale floarea delicată a fiecărui număr crește în altă culoare și altă înfățișare...

Nu vrem însă să mergem prea departe cu comparația. Să ne mulțumim cu imaginea șederii noastre pe un vîrf, de pe care putem contempla toate sistemele de numerație poziționale. Am putut constata că oricare din aceste sisteme este un algoritm infailibil și de sine stătător, o mașină de gîndit și de calcul. Toate sistemele au aceeași structură: un anumit număr este ales ca bază; există tot atîtea semne pentru cifre, inclusiv zero, cîte unități există în numărul de bază; numerele sînt scrise în sistemul pozițional, adică orice cifră care apare în număr trebuie gîndită ca înmulțită cu acea putere a bazei care corespunde poziției cifrei în numărul dat. Poziției unităților îi corespunde misterioasa putere zero, iar oricărei poziții următoare o putere mai mare cu o unitate decît puterea poziției precedente. Puterile calculate explicit se numesc clase. Pentru calculul practic ar trebui ca fiecare clasă să aibă denumire proprie, măcar pentru puterile mici. În orice sistem există numere cu o singură cifră, cu două cifre, cu trei cifre etc. Numărul cifrelor dintr-un număr dat este totdeauna cu o unitate mai mare decît cea mai mare putere a bazei care apare în numărul dat. (În cazul lui 1 268, un număr cu patru cifre, puterea celei mai „înalte" poziții, poziția miilor, este puterea a treia, căci $10^3 = 10 \cdot 10 \cdot 10 = 1\,000$; în cazul lui 2 586 933, un număr cu șapte cifre, poziției milioanelor îi corespunde puterea 6, căci $10^6 = 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 1\,000\,000$ etc.) În orice sistem de numerație pozițional sînt valabile aceleași reguli de calcul pentru adunare, scădere, înmulțire și împărțire.

Înainte de a ajunge la ultimul rezultat al cercetărilor noastre în domeniul sistemelor de numerație, vrem să mai amintim că algoritmul — adevărata cabală — nu este numai premisa unui calcul laborios. Sistemul pozițional indian este și principiul fundamental al binecunoscutelor mașini mecanice de calcul, cu puteri magice, utilizate ca taxametre la automobile sau la casele de înregistrare din comerț. Adevăratele mașini de calcul folosite în bănci, contabilități, birouri tehnice etc., se bazează pe considerente din teoria numerelor. Nu este întîmplător faptul că tocmai Leibniz, pionierul adevăratei cabale, a fost cel care a construit în 1674 la Paris prima mașină de calcul, care conținea toate părțile componente principale și funcționa pe aceleași principii ca și mașinile moderne actuale[1].

Dar în afară de noțiunea de algoritm automat, corect determinat și util, a cărui însemnătate o înțelegem cu toții, vrem ca prin strădunța noastră să definim și alte noțiuni matematice fundamentale, care vor avea o importanță uriașă într-un stadiu avansat al cunoștințelor noastre: noțiunile de generalitate, de identitate structurală și de conservare a formei. Dat fiind însă că nu vrem să facem filozofia matematicii, vom deduce intuitiv aceste noțiuni teoretice din investigațiile efectuate pînă acum.

Am pornit de la sistemul zecimal pe care l-am considerat ca „un dar divin", dar pînă la urmă am constatat că era un sistem oarecare de numerație, din multe altele posibile. Totodată am găsit forma *generală* a unui sistem de numerație cu scriere pozițională. Am stabilit și reguli generale pentru un asemenea sistem, pentru care orice număr poate fi ales ca bază, reguli care nu sînt legate de un caz special, ci sînt valabile pentru orice sistem, deci reguli *generale*. Sistemele trebuie deci să fie identice ca structură, ceea ce se traduce în limbaj erudit prin „izomorfism". Iar conservarea formei sau „invarianța" înseamnă că pentru o anumită identitate de structură, un anumit grup de reguli nu se schimbă, deși forma concretă poate fi alta. Sistemul cu baza zece, cel cu baza șase, cel cu baza treisprezece și toate celelalte sisteme poziționale sînt identice ca structură. De aceea, de exemplu, regulile de înmulțire sînt aceleași pentru toate aceste sisteme. Sistemele poziționale sînt invariante în raport cu înmulțirea. Pentru înmulțire este indiferent sistemul în care o efectuăm. Ea parcurge totdeauna același drum și duce la același rezultat. Așadar, orice mașină de calculat ar putea fi adaptată pentru un sistem cu baza șase sau treisprezece, fără a i se modifica principiul, prin simpla înlocuire a cîtorva piese. În acest caz mașina ar furniza rezultatul transcris în noul sistem.

---

[1] Blaise Pascal are, mai degrabă, prioritatea în această privință — *N.T.*

Nu vrem, însă, să împingem prea departe aceste considerații; ar însemna să renunțăm la rigoare, deoarece cunoștințele noastre de matematică abia dacă depășesc pe cele ale unui elev de nouă ani.

Pe lîngă toate acestea au apărut pe neașteptate și îndoieli. Am amintit de sistemul diadic, inventat de marele Leibniz, și am constatat că, în acest sistem, tabla înmulțirii constă dintr-o singură egalitate $1 \cdot 1 = 1$. Această tablă a înmulțirii este deosebit de atrăgătoare pentru elevi. Noi sîntem însă îngrozitor de derutați, pentru că am afirmat că în orice sistem putem calcula după aceleași reguli. Cum putem să înmulțim dacă nu știm decît că 1 ori 1 fac unu?

Ne mai chinuie o întrebare. Am vrut să calculăm cu cunoștințele noastre actuale cîte numere cu două, trei, patru, zece cifre, există într-un sistem cu o bază oarecare; ne-am izbit de o mulțime de piedici.

Siliți de împrejurări, trebuie să ne mai îndeletnicim cu cifre și numere întregi, pînă cînd vom întoarce, în sfîrșit, spatele „teoriei numerelor" și ne vom îndrepta atenția spre așa-numita algebră — calculul cu numere generale; aici ne va înfiora pentru prima dată adevărata vrajă a formelor, marea cabală a matematicii.

CAPITOLUL IV

SIMBOLURI ȘI ORDINE

După privirea de ansamblu de pe neliniștitorul munte al cifrelor, vom coborî într-una din văi și vom pătrunde astfel într-o nouă țară fermecată a cantităților și formelor. Vom ataca plini de curaj una din problemele ce ne chinuiesc din ce în ce mai mult. Nu este mai mult decît ciudat faptul că am putut construi pas cu pas, dintr-un număr finit de simboluri pentru cifre, toată mulțimea numerelor naturale, pînă la infinit? Și nu ne-a îndemnat chiar Leibniz să credem în această posibilitate, chiar atunci cînd nu avem la dispoziție decît pe zero și pe unu?

De acum încolo ne vom plimba aproape fără excepție pe tărîmul cifrelor din sistemul zecimal indian, cu care sîntem familiarizați încă din copilărie. Vom admite aceasta de la bun început. Pentru a ne orienta bine mai departe, vreau să scriu pe o tăbliță oarecare chiar de la începutul drumului semnul magic 3 !. Ce poate să însemne această cifră cu semnul exclamării? Seamănă cu un ordin sever. Dar ce ne-ar putea porunci? Ce pot să mai fac cu o singură cifră? S-o divid, s-o modific, s-o măresc, s-o micșorez? Mă aflu oare la papuași, unde un sălbatic scoate sunete fioroase, nearticulate, însoțite de gesturi poruncitoare?

Puțină răbdare! vă voi răspunde eu. Am urmărit două lucruri cu semnul magic de mai înainte. Și anume, mai întîi să aprofundăm cunoștințele noastre în specificul formalismului matematic; în al doilea rînd să pregătesc de la început cheia vrăjită necesară pentru biruirea tuturor întrebărilor care ne frămîntă. Bineînțeles că ordinul poate suna și altfel: 1 !, 5 !, 25 !, 273 !, 102 077 !, tot atît de bine ca 3 !.

Înainte de a examina mai îndeaproape acest ordin ciudat, desemnat cu semnul exclamării, am vrea însă să trecem în revistă, în general, tipurile și scopurile ordinelor matematice. Și anume, pe neobservate am ascultat foarte cuminți de o serie întreagă de asemenea ordine matematice, dat fiind că eram obișnuiți cu ele încă din clasele elementare. Am stabilit că cifrele, sau numerele formate prin reuniuni de cifre, reprezintă imagini, sau semne, sau simboluri pentru anumite noțiuni de cantități. Apoi am vorbit despre un sistem și despre un procedeu ingenios de calcul — algoritmul. Această lume mai conține încă ceva: chiar ordinele! Și numai notarea și inteligibilitatea generală a acestor ordine ne-a dat posibilitatea să extindem cifrele pentru formarea unui sistem și a unui algoritm. Dacă numim operații modurile de calcul am putea vorbi despre ordinele acestor operații și despre notarea lor în scris — simbolurile operațiilor. Pe scurt, un asemenea ordin poate fi numit și „operator". Totuși, în cele ce urmează noi vom folosi cuvîntul „ordin", prin care vom înțelege ordin matematic, o invitație la o acțiune matematică.

După cum recruților le vine la început greu să execute la o comandă concisă o serie de manevre complicate sau să se alinieze corect în formație de marș sau paradă, tot așa și nouă, recruți ai matematicii, ne vine deosebit de greu să înțelegem „ordinul" și să-l executăm întocmai. În această „disciplină matematică" nouă zecimi revin, însă, talentului matematic.

Conform planului nostru începem cu ceea ce este mai simplu. Vrem să executăm la comandă primii pași și exercițiii de salut din matematică.

S-ar putea ca cineva să fie surprins de această exprimare, iar adversarul meu mă va acuza din nou de exces de vorbărie. Nu am însă ce face, pentru că intenționez să clarific noțiunea de integrală tot așa de bine ca și pe cea de adunare. Și acest plan nu poate fi realizat pe o altă cale, lipsită de digresiuni. De altfel am mai vorbit despre ordine. Semnul plus este un ordin. Semnul de integrală este și el un ordin, ceva mai complicat decît semnul plus, dar în fond nimic altceva.

Adversarul meu își astupă urechile. Bănuiește că vreau să vorbesc chiar acum despre integrală. Eu vreau doar să-l încurajez. De altfel nici nu vreau să merg mai departe de adunare, din punctul de vedere al dificultăților esențiale.

Afirmăm categoric că adunarea este un ordin: $5+4=9$. Ce înseamnă aceasta? Aceasta înseamnă: „Dragă prietene, ia cinci unități și mai adaugă-le încă patru unități!" O mică pauză pentru operația respectivă. Apoi? Apoi se scrie un simbol, așa-numitul semn de egalitate, ceea ce nu înseamnă altceva decît: „Raportez supus, am dat ascultare ordinului".

„Ei, şi?" întreabă cel care porunceşte. Urmează răspunsul: „După executarea ordinului apare în dreapta un nou simbol, numit *nouă*". „Bine, poţi pleca!"

Deoarece comparaţia mea ar putea irita spiritele mai delicate vom părăsi cazarma şi vom vorbi mai abstract. Şi scăderea este un ordin, ca şi înmulţirea şi împărţirea. Acum ştim cu toţii că un ordin matematic poate presupune operaţii încurcate, ca de exemplu împărţirea unor numere cu mai multe cifre în sistemul cu baza treisprezece. Chiar faptul că trebuie să se calculeze într-un anumit sistem este un ordin matematic, ca şi ridicarea la putere.

Vedem deci că dispunem de destul de mult material pentru a ilustra noţiunea de ordin matematic. De aceea ne întoarcem la punctul de la care am pornit, la acel semn aparent echivalent cu semnul exclamării. Ce înseamnă 3! în termeni matematici? Cei pregătiţi vor răspunde, că este vorba de „factorial de trei". Dat fiind că nu vrem chiar să ignorăm termenii de specialitate vom confirma că într-adevăr este vorba de factorial de trei. Vom tălmăci însă acest termen în limbajul de cazarmă şi al „bucătăriei" noastre. El glăsuieşte astfel: „unu de înmulţit cu doi, de înmulţit rezultatul cu trei, rezultatul de înmulţit cu patru, totul cu cinci şi aşa mai departe, pînă cînd ultimul număr cu care înmulţim este numărul după care am scris semnul exclamării". Dacă scriem semnul exclamării după unu, atunci nu mai avem de făcut nici o operaţie, ca şi în cazul ridicării unui număr la puterea întîi. Nu vom mai da nici o altă lămurire şi vom trece acum direct la calculul factorialelor cîtorva numere:

$1! = 1$	1
$2! = 1 \cdot 2 =$	2
$3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 =$	6
$4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 =$	24
$5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 =$	120
$6! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 =$	720
$7! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 =$	5 040
$8! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 =$	40 320
$9! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 =$	362 880
$10! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 =$	3 628 800
$11! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 =$	39 916 800
$12! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12 =$	479 001 600
$13! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12 \cdot 13 =$	6 227 020 800
$14! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12 \cdot 13 \cdot 14 =$	87 178 291 200
$15! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12 \cdot 13 \cdot 14 \cdot 15 =$	1 307 674 368 000
$16! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12 \cdot 13 \cdot 14 \cdot 15 \cdot 16 =$	20 922 789 888 000

Putem vedea că ordinul exprimat de semnul exclamării are consecințe uluitoare. Seria rezultatelor începe cu numere mici și crește brusc la numere care depășesc puterile imaginației. Factorial de 100 este un număr uriaș printre uriași, format din 158 de cifre.

Nu vrem să intrăm în subtilități prea precise, dar se observă ușor că șirul factorialelor are anumite trăsături comune cu exponențialele. Deosebirea constă în faptul că în cazul exponențialei apare ca factor același număr, pe cînd în cazul factorialelor se înmulțesc factori care cresc cu cîte o unitate. Pentru comparație vrem să ridicăm la o putere un număr cît de mic cu putință și să reamintim binecunoscutul exemplu cu tabla de șah. Povestea sună, pe scurt, astfel: un oarecare calif din Bagdad a oferit unui matematician posibilitatea de a cere orice își dorește. Învățatul, cu o figură smerită, spune: „Prea înălțate Calif, dorința mea este foarte mare. Vreau să fiu răsplătit în boabe de grîu. Și anume, în modul următor: vreau să capăt atîtea boabe de grîu cîte se obțin pe al 64-lea pătrat al tablei de șah, dacă pe primul pătrat punem o boabă de grîu, pe al doilea două boabe, pe următorul patru, și așa mai departe, dublînd numărul boabelor la fiecare pătrat". Califul a rîs în hohote și a asigurat îndeplinirea dorinței. A fost convins că matematicianul, cam smintit, nu și-ar putea face nici măcar o pîine din boabele cerute. Califul a fost însă adus repede la realitate. Cantitatea de grîu cerută însemna $1 \times 2 = 2$, $2 \times 2 = 4$, $4 \times 2 = 8$, $8 \times 2 = 16$, $16 \times 2 = 32$, $32 \times 2 = 64$, $64 \times 2 = 128$, $128 \times 2 = 256$ sau $(1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \ldots)$ și așa mai departe pînă la ultimul pătrat al tablei de șah. Dat fiind că tabla de șah are 64 de pătrate, numărul boabelor de pe ultimul pătrat este 2^{63}, ceea ce înseamnă

9 223 372 036 854 775 808.

Încercăm să explicăm ce înseamnă acest număr, arătînd că „pe ultimul pătrat al tablei de șah" trebuia pusă o cantitate de grîu care ar fi umplut un cub cu latura de 7,48 km, dacă admitem că un bob de grîu are un volum de 45,45 milimetri cubi. În acest caz un litru de grîu conține 22 000 boabe.

Califul a cerut să i se calculeze cîte cămile ar fi putut transporta acea cantitate de grîu, ceea ce a dus la concluzii înspăimîntătoare. Dacă admitem că fiecare cămilă poate duce

140 kg de grîu și că fiecare cămilă ocupă pe sol o suprafață cu lungimea de 5 m, atunci conchidem că este necesară o caravană de 2 303 539 469 744 cămile, care s-ar întinde pe o lungime de 11 517 697 348 720 m, adică peste 11,5 miliarde de kilometri. Lungimea acestei caravane reprezintă de 8 ori distanța de la Saturn la Soare, sau de 50 ori distanța de la Marte la Soare.

O ultimă explicație: recolta mondială de grîu între anii 1927 și 1931 a fost în medie de aproximativ 1 236 milioane de chintale anual; califul ar fi trebuit să plătească matematicianului 2 609 recolte anuale mondiale ale secolului douăzeci, obținute cu tractoare și îngrășăminte chimice, pentru a-și putea ține promisiunea.

Numărul boabelor era un număr cu 19 cifre. Cititorul poate să-și dea oarecum seama cam ce reprezintă un număr cu 158 de cifre, ca, de exemplu, factorialul lui 100.

CAPITOLUL V

ANALIZA COMBINATORIE

După această digresiune asupra creşterii valorii prin diferite „ordine" matematice, aparent simple, vrem să studiem puţin domeniul în care se calculează cu „factoriale": este acel domeniu al matematicii pentru care a fost definită noţiunea de factorial, produsul $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8$ şi aşa mai departe, notat printr-un număr urmat de semnul exclamării. Este o parte a algoritmului aşa-numitei analize combinatorii. Cuvîntul „a combina" ne este tuturor familiar, aşa încît nu ne vom chinui cu răstălmăcirea lui.

Nici de data aceasta nu avem nici pe departe intenţia să prezentăm o serie de definiţii sau afirmaţii — aşa cum s-ar proceda riguros matematic. Sîntem recruţi şi sălbatici şi descoperim tot ce ne interesează numai pe baza experienţei. Sînt conştient de privirea consternată a adversarului meu, de aceea mă grăbesc să rectific că matematica nu este o ştiinţă experimentală.

Să revenim la o problemă care a fost pusă. Cum este cu putinţă să construim din cele zece cifre ale sistemului de numeraţie cu baza zece, mulţimea infinită a tuturor numerelor din lume? Cine intuieşte cît de cît semnificaţia cuvintelor şi studiază şi numerele 123, 132, 213, 231, 312, 321 poate afirma că diferitele numere se formează prin „combinarea" cifrelor. Perfect! În toate sistemele amintite de noi, toate numerele se formează prin „combinări"! Amestecăm cifrele sau le schimbăm cu altele şi prin aceasta numărul capătă altă înfăţişare. Deocamdată nu vorbim de valoarea poziţională. Ne interesează numai modificările exterioare ale „portretelor numerelor", pentru a ne exprima mai plastic. Dacă medităm puţin constatăm că există mari deosebiri între modurile în care putem face combinările. În cazul numerelor formate din mai puţin de zece cifre folosim cel mult o cifră, cel mult două şi aşa mai departe pînă la 9 cifre pentru fiecare grup de numere formate dintr-un număr dat de cifre. În plus, putem să introducem aceeaşi cifră de mai multe ori, ca de exemplu în cazul lui 1 111 sau 1 212, sau 1 112 etc. În cazul numerelor cu zece cifre putem folosi toate cele zece cifre existente și le putem schimba între ele. De exemplu, 1 234 567 890 sau 1 347 658 092 etc. Există și numere cu zece cifre la care aceeași cifră se repetă de mai multe ori — de exemplu 1 000 000 000 sau 2 322 234 777. În cazul numerelor formate din mai mult de zece cifre, obligatoriu se repetă una sau mai multe cifre.

Am nimerit într-un adevărat viespar! Am impresia că acest prim pas în loc să ne lămurească, mai mult ne-a derutat. Cum am putea încătușa într-un algoritm acest haos de numere? La ce ne folosesc toate aceste „ordine" de vreme ce pe noi ne apucă amețeala? Cu experiența nu facem nimic. În cazul unui număr mare de cifre componente există atîtea posibilități de combinare — vom vedea aceasta mai tîrziu — încît chiar dacă am lucra fără întrerupere zi și noapte, timpul necesar pentru scrierea acestor numere ar fi comparabil cu vîrsta sistemului solar. Primul nostru algoritm al sistemului de numerație a devenit un „ucenic vrăjitor"[1] și se îneacă în apele sale proprii. Deci, totuși, un ordin! Treci imediat la colț!

Adevărata cabală poate fi învinsă tot prin cabală, vraja este distrusă de altă vrajă.

Să începem să combinăm și să gonim pe diavol cu ajutorul lui Belzebut. Vom ilustra însă totul cu exemple concrete, iar la sfîrșit vom verifica dacă am epuizat toate posibilitățile și am realizat deci o teorie completă a combinărilor.

---

[1] Aluzie la poezia cu același nume de J. W. Goethe. — *N.T.*

CAPITOLUL VI

PERMUTĂRI

O familie respectabilă din timpuri mai vechi era formată din doi părinți și doisprezece copii sănătoși și bine dezvoltați. Familia s-a strîns mulțumită la masa de prînz. Deodată unul din copii prinde curaj și începe să protesteze. Băiatul afirmă că primește totdeauna rămășițele supei, fiind defavorizat de locul pe care îl ocupă la masă. Familia este îngăduitoare și este obișnuită să aplaneze conflictele prin compromisuri. Fata în casă nu poate fi convinsă să schimbe ordinea servitului la masă, de aceea toată lumea hotărăște ca de acum încolo ordinea așezării la masă să fie în fiecare zi alta. Evenimentul stîrnește discuții aprinse și fiecare își exprimă părerea asupra timpului necesar pentru a epuiza toate posibilitățile. „Cîteva zile" sugerează un băiat. „Cîteva săptămîni" intervine o fetiță. În sfîrșit, părerea unanimă este că ar fi necesar un an. „Există o formulă pentru această problemă" declară fiul cel mare. „Și cum ai formula tu matematic problema noastră?" întreabă tatăl zîmbind. Băiatul gîndește puțin și apoi spune: „Dat fiind că este vorba de schimbarea ordinii la masă nu este indiferent dacă Eva stă lîngă Alphons sau dacă Alphons stă lîngă Eva. Sînt două cazuri distincte. În afară de aceasta nu vom forma grupuri. Noi, toți cei paisprezece, ne vom distribui altfel în jurul mesei. Ca și cum aș avea paisprezece obiecte — sau paisprezece elemente, cum se mai spune în matematică — și ar trebui să le aranjez de fiecare dată în altă ordine (succesiune). Acest mod de reordonare se numește permutare. Formula permutării este: factorialul numărului de elemente. Noi sîntem paisprezece, deci în cazul nostru factorial de paisprezece: 14 !" Tatăl aprobă mulțumit. În pauza dintre supă și felul doi copiii aduc creion și hîrtie, iar cei mai mari calculează înfierbîntați. Cît este de mare 14 !? Rezultatul este înspăimîntător, un număr drăcesc: 87 178 291 200. Ce putem face cu aceste miliarde de posibilități? În cît timp le-am putea realiza știind că anul are numai 365 de zile? Să împărțim la 365. Copiii calculează înfrigurați. Fără urmă de bănuială, Alphons, cel mai îndemînatic dintre frați, dă răspunsul. Rezultatul este 238 844 633. „Știi ce înseamnă asta?" exclamă consternat alt frate. „Înseamnă că am termina cu toate posibilitățile noastre de aranjare la masă abia în 239 milioane de ani. Ne trebuie 119 milioane de ani dacă ne așezăm la masă de două ori pe zi, de fiecare dată în altă ordine, și aproape 60 milioane de ani dacă mîncăm la masă de 4 ori pe zi! „Voi muri înainte de a primi o porție cumsecade de supă" se plînge mezinul.

Cu acest exemplu am vrut să ilustrăm enormitatea numărului de permutări posibile, puterea extraordinară a factorialului. Avem deci material nou și îl vom explora sistematic.

Mai întîi, pentru liniștirea cititorului: familia de care am vorbit, înspăimîntată de rezultatele analizei combinatorii, a găsit totuși o cale mai simplă pentru a satisface cererea, de altfel îndreptățită, a fiului cel mai mic. I s-a spus fetei în casă să înceapă în fiecare zi servitul de la același scaun, indiferent de persoana care stă pe scaun. Toată familia se „deplasa" însă zilnic în jurul mesei cu un scaun, în sensul rotirii acelor unui ceasornic. Din punctul de vedere al mesenilor, ordinea relativă la masă era aceeași. Dacă alegem însă masa ca sistem de referință, atunci în fiecare zi ordinea era alta. Datorită acestei soluții, fiecare membru al familiei era o dată la cincisprezece zile primul în ordinea servirii supei.

Din punct de vedere matematic avem într-adevăr de-a face cu paisprezece permutări distincte și vom scrie cîteva din ele:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14 (prima zi)
2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 1 (a doua zi)
3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 1, 2 (a treia zi) etc.
14, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13 (a paisprezecea zi)
1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14 (a cincisprezecea zi

Aceste paisprezece cazuri (primul și al cincisprezecelea reprezintă de fapt una și aceeași situație) au fost obținute pe o altă cale, a așa-numitelor permutări ciclice, din cele 87 178 291 200 permutări posibile.

În exemplul anterior am desemnat cu numere locurile de la masă pe care mesenii le schimbă între ei. Am fi putut desemna aceste locuri cu litere scrise în ordinea alfabetică. Bineînțeles că această numerotare nu are nici o legătură cu ordonarea după mărime, ci este ceva analog cu numerotarea locurilor într-o sală de spectacol. Obiectele care trebuie permutate puteam să le desemnăm cu culori, cu nume, cu niște semne oarecare, care să ne permită să le distingem. Asemenea „semne" sau „indicatori" utilizați pentru a marca niște obiecte, pentru a le putea distinge unele de altele, se numesc „indici". Acest rol de ordonatori atribuit numerelor sau literelor, definit, de altfel, de Leibniz, are o importanță din ce în ce mai mare în matematică. Vrem să clarificăm acum o problemă dificilă. Am afirmat că obiectele sînt echivalente și că numerele, sau indicii, sau cum vrem să-i numim, nu au semnificație ca mărime. Cu toate acestea spunem că obiectul notat cu numărul doi este „mai mare" decît obiectul notat cu numărul unu. Mai corect ar fi să spunem: obiectul 2 are un indice mai mare decît obiectul notat cu 1. În fond, obiectul 1 este echivalent cu obiectul 2, în orice caz sînt echivalente din punctul de vedere al mărimii [1]. Iarăși ne-am ciocnit de o problemă cabalistică — cea a ordonării. Nici n-am putea raționa sau scrie dacă nu am avea un criteriu oarecare de ordonare a indicilor — de exemplu mărimea lor. Alfabetul ar fi mai corect și mai puțin echivoc pentru indicarea obiectelor, căci cifrele își poartă automat în spate valoarea lor. Litera „*d*" este mai „mare" decît „*a*" și în consecință „obiectul *d*" este mai mare decît obiectul „*a*" [2].

Datorită acestei definiții a rangului indicelui putem ajunge la o noțiune importantă pentru toate problemele de analiză combinatorie, și anume cea de „bună ordonare" [3]. Un șir de permutări este „bine ordonat" dacă este scris, de exemplu, sub forma

$$abc,\ acb,\ bac,\ bca,\ cab,\ cba$$

sau cu cifre

$$123,\ 132,\ 213,\ 231,\ 312,\ 321.$$

---

[1] Putem lua în considerație și cazurile în care obiectele sînt de mărimi sau au valori diferite, dar vom face abstracție de această însușire a lor. Esențială pentru noi este numai proprietatea lor de a fi obiecte distincte.

[2] Aceasta este așa-numita ordonare lexicografică!

[3] Prin „bună ordonare" se înțelege în matematică, deobicei altceva. Vezi, M. Nicolescu, *Analiza matematică*, vol. II, Ed. Tehnică, București, 1958, p. 139. — *N.T.*

Am menţinut cît mai mult cu putinţă „elementul mai mic" pe locul său; pe această cale nu putem omite nici un caz de permutare, parcurgem tot şirul permutărilor, de la „cea mai mică" la cea mai mare, prin „bună ordonare"; ca dovadă că am încheiat sistemul obţinem la sfîrşit prima permutare, scrisă în ordinea inversă. În prima permutare orice obiect era precedat de un obiect mai mic, pe cînd în ultima permutare orice obiect este precedat de un obiect mai mare. Nu aş vrea să-mi zăpăcesc cititorii, dar trebuie să remarc faptul că la citirea unei permutări de obiecte ca permutare de numere (de exemplu, permutare a indicilor), celei mai mici permutări, conform bunei ordonări, îi corespunde cel mai mic număr; pe cînd celei mai mari permutări îi corespunde cel mai mare număr (123 ... 321). Între aceste două permutări se ordonează, după mărime, toate numerele ce se pot forma cu cifrele 1, 2 şi 3.

Vom renunţa deocamdată la această analogie şi vom considera din nou indicii, abstracţie făcînd de valoarea lor. Pentru noi 123 reprezintă, ca şi 321 sau 213, o permutare oarecare a cifrelor 1, 2 şi 3.

Să vedem de ce ne dă atît de sigur şi precis „ordinul" „factorial", adică 3 urmat de semnul exclamării, răspunsul la problema aflării numărului permutărilor posibile de trei obiecte. Să enunţăm deocamdată, de dragul „completitudinii sistemului", un non-sens logic. Am mai întîlnit o asemenea formulare în cazul ridicării la puterea 0 sau 1. Ne întrebăm cîte permutări putem realiza cînd avem la dispoziţie un singur obiect. Mai clar: „să ordonăm bine un singur obiect pînă epuizăm toate posibilităţile de permutare". După o meditaţie îndelungată vom scrie plini de mîndrie: numărul permutărilor este 1! (unu factorial). Exprimat cu cuvinte aceasta înseamnă: pentru a obţine rezultatul trebuie să înmulţim între ele toate numerele naturale începînd de la 1 pînă ajungem la 1! E limpede că rezultatul va fi tot 1.

După acest abuz de logică să socotim prudent mai departe. Ce se întîmplă la permutarea a două elemente? Să scriem în bună ordonare

$$ab \qquad ba.$$

Nu încape îndoială: am scris toate permutările, de la cea mai mică la cea mai mare. Să ne ascuţim mintea ca să putem ajunge la formula cunoscută. Ce am făcut? Am menținut cît a fost cu putință pe a pe locul său și, între timp, am permutat pe b. Apoi am adus pe b pe primul loc și l-am permutat pe a. În concluzie am permutat de două ori cîte un singur element. Există o singură permutare realizabilă cu un singur element, de unde deducem că numărul permutărilor de două elemente este $1 \cdot 2$, sau, în notația noastră, $2!$, factorial de doi, iar rezultatul este 2.

În cazul a trei elemente obținem

$a\ b\ c$	$b\ a\ c$	$c\ a\ b$
$a\ c\ b$	$b\ c\ a$	$c\ b\ a$

Aplicăm din nou metoda noastră și constatăm că am menținut pe primul loc, pe rînd, fiecare dintre cele trei elemente a, b și c și între timp le-am permutat pe celelalte două. Numărul permutărilor de două elemente este $1 \cdot 2$; înseamnă că trebuie să înmulțesc acest număr cu 3. Pentru trei elemente numărul permutărilor este $1 \cdot 2 \cdot 3$ sau $3!$ sau factorial de trei, adică numărul șase. În cazul a patru elemente,

$a\ b\ c\ d$	$b\ a\ c\ d$	$c\ a\ b\ d$	$d\ a\ b\ c$
$a\ b\ d\ c$	$b\ a\ d\ c$	$c\ a\ d\ b$	$d\ a\ c\ b$
$a\ c\ b\ d$	$b\ c\ a\ d$	$c\ b\ a\ d$	$d\ b\ a\ c$
$a\ c\ d\ b$	$b\ c\ d\ a$	$c\ b\ d\ a$	$d\ b\ c\ a$
$a\ d\ b\ c$	$b\ d\ a\ c$	$c\ d\ a\ b$	$d\ c\ a\ b$
$a\ d\ c\ b$	$b\ d\ c\ a$	$c\ d\ b\ a$	$d\ c\ b\ a$

Nu vom mai repeta tot raționamentul. Pe scurt, am menținut pe rînd, pe primul loc, cîte un element, atît cît a fost cu putință, și între timp am permutat pe celelalte trei. Am avut la dispoziție patru elemente, așadar am realizat de patru ori permutări de trei elemente: $4 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3$ sau $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4$ sau $4!$ sau factorial de patru și rezultatul este 24.

Dacă am continua, am constata prin analogie că permutările de un număr dat de elemente se obțin calculînd factorialul numărului respectiv de elemente. Numărul permutărilor de zece elemente este $10!$, al permutărilor de 75 de elemente este $75!$, de 3 124 elemente este $3\,124!$, etc. pînă la infinit.

S-ar putea întîmpla ca nu toate elementele sau indicii să fie distincți, ci unii indici să fie egali între ei. De exemplu, trebuie să combin între ele în aşa fel trei mere, două pere şi o cireaşă pentru a realiza toate grupările posibile cu aceste trei fructe; nu fac distincţie între fructele de acelaşi fel. Ceea ce înseamnă că permutarea „para 1, para 2, para 3, mărul 1, cireaşa, mărul 2" nu este distinctă de permutarea „para 3, para 1, para 2, mărul 2, cireaşa, mărul 1" sau de permutarea „para 2, para 1, para 3, mărul 2, cireaşa, mărul 1" etc. Dacă notăm toate merele cu *a*, perele cu *b* şi cireaşa cu *c* obţinem, în buna ordonare, ca primă permutare, *a a b b b c* şi ca ultimă permutare *c b b b a a*.

Ne-ar lua prea mult timp să deducem formula acestor permutări cu repetiţie. Vă rog să mă credeţi pe cuvînt dacă dau formula de-a gata. În cazul nostru: numărul total de permutări, adică 6!, trebuie împărţit la produsul factorialelor numerelor de elemente ce se repetă, adică 2!, 3! şi 1!. Scris sub formă de fracţie $\frac{6!}{2!\,3!\,1!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}{1 \cdot 2 \times 1 \cdot 2 \cdot 3 \times 1} = 60.$

Se pot realiza 60 de grupări diferite cu fructele noastre. Pentru cititorii cu talent la matematică subliniez că această formulă a permutărilor cu repetiţie este mai generală decît cealaltă. La orice permutare pot să întreb de cîte ori se repetă fiecare element. În cazul a cinci elemente distincte, de exemplu, pot să scriu fără ezitare că numărul permutărilor este $\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{1!\,1!\,1!\,1!\,1!}$, dat fiind că fiecare element apare o singură dată în permutare. După cum se constată, se obţine un rezultat exact. Prima noastră formulă devine un caz particular al celei de-a doua, mai generale.

Pentru a încheia studiul permutărilor, mai dăm un exemplu. Care este numărul permutărilor *a b b b b c*? Evident $\frac{6!}{1!\,4!\,1!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}{1 \times 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \times 1} = 30.$

Un cititor mai exersat va observa că dacă fac abstracţie de semnul exclamării, atunci suma cifrelor de la numărător trebuie să fie egală cu suma cifrelor de la numitor. Lucrul este clar, deoarece, mai întîi, scriu la numărător factorial din numărul total de elemente şi apoi scriu la numitor factorialele subgrupărilor formate din aceleaşi elemente.

S-ar mai putea spune multe lucruri despre permutări, mai există multe probleme care ar mai putea fi lămurite. Dat fiind că permutările nu sînt forma cea mai generală de combinații din analiza combinatorie, vom încheia constatînd că în cazul permutărilor unui număr dat de obiecte trebuie folosite toate elementele pentru a realiza grupări, care diferă între ele prin ordinea aranjării elementelor. Dacă m-ar interesa numai compoziția grupării, nu și ordinea elementelor în grupare, atunci aș putea forma o singură grupare din toate elementele pe care le am la dispoziție. Permutarea reprezintă o amestecare a obiectelor, o intervertire a lor.

COMBINĂRI ÎN SENS RESTRÎNS

Vom vedea imediat că propoziția de mai înainte am formulat-o cu o anumită intenție. Vrem să studiem îndeaproape un al doilea tip posibil de combinări și vom aborda această problemă nu teoretic, ci pornind de la exemple; de aceea, ne vom întoarce la binecunoscutul caz al familiei compuse din 14 persoane. O vom surprinde într-o zi de sărbătoare, după masa de prînz, în căutarea unei distracții. Cineva propune un joc de cărți și, cu această ocazie, își amintesc cu toții de numărul enorm de aranjări posibile la masă; toți se întreabă cît timp ar fi necesar pentru a epuiza toate posibilitățile unei partide zilnice de taroc, nu în privința posibilităților de distribuție a cărților, ci a combinării jucătorilor. Ne referim la partide cu patru persoane, în ipoteza că se joacă zilnic o partidă și că la fiecare partidă iau parte de fiecare dată alți patru jucători din cele 14 persoane posibile.

Sîntem intimidați și nu îndrăznim să facem ipoteze. Poate că ar fi nevoie de milioane de ani! În orice caz, este mai bine să ne încredem în cabală, în algoritmul analizei combinatorii, înainte de a face încercări fără rezultate. Fiul cu talent la matematică din familia sus-amintită afirmă imediat că este vorba de „combinări în sens restrîns". În limbaj matematic, paisprezece persoane sînt echivalente cu paisprezece obiecte, sau paisprezece elemente. Grupările de cîte patru pe care trebuie să le formăm din aceste 14 obiecte le vom numi cvadruplete. În cazul acestor grupări nu ne va interesa ordinea obiectelor dintr-o grupare dată, ci numai compoziția ei, căci considerăm că grupul format din tata, mama, Alphons, Eva este identic cu mama, tata, Eva, Alphons, sau cu Eva, tata, Alphons, mama etc. Putem calcula repede numărul de astfel de cvadruplete, căci avem la dispoziție un semn magic în acest scop, așa-numitul „coeficient binomial". În treacăt fie spus, această denumire nu are nici o legătură cu exemplul nostru. Dacă notăm numărul care ne interesează — cîte cvadruplete distincte se pot forma din 14 obiecte — cu C_{14}^4 (jos am scris numărul total de obiecte, sus am scris numărul obiectelor conținute într-o grupare) și citim „combinări de 14 luate cîte 4", atunci calculul se face după formula obișnuită $C_{14}^4 = \frac{14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$; rezultatul este 1 001, ceea ce înseamnă că pentru jucarea partidelor respective este nevoie de mai puțin de trei ani.

Toată lumea a prins curaj văzînd acest rezultat acceptabil, așa încît una din fetițe pune următoarea întrebare. „Din întîmplare sîntem șase fete și șase băieți în familie. Sînt curioasă cîte perechi distincte fată-băiat putem forma pentru dans. Și acesta ar fi un fel de combinări. Avem la dispoziție douăsprezece obiecte cu care formăm grupări de cîte două și în fond este același lucru dacă Alphons dansează cu Eva sau Eva dansează cu Alphons". „Ai dreptate Grete", răspunde fratele ei matematicianul. „Este vorba de combinări de perechi: vom da această denumire combinărilor de două elemente. Problema ta poate fi formulată într-un limbaj mai puțin elegant, dar mai simplu decît cel matematic, și poate fi rezolvată «băbește». Fiecare dintre cele șase fete poate dansa cu fiecare din cei șase băieți, deci o fată poate intra în șase combinații distincte. Există deci treizeci și șase de perechi distincte". „De ce mai avem nevoie de o formulă magică?" întreabă Eva. „În cazul de față calculul s-a făcut ușor. Am să-ți demonstrez însă că formula pe care tu o disprețuiești îți explică de ce faci așa calculul și confirmă socoteala făcută de noi. Notăm cu C_{12}^2 numărul perechilor distincte ce se pot forma cu 12 elemente. Dar să presupunem că luăm în considerație și perechile formate din doi frați sau două surori, adică și cazuri deosebite de al nostru. Noi impusesem condiția suplimentară să formăm perechi pentru dans, așadar am exclus perechile formate din parteneri de același sex. Dar și aceste perechi sînt cazuri posibile de combinări de două elemente și există șase elemente-frați și șase elemente-surori; adică C_6^2 perechi cu parteneri de același sex. Calculul este de fapt gata: $C_{12}^2 - C_6^2 - C_6^2 = C_{12}^2 - 2C_6^2 = \frac{12 \cdot 11}{1 \cdot 2} - 2\frac{6 \cdot 5}{1 \cdot 2} =$

= 66 — 30 = 36, adică exact rezultatul pe care l-am așteptat".

Ne vom aminti de noțiunile „indici" și de „buna ordonare", introduse cu ocazia studiului permutărilor, iar mai tîrziu vom explica mai pe larg semnificația „ordinului" C_{14}^4, C_{12}^2 etc. Vom presupune că există „singleți", adică grupări formate din cîte un singur element — adică din înseși elementele ce trebuie combinate. În sistemul *a b c d e f* există șase „singleți" și cu ei am epuizat posibilitățile de combinare. Grupurile de cîte două elemente le numim perechi; cele de trei elemente le numim tripleți; cele de patru elemente cvadrupleți; cele de cinci elemente cvintupleți, apoi în ordine crescătoare sextupleți, septupleți, octupleți.

În continuare, dat fiind că nu mai avem denumiri speciale, vom spune grupări de nouă, de zece, de douăzeci de elemente, de trei sute cincisprezece obiecte etc.

Deocamdată să formăm tripleți (grupări de cîte trei) din elementele 1, 2, 3, 4, 5, 6:

1 2 3	1 3 5	2 3 4	2 5 6
1 2 4	1 3 6	2 3 5	3 4 5
1 2 5	1 4 5	2 3 6	3 4 6
1 2 6	1 4 6	2 4 5	3 5 6
1 3 4	1 5 6	2 4 6	4 5 6

Un indiciu că am epuizat toate posibilitățile îl constituie următorul fapt: în bună ordonare pot să apară ultimele elemente în număr egal cu numărul de elemente ce intră într-o grupare; în exemplul de înainte, numerele 4, 5 și 6. Dacă ar fi trebuit să formăm perechi cu 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, prima pereche ar fi fost 12, ultima 89.

Vom vedea mai departe că, în combinări, nici un element „mai mare" nu poate sta înaintea unuia „mai mic". 42 nu poate fi realizat ca pereche în combinări, deoarece 24 a fost realizat cu siguranță mai înainte [1], iar aceleași numere nu au voie să apară cu diferite aranjări în mai multe perechi.

---

[1] Afirmația este valabilă numai cînd construim „sintetic" perechile. Pentru o realizare arbitrară a perechilor este suficient să nu mai repetăm niciodată perechea 42, dacă am scris-o o dată, nici măcar inversînd-o, ca 24.

Ca exercițiu să formăm și grupuri de cîte patru din elementele a, b, c, d, e, f, g:

abcd	*acde*	*adef*	*aefg*	*bcde*	*bdef*	*befg*	*cdef*	*cefg*	*defg*
abce	*acdf*	*adeg*		*bcdf*	*bdeg*		*cdeg*		
abcf	*acdg*	*adfg*		*bcdg*	*bdfg*		*cdfg*		
abcg	*acef*			*bcef*					
abde	*aceg*			*bceg*					
abdf	*acfg*			*bcfg*					
abdg									
abef									
abeg									
abfg									

Este limpede calea ce trebuie urmată pentru a forma grupările. Scriem primul cvadruplet format din primele patru elemente și înlocuim, în măsura posibilităților, ultimul element cu unul mai mare. În momentul în care nu mai putem face acest lucru „mărim" penultimul element și așa mai departe.

Numărul total de combinări posibile îl determinăm prin următorul raționament. Avem la dispoziție 6 elemente cu care trebuie să formăm perechi. Fiecare din aceste șase elemente trebuie combinat cu toate celelalte (6—1) elemente, adică cu 5 elemente. Am avea $6 \cdot 5 = 30$ de perechi, ceea ce înseamnă însă prea mult, căci cu această metodă obținem fiecare pereche de două ori, o dată ca „*a b*" și a doua oară ca „*b a*", deoarece combinăm fiecare element cu toate celelalte. Adevăratul număr de combinații este deci $\frac{6 \cdot (6-1)}{2}$ sau C_6^2, deoarece acest „ordin" înseamnă de fapt $\frac{6 \cdot 5}{1 \cdot 2}$. Dacă vrem să formăm grupări de cîte trei elemente atunci trebuie să combinăm fiecare pereche cu toate celelalte (6—2) elemente rămase, distincte de elementele din perechea dată. Numărul tripletelor este deci $\frac{6 \cdot (6-1)}{2} \cdot \frac{(6-2)}{3}$, deoarece și aici trebuie să anihilăm efectul permutării involuntare printr-o împărțire la trei.

Pe aceeași cale se poate merge și mai departe. Dat fiind că acum am înțeles metoda de calcul, vrem să scriem direct numărul cvintupletelor de zece elemente. Răspunsul este:

$$\frac{10 \cdot (10-1) \cdot (10-2) \cdot (10-3) \cdot (10-4)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = C_{10}^{5} = 252.$$

Vrem să examinăm acum, mai îndeaproape, cheia enigmei C_{10}^{5} sau C_{14}^{4}, sau ceva asemănător. Evident că aceste notații reprezintă de fapt un ordin. Acest operator de combinare, sau coeficient binomial, are proprietăți extraordinare. Și anume, ordinul poate fi executat în mai multe moduri. Unul din ele este cel prezentat pînă acum. Observăm, în primul rînd, că numărul de sus trebuie să fie totdeauna mai mic sau cel mult egal cu cel de jos. Prin această condiție subînțelegem următoarea frază: „Transformă semnul magic într-o fracție ordinară sau împărțire, punînd la numitor factorialul numărului de sus iar la numărător un produs de factori, fiecare mai mic cu o unitate decît precedentul, cel mai mare egal cu cifra de jos din notația C_{10}^{5}, și numărul factorilor să fie egal cu cifra de sus". Sună foarte complicat, de aceea dăm urgent cîteva exemple:

$$C_{17}^{6} = \frac{17 \cdot 16 \cdot 15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} \quad \text{sau} \quad C_{8}^{7} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7}$$

$$\text{sau} \quad C_{19}^{2} = \frac{19 \cdot 18}{1 \cdot 2}.$$

Pe scurt: jos pornesc de la 1 și ajung pînă la numărul scris sus. La numărător pun tot atîția factori cît îmi indică numărul de sus, pornind de la cel de jos.

La același rezultat ajung pe altă cale. C_{17}^{6} pot să-l scriu ca și $\frac{17!}{6!\,(17-6)!}$. Aceasta înseamnă:

$$\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12 \cdot 13 \cdot 14 \cdot 15 \cdot 16 \cdot 17}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \times 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11}.$$

Oricine este puțin obișnuit să calculeze poate să observe că putem simplifica cu 11 ! și că rezultatul este o expresie identică cu cea dinainte. Numai că de data aceasta factorii de la numărător (de la 12 la 17) sînt puși în ordine crescătoare.

Mai obținem încă un rezultat, pe care vrem să-l lămurim pe un exemplu mai clar. Conform celei de-a doua metode, C_8^3 este $\frac{8!}{3!(8-3)!}$, adică $\frac{8!}{3!\times 5!}$ sau explicit $\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8}{1\cdot 2\cdot 3\times 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}$

și avem libertatea să simplificăm cu $1\cdot 2\cdot 3$ sau cu $1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5$. În treacăt fie spus, putem simplifica nu numai cu $3!$ sau $5!$, ci și cu alte cantități. Admitem însă că putem să simplificăm sau cu $3!$ sau cu $5!$. Dacă simplificăm cu $5!$ obținem $\frac{6\cdot 7\cdot 8}{1\cdot 2\cdot 3}$ sau, dacă inversăm ordinea scrierii, $\frac{8\cdot 7\cdot 6}{1\cdot 2\cdot 3}$, adică tocmai C_8^3 în prima formă. Dacă simplificăm cu $3!$ obținem, spre surprinderea noastră, altceva. Și anume:

$$\frac{4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} \text{ sau } \frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}.$$

Ce înseamnă oare aceasta? Ceva nu concordă în cele spuse. Conform primei interpretări, expresiile de înainte reprezintă C_8^5, fără nici un fel de îndoială. Rezultă oare că C_8^3 este egal cu C_8^5? Este posibil? În definitiv putem să calculăm și să verificăm:

$$C_8^3 = \frac{8\cdot 7\cdot 6}{1\cdot 2\cdot 3} = 56 \text{ și } C_8^5 = \frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} = 56.$$

Nu ne-am înșelat. Din punct de vedere combinatoric, cu 8 elemente putem forma tot atîți tripleți cîți cvintupleți. Și de asemenea, un număr egal de perechi și de sextupleți. Căci C_8^2 trebuie să fie egal cu C_8^6, dat fiind că în cea de-a doua interpretare $C_8^2 = \frac{8!}{2!(8-2)!} = \frac{8!}{2!\,6!}$, iar $C_8^6 = \frac{8!}{6!(8-6)!} = \frac{8!}{6!\,2!}$, rezultatul este același în cele două cazuri.

Acum știm că atunci cînd scriem o serie de asemenea „ordine", ca de exemplu C_9^1, C_9^2, C_9^3, C_9^4, C_9^5, C_9^6, C_9^7, C_9^8, primul operator este egal cu ultimul, al doilea cu penultimul, al treilea cu antepenultimul, al patrulea cu al anteantepenultimul.

Totdeauna este adevărată relația

$$C_{\text{numărul de elemente}}^{\text{numărul obiectelor din grupare}} = C_{\text{numărul de obiecte}}^{\text{numărul de obiecte minus numărul de obiecte din grupare}}$$

Explicitarea seriei scrise mai înainte ne-ar da: 9 singleți, 36 de perechi, 84 de tripleți, 126 de cvadrupleți, 126 de cvintupleți, 84 de sextupleți, 36 septupleți, 9 octupleți — exact așa cum s-a prevăzut. Această ciudată simetrie și regularitate ne vor interesa mai tîrziu, la așa-numita „formulă a binomului", cînd ne vor folosi pentru calculul puterilor unor sume.

Acum putem face „combinări". Mai sugerăm însă că numărul care ne indică numărul obiectelor din grupare este numit „clasa" combinării. C_5^3 înseamnă: „calculează într-unul din cele două moduri posibile acest număr și vei obține numărul combinărilor de clasa a treia din cinci elemente". Cu același algoritm ca cel anterior obținem și numărul combinărilor de clasa a doua din cinci elemente, dat fiind că $C_5^3 = C_5^{5-3}$, adică tot $C_5^3 = C_5^2$.

Sînt posibile și aici, ca și la permutări, așa-zisele „repetiții", numai că în acest caz au o altă semnificație. Corect spus, în cazul permutărilor este vorba de apariția repetată a unor obiecte notate sau desemnate la fel (pere, mere, mai mulți *a* sau mai mulți *b*, mai mulți 1 sau 3). În cazul combinărilor cu repetiție nelimitată ne este îngăduit să folosim fiecare obiect de cîte ori voim. Cu cele cinci elemente *a*, *b*, *c*, *d*, *e* putem forma tripleții

$$a\ a\ a,\ a\ b\ b,\ b\ b\ c,\ d\ e\ e,\ d\ d\ d \text{ ș.a.m.d.}$$

Deducerea formulei care dă numărul acestor combinări este greoaie și dificilă. De aceea vom prezenta direct rezultatul. Formula este

$$C^{\text{numărul clasei}}_{\text{numărul de elemente} + \text{numărul clasei} - 1}$$

Dacă ar trebui să formăm din opt elemente cvadrupleți cu repetiție, am scrie $C_{8+4-1}^4 = C_{11}^4 = \dfrac{11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 330$; numărul este mult mai mare decît cel al cvadrupleților formați din opt elemente fără condiția de repetiție; numărul acestora ar fi fost $C_8^4 = \dfrac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 70$.

În încheierea cercetărilor noastre asupra combinărilor în sens restrîns vrem să enunțăm încă un „ordin" absurd pentru

„completitudinea și conservarea sistemului". Ca recruți în ale matematicii trebuie să ne obișnuim cu asemenea ordine, pentru a ne întări disciplina. La militari nu există „imposibil", iar ordinul este ordin. Vrem să știm care este numărul combinărilor de un număr oarecare de elemente, de clasă zero, adică C_9^0. Evident că am pus o problemă bună pentru ospiciu sau pentru spiritiști. Enunțul ei cere să pun la numărătorul expresiei care dă rezultatul pe 9 de zero ori ca factor, micșorat de fiecare dată cu 1. În schimb, la numitor trebuie să scriu 0!. Adică toate numerele, începînd de la 1 și terminînd cu 0. Ultima cerere seamănă cu ordinul: escaladați muntele pînă ajungeți în valea de dedesubtul lui. O să-l gonim iarăși pe diavol cu ajutorul lui Belzebut; vom folosi și noi farmece. Mai există un exercițiu de casă de nebuni, de data aceasta mai puțin grav. Să calculăm combinări de un număr oarecare de obiecte luate toate la un loc. În cazul nostru C_9^9. Acest număr se poate calcula; este $\frac{9\cdot8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9}$ iar rezultatul este 1. Chiar și fără calcule era limpede că există o singură posibilitate de a forma dintr-un număr dat de elemente combinări de o clasă al cărei număr este egal cu respectivul număr de elemente. Acum „conservăm sistemul". Am observat că dacă ordonăm coeficienții binomiali ai unui număr dat de elemente după numărul claselor, atunci coeficienții egali depărtați de capetele șirului astfel format sînt egali între ei. Dat fiind că, în virtutea acestei proprietăți generale, $C_9^1 = C_9^8$, nu avem decît să ne gîndim unde ar trebui plasați C_9^0 și C_9^9. În șirul de coeficienți format mai sus C_9^0 este situat înaintea lui C_9^1, iar C_9^9 este situat după C_9^8. Deoarece știm că $C_9^9 = 1$, mai trebuie doar ca $C_9^0 = 1$ pentru conservarea sistemului. Algoritmul nostru ne-a adus pe tărîmuri pe care nu poate ajunge privirea omenească. Pe de o parte ne-am situat într-un domeniu în care mintea omenească nu-și mai poate crea imagini, iar pe de altă parte am obținut un rezultat precis și palpabil. Această observație a fost utilă numai pentru caracterizarea noțiunii de algoritm corect. Dacă înțelegem temeinic, o dată pentru totdeauna, această noțiune, atunci toată analiza infinitezimală, mult temutul calcul diferențial și integral, ni se vor părea un joc de copii, vesel și atrăgător.

Trebuie să mai verificăm și pe altă cale că relația îndrăzneață $C_9^0 = 1$ nu distruge sistemul. În acest scop vom folosi altă proprietate a ordinului, și anume faptul că $C_9^0 = C_9^{9-0}$, dat fiind că, de exemplu, $C_9^4 = C_9^{9-4} = C_9^5$. Examinînd relația $C_9^9 = C_9^{9-0}$ deducem de la prima vedere că este adevărată.

În încheiere, vrem să mai amintim încă o caracteristică a șirului de coeficienți binomiali ai unui număr dat de elemente. Suma acestor coeficienți binomiali este egală cu 2 ridicat la o putere egală cu numărul elementelor, în cazul nostru 2^9 sau 512. Dacă însumăm toate aceste rezultate obținem

$$1 + 9 + 36 + 84 + 126 + 126 + 84 + 36 + 9 + 1 = 512.$$

Observăm că în această sumă au fost incluse și C_9^0 și C_9^9. O nouă observație: dat fiind că numărul clasei variază de la 0 pînă la numărul de elemente cu care facem combinările, deducem că în cazul unui număr impar de elemente obținem un număr par de coeficienți binomiali, pe cînd în cazul unui număr par de elemente obținem un număr impar de coeficienți binomiali. În exemplul nostru au fost posibile clasele cu numerele 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, adică zece clase; de aici rezultă zece „ordine" și deci zece termeni în sumă. Dacă am fi avut la dispoziție numai patru elemente am fi putut realiza C_4^0, C_4^1, C_4^2, C_4^3, C_4^4, adică cinci (număr impar!) termeni în sumă. Suma coeficienților diagonali este $1 + 4 + 6 + + 4 + 1 = 2^4 = 16$. Coeficienții binomiali egali depărtați de centrul sumei sînt egali între ei. Numai șase din mijlocul sumei, adică C_4^2, joacă un rol dublu, ca un termen dublu. Și acest fapt poate fi explicat pe baza proprietăților numerelor pare. Combinări de 10 elemente luate cîte n, unde n este cuprins între 0 și 10, trebuie să conțină la un moment dat $C_{10}^{10/2} = = C_{10}^5$. Acest coeficient este egal cu C_{10}^{10-5}, adică egal cu C_{10}^5. În cazul unui număr impar de elemente nu poate apărea în mijlocul sumei un asemenea coeficient dublu, deoarece $C_{11}^5 = = C_{11}^{11-5} = C_{11}^6$, ceea ce este egal cu $C_{11}^{11-6} = C_{11}^5$. Nu există $C_{11}^{11/2}$, deoarece $11/2 = 5\,1/2$ nu este număr întreg și ca atare nu poate caracteriza o clasă.

CAPITOLUL VIII

ARANJĂRI

În studiile noastre de pînă acum referitoare la analiza combinatorie am examinat mai întîi cazul în care toate elementele trebuiau să fie folosite într-o combinație. Ele puteau fi mutate, rearanjate între ele și obțineam așa-numitele permutări. Am mai întîlnit și cazuri particulare de permutări, în care fiecare element putea să se repete de mai multe ori în fiecare grupare, apărînd în fiecare, bineînțeles, de un număr de ori cel mult egal cu numărul total de elemente pe care le permutam. În altă variantă am studiat combinările în sens restrîns; de data aceasta trebuiau formate grupări de un anumit număr de elemente și se considera că două asemenea grupări sînt distincte doar dacă se deosebesc prin compoziție (diferă prin cel puțin un element). Și la combinările în sens restrîns, numite simplu combinări, am întîlnit cazul particular al combinărilor cu repetiție, în care era permis să formăm grupări, repetînd același element. Ne mai rămîne posibilitatea de a forma grupări de elemente la care să fie importantă nu numai compoziția grupării, ci și ordinea elementelor în grupare. Dacă ar trebui să formăm perechi din elementele *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f*, atunci am considera ca perechi distincte *ab* și *ba*, *de* și *ed*. Este vorba deci de posibilitatea permutării unei grupări date, adică, după termenul consacrat în analiza combinatorie, de aranjări: este forma cea mai generală de grupare realizabilă.

Să revenim la familia care ne-a folosit atît de mult în calcule. Presupunem că familia a hotărît să trimită în fiecare săptămînă cinci dintre copii la teatru, într-o lojă. La prima vedere ar fi vorba de combinări de clasă 5 din 12 elemente. Copiii stabilesc însă că locurile din lojă nu sînt toate la fel de avantajoase, ci de la fiecare loc perspectiva asupra scenei este alta. Așadar, drept ar fi ca fiecare copil din grupul de 5 să vadă spectacolul în fiecare seară din alt loc al lojei. Conform exemplului de mai înainte, la partida de taroc era importantă și ordinea partenerilor.

Am devenit destul de dibaci în probleme de matematică, pentru a putea lichida urgent cu „aranjările". Putem descompune calculul aranjării în două etape: mai întîi facem combinări și apoi permutări în cadrul fiecărei grupări. Matematic, aceasta înseamnă să înmulțim numărul combinărilor cu numărul permutărilor: în exemplul nostru C_{12}^5 trebuie înmulțit cu 5! sau $\frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \times 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5$ și, dacă simplificăm cu 5!, obținem: $12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 = 95\,040$. Fraților din povestea de mai sus le-ar trebui $260\frac{1}{3}$ ani pentru a-și realiza planul. Ceva mai puțin decît pentru permutările la masă, totuși prea mult pentru o viață omenească.

Putem ajunge direct la formula aranjărilor, pornind pe aceeași cale ca în cazul primei deduceri a formulei combinărilor. Acolo, pentru a obține combinările, am împărțit numărul aranjărilor cu factorial de numărul clasei. Repetînd pe scurt ceea ce am mai spus putem calcula în modul următor: avem la dispoziție 12 elemente. Formăm întîi grupări cu un singur element. Evident, există numai 12 asemenea grupări. Dacă vrem să formăm perechi, trebuie să înmulțim fiecare element cu celelalte $12 - 1 = 11$ elemente rămase. Așadar, în cazul a 12 elemente se pot forma $12 \times 11 = 132$ perechi. Pentru a obține grupările de cîte trei elemente trebuie să combinăm fiecare pereche pe rînd cu toate celelalte $12 - 2 = 10$ elemente. Numărul grupărilor de 3 este deci $12 \cdot 11 \cdot 10 = 1\,320$ ș.a.m.d. Am pornit de la numărul total de elemente și l-am înmulțit cu factori din ce în ce mai mici cu cîte o unitate iar în total numărul factorilor trebuie să fie egal cu numărul elementelor din gruparea pe care vrem să o formăm. Deși nu se prea folosește, putem introduce pentru acest „antifactorial"[1] o notație proprie — un „ordin" — de exemplu $12 +_5$ ceea ce înseamnă $12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8$. Cu această notație avem un ordin special pentru aranjări, pe care-l putem recunoaște imediat. Cu noua notație formula combinărilor C_{10}^3 s-ar scrie $\frac{10+_3}{3!}$.

[1] „Antifactorialul" ca și „factorialul" sînt cazuri particulare ale unei formule mai generale.

Mai există încă o posibilitate, și anume cea a aranjărilor cu repetiția elementelor în grupările pe care le formăm. Să ne oprim pentru o clipă. Pe nesimțite am ajuns la piatra de hotar a cercetărilor noastre; am ajuns pe o culme care ne deschide perspective largi asupra unui mare număr de relații posibile. Ce reprezintă aranjările cu repetiție de un număr dat de elemente? Pentru noi înseamnă că putem forma perechi, grupări de 3, 4 etc. elemente și în cadrul fiecărei grupări avem voie să permutăm sau să repetăm un element de oricîte ori vrem. De exemplu, printre grupările de trei formate din aranjări cu repetiție din elementele 1, 2, 3, 4, 5, 6, întîlnim formele 111, 123, 211, 321, 335, 616, 422 etc. La o privire mai atentă ne apucă groaza. S-ar părea că putem forma astfel toate numerele !? Nu „pare". Aceasta este legea fundamentală pentru formarea numerelor. Mai trebuie inclus și zero, adăugăm încă trei elemente pentru a obține zece cifre și formăm aranjări cu repetiție: obținem toate numerele sistemului cu baza 10. Cu o singură restricție. Zerourile nu trebuie să stea înaintea altor cifre. Vom lămuri problema aceasta mai tîrziu. Afirmăm că grupările cu un singur element reprezintă numerele cu o singură cifră, perechile reprezintă numerele cu două cifre, grupările de trei — numerele cu trei cifre etc. Nu știm însă cum se calculează, pentru o anumită clasă, aranjările cu repetiție, așa încît ne mai trebuie puțină răbdare. Părăsim sistemul cu baza zece și vrem să vedem cum se calculează aranjări cu repetiție, pentru o clasă dată, din cinci elemente *a*, *b*, *c*, *d*, *e*. Începem cu grupările cu un singur element. Deoarece nu am condiții restrictive, la repetiții nu voi folosi „antifactorialul": pentru formarea perechilor voi combina fiecare element cu oricare alt element. Deci, *aa*, *ab*, *ac*, *ad*, *ae*, *ba*, *bb*, *bc*, *bd*, *be*, *ca*, *cb*, *cc*, *cd*, *ce*, *da*, *db*, *dc*, *dd*, *de*, *ea*, *eb*, *ec*, *ed*, *ee*. Rezultă $5 \cdot 5 = 25$ de perechi. Pentru formarea grupărilor de cîte trei elemente, combinăm fiecare pereche cu fiecare element; rezultatul este $5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$. Numărul grupărilor de cîte patru elemente este $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 625$ etc. De data aceasta nu avem de-a face nici cu factoriali nici cu coeficienți binomiali, ci pur și simplu cu puteri. Baza (numărul ale cărui puteri le calculez) este numărul elementelor pe care le aranjăm. Exponentul este numărul clasei. În cazul nostru, al aranjărilor cu repetiție din cinci elemente:

numărul grupărilor formate dintr-un singur element
$= 5^1 = 5$
numărul grupărilor formate din două elemente
$= 5^2 = 25$
numărul grupărilor formate din trei elemente
$= 5^3 = 125$
numărul grupărilor formate din patru elemente
$= 5^4 = 625$ etc.

Să ne întoarcem la sistemele de numerație. Afirmăm că toate sistemele poziționale sînt aranjări cu repetiție bine ordonate, cu condiția amintită mai înainte ca zero să nu apară niciodată la începutul unui număr.

Să construim sistemul zecimal din aranjări cu repetiție. De acum încolo, prin aranjări vom înțelege aranjările cu repetiție. Admitem această definiție numai pentru sistemele de numerație; și acum să începem exercițiul.

Este evident că primele zece numere cu o singură cifră sînt „singleții" sistemului de aranjări. Conform formulei există 10^1 asemenea singleți sau grupări care să conțină un singur element, deoarece avem la dispoziție zece elemente pe care le aranjăm cu repetiție, iar numărul clasei este 1. În cazul perechilor trebuie să fim mai prudenți. Conform formulei, din cele zece cifre putem forma 10^2 perechi, adică 100 perechi. Știm însă cu toții că există numai 90 de numere formate din două cifre, numerele de la 10 pînă la 99. Nu cumva sistemul cu baza zece nu este un sistem complet de aranjări? Există oare numere pe care sistemul le omite? Iată o idee foarte neplăcută. Răspundem: Da, există asemenea numere. Numai că aceste numere omise ar fi fost inutile. Este vorba de cele zece perechi care încep cu zero, adică de la 00 pînă la 09, ceea ce, din punctul de vedere al valorii, reprezintă primele zece numere cu o singură cifră, inclusiv pe 0; aceste perechi au sens numai din punctul de vedere al aranjărilor, deoarece în analiza combinatorie combinația are sens ca atare, abstracție făcînd de semnificația ei. Subliniem din nou că în analiza combinatorie cifra este un indicator lipsit de valoarea ei ca număr, este un indice, un număr pus pentru a distinge obiectele între ele, în nici un caz un indicator al valorii sau simbol pentru cantitate! Construim mai departe și ar trebui să obținem $10^3 = 1\,000$ grupări de cîte trei cifre. În realitate există însă mai puține numere cu trei cifre. Și anume 900 de numere, de la 100 la 999 inclusiv. Se constată imediat că misterul se dezleagă dacă excludem tripleții care încep cu zero, și anume de la 000 la 099; aceștia cuprind și numere de forma 003 sau 054, adică cu una și două cifre. Deci numărul lor este 10^3 minus numărul numerelor cu una și cu două cifre, deci 1 000 minus 90 minus 10, adică 900, ceea ce doream să obținem. Tot așa merge și mai departe. $10^4 = 10\,000$. Există însă numai 9 000 de numere cu patru cifre. Și de data aceasta trebuie scăzute grupurile de patru cifre care încep cu 0. În total, numerele cu o cifră, cu două cifre și cu trei cifre. Iar $10\,000 - 900 - 90 - 10$ dă tocmai numărul total, corect, de numere cu patru cifre, adică 9 000.

Cu un mic raționament putem să mai simplificăm formula. Dacă ținem seama de faptul că, conform construcției noastre, numărul numerelor cu două cifre se scrie ca

$$10^2 - 10^1 = 100 - 10 = 90$$

și cel al numerelor cu trei cifre ca

$$10^3 - (10^2 - 10^1) - 10^1 = 10^3 - 10^2 + 10^1 - 10^1 = \\ = 10^3 - 10^2 = 900,$$

al celor cu patru cifre

$$10^4 - [10^3 - (10^2 - 10^1) - 10^1] - (10^2 - 10^1) - 10^1 = \\ = 10^4 - [10^3 - 10^2 + 10^1 - 10^1] - 10^2 + 10^1 - 10^1 = \\ = 10^4 - [10^3 - 10^2] - 10^2 = 10^4 - 10^3 + 10^2 - 10^2 = \\ = 10^4 - 10^3 = 9\,000,$$

al celor cu cinci cifre

$$10^5 - \{10^4 - [10^3 - (10^2 - 10^1) - 10^1] - (10^2 - 10^1) - 10^1\} - \\ - [10^3 - (10^2 - 10^1) - 10^1] - (10^2 - 10^1) - 10^1 = 10^5 - \\ - \{10^4 - [10^3 - 10^2 + 10^1 - 10^1] - 10^2 + 10^1 - 10^1\} - \\ - [10^3 - 10^2 + 10^1 - 10^1] - 10^2 + 10^1 - 10^1 = 10^5 - \\ - \{10^4 - 10^3 + 10^2 - 10^2\} - 10^3 + 10^2 - 10^2 = 10^5 - \\ - 10^4 + 10^3 - 10^2 + 10^2 - 10^3 + 10^2 - 10^2 = 10^5 - \\ - 10^4 = 100\,000 - 10\,000 = 90\,000 \text{ etc.},$$

constatăm că pentru a obține numărul numerelor dintr-un anumit grup scădem din numărul aranjărilor cu repetiție ale grupului respectiv puterea cu o unitate mai mică a numărului de bază. De exemplu, numărul tuturor numerelor cu șapte cifre din sistemul cu baza zece se obține cu formula $10^7 - 10^6 = 10\,000\,000 - 1\,000\,000 = 9\,000\,000$, adică începînd de la 1 000 000 prin buna ordonare a aranjărilor pînă la 9 999 999. Am fi ajuns mai simplu la acest rezultat dacă am fi considerat toate numerele pînă la 1 000 ca tripleți și dacă ne-am fi întrebat la al cîtelea triplet încep grupările la care primul element este 1. Constatăm că 100 este cea mai „mică" permutare, în bună ordonare, care începe cu 1, de aceea trebuie excluși toți tripleții de la 000 la 099. Dat fiind că nu am nevoie mai departe de tripleții la care primul sau primele două elemente sînt nule, trebuie să scădem din cei 10^3 tripleți pe cei cuprinși între 000 și 099 inclusiv, adică $10^2 = 100$ tripleți. Din punctul de vedere al valorii lor, ei reprezintă numere cu una și cu două cifre, inclusiv pe 0. Mai există și o a treia posibilitate de calcul. Fără a apela la analiza combinatorie, numai din sistemul de numerație. Putem spune: $10^3 = 1\,000$ este primul număr cu patru cifre al sistemului, dat fiind că imediat mai mic este 999. Cel mai mare număr de două cifre este evident 99, dat fiind că după el urmează 100, primul număr cu trei cifre. Numărul numerelor cu trei cifre este $999 - 99 = 900$.

De data aceasta ia cuvîntul adversarul meu care m-a ascultat tot timpul neîncrezător. „Tocmai voiam să-ți atrag atenția asupra acestui mod de a evalua numărul numerelor formate dintr-un număr dat de cifre", spune el malițios. „Cu sistemul acesta de aranjări ai răsturnat munții ca să dezgropi o pietricică. Iar apoi, chinuit de o conștiință încărcată ai declarat rușinat că toată problema se rezolva mai simplu fără analiză combinatorie. Ai rămas credincios binecunoscutei zicale: De ce simplu, cînd se poate și mai complicat?"

Dragă prietene, să știi că nu e chiar așa de simplu cum ar părea. Am vrut să arăt cîteva lucruri într-un mod școlăresc, iar la aceasta am ajuns pe o cale relativ întortocheată. Aceasta nu este altceva decît confirmarea sistemului de numerație prin analiza combinatorie și invers, verificarea analizei combinatorii cu ajutorul sistemului de numerație. Sistemul cu baza zece s-a dovedit un impecabil sistem de aranjări cu repetiție. Algoritmul sistemului cu baza zece și cel al analizei combinatorii funcționează ca două angrenaje fără „punct mort". Importantele relații dintre numerele întregi „de origine divină" devin din ce în ce mai clare. Înțelegem semnificația și deosebirea dintre număr privit ca mărime și privit ca indice de ordonare. Vrem să facem încă un pas spre un grad mai înalt de generalizare. Părăsim sistemul cu baza zece și ne întrebăm cîte numere cu două cifre există în sistemul cu baza șase. Sîntem încrezători în algoritmul analizei combinatorii. Baza este șase, iar exponentul este mărimea clasei. Există deci $6^2 - 6^1 = 30$ de numere cu două cifre în sistemul cu baza 6. Să le scriem: 10, 11, 12, 13, 14, 15, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 50, 51, 52, 53, 54, 55, după care ar trebui să urmeze 100.

Ipotezele noastre concordă cu rezultatele. Se verifică și faptul că în sistemul cu baza 13 există $13^4 - 13^3 = 26\,364$ numere cu patru cifre.

Această nouă formulă magică ne stîrnește curiozitatea. Care este situația în cazul sistemului cu baza 2? Vrem să vedem cîte numere cu o cifră, cu două cifre etc. pînă la șase cifre, conține acest sistem, în care dispunem doar de cifrele 0 și 1.

Numere cu o cifră	: 2 (sau 1 dacă excludem pe zero).
Numere cu două cifre	: $2^2 - 2^1 = 4 - 2 = 2$.
Numere cu trei cifre	: $2^3 - 2^2 = 8 - 4 = 4$.
Numere cu patru cifre	: $2^4 - 2^3 = 16 - 8 = 8$.
Numere cu cinci cifre	: $2^5 - 2^4 = 32 - 16 = 16$.
Numere cu șase cifre	: $2^6 - 2^5 = 64 - 32 = 32$

ș.a.m.d.

După cum se știe, mai există o a patra regulă cu care se poate calcula numărul numerelor cu un număr dat de cifre. Și anume: înmulțim numărul cifrelor sistemului (din care excludem pe zero) cu baza sistemului. În cazul de față $1 \times 2 = 2$ (numere cu două cifre), $2 \times 2 = 4$ (numere cu trei cifre), $4 \times 2 = 8$ (numere cu patru cifre) ș.a.m.d. În sistemul cu baza zece există: 9 numere cu o cifră și $9 \times 10 = 90$ numere cu două cifre, $90 \times 10 = 900$ de numere cu trei cifre etc. În sistemul cu baza șase există: 5 numere cu o cifră $5 \times 6 = 30$ numere cu două cifre, $30 \times 6 = 180$ numere cu trei cifre etc. Am schițat numai cîteva afirmații, deși aprofundarea lor ne-ar duce la probleme dificile de analiză combinatorie.

Vrem să terminăm în sfîrşit cu sistemul cu baza doi. Mai întîi să scriem numerele:

Sistemul cu baza zece:	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,
Sistemul cu baza doi:	1,	10,	11,	100,	101,	110,	111,	1000,	1001,

Sistemul cu baza zece:	10,	11,	12,	13,	14,	15,	16
Sistemul cu baza doi:	1010,	1011,	1100,	1101,	1110,	1111,	10000

Dezvoltînd în sumă aflăm că în sistemul cu baza doi, 1 100 se reprezintă sub forma:

$$1\,100\ (\text{sistemul cu baza doi}) = 0\cdot 2^0 + 0\cdot 2^1 + 1\cdot 2^2 + 1\cdot 2^3 = $$
$$= 0 + 0 + 4 + 8 = 12\ (\text{sistemul cu baza zece}).$$

Toate sînt în regulă ! Să îndrăznim să facem o înmulţire în sistemul cu baza doi. Sîntem încurcaţi de la bun început, deoarece în acest sistem tabla înmulţirii constă numai din $1 \times 1 = 1$. Ce-i de făcut? Constatăm îngroziţi că toată osteneala noastră a fost zadarnică, dat fiind că celebrul nostru algoritm se prăbuşeşte. Sîntem însă matematicieni încercaţi, aşa încît nu dezarmăm. Să scriem două combinaţii oarecare formate din cifrele 1 şi 0 şi să le înmulţim cu tabla înmulţirii de care dispunem. Este de la sine înţeles faptul că $1\cdot 0 = 0$, deoarece în orice sistem tabla înmulţirii cu zero este aceeaşi. Totdeauna nimic de înmulţit cu ceva va da tot nimic. Faptul că numerele sistemului cu baza doi conţin numai pe 1 şi pe 0 este ipoteza noastră. Dacă însă algoritmul propus de noi este „invariant" în raport cu toate sistemele de numeraţie, atunci înmulţirea trebuie să reuşească. În concluzie,

```
101101011 × 110
---------------
101101011
 101101011
  000000000
-------------
10001000010
```

Proba o facem dezvoltînd în sumă numerele ciudate de mai înainte. Deînmulţitul este

$$1\cdot 2^0 + 1\cdot 2^1 + 0\cdot 2^2 + 1\cdot 2^3 + 0\cdot 2^4 + 1\cdot 2^5 + 1\cdot 2^6 + 0\cdot 2^7 +$$
$$+ 1\cdot 2^8 = 1 + 2 + 0 + 8 + 0 + 32 + 64 + 0 + 256 = 363.$$

Înmulțitorul este

$$0 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^2 = 0 + 2 + 4 = 6.$$

Sîntem emoționați la culme deoarece $363 \times 6 = 2\,178$, care trebuie să fie egal cu monstrul numeric din sistemul binar 100010000010, adică suma

$$0 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^6 + 1 \cdot 2^7 +$$
$$+ 0 \cdot 2^8 + 0 \cdot 2^9 + 0 \cdot 2^{10} + 1 \cdot 2^{11} = 0 + 2 + 0 + 0 + 0 +$$
$$+ 0 + 0 + 128 + 0 + 0 + 0 + 2\,048,$$

și spre bucuria noastră constatăm că rezultatul este bun.

În ciuda unor verificări dificile, algoritmul sistemelor de numerație al celor patru operații de calcul și al analizei combinatorii a ieșit învingător. Nici măcar sistemul cu baza doi, cu minuscula lui tablă a înmulțirii, nu l-a putut infirma. Dimpotrivă, în acest sistem înmulțirea s-a dovedit a fi extrem de simplă. Numai adunarea a dat mai multă bătaie de cap, deoarece $1 + 1 = 10$, rămîne 1, iar $10 + 1 = 11$, mai departe $11 + 1 = 100$, rămîn 10 etc. Dacă scriu însă numerele sub formă de sume, atunci adunarea devine un fleac. În cazul adunării sumelor adun numai 1 cu 1, nu mai am nevoie de 1×1.

Acum putem înțelege cu toții de ce a comparat Leibniz sistemul de numerație cu baza doi cu crearea lumii din neant. În cazul sistemului cu baza unu nu am dispune decît de 0 ca cifră, adică de nimic. Cu zero nu putem forma nici un număr. Dacă adăugăm — simbol al actului de creație divină — unitatea, pe unu, atunci răsună „să fie lumină" în lumea cantităților și a formelor. Dintr-o dată întrevedem mulțimea numerelor întregi. Putem să le creăm și să le scriem, oricare ar fi mărimea lor. Putem să descoperim algoritmul lor, putem calcula, combina, aranja — mulțimea numerelor întregi ne este supusă, datorită pasului făcut.

Cu toate acestea nu putem fi mulțumiți de înălțimea la care am ajuns. Problemele pe care ni le vom pune cer mai multă generalitate, apar mereu noi și noi algoritmi. Demonii matematicii stîrniți de noi nu ne vor da pace pînă nu vom stăpîni noi formule magice ale „adevăratei cabale", cu care vom putea subjuga o bună parte a lumii vizibile și invizibile.

CAPITOLUL IX

PRIMII PAȘI ÎN ALGEBRĂ

Nu numai o dată, ci de zece ori, poate chiar de mai multe ori, ne-a chinuit faptul că nu putem atinge un grad mai mare de generalitate. Ne-am impus condiții severe. Nu am vrut să părăsim domeniul numerelor naturale sau să-l depășim. Totuși ideea unor algoritmi superiori nu ne-a părăsit nici o clipă. La un moment dat, cînd nu am putut să ne exprimăm în funcție de datele cunoscute, am încălcat această poruncă, săvîrșind un delict condamnabil. Am efectuat o operație cu valabilitate generală, nu cu numere ci (înspăimîntător!) cu cuvinte. Am spus că

Deîmpărțitul : împărțitor = cîtul

Împărțitorul × cîtul = deîmpărțitul.

Abia mai tîrziu vom realiza importanța pasului pe care l-am făcut. Același delict l-am repetat și în cazul coeficienților binomiali, cînd am înlocuit cu cuvinte cifrele în formula combinărilor. Nici de data aceasta nu ne vom căi, ci vom urma sfatul lui Goethe: „Oricine poate greși, dar modul în care își suportă fiecare consecințele greșelii deosebește sufletul nobil de cel comun"; vom încerca să punem în slujba matematicii greșeala noastră.

Pentru aceasta trebuie să respectăm cu strictețe toate cele propuse pînă acum; printre aceste propuneri se numără în primul rînd și convenția noastră de a începe de la ceva cît mai simplu și cît mai concret.

Să presupunem că trebuie să măsurăm podeaua unei camere pentru care vrem să cumpărăm un covor. Camera nu este prea mare, are 5 metri lungime și 4 metri lățime. Oricine își dă seama, fără a pierde prea mult timp, că suprafața podelei este de 20 metri pătrați; ar fi necesare 5 covoare cu dimensiunile 1 × 4 metri pătrați sau 4 covoare de 1 × 5 metri pătrați pentru a o acoperi complet. Putem scrie și 5 × 4 = = 20 sau 4 × 5 = 20. Se și spune chiar că încăperea are dimensiunile 4 × 5. Dacă am vrea să cumpărăm un covor pentru o cameră de 6 × 8, acesta ar trebui să aibă suprafața de 48 metri pătrați ș.a.m.d. Ce înseamnă acest „și așa mai departe"? Înseamnă că orice socoteală asemănătoare se face conform aceleiași „legi de compoziție". Ce înseamnă „legi de compoziție"? Un „ordin" de grad superior, mai general, care în cazul nostru este de forma: „dacă vrei să afli suprafața unui patrulater dreptunghic, atunci înmulțește lungimea cu lățimea". „Care lungime și care lățime?" întrebăm la rîndul nostru. „Orice lungime dată cu lățimea corespunzătoare dată. Poți să faci înmulțirea și în ordine inversă. Înmulțirea are proprietatea generală de a avea același rezultat indiferent de ordinea factorilor". Vom interveni brusc toți, pentru a demonstra că știm despre ce este vorba: de o formulă! Și anume de formula suprafeței dreptunghiului. Desigur, este vorba de o formulă scrisă de obicei $F_R = a \cdot b$. Aici F_R este suprafața dreptunghiului, iar produsele $a \cdot b$ sau $b \cdot a$ sînt lungimea ori lățimea sau lățimea ori lungimea. Ce am făcut de data aceasta? Întîi am scris algoritmul și „ordinul" cu cuvinte, apoi l-am generalizat pentru litere.

Nu vom cerceta mai departe, ci vom da imediat un alt exemplu. Oricine știe că adunînd 1 măr cu 2 mere obținem suma de 3 mere, dar 4 mere și 3 pere reprezintă sau 7 fructe, sau o nouă unitate, de exemplu „grămadă de fructe". Tot așa 5 mere de înmulțit cu 3 fac 15 mere. Iar 27 pere împărțite la 9 fac 3 pere. Dacă scriem a în loc de mere, b în loc de pere și c în loc de fructe, iar cu d notăm „grămada de fructe", atunci

$$1\,a + 2\,a = 3\,a; \quad 4\,a + 3\,b = 7\,c \quad \text{sau} \quad 4\,a + 3\,b = d;$$

$$5\,a \times 3 = 15\,a; \qquad 27\,b : 9 = 3\,b.$$

Toate acestea seamănă cu un nou algoritm, cu o nouă mașină automată de calcul și gîndire. Acum mergem mai departe și ne punem o nouă problemă: „cîte unități trebuie să-i adăugăm lui 28 pentru a obține un număr de trei ori mai mare decît numărul căutat de unități?" Subliniem că nu cunoaștem numărul care trebuie adunat cu 28. Numărul este necunoscut, de aceea se și numește „necunoscuta". Este „necunoscuta x" din viața de toate zilele: așadar, matematic o vom numi tot x. Acest x trebuie adunat la 28. Bine. Putem scrie acest lucru și totodată executăm prima parte a ordinului. Dar acest $x + 28$ trebuie să fie egal cu de trei ori numărul necunoscut. Spre mirarea noastră constatăm că dintr-o dată semnul egal s-a transformat într-un ordin, de unde pînă acum exprima numai o constatare sau o informare: $x + 28 = 3\ x$, ceea ce înseamnă că $x + 28$ *trebuie* să fie egal, sau *trebuie* să fie făcut egal, cu triplul lui x, $3 \cdot x$ sau $3x$[1]. Cum? Vom căuta valori pentru x pînă vom găsi una care să verifice „ordinul" de egalitate. Vom constata că pentru $x = 14$ se scrie $14 + 28 = 3 \times 14$ sau $42 = 42$, ceea ce este evident corect.

Nu mai zăbovim însă nici aici. Remarcăm numai că această condiție de egalare a două mărimi se numește „ecuație" și că pentru rezolvarea acestor ecuații trebuie știute pe dinafară multe reguli. Le vom învăța și cunoaște și noi exact, pe toate. În momentul de față nu vrem însă să privim mai departe, ci dimpotrivă, înapoi, și să ne gîndim cum sînt legate între ele, prin ce grad de rudenie, exemplele cu covorul, merele și perele, și cu numărul necunoscut x.

Pentru moment trebuie să ne limităm la aparențe. Am părăsit dintr-o dată numerele naturale și am stabilit o relație între cifre și litere; apoi am stabilit relații între noile simboluri ale numerelor cu ajutorul vechilor relații sau „ordine". Aplicăm acum toți algoritmii pe care îi cunoaștem unor noi obiecte, nu numai cifrelor. Îi aplicăm unor obiecte despre care deocamdată nici nu știm ce înseamnă. Litera a reprezenta la un moment dat lungimea unei camere, apoi un măr. Acest simbol poate însă să nu reprezinte nici mere, nici o lungime, ci să fie pur și simplu litera a, deoarece 3 litere a de 7 ori înseamnă 21 de litere a. Poate fi chiar mai puțin decît litera a, și anume ceva, indiferent ce. Important este numai ca într-un calcul litera a să reprezinte mereu unul și același lucru, același „ceva". Pentru că 3 asemenea „ceva" nedeterminați, plus încă doi „ceva", înseamnă 5 „ceva". Necunoscuta x descrie o situație și mai gravă. Este nu numai nedeterminată, ci trebuie și calculată. Ea reprezintă soluția uneia sau a mai multor enigme matematice.

---

[1] Scriu $3x$ în loc de $3 \cdot x$ pentru că 3 farfurii sau de 3 ori o farfurie, sau $3 \times$ farfurie reprezintă unul și același lucru. „Coeficientul" este deci numai un multiplicator deghizat.

În orice caz, am introdus o nouă notație prin care simbolurilor scrise le-am asociat obiecte sau mărimi misterioase, nedeterminate. Totuşi, aceste mărimi nu sînt de „origine divină", ca numerele naturale. Orice altceva, însă nu ceva unic determinat.

Tocmai din cauza acestei nedeterminări, a acestui liber arbitru al simbolurilor care reprezintă ce vreau eu (cu excepția lui r, care trebuie înlocuit în anumite condiții cu o anumită cantitate), pot să dau o formulare cu totul generală anumitor relații. $F_R = a \cdot b$ reprezintă nu numai suprafața camerei mele, ci suprafața oricărei camere dreptunghiulare. Mai mult: este suprafața oricărui dreptunghi, iar $3a + 2a = 5a$ reprezintă atît totalul a două mere plus trei mere cît şi suma a 2 linii plus 3 linii sau 2 locomotive plus 3 locomotive. Este şi suma a 2 litere plus 3 litere, 3 cifre plus 2 cifre şi, în general, suma 3 plus 2 obiecte de aceeaşi natură sau mărime. Chiar mai misterios — a două „ceva" plus 3 „ceva".

O nouă „cabală" ne-a dat un nou mod de scriere. O nouă formulă magică. Este vorba de simbolismul calculului algebric. Mai corect spus, am ajuns în țara numerelor generale, care se deosebesc deocamdată de numerele naturale sau concrete prin această neunivocitate a lor.

Să amintim cîte ceva despre originea şi istoria numelui acestei „ars magna" (marea artă) sau „artium ars" (arta artelor), cum este numită adeseori noua noastră disciplină vrăjitorească. Matematicianul arab Al-Horezmi, pe care l-am cunoscut ca naş al cuvîntului algoritm, a scris un tratat intitulat *L'Al'djebr ou'al moukabalah*. Acest tratat cuprindea anumite reguli de calcul pentru ecuații, reguli pe care nu le putem discuta încă aici. Constatăm însă că printr-un extraordinar capriciu al istoriei Al-Horezmi a devenit de două ori celebru: numele său, pronunțat greşit, a dat denumirea de „algoritm", iar titlul lucrării sale, pronunțat şi el greşit, a dat denumirea de „algebră".

Să nu se creadă însă cumva că Occidentul a moştenit de la arabi o disciplină perfecționată, pusă la punct, cu un sistem precis de notare, adică un sistem perfect de calcul cu litere. „Marea artă" de care vorbim a fost făurită pas cu pas într-o dezvoltare de lungă durată, care porneşte de la indieni, trece pe la arabi şi ajunge de la Viète pînă la Descartes şi Hudde. De-abia la sfîrşitul secolului al XVII-lea algebra a căpătat generalitatea, supleţea şi formă asemănătoare celei actuale. De-abia la Euler întîlnim o notaţie pe care o putem numi modernă. De altfel vom mai reveni şi cu altă ocazie asupra istoriei algebrei, pe care am atins-o aici numai în treacăt.

Vă rog acum să nu vă speriaţi de consideraţiile filozofice pe care le vom face împreună. Dificultăţile întîmpinate în aceste dezbateri vor fi mult mai mici decît cele întîlnite în cazul trecerii calculelor dintr-un sistem de numeraţie în altul. Nu ne vom mulţumi însă cu reguli mecanice de calcul, ci vom pătrunde în bazele algebrei.

NOTAȚIA ALGEBRICĂ

Să ne întoarcem mai întîi la problema podelei și a covorului. Vrem să facem și aici un pas spre generalizare și de aceea ne va interesa mai mult forma decît obiectul. De aceea vom vorbi de acum încolo despre „dreptunghi". Vom înțelege prin aceasta o formă geometrică determinată de patru drepte, două cîte două paralele: acestea formează un patrulater cu patru unghiuri drepte, adică în care laturile sînt perpendiculare două cîte două. Pentru acest tip de figură geometrică este adevărată formula $F_R = a \cdot b$; în această formulă convenim ca a să reprezinte latura mai mare, lungimea, iar b latura mai mică, lățimea. Conform definiției noastre nu se poate ivi cazul „mai mult lat decît lung". Din punctul de vedere pur geometric sau cantitativ expresia „mai mult lat decît lung" nu are nici un sens. Ea capătă un sens numai dacă descrie starea unui obiect. Am menționat toate acestea numai în treacăt. Ajungem totodată și la semnificația „algebrică" a produsului $a \cdot b$, dacă ne amintim de generalitatea acestei formule. Litera a poate să reprezinte orice număr cuprins între 0 și un număr oricît de mare. Mai presupunem și că a corespunde condițiilor noastre suplimentare, deci este în orice caz mai mare decît numărul b, care la rîndul său poate să reprezinte orice număr. Un dreptunghi 2×1 este tot atît de plauzibil ca și unul cu dimensiunile $1\,994\,373 \times 284\,786$; în ambele cazuri, rezultatul înmulțirii ne dă suprafața dreptunghiului respectiv, exprimată în unități de suprafață; nu vom studia mai îndeaproape semnificația acestor unități, căci metrul pătrat, decimetrul pătrat sînt binecunoscute. Vrem să verificăm algoritmul nostru la limitele sale de aplicabilitate. În acest scop, păstrînd lungimea fixă vom varia lățimea de la cea mai mare valoare posibilă a ei pînă la cea mai mică. Dacă ținem seama de afirmațiile noastre, există două „cazuri limită" între care se situează toate „cazurile normale". Se poate întîmpla ca lățimea să devină tot atît de mare cît lungimea, așa încît să nu mai putem ști care este lungimea și care lățimea. Cînd b este egal cu a, lățimea este egală ca mărime cu lungimea. Mai observăm și că această creștere nu se face continuu, ci prin salt de la un număr la altul, deoarece pînă acum nu am luat în considerație decît numerele naturale.

Deoarece b este egal cu a putem scrie $F_R = a \cdot a$, ceea ce poate fi exprimat ca o putere. $a \times a$ este egal cu a^2. „a la a doua" sau „a la pătrat". Dreptunghiul s-a transformat într-un pătrat (vezi fig. 2). Recunosc că am renunțat cu prea multă

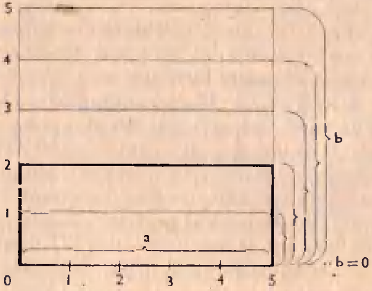


FIG. 2

ușurință la condiția ca lungimea să fie mai mare decît lățimea. Am luat de fapt condiția în exprimare negativă: „lățimea nu are voie să fie mai mare decît lungimea". Am trișat puțin și am profitat de o „fisură a formulării", pentru a ne strecura prin ea. Ne asumăm răspunderea pentru această interpretare și ne întrebăm ce se întîmplă în cel de-al doilea „caz limită". Ce se întîmplă atunci cînd lățimea devine oricît de mică, cînd devine egală cu zero? $F_R = a \cdot 0 = 0$! Suprafața dreptunghiului devine nulă. Formulat geometric: din dreptunghi rămîne numai un segment a, care are, conform geometriei, o singură dimensiune, numai lungime. Segmentul nu are lățime. Am folosit deci formula suprafeței pentru a calcula contrariul unei suprafețe. Am făcut într-adevăr o verificare uimitoare a algoritmului și am dovedit intervenția mai multor algoritmi: cel „algebric" și cel numeric. Mașina noastră de gîndit începe să funcționeze îmbucurător de bine. De aceea vom îndrăzni să atacăm o problemă mai grea. Impunem o nouă condiție suplimentară, și anume, ca raportul dintre lungime și lățime să fie 5/2. Nu ne interesează dacă 5 sau 2 sînt ani-lumină, kilometri sau măsuri mai mici, sau dacă sînt exprimați în sistemul metric. Pot fi țoli, verste, iarzi, unități de lungime din Grecia antică, lungimi de nasuri de copil, picioare, orice. $F_R = a \cdot b = 5 \times 2 = 10$. Suprafața dreptunghiului cu acest raport între laturi este totdeauna 5 ori 2 = 10 unități de suprafață din sistemul respectiv de măsură. Vom reprezenta acum grafic, cu diferite unități, situația descrisă anterior (fig. 3).

Fiecare dintre aceste dreptunghiuri are suprafața egală cu zece unități de suprafață în sistemul respectiv de unități. Este valabilă în continuare formula: $a = 5$, $b = 2$ și în consecință $a \cdot b = 5 \times 2 = 10$. Dacă ne imaginăm că am construit într-un mod oarecare cel mai mic dreptunghi posibil, în care atît lungimea cît și lățimea sînt egale cu zero, atunci calculul dă $F_R = a \cdot b = 0 \times 0 = 0$. Cel mai mic dreptunghi posibil are suprafața egală cu zero, ceea ce înseamnă că de fapt nu are nici o suprafață. În primul nostru exemplu păstram măcar lungimea (sau dacă am fi încălcat condiția, „lungimea trebuie să rămînă în permanență mai mare decît lățimea", am fi redus treptat la zero lungimea, menținînd lățimea constantă,

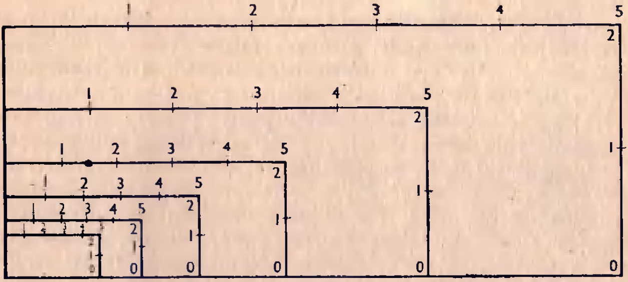


FIG. 3

așa încît $0 \times b = 0$), în cazul de față însă, atît suprafața cît și lungimea și lățimea s-au anulat. Ne-a rămas un simplu „nimic", un punct geometric, o figură fără nici un fel de întindere. În mod enigmatic a mai rămas totuși încă ceva, ce am omis la prima spaimă. Și anume condiția ca raportul dintre laturi să fie 5/2. Dat fiind că această condiție s-a dovedit neinfluențată de sistemul de unități și de valorile absolute, întrucît a respectat, indiferent de valorile absolute, condiția de invarianță structurală, impune ca lege generală o lege a geometriei antice clasice — legea lui Euclid — conform căreia raportul dintre două mărimi nu depinde de valorile absolute ale acestor două mărimi. Afirmăm deci, evident, fără a ne bizui pe intuiția directă, că și în cazul punctului nostru lungimea „inexistentă" a dreptunghiului „inexistent" și lățimea „inexistentă" a aceluiași dreptunghi sînt în același raport de 5 la 2. Pe scurt, de cinci ori „nimic" de înmulțit cu de două ori „nimic" ne dă suprafața de zece ori „nimic". Adică suprafața unui dreptunghi ciudat care nu există, care este un punct matematic fără întindere, dar care totuși este un dreptunghi. Dacă nu admitem această ultimă ipoteză, atunci din punct de vedere pur algebric și algoritmic intrăm într-o dilemă. Încrezîndu-ne orbește în mașina de gîndit și în cabală, să scriem condiția noastră sub formă de proporție:

$$a \text{ față de } b \text{ este ca } 5 \text{ față de } 2$$

$$\text{sau } a : b = 5 : 2.$$

Această notație o cunoaștem încă din școala elementară. Dacă micșorăm concomitent pe a și pe b pînă la zero obținem

$$0 : 0 = 5 : 2.$$

Dacă cei doi zero ar căpăta dintr-o dată aceeași semnificație, atunci $0 : 0$ ar fi egal cu 1. Căci orice număr împărțit prin el însuși dă ca rezultat 1. Pentru ca egalitatea să fie adevărată ar trebui ca 5 împărțit la 2 să aibă ca rezultat 1, lucru bineînțeles imposibil. După cele spuse nu mai avem ce face decît să alegem „proporția" în așa fel încît cele două zerouri să se comporte unul față de celălalt ca 5 față de 2. De aceea se spune că 0 împărțit la 0 este un raport nedeterminat, a cărui valoare trebuie determinată de la caz la caz și poate fi determinată ca atare.

Acum sîntem din nou în dilemă. Mai există o lege a proporțiilor, conform căreia produsul termenilor extremi (extremii) dintr-o proporţie este egal cu produsul termenilor intermediari (mezii). Deci, dacă

$$0 : 0 = 5 : 2,$$

atunci 0×2 trebuie să fie egal cu 0×5,

ceea ce este de fapt adevărat, deoarece 0×2 este egal cu 0, ca şi $0 \times 5 = 0$. De dragul clarităţii vom mai ilustra această regulă a egalităţii produsului extremilor cu produsul mezilor, pe un alt exemplu:

$$13 : 39 = 7 : 21,$$

de unde rezultă $13 \times 21 = 39 \times 7$ sau $273 = 273$.

N-am scăpat însă de toate îndoielile. Corectitudinea unei proporţii o putem constata pur algebric şi pe o altă cale. Să scriem deci:

$$(5 \times 0) : (2 \times 0) = (5 \times 1) : (2 \times 1),$$

ceea ce dă iarăşi $0 : 0 = 5 : 2$.

Expresiile de mai înainte sînt justificate deoarece într-un raport am voie să aleg unităţile oricît de mari sau de mici vreau. Pot alege ca unitate pe zero sau pe 1 sau pe 2 etc., căci raportul nu se schimbă atunci cînd înmulţesc ambii termeni cu acelaşi număr.

Deşi nu stăpînim nici măcar cele mai simple legi ale algebrei, am pătruns, pe deplin conştienţi, în „adîncurile" matematicii superioare, ale analizei infinitezimale. Am urmat — bineînţeles numai aproximativ — calea pe care a expus Leibniz problemele de acest tip sub titlul *Deducerea calculului diferenţial din calculul algebric obişnuit*. Totuşi nu am rezolvat contradicţiile fundamentale, dilemele. Ştim că avem de ales între a admite „inimaginabilul", atunci cînd trebuie să ne închipuim un punct fără întindere în nici o direcţie, ca un dreptunghi ale cărui laturi pot avea diferite valori; sau a renunţa în parte la algoritm, la sistemul de calcul, la proprietatea unei proporţii. În orice caz, ipoteza absurdă a caracterizării unui „nimic" prin lungimea diferită a laturilor sale ne aduce mai puţine neplăceri decît negarea acestei posibilităţi.

Mustrați aspru de oponentul nostru părăsim aceste considerații și ne întoarcem iarăși la mere și pere. Faptul că un măr plus cinci mere fac șase mere nu ridică probleme. Este mai grav faptul că am afirmat o dată că 3 mere plus 5 pere fac 8 fructe sau o grămadă de fructe. Dacă notăm merele cu a și perele cu b, fructul cu c, iar „o grămadă de fructe“ cu d, putem scrie

$$3\,a + 5\,b = 8\,c$$

sau

$$3\,a + 5\,b = d.$$

În virtutea unei axiome fundamentale și inatacabile a matematicii, care spune că două cantități egale cu o a treia sînt egale între ele, putem deduce

$$8\,c = d,$$

adică 8 fructe reprezintă o grămadă de fructe. Vom admite această concluzie fără discuții, deoarece am propus-o mai înainte ca definiție, cînd am introdus la adunarea a 3 mere cu 5 pere noțiunea de „grămadă de fructe“. Mai misterioasă este declarația că 3 mere plus 5 pere fac 8 fructe, deși la prima vedere pare mai naturală decît grămada de fructe. Totuși, consecințele sînt mai grave. Dacă într-adevăr 3 mere plus 5 pere dau 8 fructe înseamnă că în mod inconștient am făcut un calcul. Creînd o noțiune mai generală, am ridicat într-un anumit sens problema echivalenței merelor cu perele pe un plan superior. De îndată ce începem să calculăm cu fructe nu mai este nevoie să scriem a și b și c. Putem să scriem pur și simplu $3 + 5 = 8$ și să neglijăm pînă la rezultatul final notațiile. În principiu, calculul în „fructe“ se face ca și cum ar fi vorba numai de mere sau numai de pere. Oricare din fructe este o „unitate“ de fructe, iar a devine egal cu b și ambele sînt egale cu c ($a = b = c$). Nu mai calculăm cu litere, ci cu „coeficienți“.

Din aceste considerații putem desprinde o noțiune generală a algebrei, care stabilește legătura între toate cele spuse pînă acum. Se știe că orice cantitate înmulțită cu 1 rămîne egală cu ea însăși. De aceea, pentru a include calculul numeric uzual în algebră ca un caz particular, vom considera toate numerele existente drept coeficienți, închipuindu-ne că în locul merelor său perelor sau literelor figurează peste tot unu (unitatea). 5 de unu plus 17 de unu dau 22 de unu. Sau

$$5 + 17 = 22.$$

9 348 de unu ori 15 = 140 220 de unu sau 9 348 $\times$ 15 = = 140 220. Toate calculele numerice din orice sistem de numerație sînt de fapt calcule algebrice cu numere înmulțite cu „unu" sau operații cu coeficienții lui unu. Cu acestea am stabilit o legătură neîntreruptă, o trecere continuă de la sistemele de numerație la algebră. Mai trebuie observat că înmulțirea cu unu are în orice sistem același rezultat: numărul însuși. Toate sistemele sînt invariante în raport cu înmulțirea cu unu.

Sperăm că după această sinteză nu vom mai întîlni dificultăți de principiu, pe măsură ce vom înainta în studiul algebrei. Deocamdată anticipăm cu o întrebare. Tot timpul va trebui să calculăm atît cu litere cît și cu cifre? Sau, așa cum calculăm numai cu numere, putem calcula și numai cu litere? Întrebarea este pe deplin justificată și o vom studia mai îndeaproape. O vom reformula ca „problema coeficienților generali și concreți".

Am arătat de mai multe ori ce sînt „coeficienții concreți". Exprimîndu-ne mai puțin precis, putem spune că sînt notațiile pentru cantitățile unor unități. Pentru 5 a coeficientul este 5, unitatea cu care calculez este a. În expresia $5\,a + + 7\,b + 3\,c + 8\,d \ldots$ 5, 7, 3, 8 sînt coeficienți, iar $a, b, c, d \ldots$ sînt diferite unități de care mă folosesc. Această „unitate" sau „mărime generală" poate să reprezinte orice număr, cu condiția să mențin același număr pînă la rezultatul final. Numărul substituit este în tot calculul unul și același, este constant, neschimbat. De aceea, a, b, c, d,... mai sînt numite și „mărimi invariabile", „mărimi constante" sau pur și simplu „constante". O evoluție și convenție veche de un secol au stabilit că, în general, constantele să fie notate cu literele mici ale alfabetului latin, și anume cu litere de la începutul alfabetului, pînă la u de exemplu. Literele de la u încolo sînt folosite în alte scopuri, pe care le vom arăta mai tîrziu. Literele r, s și t au o poziție intermediară și pot fi utilizate ca „constante" doar atunci cînd nu putem recurge la altă soluție[1]. Totuși, chiar și la începutul alfabetului cîteva locuri au semnificații bine stabilite. De pe vremea lui Euler litera e este folosită exclusiv la desemnarea bazei așa-numitului „sistem de logaritmi naturali", din timpul lui Gauss i reprezintă „unitatea imaginară", iar în matematicile superioare h reprezintă o creștere oricît de mică. În calitatea sa de simbol în calculul diferențial, litera d trebuie și ea evitată. Înseamnă că pentru un calcul mai lung avem la dispoziție pe a, b, c, f, g, k, l, m, ...; acest șir întrerupt de litere contravine eleganței, de aceea algebra modernă folosește și metoda indicilor, propusă de Leibniz (o mai face și din alte motive importante). Mărimi de aceeași natură, de exemplu termenii unei serii aditive, sînt notați cu aceeași literă, căreia i se adaugă în dreapta jos așa-zisul indice. De exemplu, a_1, a_2, a_3, a_4 etc. Putem scrie sub această formă un număr din sistemul zecimal folosind ca indici chiar și pe zero.

Un număr din sistemul zecimal

$$= a_0\ 10^0 + a_1\ 10^1 + a_2\ 10^2 + a_3\ 10^3 + a_4\ 10^4 + \text{ș.a.m.d.}$$

Oponentul meu, pe care l-am provocat intenționat, intervine în discuție și îmi reproșează că de data aceasta am notat coeficienții cu litere și unitățile cu numere. Este adevărat! Vom vedea însă că putem renunța complet la numere.

Trebuie să găsim însă un răspuns mai fundamentat pentru a ne reduce la tăcere adversarul. În primul rînd, a_0, a_1, a_2, a_3 arată numai că pe locurile respective sînt anumite cifre. Nimic altceva. În cazul sistemului cu baza zece apar cifrele de la 0 la 9. În plus, lîngă puterea cea mai mare poate figura una din cifrele de la 1 pînă la 9, căci numărul nu poate să înceapă cu zero. Am impus deci două condiții. Ținînd seama de aceste condiții putem înlocui orice a cu orice cifră vrem. De exemplu, $a_0 = 5$, $a_1 = 7$, $a_2 = 1$, $a_3 = 4$, $a_4 = 0$, $a_5 = 2$. Vom obține în sistemul cu baza zece numărul 204 175. Am putea alege însă și $a_0 = 0$, $a_1 = 2$, $a_2 = 5$, $a_3 = 9$, $a_4 = 8$, $a_5 = 9$ și am obține numărul 989 520; sau $a_0 = 0$, $a_1 = 0$, $a_2 = 0$, $a_3 = 0$, $a_4 = 0$, $a_5 = 6$ și am obține 600 000 etc. Cu această metodă am reprezentat un număr din sistemul cu baza zece,

[1] De exemplu, atunci cînd avem nevoie de numeroase litere în ordonarea lexicografică, pentru a desemna de exemplu coeficienții unei serii lungi de puteri.

care nu trebuie neapărat să fie un număr cu șase cifre. Puteam înlocui și pe a_6, a_7, a_8, a_9, a_{10} etc. cu un sistem oarecare de cifre și am fi obținut numere cu 7, 8, 9, 10, respectiv 11 cifre. Evident că avem voie să punem și alți indici.

De exemplu:

$$a_1 10^0 + a_2 10^1 + a_3 10^2 + a_4 10^3 + a_5 10^4 + a_6 10^5 + \ldots$$

și avem avantajul că cel mai mare indice ne spune cîte cifre are numărul, pe cînd exponentul ne indică numărul zerourilor. Se constată că am realizat o nouă mașină automată de gîndire, un nou algoritm de ordonare.

Sîntem obișnuiți cu ideea generalizării și vom încerca să facem acest lucru și de dată aceasta. Vom scrie un număr într-un sistem oarecare de numerație, ținînd seama de faptul că baza unui sistem de numerație este un număr în orice caz mai mare decît unu, și de faptul că coeficienții puterilor bazei pot lua orice valoare de la zero și pînă la un număr mai mic cu o unitate decît baza. Coeficientul celei mai mari puteri a bazei poate să varieze de la 1 pînă la numărul mai mic cu o unitate decît baza. „Să varieze" înseamnă în matematică că poate lua orice valoare dintre cele delimitate de 1 și de bază, minus o unitate. În cazul nostru, bineînțeles numai valori întregi.

Să mai convenim asupra unor lucruri: vom nota în general cu g numărul de bază. Dat fiind că baza este un număr fix, constant, în cadrul unui sistem de numerație dat, nu îi asociem nici un indice, ci numai un exponent, deoarece pentru orice sistem pozițional este esențială creșterea cu o unitate a puterii bazei de la o poziție la alta. Putem scrie acum: un număr din sistemul cu baza g este $a_1g^0 + a_2g^1 + a_3g^2 + a_4g^3 + a_5g^4 + a_6g^5 + \ldots$ Cu această notație vrem să formăm un număr în sistemul cu baza șase. Atunci g este egal cu 6, în timp ce a_1, a_2 și așa mai departe au voie să varieze de la 0 la 5 inclusiv. De exemplu, a_6 pe care l-am ales arbitrar ca ocupînd poziția corespunzătoare celei mai mari puteri a bazei poate varia de la 1 la 5. Deci $a_1 = 2$, $a_2 = 3$, $a_3 = 0$, $a_4 = 5$, $a_5 = 1$, $a_6 = 2$.

Suma este: $2 \cdot 6^0 + 3 \cdot 6^1 + 0 \cdot 6^2 + 5 \cdot 6^3 + 1 \cdot 6^4 + 2 \cdot 6^5$ (în sistemul cu baza zece) sau ca număr în sistemul cu baza șase, 215 032.

Folosim aceeași sumă generală pentru sistemul cu baza doi și alegem: $a_1 = 1$, $a_2 = 0$, $a_3 = 0$, $a_4 = 1$, $a_5 = 0$, $a_6 = 1$. Obținem numărul 101 001 din sistemul cu baza doi (g este egal cu 2) sau dacă lucrăm în sistemul cu baza treisprezece, cu $g = 13$ putem alege $a_1 = 9$, $a_2 = A$, $a_3 = 5$, $a_4 = 0$, $a_5 = C$, $a_6 = 7$. Numărul din sistemul cu baza treisprezece este 7C0 5A9 (considerînd că A și C sînt și ele cifre).

Vedem că suma de mai sus $a_1g^0 + a_2g^1 + \ldots$ redă forma cea mai generală, structura oricărui număr în orice sistem pozițional. Tot ce trebuie făcut este să înlocuim literele cu cifre, respectînd anumite condiții.

Pentru moment nici nu ne dăm seama ce mult am cîștigat cu această notație. Sarcina fundamentală a algebrei, scopul ei, este tocmai să calculeze cu aceste expresii ca și cum ar avea de-a face cu numere. Aceasta înseamnă că avem voie să aplicăm algoritmul din cazul numerelor obișnuite, la numerele generalizate. Putem să adunăm, să scădem și să înmulțim aceste numere, să le împărțim și să le ridicăm la putere etc. Abia la sfîrșit le înlocuim în rezultat cu anumite numere concrete, dacă nu cumva preferăm să menținem rezultatul sub forma lui generală și să-l folosim atunci cînd avem nevoie.

Nu am răspuns însă la întrebarea pe care ne-am pus-o mai de mult: în anumite condiții se poate renunța oare la cifre, făcînd calculele numai cu litere? Acuma știm că nu numai „unitățile" sau „constantele" pot fi notate cu litere, ci și coeficienții. În calitate de indici am folosit totdeauna cifre: jos în dreapta, la coeficienți, ca indicatori ai poziției, ai locului în sumă, în dreapta sus ca indicatori ai puterii bazei. Să facem acum abstracție de sistemele de numerație, să le uităm pur și simplu și să scriem o sumă oarecare, în care nu apare nici un număr și să vedem dacă putem găsi o interpretare concretă acestei sume. De exemplu,

$$a_a g^a + a_b g^b + a_c g^c + a_d g^d + a_e g^e + a_f g^f + a_g g^g + a_h g^h$$[1].

Ce semnificație are această expresie? În definitiv — oricare, cu singura condiție ca g să rămînă același în toată expresia și ca indicii și exponenții să fie aranjați în ordine crescătoare, fapt sugerat și de notarea în ordine alfabetică. Dacă mai

[1] Putem folosi ca exponenți sau indici și litere interzise, ca de exemplu *e*, *d*, *h* etc. !

impunem şi condiţia că literele să reprezinte numere întregi, atunci suma noastră poate fi, de exemplu,

$$15 \cdot 7^5 + 8 \cdot 7^9 + 932 \cdot 7^{10} + 20 \cdot 7^{13} + 0 \cdot 7^{25} + 1 \cdot 7^{26} +$$

$$+ 10 \cdot 7^{49} + 42\,535 \cdot 7^{1\,000\,000}$$

sau

$$0 \cdot 0^0 + 0 \cdot 0^1 + 0 \cdot 0^2 + 0 \cdot 0^{15} + 1 \cdot 0^{30} + 17 \cdot 0^{31} +$$

$$+ 2 \cdot 0^{50} + 27 \cdot 0^{642}.$$

Pe scurt, ajungem la o infinitate de realizări concrete ale expresiei abstracte de mai înainte, care reprezintă de fapt o însumare de puteri crescătoare ale unui număr oarecare g, combinate cu coeficienţi oarecare.

Mai generală ar fi suma

$$a_a\, b^a + a_b\, c^d + a_c\, d^f + a_d\, m^b + a_e\, o^h.$$

Aici toţi coeficienţii sînt arbitrari şi există condiţia suplimentară ca bazele puterilor să fie diferite. Exponenţii însă sînt dispuşi într-o ordine oarecare, nici crescătoare nici descrescătoare. Transcrisă cu cifre, seria ar putea fi de exemplu

$$0 \cdot 2^7 + 25 \cdot 7^3 + 4 \cdot 9\,400^{18} + 74 \cdot 1^{10} + 1 \cdot 3^2.$$

Nu am vrea însă să dăm impresia că acest tip de sumă formată prin însumarea puterilor unor baze, cu anumiţi coeficienţi, este unicul posibil. Există şi altfel de expresii mai complicate ca formă, alcătuite numai din litere. Am vrut numai să demonstrăm cu expresii foarte simple că atît indicii cît şi coeficienţii, numerele de bază, exponenţii, pot fi notaţi cu litere. Orice număr, orice mărime poate fi notată cu o literă, în ipoteza că nu ne interesează direct valoarea ei concretă. În aceasta constă „generalitatea“ în algebră. Cu toată această generalitate, vom mai întîlni adeseori numere concrete pe care nu le vom putea evita cu nici un chip. Aceasta, din cauza naturii operaţiilor de calcul. Dacă cerem să ni se spună cît fac $a \cdot a \cdot a$ nu ne poate răspunde nimeni că rezultatul este

a^n, ci trebuie să scriem a^3. Chiar și așa am avea o portiță de scăpare dacă nu am preciza în ce sistem de numerație trebuie să scriem rezultatul. În sistemul cu baza doi $a \cdot a \cdot a$ ar fi a^{11}, în sistemul cu baza trei rezultatul ar fi a^{10}. De data aceasta am putea spune că $a \cdot a \cdot a$ fac a^n, deoarece exponentul n capătă o formă concretă, doar dacă precizăm în ce sistem de numerație trebuie scris rezultatul. Tot așa, în cazul adunării $a + a + + a + a + a = 5\,a$. Dacă sistemul de numerație nu ar fi fost determinat, am fi putut afirma că $a + a + a + a + a = ma$. Valoarea lui m poate fi transcrisă doar la stabilirea sistemului.

CAPITOLUL XI

OPERAȚII ALGEBRICE

Avem acum suficiente cunoștințe de algebră pentru a putea studia și legile ei de calcul. Observăm însă că algoritmul sistemelor de numerație nu poate fi folosit și generalizat întocmai pentru litere. Nici nu putem forma sisteme poziționale concrete de numerație, deoarece totul trebuie să rămînă general și abstract, nici nu putem aduna, scădea, înmulți și împărți literele ca și cifrele, tot din cauza faptului că acest algoritm este strîns legat de sistemele poziționale. Chiar și un profan în probleme de matematică ar rîde dacă ar auzi ceva de genul: $a + b = c$, rămîne 1.

Avînd mereu prezent în minte exemplul merelor și perelor etc., vom încerca deocamdată să găsim metodele fundamentale de calcul algebric, iar ulterior vom deveni mai îndrăzneți.

$a + b$ înseamnă că trebuie să adunăm două cantități constante, dar distincte. Sînt diferite pentru că le-am notat în mod diferit. Ce putem face? $a + b$ rămîne $a + b$, chiar dacă vrem să efectuăm operația. Putem spune cel mult că totul este egal cu $b + a$, deoarece adunarea este comutativă, termenii putînd fi permutați. Apoi $a + b + c + d$ este firește cel mult $a + b + c + d$ sau $a + b + d + c$ sau $b + c + a + d$ etc., $a + a = 2a$ ceea ce știam. În consecință,

$$a + a + a + b + b + c + c + c + c + d = 3a + 2b + 4c + d.$$

Prin convenție, coeficientul 1 nu se scrie niciodată. d înseamnă $1d$ sau $1 \times d$. Putem transcrie expresia precedentă sub altă formă, notînd literele cu indici și evitînd literele prohibite.

$$a_1 + a_1 + a_1 + a_2 + a_2 + a_3 + a_3 + a_3 + a_3 + a_4 = 3a_1 + 2a_2 + 4a_3 + a_4.$$

Să presupunem că sînt date două expresii aditive pe care trebuie să le adunăm. De exemplu,

$$\begin{array}{lrrrrrr} & 3\,a\,+ & 27\,b\,+ & 10\,c\,+ & d\,+ & 15\,e\,+ & 8\,f \\ & 7\,a\,+ & 0\,b\,+ & 9\,c\,+ & 13\,d\,+ & 6\,e\,+ & 101\,f \\ \hline \textit{Total:} & 10\,a\,+ & 27\,b\,+ & 19\,c\,+ & 14\,d\,+ & 21\,e\,+ & 109\,f. \end{array}$$

Se poate constata ușor că coeficienții trebuie adunați; am stabilit astfel o schemă de adunare (bineînțeles nu în scriere pozițională). Ambele expresii puteau fi reunite printr-un plus într-una singură, cu sau fără paranteze, sub forma unei lungi sume:

$$(3\,a + 27\,b + 10\,c + d + 15\,e + 8\,f) + (7\,a + 0\,b + 9\,c + 13\,d + 6\,e + 101\,f) = 3\,a + 27\,b + 10\,c + d + 15\,e + 8\,f + 7\,a + 0\,b + 9\,c + 13\,d + 6\,e + 101\,f = 10\,a + 27\,b + 19\,c + 14\,d + 21\,e + 109\,f.$$

Firește că nu putem aduna coeficienții din fața unor litere diferite, sau ai unor puteri diferite ale aceleiași litere, deoarece nu avem voie să unificăm decît coeficienții aceleiași mărimi. $a_1 + a_2 = a_1 + a_2 = a_2 + a_1$ indiferent ce facem. Tot așa $a^2 + a^0 + a^3$ nu poate fi schimbat în altceva decît tot în $a^2 + a^0 + a^3$ sau în ordine crescătoare $a^0 + a^2 + a^3$, sau în ordine descrescătoare $a^3 + a^2 + a^0$.

Am emis ipoteza că scăderea este o operație cu un sens unic determinat. $a - b$ înseamnă numai și numai $a - b$. Iar $2\,a - 6\,b + 7\,c - a + 4\,b - 2\,c$ este egal cu $2\,a - a + 4\,b - 6\,b + 7\,c - 2\,c$ sau a ...: aici ne împiedicăm. Dintr-o dată întîlnim o nouă noțiune. Într-adevăr, putem manevra pe a și pe c dar nu putem manevra pe b. Cum am putea scădea 6 pere din 4 pere? O să scăpăm cu ușurință din laț. Așa cum înregistrează un negustor care posedă 100 de țechini, o datorie de 120 de țechini. El rămîne dator 20 de țechini și posedă minus 20 de țechini, dacă admitem și paradoxul! În matematică paradoxul este fără îndoială permis! Calculul nostru dă în final a, $5\,c$ și minus $2\,b$ sau $a - 2\,b + 5\,c$ sau $a + 5\,c - 2\,b$ sau $5\,c - 2\,b + a$ etc. Dacă ar fi trebuit să calculăm numai cît fac $4\,b - 6\,b$ ar fi trebuit să scriem $4\,b - 6\,b = -2\,b$. Am ajuns pe această cale la noțiunea de număr negativ, pe care o vom studia atît ca număr negativ concret cît și ca număr algebric generalizat, abstract. Putem reprezenta aceste numere ca segmente pe o linie dreaptă (vezi fig. 4).

Zero este un număr, care reprezintă „nimic". De aceea el nu este nici concret, nici abstract sau este și una și alta — după cum vrem. De obicei nu se mai scrie semnul plus în fața numerelor pozitive, în schimb se scrie totdeauna minusul

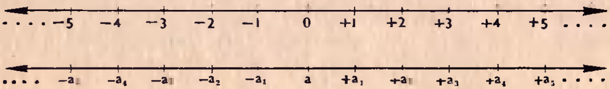


FIG. 4

în fața celor negative. Aceasta prin analogie cu operațiile imediat următoare de sinteză și analiză. De trei ori a se scrie $3 \cdot a$ sau $3 \times a$ sau $3\,a$. De obicei $3\,a$. Dar operația de împărțire $3 : a$ o scriem totdeauna $3 : a$ sau $3/a$.

Mai trebuie să introducem și parantezele pentru a putea progresa în cercetările noastre. Parantezele pe care le-am mai utilizat de multe ori fără comentarii în calculele noastre, reuneau mai mulți termeni care trebuie considerați la un loc. Dacă facem abstracție de paranteze, putem lucra cu expresia delimitată de ele ca și cum ar fi de sine stătătoare. De exemplu

$$10\,000 - (5\,020 + 23 - 448) = ?$$

Întîi calculăm numărul din interiorul parantezelor, obținem ca rezultat 4 595 și acum putem calcula fără paranteze $10\,000 - 4\,595 = 5\,404$. Dacă am fi făcut abstracție de paranteze, considerîndu-le inutile și am fi transcris aceeași expresie fără a calcula interiorul parantezei rezultatul ar fi fost: $10\,000 - 5\,020 + 23 - 448$ adică 4 555, un rezultat evident greșit. Să mai studiem un exemplu:

$$\underbrace{15\,375 - 320}_{15\,055} + \underbrace{(8\,220 - 26 + 400)}_{8\,594} = 23\,649.$$

Dacă îl transcriem sub o formă nepermisă: $15\,375 - 320 + 8\,220 - 26 + 400$, atunci obținem în mod curios tot 23 649, adică numărul corect. Cum de am ajuns la un rezultat bun?

Avem oare dreptul să renunțăm fără nici o grijă la paranteze? Să răspundem imediat: putem suprima parantezele dacă înaintea lor se află semnul plus, dar nu le putem suprima, ci trebuie să le calculăm sau să renunțăm la ele după anumite schimbări, atunci cînd înaintea lor se află semnul minus. Pentru a clarifica aceste lucruri trebuie să pătrundem mai adînc în domeniul numerelor negative. În acest scop vom pune semnul (+ sau —) înaintea tuturor numerelor și vom închide semnul și numărul într-o paranteză pentru a putea deosebi semnul de „ordinul de a efectua anumite operații" — adunare sau scădere — operații care se notează cu aceleași semne (+ sau —). Dacă nu operăm numai cu numere naturale ci și cu numere algebrice pozitive și negative, atunci $5 + 7$ îl transcriem în noua lui semnificație $(+5) + (+7)$, ceea ce dă $(+12)$. O scădere, ca de pildă $12 - 7 = 5$, înseamnă de exemplu $(+12) - (+7) = (+5)$.

Vrem să stabilim care este sensul celor două operații de calcul, adunarea și scăderea pe axa numerelor, înainte de a trece la calculul cu numere negative.

Fără a sta prea mult pe gînduri putem vedea că pe axa numerelor operația de adunare se poate face în moduri diferite. Dacă adunăm numere de la dreapta lui zero, adică numai numere pozitive, atunci prin adunare trebuie să ne deplasăm mereu spre dreapta. De exemplu, $(+1) + (+2) = (+3)$ și $(+3) + (+1) = (+4)$ ș.a.m.d.

Dacă adunăm însă imaginile simetrice ale acestor numere, adică la stînga lui zero, $(-1) + (-2)$, atunci obținem (-3). Și mai departe $(-3) + (-1) = (-4)$, pentru că

FIG. 5

am acumulat datorii. La scăderile care se efectuează sau numai la dreapta sau numai la stînga lui zero, sensul trebuie să fie opus adunării. Ne deplasăm din afară spre zero, de exemplu $(+4) - (+3) = (+1)$ sau în imagine simetrică $(-4) - (-3) = (-1)$; în acest ultim caz am scos din datoria 4 datoria 3, adică am scăpat de o parte din datorie, și m-am apropiat de zero. Situația se prezintă cu totul altfel dacă în calcule trecem peste zero. Să presupunem că ar trebui să adunăm $(+3)$ cu (-2). Aici ar trebui să „tăiem" axa numerelor în zero şi să aşezăm cele două bucăţi una lîngă alta.

Aşezarea se face în aşa fel încît fiecare număr negativ este situat deasupra numărului pozitiv corespunzător. Cu această dispunere a datoriilor şi posesiunilor putem vedea dacă există un surplus la vreuna din ele. Prin această compensare reci-

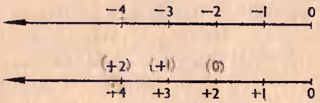


FIG. 6

procă a datoriilor şi posesiunilor a apărut un nou punct de zero şi îl voi scrie în paranteze pe acea parte a axei numerelor pe care a apărut surplusul; în exemplul nostru, pe porţiunea pozitivă. Apoi numerotăm în continuare, începînd de la acest zero. Numărul de jos (aici $+3$) arată cît de departe trebuie să mergem, numărul de sus, din paranteze, arată rezultatul — aici $(+1)$. Deducem $(+3)+(-2)=(+1)$. Repetăm totul pentru imaginile prin simetric.

Aici minusurile prevalează asupra plusurilor. Plus doi şi

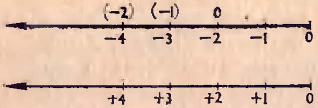


FIG. 7

minus doi se compensează şi dau noul zero. Rezultatul: noul număr de deasupra lui minus trei, adică

$$(-3)+(+2)=(-1).$$

Ar mai fi de studiat scăderea cu trecerea peste zero. Aici trebuie o atenţie deosebită. Să alegem de exemplu $(+2) -$ $-(-1)$.

Ce putem obţine de aici? Dintr-un activ de doi, trebuie să scoatem o datorie egală cu 1, ceea ce înseamnă nu numai că ne-am păstrat intact ceea ce aveam, ci am eliminat și datoriile. Rezultatul calculului nostru este: activul 2, datoria înlăturată 1, în total activul este 3, sau $(+2)-(-1)=$ $=(+3)$.

Acum vom scrie unul sub altul toate cazurile examinate pentru a putea deduce reguli:

$$(+1)+(+2)=(+3) \qquad (+3)+(-2)=(+1)$$
$$(-3)+(-1)=(-4) \qquad (-3)+(+2)=(-1)$$
$$(+4)-(+3)=(+1) \qquad (+2)-(-1)=(+3)$$
$$(-4)-(-3)=(-1) \qquad (-2)-(+1)=(-3)$$

Studiind cu atenție toate aceste cazuri și gîndindu-ne puțin cum am putea renunța complet la paranteze, ajungem la următorul rezultat:

$$+1+2=+3 \qquad +3-2=+1$$
$$-3-1=-4 \qquad -3+2=-1$$
$$+4-3=+1 \qquad +2+1=+3$$
$$-4+3=-1 \qquad -2-1=-3$$

Ce înseamnă toate acestea? Nimic altceva decît că „operația" poate fi legată de „semn" într-un mod relativ simplu. Primul rînd l-am lăsat neschimbat, am renunțat numai la paranteze, deoarece acest pas nu avea cum să modifice rezultatul; concluzia noastră este confirmată și de analizarea operației pe axa numerelor. Dacă însă minusul era situat înaintea unei paranteze, atunci expresia a fost transcrisă, uneori modificat, alteori nemodificat. Și anume, plus cu plus a dat tot plus, plus cu minus a dat minus, minus cu plus a dat minus, minus cu minus a dat plus. În rezumat: dacă semnul coincide cu operația, atunci rezultatul este plus. Dacă semnul numărului este opus celui al operației, atunci rezultatul este minus. Această regulă nu se aplică însă numai atunci cînd în paranteză apare un singur număr, ci și atunci cînd paranteza conține mai multe numere. O deducere riguroasă a acestor relații ar fi însă prea greoaie. De aceea ne vom mulțumi cu cele ce am aflat și vom încerca să le aplicăm. De exemplu,

$$20-(3+5-7+6-9)=20-3-5+7-6+9=22;$$

același rezultat l-am fi obținut dacă am fi calculat expresia din paranteză, adică am fi scris $20-(-2)$, adică $20+2=$ $=22$. Am clarificat acum o problemă care rămăsese nelămurită: de ce plusul din fața unei paranteze nu modifică expresia din paranteză, astfel încît se poate renunța la ele. Dacă plusul este înaintea unui plus, atunci rezultatul este tot plus. Dacă plusul este înaintea unui minus, atunci rămîne minusul. De exemplu,

$$25 + (6 - 8 + 4 + 12 - 3) = 25 + 6 - 8 + 4 + \\ + 12 - 3 = 36$$

sau dacă preferăm să calculăm întîi paranteza, atunci $25 + + 11 = 36$. Acum putem scădea și numere mai mari din numere mai mici. De exemplu, $13 - 20 = (+ 13) - (+ 20) = (- 7)$ sau $13 - 20 = - 7$; aici trebuie să achităm cu 13 țechini o datorie de 20 de țechini, înseamnă deci că rămînem datori cu 7 țechini.

Subliniem că toate acestea au fost prezentate destul de aproximativ. Ar fi fost mult mai elegant să considerăm și semnul ca o operație, și anume ca un ordin de a ne deplasa pe axa numerelor cu atît cît indică numărul în fața căruia este semnul. Deplasarea trebuie să se facă în sensul indicat de semn. Atunci $(+ 3)$ înseamnă „deplasează-te spre dreapta pînă la 3!“, iar $(- 7)$ ar însemna „deplasează-te de la zero spre stînga pînă la $(- 7)$!“. Această operație de deplasare poate fi combinată cu adunarea sau scăderea. Să facem abstracție de numerele concrete și să nu scriem nici măcar numerele generalizate, și să studiem numai care este efectul combinării a două operații; avem de-a face cu „operații cu operații“, adică un „calcul cu simboluri“. Deocamdată nu putem urca mai sus pe această ramură înaltă a cabalei. Vrem însă să precizăm că efectuăm un calcul simplu cu simboluri atunci cînd afirmăm că la combinarea semnelor de același fel (plus cu plus sau minus cu minus) obținem plus, pe cînd la combinarea a două semne opuse, obținem minus.

Să trecem acum la parantezele multiple. Le-am mai scris noi o dată, dar fără lămuriri suplimentare; acum vrem însă să studiem un caz de dispunere a mai multor paranteze, una în cealaltă. Să presupunem că trebuie să scădem din 6 expresia $(3 + 4 - 7 + 2)$, iar acest rezultat trebuie scăzut din 15 și, în sfîrșit, rezultatul ultim trebuie adunat cu 5. Și iarăși totul trebuie scăzut din $23 - 7 + 6$. Toate acestea trebuie făcute fără a calcula mai întîi parantezele. Vom scrie sub forma

$$(23 - 7 + 6) - \{15 - [6 - (3 + 4 - 7 + 2)] + 5\} = ?$$

Regula spune că parantezele se desfac sigur fără greşeală dacă începem de la interior şi pornim spre exterior. Aş putea proceda şi invers, dar acest procedeu ar fi mai puţin sigur. Aşadar, desfacem mai întîi parantezele rotunde:

$$23 - 7 + 6 - \{15 - [6 - 3 - 4 + 7 - 2] + 5\} = ?$$

apoi pe cele drepte

$$23 - 7 + 6 - \{15 - 6 + 3 + 4 - 7 + 2 + 5\} = ?$$

şi, în sfîrşit, acoladele

$$23 - 7 + 6 - 15 + 6 - 3 - 4 + 7 - 2 - 5 = 6,$$

rezultat care putea fi obţinut şi dacă calculam întîi parantezele. Tot ce este în afara parantezelor este egal cu 22. Tot ce este în paranteze este egal cu 16, iar diferenţa este 6. Dacă urmărim procedeul constatăm că unele cifre schimbă de mai multe ori semnul, pînă ajung, după numeroase operaţii, la forma finală. Deocamdată observăm numai că această schimbare a semnelor reprezintă o înmulţire a ordinelor; vom reveni mai tîrziu asupra acestei probleme. Este cazul însă să ne întoarcem la algebra pe care am părăsit-o într-un stadiu destul de încîlcit, cînd am discutat despre operaţia de scădere. Acuma, cu regulile pe care le cunoaştem, nu vom mai întîmpina greutăţi în efectuarea scăderilor. Dacă avem două mere şi trebuie să dăm două mere, atunci nu mai avem nici un măr, adică zero mere. Dacă însă avem 6 mere şi trebuie să dăm 4, atunci ne rămîn 2 mere. Dacă am avea 3 mere şi ar trebui să dăm 7 mere, atunci am rămîne datori cu 4 mere. Şi, în sfîrşit, dacă am fi datori cu 5 mere şi am avea în plus o datorie de 3 mere, atunci datoria totală ar fi de 8 mere.

$(+ 5\,a)$ reprezintă un activ de 5 mere, $(- 8\,a)$ înseamnă o datorie de 8 mere. Putem acum să sărim peste etapele intermediare şi să trecem direct la notarea cu paranteze, pentru numere notate cu diferite litere

$$\begin{aligned}
&15a - \{6a + [3b + 5c - 2a] + [3c - (5a + 7b)] + c\} = \\
&= 15a - \{6a + [3b + 5c - 2a] + [3c - 5a - 7b] + c\} = \\
&= 15a - \{6a + 3b + 5c - 2a + 3c - 5a - 7b + c\} = \\
&= 15a - 6a - 3b - 5c + 2a - 3c + 5a + 7b - c = \\
&= 16a + 4b - 9c.
\end{aligned}$$

Observăm că în algebră putem face calculul în interiorul parantezei numai atunci cînd în parantezele respective figurează mărimi desemnate cu aceeași literă. Ca de exemplu,

$$17a - [6b + (9a - 3b + c + 5a - 2c + b) + 2b] = ?$$

Înainte de a desface toate parantezele am putea scrie

$$17a - [8b + (14a - 2b - c)],$$

ceea ce ar da ca rezultat

$$17a - [8b + 14a - 2b - c] = 17a - 6b - 14a + c = 3a - 6b + c.$$

Tot timpul ne-a stat pe limbă să spunem că adunarea și scăderea sînt operații comutative, adică ordinea termenilor poate fi schimbată dacă considerăm ca termen numărul împreună cu semnul dinaintea lui. Pe calea aceasta am ajuns la noțiunea de sumă algebrică sau aritmetică. Și anume, dintr-un anumit punct de vedere nici nu există scădere, ci numai adunări de numere pozitive sau negative. $5 - 3 - 2 + 4$ poate fi scris ca $+ (+ 5) + (- 3) + (- 2) + (+ 4)$. Tot atît de bine puteam presupune că nu există decît scăderi. Atunci ar fi vorba aparent de diferența algebrică sau aritmetică. În cazul nostru, $- (- 5) - (+ 3) - (+ 2) - (- 4)$ dau același rezultat: $(+ 4)$. Există deci și o lege a comutativității operațiilor, datorită căreia nu știm niciodată dacă semnul unui număr pozitiv provine din combinarea a două plusuri sau a două minusuri. Aceasta însă ca o observație secundară. Important este numai că exemplul nostru poate fi scris atît ca adunare cît și ca scădere și că în plus putem comuta termenii, adică $+ (- 2) + (+ 5) + (+ 4) + (- 3)$, iar rezultatul este $(+4)$.

Am progresat mult în considerațiile noastre făcute într-un cadru general și vrem să stabilim acum o proprietate caracteristică operației de înmulțire, numită „distributivitatea" înmulțirii (vom face aceasta bazîndu-ne nu pe logică, ci mai mult pe îndrăzneala noastră). Afirmăm că $5 (7 + 4 - 3 + 9)$ este egal cu $5 \cdot 7 + 5 \cdot 4 - 5 \cdot 3 + 5 \cdot 9 = 35 + 20 - 15 + 45 = 85$, ceea ce este evident corect, deoarece dacă calculăm paranteza obținem $5 \cdot 17 = 85$.

În general, $a (b + c - d + e - f) = ab + ac - ad + ae - af$, lucru pe care firește că nu-l vom putea demonstra

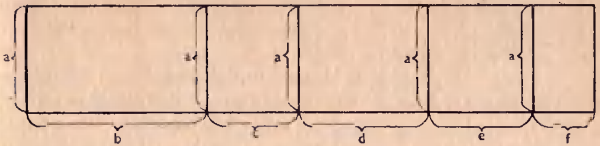


FIG. 8

în cadrul acestui exemplu. Am putea cel mult să verificăm afirmația, punînd numere în locul literelor. Pentru a face mai intuitiv principiul care stă la baza acestei afirmații vom folosi o demonstrație geometrică. Pentru moment vom pune în paranteză numai adunări. De exemplu,

$$a(b + c + d + e + f) = ab + ac + ad + ae + af.$$

Suprafețele celor cinci dreptunghiuri pe care le-am așezat unele lîngă altele sînt date de formula cunoscută din exemplul mai vechi cu covorul, ab, ac, ad, ae și af. Suma suprafețelor tuturor dreptunghiurilor este $ab + ac + ad + ae + af$. Această sumă este însă suprafața dreptunghiului mare încadrat de o linie groasă. Dacă calculăm suprafața acestui dreptunghi mare în funcție de lungimea și lățimea lui, trebuie să înmulțim lungimea $(b + c + d + e + f)$ cu lățimea a. Rezultatul este $a(b + c + d + e + f) = ab + ac + ad + ae + af$ și cu aceasta ne-am verificat ipoteza.

Lăsăm pe seama cititorului să decupeze dreptunghiuri de diferite mărimi și să verifice că regula distributivității este respectată și atunci cînd în interiorul parantezelor apar numere negative. Dreptunghiurile „pozitive" trebuie așezate unul lîngă celălalt, iar cele „negative" le scădem din cele pozitive, așezîndu-le deasupra acestora. Cititorul va demonstra mai departe că rezultatul este același dacă a rămîne nemodificat și determinăm independent de a lungimea dreptunghiului prin scăderi sau adunări ale numerelor b, c, d etc.

Putem extinde principiul distributivității și la cazul „polinoamelor", care sînt expresii obținute prin însumarea mai multor numere. De data aceasta vom începe cu demonstrația din geometria euclidiană.

Aici obținem opt dreptunghiuri (fig. 9). Suprafețele lor sînt ac, ad, ae, af, iar pentru cele de sus bc, bd, be, bf. Suprafața totală este însă $(a + b) \cdot (c + d + e + f)$. În notația comutativă, $(c + d + e + f) \cdot (a + b) = ac + ad + ae + af + bc + bd + be + bf$.

Cu aceasta am stabilit legea fundamentală a înmulțirii algebrice. Această lege afirmă că: atunci cînd trebuie să înmulțim două expresii care sînt formate fiecare prin însumarea mai multor termeni, înmulțim mai întîi (ținînd seama de semne[1]) toți termenii primului polinom cu primul termen al celui de-al doilea polinom, apoi toți termenii primului polinom cu al doilea termen al celui de-al doilea polinom și așa mai departe. Putem proceda și invers, înmulțind al doilea polinom pe rînd cu termenii primului, în virtutea proprietăților de comutativitate și distributivitate ale înmulțirii. Regula pare foarte complicată, însă sub această formă am învățat-o ca înmulțire în clasele elementare. Este chiar mai simplă decît ceea ce am învățat la școală, deoarece atunci a trebuit să ținem seama atît de distributivitatea cît și de comutativitatea factorilor, de valoarea pozițională și de mărimea lor. Vom ilustra mai tîrziu toate afirmațiile noastre. Mai întîi o simplă înmulțire de polinoame algebrice (expresii cu mai mulți termeni):

$$(7a + 5b + 8c + 9d + e) \cdot (2f + 4g + 6h) = 14af + 10bf + 16cf + 18df + 2ef + 28ag + 20bg + 32cg + 36dg + 4eg + 42ah + 30bh + 48ch + 54dh + 6eh.$$

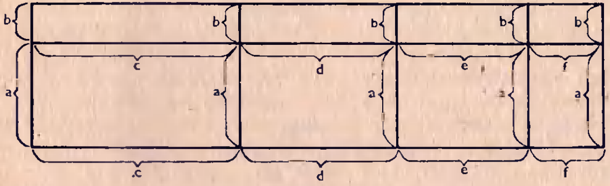


FIG. 9

Acest exemplu nu mai poate fi simplificat. Am putea transforma într-un anumit sens expresia, dar nu ne vom opri la

[1] Și în cazul acesta este valabilă regula semnelor: semnele de același fel dau prin înmulțire plus, semnele opuse dau minus.

acest punct. Observăm că numerele concrete, coeficienții, au fost pur și simplu înmulțiți între ei. În fond este vorba de înmulțirea numerelor generalizate a, b, c etc. Folosind un algoritm am putut reuni numerele concrete sub forma altui număr concret. Ar trebui să scriem mai întîi $7a \cdot 2f$ sau $7 \cdot 2 \cdot a \cdot f$, apoi $5b \cdot 2f$ sau $5 \cdot 2 \cdot b \cdot f$ ș.a.m.d. S-ar mai putea întîmpla ca, datorită altui algoritm, să putem concentra și numerele generalizate, abstracte. Dacă ar trebui să înmulțim $(2a + 3b) \cdot (5a + 7ab)$ ar trebui să scriem

$$(2a + 3b) \cdot (5a + 7ab) = 5a \cdot 2a + 5a \cdot 3b + 7ab \cdot 2a + $$

$$+ 7ab \cdot 3b = 10aa + 15ab + 14aab + 21abb.$$

Așadar știm ce înseamnă $a \cdot a$ și $b \cdot b$, iar rezultatul final este deci

$$10a^2 + 15ab + 14a^2b + 21ab^2.$$

Pe baza acestui ultim exemplu vrem să definim o nouă noțiune. Este vorba de așa-numita operație de „dare a factorului comun". Această operație este o consecință a proprietății de distributivitate sau, dacă vreți, inversa ei. Datorită acestei operații putem transforma o expresie fără paranteze într-un produs de mai multe paranteze sau într-un produs de factori deînmulțit cu mai multe paranteze. Să folosim ultimul nostru rezultat:

$$10a^2 + 15ab + 14a^2b + 21ab^2.$$

Ne întrebăm care este numărul conținut în fiecare dintre termenii de mai sus și observăm de la prima privire că a îndeplinește această condiție. Vom da deci pe a ca „factor" comun

$$10aa + 15ab + 14aab + 21abb.$$

Care este celălalt factor? Evident $10a + 15b + 14ab + 21bb$. Rezultatul anterior poate fi scris acum sub forma $a(10a + 15b + 14ab + 21bb)$, căci înmulțirea acestor două expresii ne aduce iar la ceea ce este scris mai sus. Am putea însă să dăm și alt factor comun

$$2(5a^2 + 7\,a^2b) + 3(5ab + 7ab^2)$$

sau

$$10a^2 + b(15a + 14a^2 + 21ab)$$

sau

$$10a^2 + 15ab + 7ab(2a + 3b)$$

sau

$$10a^2 + ab\,[15 + 7(2a + 3b)]$$

sau

$$a\,\{10a + b\,[15 + 7(2a + 3b)]\}\ \text{etc.}$$

Darea factorului comun pentru expresii mai complicate este o operație care necesită mult exercițiu. De multe ori darea factorului comun are o importanță esențială, dat fiind că adeseori prin transformări de acest tip pot fi simplificate considerabil fracții la care numărătorul și numitorul sînt expresii complicate. Nu vrem însă să anticipăm. Vrem mai bine să studiem legea distributivității și pentru numerele negative. Dacă scriem ca „sumă algebrică"

$[(+a) + (-2b)]\ [(+c) + (-3d)]$, obținem rezultatul

$$(+c)\,(+a) + (+c)(-2b) + (-3d)\,(+a) + (-3d)\,(-2b) =$$
$$= ac \quad - \quad 2bc \quad - \quad 3ad \quad + \quad 6bd,$$

adică ceea ce am fi obținut dacă am fi calculat mai simplu $(a - 2b)\,(c - 3d) = ac - 2bc - 3ad + 6bd$. Am aplicat din nou regula conform căreia la înmulțire semnele de același fel dau plus, pe cînd semnele opuse dau minus. Ne vom întreba: unde sînt semnele din cel de-al doilea caz? Vom răspunde: ele sînt scrise în fața numerelor și s-au obținut conform regulii de contopire a semnelor. Din punct de vedere algebric, $(a - 2b)$ înseamnă $[+(+a) + (-2b)]$ sau $[-(-a) - (+2b)]$ sau $[+(+a) - (+2b)]$.

La înmulțire, acestor semne li se suprapun alte semne, astfel încît putem considera că primul termen al rezultatului s-a format în modul următor: $+(+a) \cdot + (+c)$ sau $(-a) \cdot$ $\cdot - (+c)$; în ambele cazuri rezultatul este ac. Al doilea termen ar putea fi considerat ca provenind din $+(-2b) \cdot + (+c)$ sau $-(+2b) \cdot + (+c)$, sau $+(-2b) \cdot -(-c)$, ceea ce înseamnă $-2bc$.

Acum vom generaliza regula semnelor și vom spune că: dacă trebuie să înmulțim un număr oarecare de semne, atunci înmulțirea plusurilor are ca rezultat tot semnul plus. Un număr par de minusuri dă prin înmulțire tot plus, deoarece minusurile se combină două cîte două și dau plus. Un număr impar de minusuri dă prin înmulțire minus. Dacă trebuie să înmulțim un număr oarecare de plusuri și minusuri, atunci, indiferent de numărul plusurilor, rezultatul va fi minus dacă minusurile apar în număr impar și plus dacă minusurile apar în număr par. De exemplu:

$(+a)\cdot(+b)\cdot(+c) = (+abc)$ (număr impar),
$(+a)\cdot(+b)\cdot(+c)\cdot(+d) = (+abcd)$ (număr par),
$(-a)\cdot(-b)\cdot(-c)\cdot(-d) = (+abcd)$ (număr par),
$(-a)\cdot(-b)\cdot(-c) = (-abc)$ (număr impar),
$(+a)\cdot(+b)\cdot(+c)\cdot(-d)\cdot(-e) = (+abcde)$ (număr par de minusuri),
$(+a)\cdot(+b)\cdot(-c)\cdot(-d)\cdot(-e) = (-abcde)$ (număr impar de minusuri).

Cu puțină atenție vom putea efectua totdeauna orice înmulțire algebrică de numere întregi. Să calculăm un exemplu ceva mai complicat:

$$(5ab + 3ad + 9bc)\,(abc - 6de) = 5a^2b^2c + 3a^2bcd +$$
$$+ 9ab^2c^2 - 30abde - 18ad^2e - 54bcde.$$

Alt exemplu:

$$(a - b)\,(2a + 3b) = 2a^2 - 2ab + 3ab - 3b^2.$$

Aici apare ceva ce n-am mai întîlnit pînă acum. Și anume ab apare de două ori. O dată ca $(-2ab)$ și a doua oară ca $(+3ab)$. Avem voie să adunăm, respectiv să scădem, deoarece ab este o mărime algebrică, ca și a sau b singuri. Atunci, $(-2ab) + (3ab) = 1ab$, sau ab. Rezultatul final: $2a^2 + ab - 3b^2$. Această adunare cere mare atenție și acuratețe în scrierea semnelor, pentru a evita greșelile. Avem dreptul să adunăm sau să scădem numai dacă grupul de numere generalizate este același pentru toți termenii din expresie, de exemplu $7a^2 + 4a^2$ sau $5abc^2 - 3abc^2$. Dimpotrivă, expresia $5abc^2 - 3ab^2c$, formată din doi termeni, nu poate fi redusă la un singur termen, deoarece $a\,b\,c^2$ sau $a\,b\,c\,c$ este tot atît de străin de $a\,b^2\,c$ sau $a\,b\,b\,c$ ca și mărul de pară. Asemănarea nu spune nimic. Numai identitatea strictă decide asupra posibilităților de adunare sau scădere!

Să studiem în continuare încă un algoritm și anume cel al ridicării la putere. Știm ce înseamnă ridicarea la putere. Este o operație sintetică, care presupune că un anumit număr trebuie scris ca factor într-un produs de un număr de ori egal cu indicele scris în dreapta sus (exponentul):

$$a^2 = a \cdot a,\ a^3 = a \cdot a \cdot a,\ a^6 = a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \text{ ș.a.m.d.}$$

Cum se înmulțesc puterile? De exemplu, cum înmulțesc pe a^2 cu a^7? Să scriem deocamdată

$$(a \cdot a) \times (a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a).$$

Dat fiind că avem de-a face numai cu înmulțiri putem scrie

$$a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a = a^9.$$

Care este relația dintre exponenții 2, 7 și 9? Foarte simplă: $9 = 7 + 2$. Situația este într-adevăr clară. Orice număr scris ca exponent reprezintă înmulțirea de tot atîtea ori cu el însuși a altui număr. Dacă înmulțim mai multe puteri ale unei aceleiași baze înseamnă că baza trebuie înmulțită cu ea însăși de atîtea ori cît arată toți exponenții la un loc, adică atît cît dă suma lor. Așadar, $a^{15} \cdot a^6 = a^{15+6} = a^{21}$ și $b^{10} \cdot b^{11} \cdot b^7 = b^{10+11+7} = b^{28}$ etc. Dacă vrem să exprimăm această regulă printr-o formulă generală trebuie să scriem: $a^n \cdot a^m \cdot a^r \cdot a^s = a^{n+m+r+s}$ sau $b^c \cdot b^d \cdot b^f = b^{c+d+f}$. Ne punem acum altă problemă. Ce se întîmplă cînd vrem să ridicăm o putere la altă putere? De exemplu, vrem să ridicăm pe a^3 la puterea a cincea $(a^3)^5$. Să ne gîndim puțin. Ce semnificație are această expresie? Simplu

$$a^3 \cdot a^3 \cdot a^3 \cdot a^3 \cdot a^3 = a^{3+3+3+3+3} = a^{5 \cdot 3}.$$

Obținem din nou o regulă extrem de simplă. Dacă vrem să ridicăm o putere la o altă putere, atunci trebuie să înmulțim exponenții. În general, $(a^n)^m = a^{nm}$ sau un caz mai complicat, $[(b^a)^m]^r = b^{amr}$ etc.

Pentru a completa rezultatele obținute repetăm: orice număr ridicat la puterea zero dă ca rezultat 1. Dat fiind că ne-am însușit acum notația generală putem afirma: $a^0 = 1$, unde a poate avea orice valoare de la 1 pînă la orice număr oricît de mare. Mai departe, $a^0 \cdot a^n = a^{0+n} = a^n$, deoarece și $1 \cdot a^n = a^n$; $a^n \cdot a$ este bineînțeles $a^n \cdot a^1 = a^{n+1}$. În definitiv, dacă ne întrebăm cît este $[(a^0)^3]^5$ constatăm că este egal cu

$a^{0\cdot 3^5} = a^0$, adică 1. Rezultatul este cît se poate de clar, deoarece a^0 era egal cu 1 și 1 ridicat la orice putere este tot 1. Unu poate fi înmulțit cu el însuși ori de cîte ori vrem, rezultatul fiind tot unu.

Un cititor mai atent va observa aici o asociere remarcabilă a celor trei operații sintetice, cunoscute pînă acum. Ridicarea la putere înseamnă înmulțirea cu sine însuși. Înmulțirea puterilor aceleiași baze înseamnă pînă la urmă adunarea exponenților. Ridicarea puterilor la o putere înseamnă înmulțirea exponenților. Vrem numai să sugerăm că întregul algoritm nu reprezintă de fapt decît o adunare repetată, la care ni se indică de cîte ori trebuie să adunăm, deoarece $3^2 = 3 \cdot 3$ este adunarea lui trei de 3 ori cu el însuși, adică $3 + 3 + 3$, iar $3^2 \cdot 3^3 = 3^5 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$, ceea ce înseamnă că 3 trebuie scris de 81 de ori ca termen într-o sumă. Rezultatul este 243, adică 3^5.

Cunoscătorii mașinilor de calcul vor înțelege ușor afirmațiile noastre. Orice mașină care efectuează înmulțiri funcționează pe principiul că un număr trebuie adunat cu el însuși de atîtea ori cît cere înmulțirea respectivă. Adică un același termen este însumat de atîtea ori cît indică înmulțitorul. Ca să nu ne pierdem prea mult vom pune capăt acestor considerații și vom sublinia numai că pînă acum orice operație sintetică provenea din operația sintetică anterioară. În această interpretare, dacă admitem ordinea: adunare, înmulțire, ridicare la putere, orice înmulțire este o adunare a deînmulțitului cu el însuși de atîtea ori cît arată înmulțitorul; orice ridicare la putere este o înmulțire de factori identici (a bazei), iar exponentul arată cîți asemenea factori apar în produs.

Acuma putem afirma că există o relație asemănătoare între scădere și împărțire. Ipoteza noastră este pe deplin justificată și vom vedea aceasta pe un exemplu. Să scădem de mai multe ori, de exemplu, pe 13 din 120 și vom obține:

120—13 = 107 (prima scădere),
107—13 = 94 (a doua scădere),
94—13 = 81 (a treia scădere),
81—13 = 68 (a patra scădere),
68—13 = 55 (a cincea scădere),
55—13 = 42 (a șasea scădere),
42—13 = 29 (a șaptea scădere),
29—13 = 16 (a opta scădere),
16—13 = 3 (a noua scădere).

De aici încolo rezultatul nu mai poate fi exprimat în numere pozitive. Am putut scădea de nouă ori și am obținut ca rest trei. Împărțirea ar da:

$$120 : 13 = 9 \text{ (rest 3), adică același lucru.}$$

Am descoperit că împărțirea este numai o scădere repetată, lucru știut de altfel de toți cunoscătorii mașinilor de calcul. Problema fundamentală a împărțirii nu este numai: „de cîte ori se cuprinde împărțitorul în deîmpărțit și care este restul?" Tot atît de îndreptățită este și întrebarea „de cîte ori pot să scad un anumit număr dintr-altul și care este restul, în ipoteza că nu vreau să ajung la numere negative?"

Din exemplul de mai înainte, putem constata cu ușurință superioritatea algoritmului împărțirii față de cel al scăderii. În primul caz am făcut nouă scăderi, cu tot atîtea surse de erori, în al doilea caz a fost necesară o singură operație pentru a ajunge la rezultat. Mașina mecanică de calcul își poate permite să facă scăderi continue. În primul rînd, ea nu greșește niciodată pentru că roțile ei dințate nu pot lucra decît corect. În al doilea rînd, turația unei asemenea mașini poate fi mărită practic oricît de mult, folosind motoarele electrice. În al treilea rînd, operația propriu-zisă, scrisă, de efectuare a împărțirii nu poate fi „transpusă" pentru mașină, deoarece mașina face înmulțirile ca adunări repetate. Toate acestea le-am spus însă numai în treacăt.

Pentru a încheia cercetările noastre de algebră ne punem problema împărțirii unor numere abstracte (generalizate). Să începem cu cazul cel mai simplu. Care este rezultatul lui $a:b$? Răspunsul: chiar $a:b$. Împărțirea nu este comutativă; ca și scăderea, ea trebuie efectuată într-un anumit sens. Cel mult putem să scriem rezultatul altfel, adică $a : b = a/b$, ceea ce nu reprezintă un cîștig, ci numai o modificare a notației. După cum a de înmulțit cu b este același lucru ca $a \times \times b$, pentru împărțire am putea scrie și „a de împărțit la b" sau „a divizat la b", sau „a față de b" (expresie ce mai trebuie completată).

Ca și la înmulțire vrem să studiem și la împărțirea numerelor abstracte trei cazuri posibile, și anume raportul a două mărimi oarecare, înmulțite eventual fiecare cu un coeficient, raportul a două puteri și raportul a două polinoame.

În cazul raportului a două mărimi reprezentate de litere diferite am mai amintit că expresia $a:b$ nu mai poate fi simplificată. Operația nu poate fi efectuată decît dacă înlocuim numerele generalizate cu numere concrete. De exemplu, $a = 12$, $b = 3$. Atunci evident $a:b = 12:3 = 4$. Există însă și alte combinații posibile. Cît face $3\,a : a$? Ne întrebăm aici ce înseamnă 3 mere față de un singur măr sau de cîte ori este conținut un măr într-un grup de trei mere. Răspunsul este evident: $3\,a : a = 3$. Și, în general, $n \cdot a : a = n$. Tot așa $15\,a : 3\,a = 5$, iar $ba : a = b$. Dat fiind că rezultatul împărțirii oricărui număr cu el însuși este totdeauna unu, înseamnă că $a : a = 1$. Cred că putem înțelege și faptul că $25\,abcd : 5\,ac = 5\,bd$. De fapt, la fiecare împărțire trebuie să avem proba în fața ochilor. Ultima dată am avut de înmulțit $5\,bd$ cu $5\,ac$. Obținem imediat $25\,abcd$, ceea ce confirmă afirmațiile noastre. Înseamnă că acest tip de calcule nu prezintă nici un fel de dificultăți.

Vrem acum să studiem amănunțit cum se împart puterile. Întîi scriem puterile ca înmulțiri. Care este rezultatul operației

$$(a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a) : (a \cdot a \cdot a) = ?$$

Expresia din paranteză trebuie împărțită o dată la a, apoi încă o dată la a și, în sfîrșit, încă o dată la a, dat fiind că este același lucru dacă împart pe 27 la $9 = 3 \times 3$ sau împart întîi la 3 și apoi iar la 3. Împărțirea de mai sus a unui produs de șase factori, toți egali cu a, la un alt produs de trei factori, egali fiecare cu a, dă ca rezultat

$$a \cdot a \cdot a \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = a \cdot a \cdot a.$$

Sau $a^6 : a^3 = a^3$. Mai departe, $(b \cdot b \cdot b \cdot b \cdot b \cdot b \cdot b) : (b \cdot b)$ este egal cu $b \cdot b \cdot b \cdot b \cdot b \cdot 1 \cdot 1$ sau $b \cdot b \cdot b \cdot b \cdot b = b^5$ și rezultatul este

$$b^7 : b^2 = b^5.$$

Regula este evidentă. Prin comparație putem stabili o relație între cele două operații analitice: împărțirea și scăderea, deoarece $a^6 : a^3 = a^{6-3} = a^3$ și $b^7 : b^2 = b^{7-2} = b^5$. În calitate de vechi algebriști nu mai pierdem vremea cu încercări și scriem direct formula generală $a^m : a^n = a^{m-n}$; formula se verifică pentru a^m: $a^m = a^{m-m} = a^0 = 1$. Firește, a^m: : $a = a^{m-1}$ și $a^m : a^0$ sau $a^m : 1 = a^{m-0} = a^m$. Orice verificare trebuie să ducă la rezultatul corect. De exemplu, a^m: : $a = a^{m-1}$, iar proba este $a \cdot a^{m-1} = a^1 \cdot a^{m-1} = a^{1+m-1} = a^m$ etc. În încheiere mai dăm un exemplu mai complicat, pentru a ilustra utilizarea concomitentă a mai multor algoritmi:

$$39\, a^7\, b^5\, c^r\, d^{m+2} : 13\, a^4\, c^s\, d^3 = 3\, a^{7-4} \cdot b^5 \cdot c^{r-s} \cdot d^{m+2-3} =$$

$$= 3\, a^3\, b^5\, c^{r-s}\, d^{m-1}.$$

Observăm că dacă o bază nu apare în împărțitor [1], putem considera că baza respectivă figurează cu puterea zero în împărțitor (adică apare de fapt factorul 1 în împărțitor). În exemplul nostru, $39\, a^7 b^5 c^r d^{m+2}$: $13\, a^4\, b^0\, c^s\, d^3$ și pentru b rezultatul este $b^{5-0} = b^5$, adică rezultatul corect. Introducerea puterii 0 este utilă pentru a scrie elegant anumite expresii; același lucru l-am constatat și în cazul sistemelor de numerație.

După o mică observație preliminară vom trece la cea mai dificilă (pentru moment) problemă de algebră, și anume împărțirea polinoamelor (expresii algebrice formate din însumarea mai multor produse. — *N.T.*). Pentru expresiile de acest tip există anumite principii de ordonare la care în anumite cazuri nu se poate renunța, cu toate că „ordonarea" nu modifică cu nimic valoarea expresiei. Orice soldat știe că efectivul și puterea de luptă a unei companii nu se schimbă dacă soldații sînt aranjați în ordinea înălțimii, în formație de marș sau paradă. Această aranjare prezintă însă anumite avantaje. Cînd trec de la formația desfășurată la cea de marș, atunci cei înalți mărșăluiesc în primele rînduri, în fruntea trupei, și antrenează pe camarazii lor mai mici de statură la tempo-ul lor de marș, corespunzător unui pas mai mare. La schimbarea direcției alegem ca centru de rotație pe cel mai scund, astfel încît celui mai înalt, situat într-o extremă, să-i revină drumul cel mai lung. În definitiv acest principiu de ordonare se dovedește util pentru marșuri, deoarece stabilește o anumită aranjare avantajoasă pentru unele scopuri.

---

[1] Mai tîrziu vom discuta și lipsa unor numere din deîmpărțit!

Noi am mai întîlnit un asemenea principiu, în cazul „ordonării după mărime" în sistemul pozițional. Era vorba, de fapt, de o dezvoltare a numărului după puterile „crescătoare" sau „descrescătoare" ale bazei sistemului; „crescătoare" sau „descrescătoare", după cum priveam numărul de la un capăt sau de la celălalt. În sistemul nostru cu baza zece numerele se scriu în ordinea puterilor descrescătoare ale lui zece de la stînga spre dreapta. 91 435 înseamnă $9 \times 10^4 + 1 \times 10^3 + 4 \times 10^2 + 3 \times 10^1 + 5 \times 10^0$.

Acest principiu de scriere îl vom generaliza pentru expresii algebrice în care apar ca puteri numere concrete sau cînd știm din anumite date suplimentare ordinea în care trebuie scrise puterile unor numere generalizate.

$a^3 + a^7 + a^4 - a^2 + a^{16} - a^5$ poate fi scris în ordinea puterilor descrescătoare ale lui a sub forma

$$a^{16} + a^7 - a^5 + a^4 + a^3 - a^2.$$

Dacă ar fi trebuit să ordonăm $a^m + a^r + a^s - a^b - a^d + a^h$ și cu condiția ca ordinea literelor din alfabet să respecte ordinea mărimilor pe care le reprezintă, atunci rezultatul ar fi fost, în ordinea puterilor descrescătoare,

$$a^s + a^r + a^m + a^h - a^d - a^b.$$

Sîntem obișnuiți să lucrăm cu obiecte algebrice sub forma cea mai generală; de aceea vom avea dificultăți în încercările noastre de a extinde rezultatele. Se poate întîmpla să întîlnim produse ale puterilor unor baze diferite, ca de exemplu 19 $a^2bc^7d^4$ sau 5 $a^7b^3c^5d^9$ etc. Mai departe, se mai poate întîmpla ca atunci cînd ordonăm după puterile lui a, puterile lui b să fie distribuite la întîmplare; cînd ordonăm după b să fie dezordonate cele ale lui a; dacă ordonăm după c să fie distribuite la întîmplare puterile lui a, b și d etc. Nu există altă soluție decît să stabilim după care anume principiu ordonăm. Dacă aranjăm, de exemplu, cărțile într-o bibliotecă după mărime nu putem simultan să le aranjăm și după conținut, decît dacă ar exista de la început o legătură între mărimea cărților și conținutul lor.

Să încercăm acum o împărțire de polinoame, deoarece avem toate cunoștințele necesare. Să alegem, de exemplu, o expresie mai dificilă

$$(10a^4b + 35a^5h + 45a^6b^2h - 4abc^2h - 14a^2c^2h^2 -$$

$$- 18a^3b^2c^2h^2),$$

pe care vrem s-o împărțim la $(-2c^2h + 5a^3)$.

Prima regulă: ambele expresii trebuie ordonate după puterile descrescătoare ale primului număr generalizat, adică ale lui a. Scriem:

$$(45a^6b^2h + 35a^5h + 10a^4b - 18a^3b^2c^2h^2 - 14a^2c^2h^2 -$$

$$- 4abc^2h) : (5a^3 - 2c^2h) = ?$$

Pasul următor ne amintește de împărțirea din sistemul zecimal. Încercăm mai întîi de cîte ori se cuprinde primul termen $(5a^3)$ al împărțitorului în primul termen al deîmpărțitului $(45a^6b^2h)$. Apoi facem înmulțirea inversă: înmulțim rezultatul obținut prin evaluarea anterioară cu împărțitorul și-l scădem dintr-un anumit număr de termeni ai deîmpărțitului (egal cu numărul termenilor împărțitorului). Dacă nu găsim în deîmpărțit un termen din care să putem scădea, atunci scriem termenul rămas sub deîmpărțit și îl adunăm cu semnul plus sau semnul minus în față la „restul" care ne-a rămas. Repetăm procedeul și vrem din nou să vedem de cîte ori se cuprinde primul termen al împărțitorului în acel termen al restului care conține cea mai mare putere a numărului generalizat. Rezultatul se scrie în cît. Se face proba. Calculăm după schema:

$$\begin{array}{l}
(45a^6b^2h + 35a^5h + 10a^4b - 18a^3b^2c^2h^2 - 14a^2c^2h^2 - 4abc^2h) : (5a^3 - 2c^2h) = \\
\underline{\pm 45a^6b^2h \qquad\qquad\qquad \pm 18a^3b^2c^2h^2} \qquad\qquad = \underline{9a^3b^2h + 7a^2h + 2ab} \\
\qquad 0 \quad + 35a^5h \qquad\qquad 0 \\
\qquad\qquad \underline{\pm 35a^5h \qquad\qquad\qquad \mp 14a^2c^2h^2} \\
\qquad\qquad 0 \quad + 10a^4b \qquad\qquad 0 \\
\qquad\qquad\qquad \underline{\pm 10a^4b \qquad\qquad\qquad \pm 4abc^2h} \\
\qquad\qquad\qquad\quad 0 \qquad\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}$$

Împărțirea s-a făcut exact, iar rezultatul este $(9a^3b^2h + 7a^2h + 2ab)$, ordonat și el după puterile lui a. Observăm că în schema de mai sus scăderea s-a făcut simbolic, schimbînd semnele termenilor care trebuiau scăzuți, și am ajuns la rezultat. La numerele cu două semne trebuie luat în considerație numai cel de jos. Mai clar: la prima înmulțire a cîtului cu împărțitorul rezultatul fusese $45a^6b^2h - 18a^3b^2c^2h^2$. Deîmpărțitul conține produsele a^6b^2h și $a^3b^2c^2h^2$. Am putut scrie deci: $(45a^6b^2h - 18a^3b^2c^2h^2)$ din deîmpărțit, minus rezultatul înmulțirii, adică $(45a^6b^2h - 18a^3b^2c^2h^2) - (45a^6b^2h - 18a^3b^2c^2h^2) = 45a^6b^2h - 18a^3b^2c^2h^2 - 45a^6b^2h + 18a^3b^2c^2h^2$; rezultatul acestei scăderi este zero. Pentru a face mai departe împărțirea, căutăm puterea cea mai mare a lui a rămasă după efectuarea scăderii de mai sus; constatăm că este conținută în termenul $35\,a^5\,h$. Din motive de evidență scriem acest termen sub linie, ca și cum ar fi vorba de un rest; procedăm mai departe după metoda descrisă.

Nu ne-am propus să devenim virtuoși ai calculului algebric. Putem găsi exemple pentru exercițiu în orice carte de liceu. Pentru asemenea scopuri este foarte utilă și algebra marelui Leonhard Euler. Scopurile noastre constau însă în a dezvălui structura sau logica matematicii, pentru a putea ajunge la calculul integralelor; de aceea vom încheia acest capitol al algebrei mărimilor generalizate; vom mai da un exercițiu ușor de împărțire

$$\begin{array}{l}
(a^2 - 2\,ab + b^2) : (a - b) = a - b, \\
-a^2 \pm ab \\
\hline
\quad 0 - ab + b^2 \\
\quad\ \mp ab \pm b^2 \\
\hline
\qquad 0 \qquad 0
\end{array}$$

și mai departe exemplul

$$\begin{array}{l}
(a^3 + b^3) : (a + b) = a^2 - ab + b^2. \\
-a^3 \pm a^2b \\
\hline
\quad 0 - a^2b + b^3 \\
\quad \mp a^2b \mp ab^2 \\
\hline
\qquad 0 + ab^2 + b^3 \\
\qquad \pm ab^2 \pm b^3 \\
\hline
\qquad\quad 0 \qquad 0
\end{array}$$

Putem face un mic popas. Stăpînim cele patru operații fundamentale: adunarea, scăderea, împărțirea și ridicarea la puteri întregi, în orice sistem concret de numerație și pentru orice mărimi algebrice. Sîntem pregătiți să studiem o parte din enigmele matematice și rezolvarea lor; toate aceste studii ne vor servi drept punte pentru a pătrunde în domenii din ce în ce mai înalte ale matematicii.

FRACŢII ORDINARE

Mai avem de înlăturat un obstacol şi apoi vom înainta nestingheriţi în domeniul enigmelor matematice. În capitolul de faţă va fi vorba mai mult de un anumit mod de a scrie împărţirea, decît de o înnoire de principiu a algoritmului cunoscut.

Notarea împărţirii cu două puncte, aşa cum am notat-o şi noi aproape exclusiv pînă acum, este cea mai nouă notaţie. Ea se datoreşte inspiraţiei fericite a marelui Leibniz, inventatorul acestui simbol [1]. Notarea împărţirii cu linia de fracţie este mult mai veche.

Iniţial, fracţia ordinară era considerată o împărţire neefectuată sau o împărţire al cărei rezultat nu mai poate fi exprimat prin numere întregi.

În mod excepţional de data aceasta, vom începe studiul pe cale algebrică, cu numere generalizate, a căror valoare nu ne este cunoscută; considerăm ca tip de fracţie ordinară expresia $\frac{a}{b}$, ceea ce înseamnă acelaşi lucru ca a împărţit la b sau a divizat prin b sau $a : b$ sau raportul dintre a şi b. Numărul de deasupra liniei de fracţie se numeşte numărător, cel de dedesubtul ei se numeşte numitor. Dacă numărătorul este egal cu 1, ca de exemplu $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$, $\frac{1}{c}$ etc., atunci avem de-a face cu fracţii simple [2]. Dacă numărătorul este mai mic decît numitorul, atunci fracţia este subunitară, ceea ce se poate nota în general cu $\frac{a}{b}$, unde $a < b$. Semnul de inegalitate ($>$, $<$) apare aici pentru prima oară; vîrful indică întotdeauna numărul mai mic, iar deschiderea este îndreptată spre cel mai mare. Evident, se poate proceda şi invers, şi anume

[1] În tratatul *De maximis et de minimis* etc. apărut în „Acta Eruditorum“, 1684.

[2] Denumire convenţională. — *N.T.*

putem citi de la dreapta la stînga, astfel încît dacă întîlnim expresia $(5 + 7 - 2) > (1 + 3 - 2 + 1)$ şi calculăm parantezele obţinem: 10 este mai mare decît 3, sau 3 este mai mic decît 10.

Revenind la fracţii spunem despre o fracţie $\frac{a}{b}$ că este subunitară dacă $a < b$; spunem că este supraunitară cînd $a > b$. Concret, $\frac{1}{3}$ este o fracţie simplă şi totodată o fracţie subunitară. $\frac{2}{3}$ este o fracţie subunitară. $\frac{6}{4}$ sau $\frac{3}{2}$ sînt fracţii supraunitare, pentru că le putem forma adunînd numere întregi şi fracţii, şi anume $1 + \frac{2}{4}$ sau $1 + \frac{1}{2}$ sau $1\frac{2}{4}$, respectiv $1\frac{1}{2}$.

Fracţiile simple au jucat un rol foarte însemnat în calculele vechilor egipteni şi greci. De exemplu, la egipteni numărul $\frac{7}{29}$ se scria ca o sumă de fracţii simple $\frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{58} + \frac{1}{87} + \frac{1}{232}$; şi în Grecia erau la modă asemenea sume. Astăzi sîntem înclinaţi să desconsiderăm aceste fracţii simple, dat fiind că putem calcula uşor şi sigur cu fracţii de orice fel. Numai în calculul integral joacă un rol esenţial aşa-zisa descompunere în fracţii simple.

Noţiunea de fracţie ne mai spune însă şi altceva. Întîi şi întîi ne dă noţiunea de număr întreg divizat în mai multe părţi. $\frac{1}{3}$ este a treia parte din unu. $\frac{5}{7}$ este a şaptea parte din cinci. În cazul fracţiilor subunitare observăm deci ceva ce trece peste esenţa împărţirii. Nu ne mai întrebăm în ce numere întregi poate fi descompus un alt număr întreg, ca de exemplu $12 : 3 = 4$; aici, patru de trei îl dau pe 12; în cazul nostru se pune problema ce numere cuprinse între două numere întregi date se pot forma prin împărţirea unor numere întregi. $\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{5}{6}, \frac{29}{38}$ sînt toate cuprinse între 0 şi 1. Putem forma o infinitate de astfel de numere, cuprinse între zero şi unu, dacă avem tot timpul grijă ca numărătorul să fie mai mic decît numitorul. Toate fracțiile subunitare sînt cuprinse între 0 și 1. Pentru fracțiile cu un numărător dat, valoarea fracției scade cînd numitorul crește. $\frac{2}{25}$ este mai mare decît $\frac{2}{729}$, lucru evident pentru toți cei ce înțeleg împărțirea. Dacă numărătorul unei fracții este egal cu numitorul ei, atunci fracția constituie o altă notare a numărului unu, deoarece $\frac{a}{a}$ este egal cu $a : a$, împărțire al cărei rezultat este unu. Dacă numărătorul unei fracții este egal cu zero înseamnă că am înmulțit fracția cu zero. Am putea să scriem și $0 \cdot \frac{a}{b}$ sau $\frac{0 \cdot a}{b} = \frac{0}{b}$, ceea ce este evident egal cu zero. Dacă numitorul este zero, atunci intrăm în încurcătură. Trebuie să împărțim ceva la nimic. Atunci $a : 0 = ?$ Dacă am vrea să facem proba acestui calcul ar trebui să găsim un număr care înmulțit cu 0 să-l dea pe a. Evident că cererea nu poate fi satisfăcută, căci rezultatul înmulțirii oricărui număr, oricît de mare, cu zero, este tot zero. Dacă am raționa altfel (aș spune „dinamic", nu „static"), atunci am putea trage următoarea concluzie: dacă împărțim pe 5 la 100 obținem 5 sutimi. Dacă împărțim pe 5 la 47 obținem mult mai mult. Obținem și mai mult la o împărțire cu 21 și mai mult dacă împărțim pe 5 la 7, și mai mult dacă împărțim la 5; rezultatul ultimei împărțiri este 1. Dacă împărțim la 3 obținem $\frac{5}{3}$ sau $1\frac{2}{3}$; dacă împărțim la 2 obținem $\frac{5}{2}$ sau $2\frac{1}{2}$; dacă împărțim la 1 obținem 5. Dacă am împărți pe rînd la toate numerele cuprinse între 0 și 1, adică la toate fracțiile subunitare, de exemplu $\frac{5}{\frac{1}{20}}$, $\frac{5}{\frac{1}{365}}$ etc., am obține valori rapid crescătoare: $5 : \frac{1}{20}$ este 100; 5 împărțit la $\frac{1}{365}$ este 1 825, iar 5 împărțit la $\frac{1}{100\,000}$ este 500 000. Zero este mai mic decît cea mai mică fracție, adică decît fracția care are cel mai mare numitor. $\dfrac{\dfrac{5}{1}}{\text{număr uriaş}}$ este de fapt $5 \times$ numărul uriaş, adică un număr de cinci ori uriaş. Acest număr cel mai uriaş nu asigură însă anularea numitorului $\dfrac{1}{\text{număr uriaş}}$, deoarece această fracţie este o mărime mai mare decît zero. Rezultă că $\dfrac{5}{0}$ este de cinci ori mai mare decît cel mai mare număr pe care ni-l putem imagina. De aceea se spune prescurtat că $\dfrac{5}{0}$ este infinit. Se scrie $\dfrac{5}{0} = \infty$.

Ceea ce am calculat în cele precedente este de domeniul analizei infinitezimale şi se numeşte „trecere la limită". De fapt nu am voie să spun că $\dfrac{5}{0}$ este egal cu infinit, ci numai că tinde către infinit [1]; se apropie de „marginea" sa (*limes* în limba latină), care este infinită, căci valoarea fracţiei creşte pe măsură ce numitorul scade.

Cu toate avertismentele oponentului nostru, scoatem mereu în evidenţă scopul final. Sîntem de părere că aşa-numita „matematică inferioară" este de multe ori nesatisfăcătoare sau ilogică tocmai pentru că este dogmatică sau pentru că nu se atinge miezul problemei. Noi nu ne învîrtim în jurul subiectului şi declarăm: afirmaţia $a: 0 = \infty$ nu are sens, din punct de vedere pur static. Dacă considerăm însă pe zero ca un număr foarte mic obţinut dintr-un şir de numere extrem de mici, descrescătoare, care îl aproximează, adică o „limită nulă", iar infinitul îl considerăm obţinut dintr-un şir de numere uriaşe care cresc din ce în ce, adică o „limită infinită", atunci putem afirma liniştiţi că $a: \lim 0 = \lim \infty$, ceea ce revine practic la a scrie $a: 0 = \infty$. Am mai întîlnit un mister de acelaşi tip

[1] Cu un enunţ mai corect, fracţia $\dfrac{5}{p}$, unde p este un număr oarecare, tinde către infinit cînd p tinde către zero, vezi, M. Nicolescu, N. Dinculeanu, S. Marcus, *Manual de analiză matematică*, vol. I, Ed. Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1962, p. 64. — *N.T.*

cînd am studiat dreptunghiul la care am evaluat raportul 0: 0.

Prin definiţia aceasta mai obţinem încă un rezultat remarcabil. Dat fiind că orice număr (în cazul nostru cinci) împărţit la 0 dă ca rezultat ∞, trebuie să fie adevărată şi afirmaţia inversă. Deci, $5: 0 = \infty$, adică $0 \cdot \infty = 5$; acelaşi lucru se poate spune despre 7: 0 sau 530: 0 sau pentru orice alt număr finit. Înseamnă că $0 \cdot \infty$ este un număr oarecare nedeterminat. Întîlnim pentru prima dată o operaţie la care rezultatul nu este unic determinat.

Ne-am abătut mult de la subiectul iniţial — fracţiile ordinare. Vom continua însă aceste digresiuni, amintind că am pronunţat mai înainte cuvîntul „raport". Ce sens nou capătă oare împărţirea atunci cînd spun „a faţă de b" sau „a în raport cu b" şi scriu $\frac{a}{b}$ sau $a: b$? Vom înţelege cel mai bine dacă vom da acestei propoziţii o semnificaţie geometrică. Să presupunem că am măsurat laturile unei mese dreptunghiulare şi că am obţinut: lungimea = 6 metri, lăţimea = 2 metri. Orice copil ştie să spună că raportul dintre lungime şi lăţime este de 6 la 2. Sau 6: 2 fac 3, adică lungimea mesei este de trei ori mai mare decît lăţimea ei. Înseamnă că într-un raport una din mărimile care trebuie comparate (care trebuie „raportate") este aleasă ca „unitate" pentru cealaltă. Ar mai trebui şi să spunem că: raportul dintre lăţime şi lungime este 2: 6 sau $\frac{2}{6}$ sau $\frac{1}{3}$, sau lăţimea mesei este de trei ori mai mică decît lungimea ei. A face măsurători înseamnă însă a studia de cîte ori se cuprinde unitatea în mărimea de măsurat. Aceasta înseamnă însă: a împărţi în unităţi. În primul caz, lăţimea fusese aleasă ca unitate. Lungimea conţinea trei unităţi de acest fel. În al doilea caz, unitatea a fost lungimea, iar lăţimea conţinea o treime din unitate. Dacă amînăm însă problema unităţii şi luăm o unitate cunoscută, de exemplu metrul, atunci putem spune: raportul dintre lungime şi lăţime este acelaşi ca raportul dintre 6 metri şi 3 metri sau 6 : 3 sau $\frac{6}{3}$. În general, raportul dintre lungime şi lăţime este $a : b$ sau $\frac{a}{b}$, indiferent de unităţile în care îl exprimăm.

Aceste două rapoarte reunite prin semnul egal poartă numele de proporţie. De exemplu,

$$a : b = 6 : 3 \text{ sau } 27 : 9 = 15 : 5 \text{ sau } \frac{27}{9} = \frac{15}{5} \text{ etc.}$$

O proporţie este aşadar o egalitate concretă, de o anumită formă; ne vom mulţumi cu explicaţiile date pînă acum şi vom face cercetări mai amănunţite abia cînd vom ajunge la ecuaţii.

Acuma ne vom ocupa, în sfîrşit, de fracţii şi vom studia algoritmul lor, metodele de calcul cu ele.

Întîi adunarea şi scăderea. Am mai spus că fracţiile sînt numere cu valori intermediare între numerele întregi. Fracţiile subunitare au valori cuprinse între 0 şi 1, cele supraunitare au valori situate undeva pe axa numerelor. Fracţiile pot avea şi ele semn; există deci fracţii negative şi fracţii pozitive.

Dacă considerăm fracţiile ordinare [1] ca numere, abstracţie făcînd de faptul că sînt sub- sau supraunitare, atunci le putem privi şi ca mere, pere etc. Treimea este mărul, pătrimea este para, şeptimea este lămîia. Caracterul unei fracţii este determinat de numitorul ei. El dă numele fracţiei. $\frac{3}{4}$ înseamnă de trei ori $\frac{1}{4}$. Numărătorul este deci un coeficient şi $\frac{3}{4}$ poate fi şi $3\left(\frac{1}{4}\right)$, adică trei pere, în corespondenţa stabilită de noi. Acest raţionament face evident algoritmul adunării şi scăderii fracţiilor. Se pot scădea şi aduna numai fracţiile cu acelaşi numitor. Aceasta înseamnă că le putem contopi, aduce la acelaşi numitor, datorită următorului mod de a scrie:

$$\frac{1}{3} + \frac{5}{3} + \frac{7}{3} - \frac{2}{3} + \frac{0}{3} = \frac{1 + 5 + 7 - 2 + 0}{3} = \frac{11}{3} = 3\,\frac{2}{3}.$$

[1] Delimitarea de aşa-zisele „fracţii sistematice", pe care le cunoaştem şi ca fracţii zecimale, o vom face mai tîrziu.

Dacă am fi avut de-a face cu numitori diferiţi, ar fi trebuit să găsim întîi un nou numitor comun. Presupunem cunoscută metoda utilizată în acest scop şi dăm numai un exemplu de găsire a acestui „cel mai mic multiplu comun"

$$\frac{1}{3}+\frac{2}{5}+\frac{5}{8}-\frac{4}{13}=?$$

Aici numitorul comun este $3\cdot5\cdot8\cdot13$, adică 1 560. Pentru a putea scrie la fiecare fracţie numitorul 1 560 trebuie, evident, modificaţi numărătorii, pentru ca fiecare fracţie să-şi păstreze valoarea iniţială. $\frac{1}{3}$ scris cu numitorul 1 560 este $\frac{520}{1\,560}$, deoarece prin simplificare obţinem iar $\frac{1}{3}$. Ar trebui să ne întrebăm cu ce trebuie să înmulţim numărătorul pentru a obţine aceeaşi fracţie ca şi mai înainte. Deoarece $1\,560 = 3\cdot5\cdot8\cdot13$, $\frac{1}{3}$ este egal cu $\frac{1\cdot5\cdot8\cdot13}{3\cdot5\cdot8\cdot13}$ etc. Socoteala noastră dă

$$\frac{1\cdot5\cdot8\cdot13}{3\cdot5\cdot8\cdot13}+\frac{2\cdot3\cdot8\cdot13}{5\cdot3\cdot8\cdot13}+\frac{5\cdot3\cdot5\cdot13}{8\cdot3\cdot5\cdot13}-\frac{4\cdot3\cdot5\cdot8}{13\cdot3\cdot5\cdot8}=$$

$$=\frac{520+624+975-480}{1\,560}=\frac{1\,639}{1\,560}.$$

În general, o adunare respectiv scădere, de fracţii ordinare arată astfel:

$$\frac{2a^2b}{5c}+\frac{3df^2}{7bh}-\frac{19abcd^2}{3h^2m}=$$

$$=\frac{2\cdot7\cdot3a^2b^2h^3m+3\cdot5\cdot3cdf^2h^2m-19\cdot5\cdot7ab^2c^2d^2h}{5\cdot7\cdot3\cdot b\cdot c\cdot h^3\ m}=$$

$$=\frac{42a^2b^2h^3m+45cdf^2h^2m-665\ ab^2c^2d^2h}{105bch^3m}=$$

$$=\frac{42a^2b^2h^2m+45cdf^2hm-665ab^2c^2d^2}{105bch^2m}.$$

Cred că acest caz general a lămurit complet adunarea fracțiilor și obținerea numitorului comun. Dacă numitorul comun este format din produsul tuturor numitorilor, atunci trebuie să înmulțim numitorul fiecărei fracții cu numitorii tuturor celorlalte fracții, pentru a le aduce la același numitor și pentru a le păstra totuși valoarea.

Am considerat că fracțiile provin dintr-o fracție simplă care le dă numele (1 împărțit la numitor) și un coeficient (numărătorul): de aici obținem imediat o regulă de înmulțire. Putem multiplica o fracție dacă multiplicăm numărătorul (coeficientul) ei. De trei ori o șeptime înseamnă $3 \cdot \left(\frac{1}{7}\right) = \frac{3}{7}$. Sau de 6 ori $\frac{4}{29} = 6 \cdot 4 \cdot \left(\frac{1}{29}\right) = 24 \left(\frac{1}{29}\right) = \frac{24}{29}$. În general, $a \cdot \frac{b}{c} = \frac{ab}{c}$. Dat fiind că o fracție își mărește valoarea nu numai atunci cînd numărătorul crește, ci și cînd numitorul scade, putem să mai facem și altfel înmulțirea. Două sferturi echivalează cu o jumătate. Sau $2 \cdot \left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4:2} = \frac{1}{2}$, ceea ce se obținea și din relația $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$. În general, $a \cdot \left(\frac{b}{c}\right) = \frac{b}{c:a}$. Această regulă se folosește pentru „simplificări". De exemplu, $9 \cdot \frac{5}{27}$ se poate scrie și ca $\frac{9 \cdot 5}{9 \cdot 3} = \frac{5}{(9 \cdot 3) : 9}$, adică $\frac{5}{3}$. Este același lucru cu simplificarea fracției $\frac{9 \cdot 5}{9 \cdot 3}$ cu nouă.

Dacă fracțiile trebuie înmulțite cu alte fracții folosim această regulă înmulțind între ei toți numitorii și numărătorii. De exemplu,

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} \cdot \frac{e}{f} \cdot \frac{g}{h} = \frac{aceg}{bdfh}$$

sau concret

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{2}{7} \cdot \frac{9}{12} = \frac{90}{1\,008} = \frac{45}{504} = \frac{5}{56}.$$

Am fi putut simplifica chiar de la ultima fracție din produs. Avem voie să simplificăm orice numărător cu orice numitor, deoarece în rezultat numărătorul este produsul tuturor numărătorilor, iar numitorul este produsul tuturor numitorilor. Presupunem cunoscute aceste lucruri, deoarece sînt calcule elementare.

Ne-a mai rămas de discutat numai împărțirea fracțiilor și ridicarea fracțiilor la putere. Să ne ocupăm de aceasta din urmă, deoarece este tot un fel de înmulțire.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^5 \text{ înseamnă } \frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}=\frac{a\cdot a\cdot a\cdot a\cdot a}{b\cdot b\cdot b\cdot b\cdot b}=\frac{a^5}{b^5}.$$

Regula este extrem de simplă și spune că trebuie să ridicăm la puterea respectivă atît numitorul cît și numărătorul.

Împărțirea fracțiilor ordinare nu necesită deocamdată cunoștințe noi. Numărătorul este coeficientul și indică numărul fracțiilor simple conținute în fracția dată, așadar la împărțirea fracțiilor trebuie împărțit numărătorul. $\frac{3}{4}:3$ este bineînțeles $\frac{1}{4}$, după cum 3 mere împărțite la 3 dau un măr. Situația este mai complicată dacă vrem să împărțim două fracții sau un număr întreg la o fracție. Nu putem să ne închipuim ușor ce înseamnă $5:\frac{3}{4}$. Rezultatul este în orice caz mai mare decît 5, deoarece $\frac{3}{4}$ este mai mic decît 1. Care este rezultatul?

Ca și grecii și egiptenii, ne vom „refugia" la fracțiile simple, însă pe altă cale. Vom raționa în felul următor: dacă trebuie să împărțim pe 30 la 15 putem să scriem și $30:(5\cdot 3)$, ceea ce e de fapt același lucru. Acum sîntem liberi să împărțim pe 30 mai întîi la 5 și obținem 6 și apoi mai departe să împărțim pe 6 la 3 și să obținem rezultatul 2. Am putea însă să dividem mai întîi pe 30 cu 3 și apoi pe 10 cu 5 și am obține iar 2. Vom proceda tot așa și cu fracțiile. Avem de împărțit pe 5 la $\frac{3}{4}$ și scriem atunci $5:\left(3\cdot\frac{1}{4}\right)$. Împărțim întîi la $\frac{1}{4}$. Această fracție cuprinzîndu-se în unitate de patru ori, înseamnă că în 5 este conținută de douăzeci de ori.

Acum trebuie să împărţim pe douăzeci la trei, ceea ce dă $\frac{20}{3}$ sau $6\frac{2}{3}$. Mai încercăm şi alt exemplu: 7 trebuie împărţit la $\frac{5}{9}$. Deci, $7:\left(5\cdot\frac{1}{9}\right)$. În 7 unităţi fracţia este conţinută de 63 ori. 63 trebuie împărţit mai departe la 5. Rezultatul este $\frac{63}{5}$ sau $12\frac{3}{5}$. Cu puţină atenţie observăm că numitorul fracţiei simple trebuie înmulţit cu deîmpărţitul, iar rezultatul trebuie împărţit la numărătorul fracţiei, care apare ca factor în paranteză. În general,

$$\text{deîmpărţitul}:\frac{\text{numărător}}{\text{numitor}}=\text{deîmpărţitul}:\left(\text{numărător}\times\right.$$
$$\left.\times\frac{1}{\text{numitor}}\right)=(\text{deîmpărţitul}\times\text{numitorul}):\text{numărător}.$$

Ultimul rezultat mai poate fi scris şi sub următoarea formă:

$$\text{deîmpărţitul}:\frac{\text{numărător}}{\text{numitor}}=\text{deîmpărţitul}\times\frac{\text{numitorul}}{\text{numărător}},$$

deoarece primul rezultat l-aş fi putut scrie $\frac{\text{deîmpărţit}\times\text{numitor}}{\text{numărător}}$.

Am ajuns la noţiunea de „inversă" a unei fracţii. Inversa unei fracţii se obţine intervertind numărătorul şi numitorul fracţiei date. Inversa lui $\frac{3}{4}$ este $\frac{4}{3}$, a lui $\frac{5}{9}$ este fracţia $\frac{9}{5}$ şi, în general, a lui $\frac{a}{b}$ este fracţia $\frac{b}{a}$. Am vorbit numai despre deîmpărţit; nu am presupus că acesta ar fi obligatoriu un număr întreg (operaţia de împărţire este redată aici de modificările „ordinelor" şi „simbolurilor" în împărţitor); putem să afirmăm că, în general, un număr se împarte la o fracţie înmulţindu-l cu inversa fracţiei. Înseamnă că $n:\frac{a}{b}=n\cdot\frac{b}{a}$, unde n este un număr concret general, pozitiv sau negativ, întreg sau fracţionar. De aici rezultă şi că

$$\frac{n}{m}:\frac{a}{b}=\frac{n}{m}\cdot\frac{b}{a}=\frac{nb}{ma}.$$

Să încercăm să calculăm cîteva exemple cu noua regulă: $5:\frac{3}{4}=5\cdot\frac{4}{3}=\frac{20}{3}=6\frac{2}{3}$; $7:\frac{5}{9}=7\cdot\frac{9}{5}=\frac{63}{5}=12\frac{3}{5}$. Algoritmul este corect. Mai poate fi verificat și conform înțelesului. Totul este foarte limpede numai pentru fracțiile simple. Dacă trebuie să împart un număr la $\frac{1}{2}$ este evident că rezultatul este dublul deîmpărțitului, adică numărul respectiv înmulțit cu 2 sau $\frac{2}{1}$, deoarece orice număr poate fi scris ca fracție cu numitorul 1. Să mai calculăm cîteva exemple de împărțiri:

$$\frac{5}{3}:\frac{6}{8}=\frac{5}{3}\cdot\frac{8}{6}=\frac{40}{18}=\frac{20}{9}=2\frac{2}{9},$$

$$\frac{17}{19}:\frac{9}{13}=\frac{17}{19}\cdot\frac{13}{9}=\frac{221}{171}=1\frac{50}{171}.$$

Raționamentele noastre ne-au dus la noțiunea de fracție dublă, care este numai o scriere modificată a împărțirii unei fracții la o altă fracție. $\left(\frac{a}{b}\right):\left(\frac{c}{d}\right)$ poate fi scris și ca $\dfrac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}$[1], iar rezultatul, în ambele cazuri, este $\frac{ad}{bc}$. Dacă ar trebui să împărțim pe a la $\frac{c}{d}$ am scrie $\dfrac{a}{\frac{c}{d}}$ sau $\dfrac{\frac{a}{1}}{\frac{c}{d}}$ și am obține $\frac{ad}{c}$. Dacă, în sfîrșit, $\frac{a}{b}$ ar trebui împărțit la c, atunci am scrie ca fracție dublă $\dfrac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{1}}$ și rezultatul ar fi $\left(\frac{a}{b}\right)\cdot\left(\frac{1}{c}\right)$, adică $\frac{a}{b\cdot c}$. Ultimul caz

[1] La fracțiile duble „linia principală de fracție“ trebuie marcată sau prin îngroșare sau prin lungire.

ne-a arătat cum se împarte o fracţie la un număr întreg [1], şi anume înmulţind fracţia cu inversul numărului întreg, scris ca fracţie. Aşadar

$$\left(\frac{a}{b}\right) : c = \left(\frac{a}{b}\right) : \left(\frac{c}{1}\right) = \left(\frac{a}{b}\right) \cdot \left(\frac{1}{c}\right) = \frac{a}{bc}.$$

Aceste date ne duc la o nouă regulă generală de calcul. Putem considera împărţirea a două numere întregi ca împărţirea a două fracţii, de exemplu $a : b = \left(\frac{a}{1}\right) : \left(\frac{b}{1}\right) = \left(\frac{a}{1}\right) \cdot \left(\frac{1}{b}\right) = a \cdot \left(\frac{1}{b}\right) = \frac{a}{b}$; vedem că în loc să facem împărţirea înmulţim cu inversul împărţitorului. De exemplu,

$$100 : 25 = 100 \cdot \frac{1}{25} = \frac{100}{25} = 4.$$

Acest algoritm are aplicaţii largi în calculele practice şi la construcţia şi manevrarea maşinilor mecanice de calcul.

Avem suficient de multe cunoştinţe asupra fracţiilor ordinare, suficiente nu din punctul de vedere al completitudinii lor, ci din punctul de vedere al înţelegerii principiilor de bază; acum putem să trecem la studiul „ecuaţiilor" anunţate mai de mult.

---

[1] Bineînţeles că o fracţie poate fi împărţită la un număr şi împărţind numărătorul (coeficientul) la numărul întreg corespunzător $\left(\frac{5}{6} : 5 = \frac{1}{6}\right)$.

ECUAŢII

Am mai spus că în studiul ecuaţiilor un rol esenţial îi revine „necunoscutei x". Am mai afirmat că o ecuaţie este un algoritm, o maşină de calcul şi de gîndit pentru rezolvarea a tot felul de enigme. În sfîrşit, am mai stabilit şi că semnul de egalitate din ecuaţie nu este numai o simplă constatare, ci chiar un ordin. Este ordinul de a alege pe x în aşa fel încît „să fie îndeplinită egalitatea".

Deocamdată nu facem nici un fel de consideraţii teoretice, ne propunem nouă înşine o astfel de problemă-ghicitoare. Ne întrebăm: „care este numărul x, deocamdată necunoscut, care îndeplineşte următoarele condiţii: întîi îl înmulţim cu 7, îl adunăm cu 19, scădem din rezultat pe 4 şi obţinem apoi iar pe x, de astă dată înmulţit cu 10". Formulat matematic, aceasta înseamnă

$$7x + 19 - 4 = 10\,x.$$

Evident că putem efectua mai întîi toate calculele care se pot face. Obţinem atunci

$$7\,x + 15 = 10\,x.$$

Apoi putem să înlocuim pe x pe rînd cu toate numerele, începînd cu 1; pentru $x = 5$ obţinem egalitatea

$$35 + 15 = 50.$$

Ghicitoarea a fost dezlegată. Numărul x este egal cu 5. Metoda folosită este însă nesatisfăcătoare. Mai întîi nu ştim încă dacă numărul x este un număr întreg sau o fracţie. În al doilea rînd nu ştim dacă este pozitiv sau negativ. În sfîrşit, nu ştim dacă în afară de cinci mai există şi o infinitate de alte soluţii.

Înainte de a căuta un algoritm pentru ecuaţia noastră vom studia mai amănunţit denumirea şi semnificaţia unei ecuaţii.

Vă rog să nu vă supărați, dar cuvîntul „ecuație“ [1] nu este potrivit pentru ceea ce se petrece aici. Cuvîntul latinesc *aequatio* ar fi mult mai potrivit. În limba latină cuvintele formate din verbe și sufixul *tio* denotă totdeauna o acțiune. *Aequatio* este deci o egalizare, după cum *privatio* (de la privare = a răpi) este o răpire, o „privare“. Ar fi mai potrivite în limba germană expresiile *Angleichung*, *Ausgleichung* etc. Deoarece nu am propus o expresie mai bună care să înlocuiască pe *Gleichung*, o să renunțăm la rolul de critici sau negativiști. Am făcut această digresiune numai pentru a delimita strict sensul cuvîntului, știind că nu este de dorit să ataci termeni științifici de specialitate consacrați.

Așadar, prin ecuație subînțelegem ordinul de a egala două mărimi, de a stabili echilibrul în ceva sau de a menține echilibrul. Acest ordin ar fi stupid și inutil dacă egalitatea ar fi fost satisfăcută de la început. Ea însă *trebuie* să fie satisfăcută. Trebuie să realizăm aceasta alegînd valoarea corectă pentru necunoscuta x.

Încă n-am făcut un pas înainte. Deocamdată trebuie să găsim pentru x o valoare corectă. Aceasta ne conduce în cele din urmă la încercări, însă noi am refuzat să procedăm astfel.

Ar exista o posibilitate de a determina pe x din calcul: dacă am reuși să aducem toți termenii care-l conțin pe x într-un membru al ecuației și toate celelalte mărimi în celălalt membru al ecuației, atunci am obține o expresie de forma $x = a$ sau $nx = b$.

Dacă am reuși să ajungem atît de departe înseamnă că am rezolvat problema, deoarece $x = a$ este chiar soluția ecuației, iar relația $nx = b$, ca exemplu concret $3x = 9$, permite determinarea imediată a lui x, dat fiind că dacă $3\,x$ este egal cu 9, atunci x este evident egal cu 3; sau, în general, cînd $nx = b$, $x = \frac{b}{n}$.

Pînă să ajungem însă la această formă finală care ne asigură de existența unei singure soluții, trebuie să transformăm mult ecuația, iar calculele nu se pot face la prima vedere. De aceea avem nevoie urgent de un algoritm general și sigur, pentru

[1] În limba germană termenul *Gleichung* folosit pentru ecuație s-ar traduce mot-à-mot prin „egalitate“, ceea ce explică observațiile autorului. Observația nu are sens în limba română, în care termenul „ecuație“ are sens diferit de „egalitate“. — *N.T.*

că altfel, mai ales dacă lucrăm cu numerele generalizate, situația s-ar complica așa de mult că nu am mai vedea nici o ieșire. Chiar și istoricește, calea urmată pentru a descoperi acest algoritm a fost întortocheată. Regulile teoriei ecuațiilor au devenit sigure abia la apariția algebrei, în secolele al XVI-lea și al XVII-lea.

Mai facem o afirmație precisă înainte de a trece la descoperirea algoritmului. Fiecare ecuație conține două tipuri distincte de mărimi sau numere. Necunoscuta x[1] și așa-zisele constante, care sînt cunoscute de la începutul calculului sau trebuie tratate ca și cum ar fi cunoscute. Înainte chiar de a ne interesa de regulile de calcul vrem să lămurim pe exemple această deosebire esențială. Cine nu înțelege această distincție nu poate pătrunde în domenii mai înalte ale matematicii. x și constantele sînt „rase" diferite de numere, dacă ne permiteți această comparație. Constantele sînt fixe, inerte, conservative, x-ul este mobil și nedeterminat pînă nu-i găsim valoarea corectă. Atunci și numai atunci x-ul devine un număr constant. Deocamdată, ca să vorbim ca jucătorii de cărți, x-ul este numai un „jolly joker". Desigur, numai în principiu, deoarece într-o ecuație dată x-ul are o valoare precisă, cu toate că este nedeterminată pentru moment. Dacă ar fi dată ecuația

$$7x + 19 - 4 = 10x$$

atunci 19 și 4 sînt „constantele", iar $7x$ și $10x$ sînt multipli ai necunoscutei. Se poate spune că și necunoscuta apare cu doi coeficienți distincți. Dacă am avea o ecuație de forma

$$7x + 13x + 9x - 2x + 25 = 106,$$

atunci bineînțeles că avem voie să adunăm sau să scădem termenii care conțin necunoscuta. Aceasta poate să reprezinte

---

[1] Intenționat vorbim deocamdată de o singură necunoscută.

de exemplu nişte mere, în orice caz nişte mărimi nespecificate. În orice caz, în aceeaşi ecuaţie trebuie respectată condiţia ca x să reprezinte mereu acelaşi lucru. Aceste condiţii sînt independente de faptul că x este deocamdată necunoscut ca valoare. Dacă afirmăm că 5 stele fixe plus 3 stele fixe minus 4 stele fixe sînt 4 stele fixe nu este obligatoriu să ştim cît de mari sînt aceste stele fixe. Am făcut numai suma aritmetică a unor mărimi cu acelaşi nume. Am avea deci

$$7x + 13x + 9x - 2x + 25 = 106 \text{ sau } 27x + 25 = 106,$$

ceea ce pare mai simplu, dar nu dă încă soluţia. În primul exemplu, toate constantele erau de o singură parte a semnului egalităţii, iar necunoscutele erau separate, aici toate x-urile sînt de o singură parte a semnului egal şi constantele sînt separate de semnul egalităţii. Este îngrozitor! Semnul egalităţii stă ca un zid între cei doi membri ai ecuaţiei şi ne împiedică să separăm toate necunoscutele de o parte a ecuaţiei şi toate cunoscutele de cealaltă parte; dacă am reuşi să facem această separare evident că am rezolva ecuaţia.

Se mai poate întîmpla ca într-o ecuaţie să nu apară cifre, ci numai litere. Acesta este chiar cazul cel mai des întîlnit în matematică. De exemplu,

$$nx + a + b - c = d - mx.$$

Imaginaţia ne părăseşte complet. Afirmăm că a, b, c, d, n şi m sînt cunoscute şi cerem numai ca x să fie exprimat în funcţie de aceste „constante"; de exemplu, $x = (d - a - b + c) / (n + m)$, ceea ce, în paranteză fie spus, este chiar soluţia corectă a ecuaţiei. Cum am ajuns însă la această expresie monstruoasă? Cum am putut ajunge la ea prin calcul? De unde ştim că această relaţie, $x = (d - a - b + c) / (n + m)$, satisface ecuaţia?

Fără consideraţii matematice vrem să dăm un exemplu care să ne ajute în această privinţă. Să presupunem că ecuaţia reprezintă o balanță. Pe unul din talerele balanței sînt atîtea și atîtea necunoscute și constante. Datorită ordinului de egalitate, ecuația este corectă doar dacă balanța este în echilibru. Dacă perturbăm într-un mod oarecare echilibrul trebuie apoi să-l restabilim, altfel am încălca ordinul de egalitate exprimat de ecuație. Să rămînem la această imagine concretă și să considerăm constantele ca obiecte a căror greutate este cunoscută, de exemplu greutăți de alamă; necunoscutele să le considerăm obiecte cu greutatea cunoscută, de exemplu mere [1]. Problema noastră este deci: să determinăm greutatea unui măr din condiția de echilibru a unei balanțe, pe ale cărei talere sînt aruncate la întîmplare mere și greutăți. Să stabilim echilibrul balanței conform ecuației $2x + 15 = 3x + 3$.

Pe unul din talerele balanței sînt 2 mere și 15 greutăți de 1 decagram, pe celălalt taler sînt 3 mere și 3 greutăți de 1

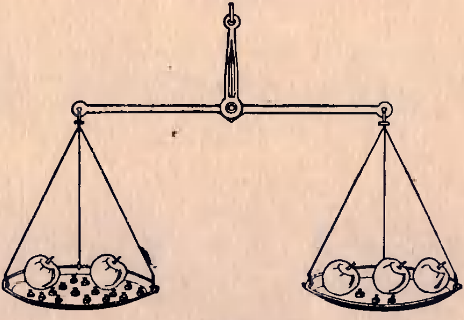


FIG. 10

decagram. Trebuie să schimbăm merele și greutățile de pe un taler pe altul pînă putem afla care-i greutatea unui singur măr. Acul balanței îmi arată totdeauna dacă egalitatea este sau nu respectată. „A nu scoate din starea de echilibru“ în-

[1] Evident că merele trebuie să fie identice, lucru pe care-l putem constata chiar dacă nu cunoaștem greutatea.

seamnă numai a restabili imediat echilibrul de îndată ce a fost perturbat. Dacă am fi impus condiția de a menține strict echilibrul, atunci n-am fi avut voie să modificăm nimic.

Scopul final este să ajungem la situația în care pe unul din talere să existe numai mere, iar pe celălalt numai greutăți. Pînă la urmă vom încerca să avem pe un taler un singur măr.

Să atacăm întîi greutățile care corespund „constantelor". Evident că nu stricăm echilibrul dacă luăm de pe ambele talere sau punem pe ambele talere același număr de greutăți. Să luăm deocamdată cele trei greutăți de pe talerul din dreapta și evident și trei greutăți de pe talerul din stînga. Balanța s-a înclinat într-o parte și în alta, dar pînă la urmă a revenit la echilibru.

Situația se prezintă astfel:

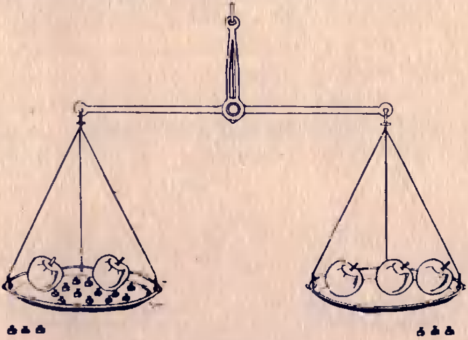


FIG. 11

Ceea ce înseamnă matematic

$$2x + 12 = 3x.$$

Mai trebuie doar să scoatem cele 2 mere de pe talerul din stînga și ne-am atins scopul. Folosim același șiretlic și spunem că trebuie să îndepărtăm de pe fiecare taler cîte două mere, dacă vrem să menținem egalitatea, astfel încît ajungem la următoarea imagine:

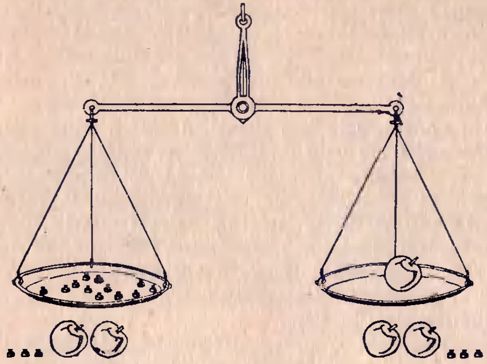


FIG. 12

ceea ce se exprimă matematic $x = 12$ și dă și soluția ecuației; un măr cîntărește 12 decagrame.

Să facem proba rezultatului. Ecuația noastră inițială era

$$2x + 15 = 3x + 3.$$

Dacă înlocuim pe x cu 12 obținem

$$2 \cdot 12 + 15 = 3 \cdot 12 + 3, \text{ sau } 24 + 15 = 36 + 3, \text{ sau } 39 = 39,$$

adică un rezultat corect.

Am obținut intuitiv o regulă deosebit de importantă. Știm că egalitatea nu se schimbă dacă scădem sau adunăm în ambii membri ai ecuației aceeași mărime. Formulat mai exact: dacă adunăm la două mărimi egale aceeași mărime, rezultatele sînt egale între ele; dacă din două mărimi egale scădem aceeași cantitate, mărimile rezultate sînt și ele egale; aceste afirmații sînt evidente chiar și fără exemplul balanței. Repetăm însă încă o dată: aceste afirmații sînt adevărate numai cu condiția ca x să fie valoarea corectă care trebuie calculată, altfel nu am fi avut de la început nici un fel de egalitate. Se mai spune că ecuația este adevărată cu condiția alegerii valorii corecte a necunoscutei.

Am putea să mai dezvoltăm exemplul cu balanța. Nu vom mai reface figura, ci ne vom baza pe imaginație. Este evident că echilibrul balanței nu se strică dacă înmulțim concomitent cu același număr greutățile de pe cele două talere. Echilibrul este același dacă pe unul din talere se află un singur măr și pe celălalt 12 greutăți, sau dacă pe unul din talere sînt șapte mere și pe celălalt 84 de greutăți, deoarece merele din primul taler sînt echilibrate de greutățile din al doilea taler. Tot așa, starea de echilibru nu este afectată de împărțirea ambilor „membri" ai ecuației cu același număr sau de ridicarea lor la aceeași putere. Prin „membrii" unei ecuații subînțelegem totalitatea cunoscutelor și necunoscutelor situate de o parte și de alta a semnului de egalitate. Pentru $5x - 4 + 16 = 2x - 8$, membrul din stînga este $(5x - 4 + 16)$, iar membrul din dreapta $(2x - 8)$.

Ne vom mulțumi cu ultima noastră concluzie teoretică: aplicînd simultan celor doi membri ai unei ecuații (cu aceeași cantitate) una din operațiile de calcul cunoscute de noi, nu schimbăm cu nimic condiția de egalitate. În practică deducem din această regulă o „magie", cu ajutorul căreia „transferăm" constantele și „izolăm" necunoscuta x. Dacă avem ecuația

$$5x - 4 + 16 = 2x + 8,$$

atunci întîi formăm în stînga pe 12 din $(-4 + 16)$ și obținem

$$5x + 12 = 2x + 8.$$

Ca în exemplul cu balanța, vom încerca să reunim toate constantele într-unul din membrii ecuației și toate necunoscutele în celălalt membru al ecuației. În acest scop scădem întîi pe $2x + 8$ din ambii membri ai ecuației și obținem

$$\begin{array}{rcr} 5x + 12 & = & 2x + 8 \\ -2x - 8 & = & -2x - 8 \\ \hline 3x + 4 & = & 0 \end{array}$$

S-a întîmplat ceva înspăimîntător: $(3x+4)$ este egal cu zero. S-a spulberat oare toată munca noastră de pînă acum? Trebuie oare să deducem că și x este egal cu zero? Răbdare! Nu se poate să fie așa. Mai am o scăpare. Mai întîi nu am strîns toate constantele într-un membru, iar necunoscutele în celălalt. Pentru a face această separare trebuie să scădem din ambii membri sau pe $3x$ sau pe 4. Să încercăm cu 4

$$\begin{array}{r} 3x + 4 = \quad 0 \\ -4 = -4 \\ \hline 3x = 0 - 4 \end{array}$$

Am obținut $3x = -4$ și constatăm că acel zero periculos a dispărut. Avem în față chiar „soluția" ecuației. Mai trebuie să îl „izolăm" pe x. În stînga apare $3x$; înseamnă că îl obținem pe x dacă împărțim cu 3. Conform regulii „balanței", aceeași împărțire trebuie să o facem și în dreapta pentru a menține echilibrul:

$$3x : 3 = (-4) : 3$$

sau

$$x = (-4) : 3 = -\frac{4}{3} = -1\frac{1}{3}.$$

Ecuația a fost rezolvată. Vrem să mai vedem dacă a fost corect rezolvată. Pentru aceasta înlocuim soluția obținută în ecuația inițială

$$5 \cdot \left(-\frac{4}{3}\right) + 12 = 2 \cdot \left(-\frac{4}{3}\right) + 8$$

$$-\frac{20}{3} + \frac{36}{3} = -\frac{8}{3} + \frac{24}{3} \text{ (totul împărțit la 3)}$$

$$\frac{16}{3} = \frac{16}{3}.$$

Proba confirmă calculul nostru.

Să explicăm acum „transferul", ca să putem calcula oricînd cu ușurință.

$$5x + 12 = 2x + 8.$$

Folosim aceeași ecuație. Observăm că ajungem la rezultat și dacă încercăm să trecem dintr-o dată pe $2x$ în membrul cu $5x$ și pe 12 în membrul care-l conține pe 8. Cum însă? Ei bine, foarte simplu. Trebuie să scădem simultan pe $2x$ din ambii membri. În urma acestei operații x dispare din membrul din dreapta, așa încît aparent îl scădem numai din stînga. Deci,

$$5x - 2x + 12 = 8 \text{ sau } 3x + 12 = 8.$$

Să „mutăm" acum pe 12. Îl scădem pe 12 din ambii membri. Atunci 12 dispare din stînga și aparent îl scădem numai din dreapta:

$$3x = 8 - 12 \text{ sau } 3x = -4.$$

Acuma trebuie mutat coeficientul 3 al lui x de cealaltă parte. 3 apare ca factor. Prin urmare, trebuie să împărțim ambii membri la 3. Prin această operație 3 dispare din stînga și apare numai ca divizor în dreapta. Rezultatul:

$$x = (-4) : 3 = -\frac{4}{3} = -1\frac{1}{3}.$$

Am terminat. Am obținut și regula pe care o căutam. Ea sună astfel: cînd „mutăm" o mărime dintr-un membru în celălalt al ecuației trebuie să schimbăm și ordinul operației în cel opus. Sinteza devine analiză și invers. Sau concret: adunarea devine scădere, scăderea — adunare, înmulțirea devine împărțire, împărțirea devine înmulțire, ridicarea la putere devine extragerea de rădăcină [1], aceasta la rîndul ei devine ridicare la putere.

Acuma știm să rezolvăm orice fel de ecuație „liniară", adică în care necunoscuta apare numai la puterea întîi. Vom înțelege mai tîrziu, pe exemple din geometrie, de ce o asemenea ecuație se numește ecuație „liniară".

Cititorul este liber să rezolve exemplele propuse pînă acum cu noul algoritm. Pentru ca totul să devină cît mai clar vom calcula împreună exerciții mai complicate:

$$5(x-2) - 2x = 2(x-1),$$

$$5x - 10 - 2x = 2x - 2,$$

$$3x - 10 = 2x - 2,$$

$$3x - 2x = -2 + 10,$$

$$x = 8.$$

[1] O vom defini mai tîrziu.

Un exemplu numai cu litere:

$$a(b - c + d) - b(a + c - d) = ab - (bc - bd - x),$$

$$ab - ac + ad - ab - bc + bd = ab - bc + bd + x,$$

$$ab - ac + ad - ab - bc + bd - ab + bc - bd = x,$$

$$-ab - ac + ad = x,$$

$$x = a(-b - c + d).$$

Observăm în această problemă că totdeauna este permisă intervertirea celor doi membri ai ecuației. Ecuația este aceeași fie că o scriu sub forma $x = 5$ sau $5 = x$. Aceasta este o proprietate specifică a semnului de egalitate. Bineînțeles că am avea voie să înmulțim cu (-1) ambii membri și dacă am obține de exemplu $(-x) = (-10)$ am putea scrie

$$(-x) \cdot (-1) = (-10) \cdot (-1) \text{ sau } x = 10.$$

Înmulțirea cu -1 este utilă în cazurile în care x apare cu semnul minus, deoarece pe noi ne interesează ca x să apară cu semnul plus. Dacă am avea un rezultat de forma $(-x) = (\pm a)$, ceea ce este echivalent cu afirmația că minus x este egal cu plus a sau minus a și în acest caz scriem sau gîndim

$$(-x)\ (-1) = (\pm a)\ (-1)$$

sau

$$x = (\mp a).$$

Observăm acum că în fața lui a minusul este deasupra și plusul dedesubt, deoarece $(+a) \cdot (-1) = (-a)$, $(-a) \cdot (-1) = (+a)$. În consecință, minusul din fața lui a corespunde primei înmulțiri, iar plusul, celei de-a doua înmulțiri.

Există însă și tipuri de ecuații aparent inaccesibile pentru noi, deoarece x apare la o putere oarecare diferită de unu. De exemplu,

$$(x + 1)\ (x - 1) = x^2 + x + 1.$$

După cîteva calcule se constată că această ecuație, aparent „pătratică" în x, este de fapt o ecuație liniară.

$$x^2 + x - x - 1 = x^2 + x + 1,$$

$$x^2 - x^2 + x - x - x = 1 + 1,$$

$$-x = 2,$$

$$(-x)(-1) = 2(-1),$$

$$x = -2.$$

Tot așa și ecuația $1/(x-1) - 1/(x+1) = 2$ pare de temut. x apare numai la numitor. O să avansăm pas cu pas: mai întîi aducem membrul stîng la același numitor

$$\frac{1 \cdot (x+1) - 1 \cdot (x-1)}{(x-1) \cdot (x+1)} = 2,$$

$$\frac{x + 1 - x + 1}{x^2 - x + x - 1} = 2,$$

$$\frac{2}{x^2 - 1} = 2,$$

ceea ce este același lucru cu

$$2 : (x^2 - 1) = 2,$$

$$2 = 2 \cdot (x^2 - 1),$$

$$2 = 2x^2 - 2,$$

$$2 + 2 = 2x^2,$$

$$4 = 2x^2,$$

$$x^2 = 2.$$

Am ajuns într-adevăr la o ecuație pătratică pe care nu știm să o rezolvăm, deoarece nu cunoaștem operația de extragere de rădăcină. Soluția este $x = \pm\sqrt{2} = \pm 1{,}414...$

Alt exemplu:

$$\frac{5+x}{2}+\frac{13+7x}{3}=72,$$

$$\frac{(5+x)\cdot 3+(13+7x)\cdot 2}{2\cdot 3}=72,$$

$$(5+x)\cdot 3+(13+7x)\cdot 2=72\cdot 2\cdot 3,$$

$$15+3x+26+14x=432,$$

$$17x=432-15-26,$$

$$17x=391,$$

$$x=\frac{391}{17}=23.$$

O observație generală: calculul cu ecuații este una din cele mai importante operații din matematică. Există nenumărate rețete de calcul, artificii de calcul, metode de calcul. Metoda de rezolvare a ecuației trebuie să fie atît de bine cunoscută, încît „transferul" și „izolarea" necunoscutei să se facă cu ochii închiși. Orice manual de aritmetică conține numeroase exemple bine alese. Recomandăm în special excelenta *Algebră* a lui Euler, pe care am mai amintit-o de altfel. Dat fiind că nu există „drumuri regale" în matematică, vă sfătuim să rezolvați cît mai multe (sute, mii) de ecuații și să vă propuneți singuri ecuații. Această ocupație este cel puțin tot atît de amuzantă ca și cuvintele încrucișate sau jocul de cărți. Cu această ocazie se dezvoltă și acel de-al șaselea simț al matematicianului, care uimește adesea pe profan. Matematizarea creierului este aproape un fenomen fizic, ca și înțelegerea subconștientă a înotului, a mersului pe bicicletă, a loviturilor corecte la tenis. În fond, această matematizare este pînă la un nivel foarte înalt numai o chestiune de exercițiu. Ceea ce nu poate fi exersat se află în domenii atît de înalte, încît pe noi recruții nu ne mai interesează. Nu vrem să ajungem de talia lui Moltke sau Napoleon, ci cel mult ofițeri destoinici. Nu se știe însă — și aici rezidă frumusețea artei noastre — dacă într-un moment de inspirație nu vom face și noi o descoperire uimitoare. Nu este prea probabil, dar nici imposibil.

Să ne domolim însă amorul propriu și să nu mai rîvnim la onoruri. Înainte de a lărgi noțiunea de ecuație să mai facem un exercițiu practic: Un tată are 48 de ani, fiul său are 21 de ani. Cîți ani avea fiul cînd tatăl avea de zece ori vîrsta fiului? Cu cîți ani în urmă era tatăl de zece ori mai bătrîn ca fiul?

Vom raționa în modul următor: diferența de vîrstă între tată și fiu este de 27 de ani. Această diferență este totdeauna aceeași, rămîne constantă. Să notăm cu x vîrsta fiului, atunci cînd tatăl era de zece ori mai bătrîn decît el; tatăl avea atunci $(x+27)$ ani. Prin ipoteză vîrsta tatălui era atunci de zece ori mai mare decît a fiului, adică era $10x$. În concluzie, $x + 27 = 10x$ și am realizat ceea ce se numește „punerea în ecuație". Acuma nu ne mai gîndim la semnificația mărimilor, ci ne bazăm pe algoritmul cunoscut:

$$x + 27 = 10x$$

$$27 = 9x$$

$$x = \frac{27}{9} = 3.$$

Tatăl avea 30 de ani și fiul 3 ani atunci cînd vîrsta tatălui era de zece ori mai mare decît a fiului. Ne întrebăm cu cîți ani în urmă a fost valabilă această relație, știind că tatăl are astăzi 48 de ani. Scădem: $48 - 30 = 18$ și răspundem: acum 18 ani. Fiul avea atunci $21 - 18 = 3$ ani.

Problema mai putea fi pusă în ecuație și altfel, încercînd să răspundem la a doua întrebare și notînd cu x anii care au trecut de cînd vîrsta tatălui era de zece ori mai mare decît a fiului. Raționăm astfel: tatăl are acum 48 de ani. Înseamnă că acum $(48-x)$ ani era de zece ori mai bătrîn decît fiul său; fiul are acum 21 de ani și înseamnă că atunci avea $(21-x)$ ani. Am obține ecuația

$$(48 - x) = 10 \cdot (21 - x) \text{ sau } (21 - x) = \frac{1}{10}(48 - x).$$

Dacă rezolvăm prima ecuație, care de fapt coincide cu a doua,

$$(48 - x) = 10 \cdot (21 - x)$$

$$48 - x = 210 - 10x$$

$$9x = 210 - 48$$

$$9x = 162$$

$$x = \frac{162}{9} = 18.$$

A doua ecuație ar trebui să dea același rezultat. Mai există însă și o a treia cale de a ataca problema. Dat fiind că tatăl este cu 27 de ani mai bătrîn decît fiul lui înseamnă că fiul avea zero ani atunci cînd tatăl avea 27. Fiul s-a născut deci atunci cînd tatăl avea 27 de ani. Tatăl trebuie să îmbătrînească cu 1/9 din diferența de vîrstă tată-fiu pentru ca să devină de 10 ori mai bătrîn ca fiul, deoarece nouă părți + o parte înseamnă zece părți. Altfel spus, 9/9 + 1/9 = 10/9. O zecime din 10/9 este (1/10) · (10/9) = 1/9, iar de zece ori o noime înseamnă 10/9. Am obținut deci imediat a noua parte din 27, care este 3; după trei ani de la nașterea fiului, adică la 30 de ani, tatăl este de 10 ori mai bătrîn decît fiul lui în vîrstă de 3 ani.

Am vrut numai să arătăm cîte posibilități de transformare și de discuție oferă o ecuație simplă și cît de importantă este îndemînarea calculatorului în găsirea celei mai clare și elegante metode de rezolvare. Cititorii vor căpăta curînd simțul pentru precizia și eleganța matematică. Dar repetăm încă o dată: aici începe arta și aici trebuie să exersăm ca și acrobații.

Vrem să mai prezentăm un text ca exercițiu celebru. Este vorba de inscripția de pe mormîntul lui Diofant, matematician din Alexandria care a trăit în secolul al III-lea al e.n. A fost un matematician genial, poate singurul algebrist al grecilor. Toți ceilalți matematicieni greci au fost geometri. În orice caz, Diofant a fost cel care a creat teoria ecuațiilor și care a influențat puternic pe matematicienii arabi și pe cei din evul mediu. În inscripția plină de tîlc de pe mormîntul său se spune următoarele: Copilăria lui alcătuia $\frac{1}{6}$ din viață lui, barba a început să-i crească după $\frac{1}{12}$ din viață, el s-a însurat după $\frac{1}{7}$ din viață și după 5 ani i s-a născut un fiu care a trăit $\frac{1}{2}$ din vîrsta tatălui, iar acesta din urmă a murit la patru ani după moartea fiului.

Observăm că viața, încă necunoscută, a lui Diofant (o notăm cu x) este scrisă ca suma unor fracțiuni din viață și anumite intervale de timp care joacă rolul de constante. 1/6 din viață a fost copil, adică $x/6$. Au mai trecut $x/12$ ani pînă i-a crescut barba. După $x/7$ ani s-a căsătorit și 5 ani mai tîrziu s-a născut fiul lui, care a trăit numai $x/2$ ani. Diofant a mai supraviețuit 4 ani, murind la vîrsta de x ani.

Ecuația este deci

$$\frac{x}{6}+\frac{x}{12}+\frac{x}{7}+5+\frac{x}{2}+4=x.$$

Numitorul comun al fracțiilor este 84, care se divide și cu 6 și cu 12 și cu 7 și cu 2 și este cel mai mic multiplu comun al lor. Scriem deci

$$\frac{14x}{84}+\frac{7x}{84}+\frac{12x}{84}+\frac{420}{84}+\frac{42x}{84}+\frac{336}{84}=\frac{84x}{84}.$$

Putem înmulți ambii membri ai ecuației cu 84 și scăpăm astfel de numitori; ne mai rămîne

$$14x+7x+12x+420+42x+336=84x$$

$$75x+756=84x$$

$$756=9x$$

$$9x=756$$

$$x=756:9=84.$$

Diofant a trăit pînă la 84 de ani. 14 ani a fost copil, la 21 de ani „i s-au împodobit obrajii", la 33 de ani s-a căsătorit, la 38 de ani i s-a născut fiul care a trăit 42 de ani, adică pînă a împlinit Diofant 80 de ani. Diofant a mai supraviețuit 4 ani.

ECUAŢII DIOFANTICE

Am evocat pe Diofant cu un anumit scop. Acest mare matematician trece drept descoperitorul unui tip special de ecuaţii, numite ecuaţii nedeterminate sau diofantice [1]. Dacă descoperirea este a lui sau nu — iată o problemă tot atît de puţin determinată ca şi ecuaţiile care-i poartă numele. După părerea istoricilor matematicii, din scrierile lui Diofant păstrate pînă în ziua de astăzi nu se poate deduce dacă el este descoperitorul ecuaţiilor. Dat fiind că terminologia este însă încetăţenită o vom folosi şi noi.

Ce sînt aceste misterioase ecuaţii „diofantice"?

De data aceasta vom începe cu o problemă concretă, pentru a descoperi împreună originea ecuaţiilor şi manevrarea lor. Ne punem următoarea întrebare: care sînt numerele x şi y cu proprietatea că de opt ori primul plus de trei ori al doilea fac 91?

Nu putem răspunde la această întrebare cu cunoştinţele noastre de acum. Observăm că aici apar două necunoscute pe care le-am şi notat de altfel cu literele x şi y. Seriem deci

$$8x + 3y = 91.$$

Ce ar trebui făcut mai departe? Conform regulilor noastre $8x = 91 - 3y$ şi $x = \frac{91 - 3y}{8}$ sau $3y = 91 - 8x$ şi $y = \frac{91 - 8x}{3}$. Cu aceasta n-am rezolvat încă nimic, pentru că n-am făcut decît să exprimăm una dintre necunoscute în funcţie de cealaltă şi de numărul 91. Poate că dintr-o întîmplare fericită îmi vine ideea să aleg pe x egal cu 5 şi $y = 17$. Într-adevăr, $8 \cdot 5 + 3 \cdot 17 = 40 + 51 = 91$. Aceasta

[1] Nu este corect să identificăm termenii nedeterminat şi diofantic, referitori la ecuaţii. Ecuaţiile diofantice sînt ecuaţiile care trebuie rezolvate în numere întregi. —*N.T.*

ar fi o soluție. Dar susțin că nu este singura. Trebuie să căutăm și aici un algoritm, o cabală care să ne ducă direct la rezultat. Pentru aceasta trebuie să amintim o condiție suplimentară. Căutăm numai soluții care să fie exprimate în numere întregi. Altfel am avea o infinitate de soluții. Să presupunem că x este egal cu 7 și să înlocuim această valoare în ecuație; constatăm că

$$8 \cdot 7 + 3y = 91$$

$$56 + 3y = 91$$

$$3y = 91 - 56$$

$$3y = 35$$

$$y = 35 : 3 = 11\frac{2}{3}.$$

Alegînd pe x sau pe y am transforma ecuația într-o ecuație obișnuită cu o singură necunoscută, căci a da o valoare arbitrară unei necunoscute înseamnă a transforma necunoscuta într-o constantă, deci a obține ecuația într-un caz particular.

Impunem deci condiția ca ambele necunoscute să fie numere întregi. Această condiție nu este compatibilă cu orice ecuație cu două necunoscute. Vom reveni mai tîrziu asupra acestei probleme.

Înainte de a prezenta metoda generală de rezolvare, datorată geniului lui Leonhard Euler trebuie să mai învățăm un truc matematic extrem de util și care joacă un rol esențial în problema noastră. Este vorba de metoda „substituției".

Să alegem un exemplu concret. Nimeni nu spune că ecuația

$$2\left(\frac{x-4}{3}\right) + 3\left(\frac{x-4}{3}\right) - 4\left(\frac{x-4}{3}\right) = 9 - 2\left(\frac{x-4}{3}\right)$$

pare deosebit de simplă. Privind-o mai de aproape, observăm că expresia $(x-4)/3$ se repetă și că x-ul nu apare decît în această combinație. Alegem acest $(x-4)/3$ ca nouă mărime necunoscută și o tratăm ca și cum ar fi (în limbajul nostru) un măr. Numim n acest măr și scriem

$$2n + 3n - 4n = 9 - 2n.$$

Nu ne mai interesează pentru moment semnificația acestui n. Nu ne interesează ce structură are mărul, cîți sîmburi, codițe sau pete are, ci ne „afiliem" unui algoritm superior și vrem întîi să vedem ce număr, ce constantă, corespunde unui măr. Apoi — așa sper — vom putea studia mai amănunțit mărul. Noua ecuație cu necunoscuta n este

$$2n + 3n - 4n + 2n = 9, \text{ sau } 3n = 9 \text{ și } n = 3.$$

Dar știm foarte bine că n este egal cu $(x-4)/3$, deoarece chiar noi am introdus această notație. Am obținut o nouă ecuație, în care n nu mai este necunoscut, ci constant și egal cu 3. Această ecuație este

$$n = \frac{x - 4}{3} \text{ și } x = 3n + 4.$$

După cum am spus, n este egal cu trei. Adică $x = 9 + 4 = 13$.

Lăsăm pe seama cititorului să rezolve ecuația fără „substituție", fără a introduce o nouă necunoscută. Este sigur că atît această probă cît și proba directă a înlocuirii lui x cu 13 vor confirma corectitudinea calculului nostru.

Practic știm acum ce înseamnă o „substituție". Înseamnă — cel puțin din punctul nostru de vedere — a da o nouă denumire mai simplă unei expresii complicate. În matematicile superioare, în special în calculul integral, unde substituțiile joacă un rol hotărîtor, se poate întîmpla adeseori să substituim unei expresii simple una mai complicată. De fapt cunoaștem și noi astfel de cazuri. Cînd dintr-un motiv oarecare scriem 1^{5^0} în loc de 1 sau $b^1 \cdot b^0$ în loc de b facem o substituție în sensul complicării, bineînțeles că o substituție de un tip special. Pentru a rămîne într-un cadru cît mai general ar trebui să spunem că prin substituție înțelegem înlocuirea unei mărimi cu alta, evident că nu fără nici o selecție. Nu putem transforma niciodată un x din expresie în u. Putem scrie însă peste tot u în loc de x, cu condiția ca în rezultatul final să ținem seama de faptul că $x = u$. Peste tot, în loc de x pot scrie $2u$, sau $u/2$, sau $u/250$. În rezultatul final x trebuie înlocuit cu dublul lui u, sau jumătatea lui u sau a 250-a parte din u.

Ei bine, am văzut prin urmare că substituțiile pot simplifica calcule complicate. Cu ce drept însă putem face substituția? Problema este simplă din punctul de vedere logic. Din $(x-4)/3$ am format noțiunea „superioară" n, care conține acest $(x-4)/3$, deoarece substituția am făcut-o chiar cu condiția $n = (x-4)/3$!

Riguros matematic se spune că am stabilit un izomorfism. Structura, forma ecuației și a operației nu au fost modificate de această substituție, coeficienții și regulile rămînînd aceleași. Din punct de vedere algebric am obținut un sistem de mai multe ecuații, și anume o ecuație fundamentală și o ecuație de condiționare. Adică

$$2\left(\frac{x-4}{3}\right)+3\left(\frac{x-4}{3}\right)-4\left(\frac{x-4}{3}\right)=9-2\left(\frac{x-4}{3}\right)$$

și

$$\left(\frac{x-4}{3}\right)=n.$$

Amînăm însă și această discuție pentru a ajunge la ecuațiile diofantice. Am mai anunțat că în cazul lor vom folosi un tip special de substituție, astfel încît pe lîngă „ecuația de condiționare" apar și alte condiții suplimentare.

Să transcriem ecuația diofantică

$$3y + 8x = 91$$

într-o formă puțin modificată; metoda lui Euler cere în primul rînd să exprimăm una din necunoscute în funcție de cealaltă. Din considerente practice se cere să exprimăm necunoscuta cu coeficientul mai mic în funcție de cea cu coeficientul mai mare. În cazul nostru y în funcție de x. Obținem:

$$3y = 91 - 8x$$

$$y = \frac{91-8x}{3}.$$

Acesta ar fi primul pas. După Euler, transformăm acum această fracție, considerată ca fracție supraunitară, în întreg și părți fracționare. Deci,

$$y = \frac{91}{3} - \frac{8x}{3} = 30 + \frac{1}{3} - 2x - \frac{2x}{3}.$$

Alăturăm acum „întregii" şi procedăm la fel cu părţile fracţionare:

$$y = 30 - 2x + \frac{1}{3} - \frac{2x}{3} = 30 - 2x - \frac{2x - 1}{3}.$$

Tot din motive practice am scris minusul înaintea fracţiei, ca să nu apară ca $+\frac{1 - 2x}{3}$, ci ca $-\frac{2x - 1}{3}$; evident, cele două expresii sînt egale.

Acum abia începe calculul propriu-zis. Ecuaţiile diofantice cer ca soluţiile lor să fie numere întregi, aşadar y trebuie să fie număr întreg. Deoarece şi x trebuie să fie un număr întreg, $30-2x$ este şi el număr întreg. Dacă y este număr întreg, atunci în suma sau diferenţa $30-2x - (2x-1)/3$ expresia $(2x-1)/3$ trebuie să fie număr întreg, altfel celelalte condiţii nu ar mai fi îndeplinite. Acum începe „substituţia". Impunem condiţia ca $(2x-1)/3$ să fie număr întreg şi îl numim n_1. Am introdus şi un indice jos în dreapta, pentru că va trebui, probabil, să facem mai multe substituţii. Avem înlocuirea

$$n_1 \text{ (număr întreg)} = \frac{2x - 1}{3}.$$

Conform aceloraşi raţionamente ca mai înainte, putem transforma această ecuaţie în aşa fel încît să exprimăm pe x în funcţie de n_1:

$$n_1 = \frac{2x - 1}{3}$$

$$3n_1 = 2x - 1$$

$$2x = 3n_1 + 1$$

$$x = \frac{3n_1 + 1}{2}$$

Aşadar x, care trebuie să fie număr întreg, poate fi şi el descompus în întreg şi parte fracţionară:

$$x = \frac{3n_1}{2} + \frac{1}{2} = n_1 + \frac{n_1}{2} + \frac{1}{2} = n_1 + \frac{n_1 + 1}{2}.$$

Raționamentul este același: x și n_1 trebuie să fie numere întregi. De aceea $(n_1+1)/2$ trebuie să fie și el număr întreg. Precauția mea de a-l însemna cu un indice pe n a fost foarte utilă, deoarece printr-o nouă substituție numesc acest nou număr întreg $(n_1+1)/2 = n_2$.

Obținem deci

$$n_2 \text{ (număr întreg)} = \frac{n_1+1}{2}.$$

Dacă exprimăm pe n_1, obligatoriu întreg, în funcție de n_2 deducem

$$2n_2 = n_1 + 1$$

sau

$$n_1 = 2n_2 - 1.$$

De data aceasta a dispărut orice parte fracționară și putem considera problema rezolvată. Mai avem de făcut cîteva calcule lungi, însă ușoare. Trebuie să obținem din nou pe x și y și nu avem voie să-i exprimăm decît în funcție de acest ultim n_2, care este număr întreg. Dat fiind că $n_1 = 2n_2 - 1$ și $(n_1+1)/2 = n_2$, înseamnă că $x = n_1 + (n_1+1)/2$ și este egal cu $2n_2 - 1 + n_2$, adică $x = 3n_2 - 1$. Ultimul rezultat referitor la y era $y = 30 - 2x - (2x-1)/3$. Înseamnă că $y = 30-2\,(3n_2-1) - (2x-1)/3$. Dar $(2x-1)/3$ a fost notat cu n_1 și înlocuind în expresia lui y obținem $y = 30-2(3n_2-1) - n_1$. Și de data aceasta n_1 este egal cu $(2n_2-1)$. Înseamnă că expresia lui y în funcție de n_2 este

$$y = 30 - 2(3n_2-1) - (2n_2-1) = 30 - 6n_2 + 2 - 2n_2 + 1 = 33 - 8n_2.$$

Pentru claritate vom mai scrie încă o dată soluția finală și generală a ecuației diofantice și vom renunța la indicele lui n_2, deoarece acest indice avea sens atîta vreme cît n_2 trebuia distins de altă mărime care lua valori întregi. n_2, sau n cum îl vom numi acum, este un număr întreg oarecare și

$$x = 3n - 1$$

$$y = 33 - 8n.$$

Să încercăm să verificăm corectitudinea acestei metode de rezolvare datorate lui Euler. Am spus că n poate lua orice valori întregi pozitive sau negative (zero trebuie considerat și el număr întreg). Ecuația era

$$8x + 3y = 91.$$

Pentru $n = 0$, $x = 0 - 1 = -1$ și $y = 33 - 0 = 33$;

$$\text{atunci } 8 \cdot (-1) + 3 \cdot 33 = (-8) + 99 = 91.$$

Pentru $n = 1$ $x = 3 - 1 = 2$ și $y = 33 - 8 = 25$;

$$\text{atunci } 8 \cdot 2 + 3 \cdot 25 = 16 + 75 = 91.$$

Pentru $n = -1$ $x = -3 - 1 = -4$ și $y = 33 + 8 = 41$;

$$\text{atunci } 8 \cdot (-4) + 3 \cdot 41 = -32 + 123 = 91.$$

Pentru $n = 5$, $x = 15 - 1 = 14$ și $y = 33 - 40 = -7$;

$$\text{atunci } 8 \cdot 14 + 3(-7) = 112 - 21 = 91$$

și așa mai departe pînă la infinit.

Iată un algoritm extraordinar, care ne permite să determinăm printr-o singură formulă un șir infinit de soluții pentru cele două necunoscute! Perechea de valori $x = 5$ și $y = 17$, ghicită la începutul capitolului, se obține pentru $n = 2$, deoarece aici $x = 6 - 1 = 5$ și $y = 33 - 16 = 17$.

Am putea impune condiții suplimentare, cerînd ca soluțiile să fie cuprinse între 1 și 100 sau între -10 și $+10$, sau să cerem ca soluțiile să fie întregi și pozitive. De multe ori condițiile de acest fel sînt foarte importante. Un cititor mai exersat sau mai format bănuiește imediat cum pot fi satisfăcute aceste condiții. Alegem pentru n valori întregi în jurul lui 0, tabelăm rezultatele și observăm direct cît de departe putem merge cu metoda aceasta [1].

Vom vedea mai departe că ecuațiile diofantice au fost numai un mijloc pentru atingerea anumitor scopuri. Nu ne vom mai bate capul însă cu proprietățile lor specifice extrem

[1] Evident că condițiile suplimentare pot apărea și sub forma unor inegalități. De exemplu, $x < 10$, deci $(3n-1) < 10$ și de aici $3n < 11$, $n < 11/3$. Înseamnă că n poate fi cel mult egal cu 3, dacă vrem ca x să fie mai mic decît 10. Ar trebui însă să introducem și o inegalitate pentru y etc.

de interesante, ci vom aminti numai cîteva idei anunțate mai demult, și anume faptul că nu orice ecuație cu două necunoscute, scrisă sub forma generală $ax + by = c$ (unde a, b, c sînt numere întregi negative sau pozitive), este neapărat o ecuație diofantică, adică o ecuație pentru care putem găsi soluții x și y numere întregi. Caracterul diofantic al unei ecuații este determinat de o condiție suplimentară.

Să presupunem că am adus ecuația la forma cea mai simplă, ceea ce în terminologia uzuală înseamnă că am împărțit ambii membri ai ecuației cu divizorul comun, astfel încît ecuația nu mai poate fi simplificată prin împărțiri. Să presupunem că am împărțit ambii membri ai ecuației $9x + 12y = 51$ la 3 și am obținut ecuația

$$3x + 4y = 17$$

sub forma cea mai simplă.

Tot așa presupunem că am împărțit ambii membri ai ecuației $32x + 24y = 124$ la 4 și am obținut

$$8x + 6y = 31$$

sub forma cea mai simplă.

Ne-am și împotmolit, deoarece este inexplicabil faptul ca suma a două numere pare să fie un număr impar. Dacă x și y sînt numere întregi, $8x$ și $6y$ sînt numere pare, deoarece $8 \cdot 5$ sau $8 \cdot 7$, sau $8 \cdot (-2)$, sau $6 \cdot (-5)$, sau $6 \cdot (-20)$, sau $6 \cdot 1$ sînt totdeauna numere pare.

Vom spune îndată că ecuația

$$3x + 15y = 19$$

nu este o ecuație diofantică, nu numai datorită parității coeficienților lui x și y, ci pentru că, în general, orice divizor comun al coeficienților lui x și y trebuie să fie și un divizor al constantei.

Vom întări această afirmație ca exemplu al unei demonstrații matematic corecte și riguroase. Deocamdată mai dăm însă un exemplu:

$$9x + 12y = 51$$

împărțit la 3 dă

$$3x + 4y = 17,$$

3 și 4 nu au divizor comun, așadar este vorba, fără îndoială, de o ecuație diofantică, care poate avea soluții numere întregi. După Euler, soluția se obține în modul următor

$$3x + 4y = 17$$

$$3x = 17 - 4y$$

$$x = \frac{17 - 4y}{3} = 5 + \frac{2}{3} - y - \frac{y}{3} = 5 - y - \frac{y-2}{3}$$

$$\frac{y-2}{3} = n$$

$$y - 2 = 3n$$

$$y = 3n + 2; \; x = 5 - (3n+2) - n = 3 - 4n.$$

Nu am mai pus indice lui n; am văzut imediat că datorită izolării lui $(y-2)/3$ nu avem de ce să ne mai așteptăm la parte fracționară.

Pentru $n = 3$ avem $x = -9$, $y = 11$ și

$$3 \cdot (-9) + 4 \cdot 11 = -27 + 44 = 17.$$

După cum ne-am așteptat, totul este în perfectă ordine. Să revenim la demonstrație și la numerele generalizate. În ecuația

$$ax + by = c$$

a, b, c nu au divizor comun, altfel ecuația nu ar fi fost adusă la forma cea mai simplă. Dar a și b ar putea avea un divizor comun, ca de exemplu în cazul

$$8x + 6y = 31$$

cînd 8 și 6 au pe 2 drept divizor comun. În general putem spune că a și b au divizorul comun m. Aceasta ar însemna însă că a/m și b/m sînt numere întregi. Aceste numere întregi se înmulțesc fiecare cu numerele întregi x și y și cele două produse se sumează. Obținem $\left(\frac{a}{m} x + \frac{b}{m} y\right)$. Condiția de echilibru a „balanței", asociată ecuației cere să împărțim și pe c cu m, dacă i-am împărțit pe a și b cu m. Dacă ecuația inițială era $ax + by = c$, atunci prin împărțire cu m obțineam $\frac{a}{m} x + \frac{b}{m} y = (ax + by)/m = c/m$. Inițial c era un număr întreg: acuma după împărțire c/m, ca sumă a două numere întregi, trebuie să fie tot număr întreg, adică c este divizibil cu m, ceea ce contrazice însă ipoteza că numai a și b sînt divizibile cu m. De aici deducem că o ecuație de forma $m \cdot rx + m \cdot sy = c$, unde c nu este divizibil cu m, nu admite niciodată soluții x și y numere întregi, dacă m, r, s, c sînt numere întregi.

Repetăm: o ecuație diofantică presupune că coeficienții celor două necunoscute sînt numere „prime între ele", ceea ce înseamnă că nu au alt divizor comun în afară de 1. Coeficienții necunoscutelor și constanta pot avea însă un divizor comun, ca de exemplu în ecuația $3x + 4y = 12$ (4 și 12 au divizorul 4; 3 și 12 au divizorul 3). Soluțiile generale ale acestor ecuații sînt:

$$x = 4 - 4n \text{ și } y = 3n,$$

adică pentru $n = 5$ avem

$$x = 4 - 20 = -16 \text{ și } y = 15.$$

Proba: $3 \cdot (-16) + 4 \cdot 15 = -48 + 60 = 12.$

PUTERI NEGATIVE ȘI FRACȚIONARE

Sîntem ispitiți să ne ocupăm în continuare de teoria ecuațiilor, deoarece știm că vom întîlni un anumit tip de ecuație care ne-ar deschide calea spre matematicile superioare; am ajunge la noțiunea de „funcție", care se deduce ușor din ecuațiile algebrice.

Vă rugăm totuși să considerați deocamdată aceste cuvinte ca o indicație preliminară extrem de imprecisă. Capitolele următoare ne vor introduce în această lume fantastică. Vom circula mai liberi în domeniul funcțiilor dacă vom aprofunda studiul puterilor, de aceea ne vom da osteneala să facem acest lucru.

Ne amintim că împărțirea puterilor aceleiași baze se efectua scăzînd exponentul mai mic din cel mai mare. De exemplu, $10^5 : 10^3 = 10^{5-3} = 10^2$ sau $100\,000 : 1\,000 = 100$, sau $a^{17} : a^6 = a^{17-6} = a^{11}$ etc. Am admis tot timpul în mod tacit că exponentul deîmpărțitului este totdeauna mai mare sau cel puțin egal cu al împărțitorului. Așadar, în general, împărțirea $a^m : a^n$ presupunea $m > n$, sau, ceea ce este același lucru, $n < m$. Pentru că m și n au fost aleși totdeauna pozitivi nu a existat niciodată pericolul să obținem ca rezultat o bază ridicată la o putere negativă. Totuși ne putem imagina o putere negativă ca atare. Se pune numai problema sensului acestei puteri negative în cadrul algoritmului nostru și ne întrebăm dacă ea nu distruge sistemul construit de noi pînă acum.

Pentru moment, mai menționăm ipoteza că m și n sînt numere pozitive, dar inversăm relația de condiționare și presupunem că n este mai mare decît m ($n > m$ sau $m < n$). Deoarece se mai cere și ca n să fie exponentul împărțitorului constatăm că exponentul cîtului $a^m : a^n = a^{m-n}$ este sigur un număr negativ, deoarece am scăzut un număr mai mare dintr-un număr mai mic. Exprimîndu-ne mai concret, $a = 10$, $m = 5$, $n = 7$, în consecință $10^5 : 10^7 = 10^{5-7} = 10^{-2}$.

Calculul se poate face ușor cu numere concrete. Vom explicita deci acest rezultat cam ciudat în modul următor:

$$10^5 : 10^7 = \frac{10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10}{10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10}.$$

Evident, putem simplifica cei cinci factori de zece de la numărător cu cinci factori de zece de la numitor și rezultatul este $10^5 : 10^7 = \frac{1}{10 \cdot 10} = \frac{1}{10^2}$. Acest $\frac{1}{10^2}$ trebuie însă să fie egal cu 10^{-2}!

Bănuim de pe acuma noul algoritm; vrem însă să mai facem o probă:

$$a^{11} : a^{16} = \frac{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a}{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a} = \frac{1}{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a}$$

Acest

$\frac{1}{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a} = \frac{1}{a^5}$ trebuie să fie egal cu $a^{11} : a^{16} = a^{11-16} = a^{-5}$.

Regula căutată de noi este deci cît se poate de simplă: o bază a cu un exponent negativ este inversul aceleiași baze cu exponentul pozitiv. Formula este $a^{-r} = \frac{1}{a^r}$, unde a trebuie să fie diferit de zero.

Această ultimă restricție are o semnificație importantă. Dacă a ar fi egal cu 0, atunci $a^{-n} = \frac{1}{0^n} = \frac{1}{0}$, iar acest $\frac{1}{0}$ știm că reprezintă ceva nedeterminat, pe care l-am notat cu „∞" sau „limită infinită".

Nu este nevoie să mai pierdem timpul cu exponenții negativi. Regula noastră simplă i-a inclus în algoritmul cunoscut și calculăm cu tot atîta ușurință expresii de forma $b^{(-4+3-2+6-8)} = b^{-5} = \frac{1}{b^5}$, ca și expresii de forma $c^{5+4-3} = c^6$.

Din proprietățile valorii inverse mai rezultă și că $\frac{1}{a^n}$ poate fi scris și ca $a^0 : a^n = a^{0-n} = a^{-n}$. Din contra, pe $\frac{1}{a^{-n}}$ îl putem obține din relațiile $a^0 : a^n = a^{0-(-n)} = a^n$. Această regulă ne permite să mutăm după voie orice putere, prin schimbarea semnului exponentului de la numitorul la numărătorul unei fracţii şi invers. Totodată obţinem:

$$\frac{a^0}{a^n} = \frac{a^{-n}}{a^0} \text{ şi } \frac{a^0}{a^{-n}} = \frac{a^n}{a^0} \text{ sau } \frac{1}{a^n} = a^{-n};$$

$$\frac{1}{a^{-n}} = a^n.$$

Să generalizăm mai departe algoritmul nostru. Afirmăm că putem scrie şi exponenţi sub formă de fracţii ordinare, ca de exemplu $10^{\frac{5}{6}}$, $a^{\frac{7}{9}}$, $15^{\frac{a}{b}}$, $20^{\frac{1}{10}}$, $4^{\frac{3}{7}}$, $9^{\frac{25}{8}}$ etc.

Deocamdată nu ne putem da seama (mai tîrziu se va lămuri totul) ce semnificaţie are un exponent fracţionar. Cerinţa de a-l pune pe 10 de exemplu de $\frac{5}{6}$ ori ca factor într-un produs pare complet lipsită de sens. Chiar dacă încercăm să găsim o scăpare, scriindu-l pe $\frac{5}{6}$ descompus în $5 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)$, nu constatăm decît că avem voie să ridicăm întîi pe 10 la puterea a cincea, deoarece $(10^5)^{\frac{1}{6}}$ este egal cu $10^{\frac{5}{6}}$. Ridicarea la puterea a cincea nu pune nici un fel de problemă. Dar cum ridicăm la puterea $\frac{1}{6}$ rezultatul $10^5 = 100\,000$? Cum poate fi scris 100 000 de $\frac{1}{6}$ ori ca factor într-un produs? În urma acestei operaţii trebuie să obţinem un număr mai mic, deoarece 10^5 nu apare nici măcar o singură dată ca factor. S-ar părea deci că am ajuns la un nou tip de operaţie analitică, care are faţă de ridicarea la putere rolul pe care îl are împărţirea faţă de înmulţire sau scăderea faţă de adunare.

Vom destăinui despre ce fel de „ordin" sau calcul este vorba: avem de-a face cu extragerea de rădăcină. „Ordinul" $(100\,000)^{\frac{1}{6}}$ înseamnă numai: „caută acel număr, deocamdată necunoscut, care ridicat la puterea a şasea să fie egal cu 100 000".

În general, dacă am fi întîlnit expresia $c^{\frac{a}{b}}$ am fi putut scrie: $c^{\frac{a}{b}} = (c^a)^{\frac{1}{b}}$, ceea ce înseamnă că trebuie să găsim numărul, deocamdată necunoscut, care ridicat la puterea b să îl dea pe c^a. Așadar, $(d \cdot d \cdot d \cdot d \cdot d \ldots)$, unde d apare de b ori ca factor $= c^a$ sau

$$d^b = c^a.$$

Știm cu toții că rădăcinile nu se scriu numai ca puteri inverse ale unor puteri întregi, ci de mai multe secole încoace a fost adoptată altă notație; pentru desemnarea operației de extragere de rădăcină se folosește o notație care provine de la prima literă a cuvîntului latinesc *radix* (rădăcină), scrisă *r*, de la care a derivat semnul actual $\sqrt{}$. Vom scrie deci

$$\sqrt[2]{5816}, \quad \sqrt[3]{a \cdot b}, \quad \sqrt[a]{25\, a^4} \quad \text{etc.}$$

Radicalului i se asociază „ordinul" radicalului sau indicele radicalului, care reprezintă inversul fracției scrisă ca exponent. Deci,

$$a^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{a}, \text{ sau } 10^{\frac{5}{6}} = (10^5)^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{10^5} \quad \text{etc.}$$

Din această corespondență se deduc cu ușurință toate regulile de calcul cu rădăcini. Pentru siguranță recomandăm ca orice calcul mai complicat cu radicali să fie verificat printr-un calcul corespunzător cu exponenți fracționari, deci cu o schimbare a algoritmului:

$$\sqrt[3]{a^5} \cdot \sqrt[7]{a^9} \text{ ar fi } a^{\frac{5}{3}} \cdot a^{\frac{9}{7}} = a^{\frac{5}{3}+\frac{9}{7}} = a^{\frac{7 \cdot 5 + 3 \cdot 9}{21}} =$$

$$= a^{\frac{62}{21}} = (a^{62})^{\frac{1}{21}} = \sqrt[21]{a^{62}}.$$

Dacă radicalul are un indice fracționar, atunci la transcrierea ca putere trebuie luat inversul fracției. De exemplu,

$$\sqrt[\frac{4}{5}]{a^3} = (a^3)^{\frac{5}{4}} = (a^{3\cdot 5})^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{a^{15}}$$

sau

$$\sqrt[\frac{4}{5}]{a^3} = \sqrt[4\cdot\frac{1}{5}]{a^3} = (a^3)^{5\cdot\frac{1}{4}} = [(a^3)^5]^{\frac{1}{4}} = [a^{15}]^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{a^{15}}.$$

Evident că putem împărți radicalii (puteri cu exponenți fracționari) și este posibil să obținem, în acest caz, ca rezultat puteri pozitive sau negative. De exemplu,

$$\sqrt[5]{a^6} : \sqrt[3]{a^7} = (a^6)^{\frac{1}{5}} : (a^7)^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{6}{5}} : a^{\frac{7}{3}} = a^{\frac{6}{5}-\frac{7}{3}} = a^{\frac{6\cdot 3-7\cdot 5}{15}} =$$

$$= a^{\frac{-17}{15}} = a^{-\frac{17}{15}} = \sqrt[-15]{a^{17}} = \sqrt[15]{a^{-17}} =$$

$$\sqrt[15]{\frac{1}{a^{17}}} = \frac{\sqrt[15]{1}}{\sqrt[15]{a^{17}}} = \frac{1}{\sqrt[15]{a^{17}}}.$$

În încheiere observăm că la radicalul de ordinul al doilea nu se mai scrie de obicei indicele, adică $\sqrt{a}$ înseamnă de obicei $\sqrt[2]{a}$, iar $\sqrt[1]{a}$ nu reprezintă în fond o extragere de rădăcină, deoarece $\sqrt[1]{a} = a^{\frac{1}{1}} = a^1 = a$.

Am spus „în încheiere". În mod conștient am expus foarte superficial teoria radicalilor. Pentru scopurile noastre sînt interesante nu subiectele ce pot fi găsite expuse riguros și pe larg în orice manual, ci o problemă mai profundă, esența noțiunii de număr și generalizările acestei noțiuni datorite introducerii operației de extragere a radicalului; în treacăt fie vorba, calculul rădăcinilor se poate efectua exact și relativ simplu numai în anumite cazuri, fără a apela la logaritmi [1].

---

[1] În principiu poate fi calculat radicalul de orice ordin al unui număr concret. Procedeul folosit necesită însă atîta trudă încît practic nici nu este utilizat.

NUMERE IRAȚIONALE

Dacă ne-am pune întrebarea în ce condiții se poate calcula exact, în cazul general, rădăcina unui număr, am constata de exemplu că $\sqrt[4]{a}$ este calculabil exact dacă a este un număr de forma p^4. În acest caz, $\sqrt[4]{a} = \sqrt[4]{p^4} = p^{\frac{4}{4}} = p^1 = p$. Obținem ca rezultat p și spunem că p este „rădăcina de ordinul patru" din a.

Trebuie să vedem mai departe dacă există totdeauna această posibilitate. Să considerăm cazul cel mai simplu și să presupunem că a este un număr întreg. Un număr întreg oarecare. Constatăm însă că numai printr-o întîmplare extraordinară a poate fi puterea a patra a unui alt număr întreg p. Dacă privim numerele întregi de la 1 la 100 constatăm că numai 1, 16 și 81 satisfac această condiție de a fi puterea a patra a altui număr întreg, ceea ce înseamnă că nici un număr întreg a diferit de 1, 16 și 81 nu este puterea a patra a unui alt număr întreg. Numărul 25 este situat undeva între 2^4 și 3^4, numărul 90 între 3^4 și 4^4 etc. În matematică se folosesc „inecuațiile" sau „inegalitățile" pentru a exprima acest „cuprins între". Este o notație extrem de importantă, folosită frecvent în matematicile superioare și de aceea ne vom opri puțin asupra ei. Dacă vrem să spunem sau dacă vrem să punem condiția ca numărul b să fie cuprins între 30 și 40, atunci scriem: b este mai mic decît 40, dar mai mare decît 30 sau

$$30 < b < 40.$$

Dacă vrem să spunem că b este cuprins între 30 și 40, dar eventual poate fi egal cu 30 sau cu 40, atunci notăm

$$30 \leqslant b \leqslant 40.$$

Acest procedeu este numit „delimitarea marginilor" și 30 este numit marginea inferioară, iar 40 marginea superioară. Pentru numerele generalizate evident că nu știm de la început care este mai mare și care este mai mic. Dacă scriem

$$a < b < c,$$

atunci b este cuprins între a și c. Aflăm deci indirect, datorită acestei formule, că a este cel mai mic iar c este cel mai mare dintre cele trei numere [1].

Să folosim această notație aplicînd-o radicalilor; putem spune că 25 este situat între 2^4 și 3^4 sau

$$2^4 < 25 < 3^4.$$

Din această formulă devine evident faptul că radicalul de ordinul patru din 25 nu este calculabil cu formula $\sqrt[4]{p^4} = p$ (unde p este un număr întreg pozitiv).

Mai cunoaștem însă și un alt tip de numere, o infinitate, distribuite printre numerele întregi. Sînt cele pe care le-am numit fracții ordinare. Am mai spus că fracțiile simple 1/2, 1/3, 1/4, 1/5 și așa mai departe pînă la 1/(aproape ∞) sînt cuprinse ca valoare între 0 și 1, ca și fracțiile subunitare: 2/3, 3/4, 4/5, 5/6, 6/7, ... pînă la $\frac{\infty - 1}{\infty}$. Există însă fracții ordinare cu valoarea cuprinsă între oricare alte două numere întregi, de exemplu între 12 și 13; sînt fracțiile supraunitare cu valori în acest domeniu, ca de exemplu $25/2 = 12\ 1/2$, sau scrise sub forma $12 + 1/2$, $12 + 3/4$, $12 + 7/8$ etc.; așadar am putea spera ca $\sqrt[4]{25}$ să poată fi scris ca o fracție ordinară. Presupunem că, deoarece $2^4 = 16$ iar $3^4 = 81$, rădăcina de ordinul 4 din 25 se va scrie ca 2 plus o fracție oarecare, complicată, aproximativ $2 + 1/4$, deoarece $2 + 1/4 = 9/4$, iar acesta ridicat la puterea a patra este

$$\frac{9}{4} \cdot \frac{9}{4} \cdot \frac{9}{4} \cdot \frac{9}{4} = \frac{6\,561}{256} = 25{,}63.$$

Aproximația noastră destul de neprecisă este însă apropiată de valoarea reală. Dat fiind că există însă o infinitate de fracții ordinare este posibil ca o fracție ceva mai mică decît 9/4 să ne dea exact soluția căutată. Încercările succesive cer multă trudă și nici măcar nu ne asigură că găsim pînă la

[1] Faptul că $a < b$ și $b < c$ implică $a < c$ este numit principiul tranzitivității.

urmă soluţia. Să presupunem că putem face alegerea dintr-o infinitate de fracţii, ai căror numitori pot avea şi 200 de cifre sau 2 000, sau 2 000 000 cifre. Poate că găsim soluţia exactă a lui $\sqrt[4]{25}$ sub forma unei fracţii al cărei numitor este format din 10 000 cvintilioane de cifre, sau această cifră înmulţită cu un bilion de sextilioane. Ar fi totuşi tot o fracţie ordinară. Numărul cifrelor numitorului poate să devină oricît de mare.

Aşadar, problema trebuie reformulată în general, lucru care nu prezintă nici un fel de dificultate. Sînt două cazuri posibile: La extragerea rădăcinii de ordinul n numărul a poate fi scris sub forma p^n, unde p este număr întreg, sau numărul a este cuprins între puterile n ale lui p şi $p+1$, adică $p^n < a < (p+1)^n$. $(p+1)$ este numărul întreg care urmează imediat după p; de exemplu, dacă p este 17, imediat după el urmează $p+1=18$. Ştim că în acest al doilea caz $\sqrt[n]{a}$ nu este un număr întreg şi ne întrebăm dacă este cumva un număr fracţionar de forma (r/s). Atunci $\sqrt[n]{a}$ trebuie să fie egal cu $\sqrt[n]{(r/s)^n}$; dacă este aşa, atunci $(r/s)^{n/n}$ este egal cu $(r/s)^1 = r/s$ şi radicalul este o fracţie ordinară. Evident că numerele r şi s trebuie să fie „prime între ele", deoarece fracţia este scrisă sub forma cea mai simplă.

Soluţia o scriem, de exemplu, nu sub forma 24/15, ci sub forma 8/5.

Dacă $\sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{(r/s)^n}$ înseamnă că a este egal cu $(r/s)^n$, deoarece egalitatea $\sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{(r/s)^n}$ nu se schimbă cînd ridicăm ambii membri la puterea n şi obţinem $(\sqrt[n]{a})^n = (r/s)^n$. Din această egalitate deducem însă că $a = (r/s)^n$. Ca să mergem mai departe trebuie să ne amintim că a este un număr întreg. Aceasta a fost ipoteza iniţială a cercetărilor noastre. Dacă a este număr întreg, atunci trebuie ca şi $(r/s)^n$ să fie un număr întreg; $(r/s)^n$ este însă egal cu r^n/s^n. Iar r şi s sînt prime între ele. Dar dacă r şi s sînt prime între ele, atunci indiferent la ce putere le ridicăm, puterile lor nu vor avea niciodată un divizor comun; ridicarea la putere nu introduce un factor comun în numărător sau numitor. Dacă ridicăm la putere fracţia 3/5 atunci obţinem

$$\frac{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \ldots\ldots \text{pînă la infinit}}{5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \ldots\ldots \text{pînă la infinit}}.$$

Puterile de ordin n (oarecare) a două numere prime între ele sînt tot numere prime între ele, iar prin împărțirea a două numere prime între ele nu putem obține niciodată un număr întreg, așadar niciodată a nu poate fi egal cu $(r/s)^n$, dacă menținem condiția ca a să fie număr întreg.

Rezultatul nostru este de-a dreptul înspăimîntător. El ne spune că deși există o infinitate de fracții ordinare ale căror valori sînt cuprinse între numerele întregi, nu pot găsi nici o fracție ordinară care să fie egală cu $\sqrt[4]{25}$. Totuși acest $\sqrt[4]{25}$ are o valoare destul de apropiată de 2 1/4; se pare deci că, în afară de numerele întregi și de cele fracționare, mai există încă un tip de numere intercalate în al doilea ordin de micime între fracțiile ordinare. Noi am crezut însă că fracțiile ordinare completează toate pozițiile intermediare între numerele întregi.

După o expresie folosită încă de pe vremea lui Pitagora, rezultatul nostru este *alogos*, inexprimabil, fără sens. Contrazice rațiunea, *ratio* [1]. Aceste noi și misterioase numere care nici măcar nu știm cum se scriu le vom numi „iraționale", adică numere neraționale.

Cum putem exprima aceste numere monstruoase, inexprimabile, intermediare și ciudate, dacă nu avem voie să le scriem nici ca fracții, nici ca numere întregi?

Calculînd pe $\sqrt[4]{25}$ cu ajutorul logaritmilor obținem valoarea 2,23606 ... Punctele arată că de fapt calculul nu a fost terminat. Leibniz a dat o regulă de calcul pentru alt număr irațional — numărul π — conform căreia $\pi/4$ este dat de următoarea serie

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} - \frac{1}{15} + \frac{1}{17} - \frac{1}{19} \cdots,$$

Ceea ce înseamnă că pe $\pi/4$ îl obținem doar dacă vom calcula suma acestei serii infinite de termeni. Așadar, putem calcula pe $\pi/4$ cu o aproximație oricît de bună, însă niciodată exact și complet.

---

[1] Deducerea expresiei irațional din *ratio* cu sensul „relație corectă" o vom face la studiul noțiunii „incomensurabil".

Constatăm că există două posibilități de a exprima numerele iraționale, care reprezintă de fapt unul și același lucru. Cele două posibilități sînt: scrierea sub formă de fracții zecimale și scrierea sub formă de serii infinite care, după cum arată „seria lui Leibniz", pot consta din scăderea și adunarea alternată a unor termeni. Asemenea serii se mai numesc și „serii alternante".

Nu ne vom mai ocupa în amănunt de dificila teorie a seriilor, ci o vom studia numai în măsura în care ne servește pentru scopurile noastre, adică ne va confirma afirmația că cele două moduri de scriere a numerelor iraționale provin de fapt din scrierea lor sub formă de serii infinite.

Pentru a verifica seria lui Leibniz spunem de pe acum că numărul π scris ca număr zecimal este 3,14159265358979З... ... Alt număr irațional cunoscut este „numărul e", baza logaritmilor naturali, care se scrie sub forma

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \ldots,$$

iar ca fracție zecimală sub forma

$$e = 2{,}718281828459045235З6 \ldots$$

Adversarul nostru ne atrage pe drept cuvînt atenția că n-am spus încă nimic despre fracțiile zecimale; am pus condiția să nu presupunem nimic cunoscut, de aceea nu avem nici un drept să scriem fracții zecimale. Mai departe, cititorii mai atenți și mai înzestrați ne vor reproșa că se știe că există multe cazuri în care o împărțire banală nu se poate face fără rest. Ceva nu este în regulă, deoarece împărțirea nu este decît o fracție ordinară în altă notație, și noi am presupus că fracțiile ordinare sînt opuse numerelor iraționale și că numerele iraționale sînt „intercalate" între fracțiile ordinare (sau împărțirile) „infinit apropiate". În continuare am lucrat ca și cum numerele iraționale s-ar obține prin operația de extragere de radical [1].

---

[1] Nu putem fi de acord cu această părere a autorului. După lucrările lui Dedekind, Cantor și ale altor matematicieni din secolul trecut, noțiunea de număr irațional este astăzi foarte clară pentru matematicieni, spre deosebire de situația de pînă acum un secol. Vezi M. N i c o l e s c u, *Analiza matematică*, vol. I Ed. Tehnică, București, 1957, p. 68. — *N.T.*

Vă sîntem recunoscători pentru toate aceste reproşuri. Este surprinzător faptul că există persoane cu o bună pregătire din liceu, care nu cunosc aceste deosebiri, nici nu s-au gîndit vreodată la ele sau cărora nu li s-a atras niciodată atenţia asupra lor. Înţelegem cu toţii, însă, că o fracţie ordinară este o noţiune distinctă de un număr iraţional. Fracţia ordinară este o operaţie completă, terminată, pe cînd numărul iraţional nu se scrie niciodată ca număr, ci se obţine numai ca rezultat al unui şir infinit de operaţii, sub forma unei reguli de calcul sau legi de formare ca o serie. De aceea, numărul întreg sau cel fracţionar pot fi considerate numere statice, pe cînd cele iraţionale pot fi considerate numere dinamice. Numărul iraţional nu este o mărime ci indică un sens, o direcţie către o mărime, deşi noi putem să-l transformăm parţial într-o mărime statică. Acest lucru îl putem face cu aproximaţie oricît de bună. De exemplu, dacă în cazul lui $\sqrt[4]{25}$ vrem să ştim care este valoarea lui cu trei zecimale exacte, atunci $\sqrt[4]{25}$ este 2,236. Dacă vrem să cunoaştem însă valoarea exactă a lui $\sqrt[4]{25}$, atunci nu putem afla răspunsul, căci nu putem scrie o infinitate de zecimale. Dar nu putem realiza acest lucru nici în cazul lui 3,33333 ... (trei se repetă la infinit)! Evident că nici acest număr nu poate fi scris complet niciodată sub formă de fracţie zecimală. Totuşi, numărul poate fi scris exact sub formă de fracţie ordinară; 3,33333 ... (periodic) este chiar $20/6$, adică $10/3$ sau $10 \cdot (1/3)$. Această notaţie nu ne mai lasă nici un dubiu. Putem indica imediat poziţia ocupată pe axa numerelor de numărul $10 \cdot (1/3)$, căci $10/3$ este şi $3 + 1/3$ sau $3\ 1/3$. Pe $\sqrt[4]{25}$ nu îl putem găsi însă pe axa numerelor nici cu cel mai perfecţionat microscop. Nici măcar atunci cînd ştim între ce fracţii ordinare este cuprins. El este situat undeva într-o mulţime infinită de numere iraţionale. Toate aceste consideraţii au un aer mistic. Din păcate, spaţiul pe care îl avem la dispoziţie nu ne permite să clarificăm această problemă deosebit de interesantă [1].

---

[1] Recomandăm cititorilor interesaţi să studieze în cartea lui G. Kowalewski, *Die klassischen Probleme der Analysis des Unendlichen*, Leipzig, 1921, — teoria *„tăieturii Dedekind"*.

FRACȚII SISTEMATICE

Ne vom ocupa acum de o problemă mai apropiată de subiectul nostru — așa-numitele fracții sistematice; un caz particular de fracții sistematice sînt fracțiile zecimale. Putem deduce din cunoștințele noastre asupra sistemelor de numerație ce sens are expresia „fracție sistematică". În orice sistem pozițional există ceva ce corespunde „fracțiilor zecimale". În sistemul cu baza șase, după „virgula zecimală" (care în acest sistem ar trebui să fie numită virgula „șesimală") urmează șesimea, treizecișesimea, douăsuteșaisprezecimea etc. În sistemul cu baza doi, sau binar, urmează după „virgula binară" jumătatea, pătrimea, optimea, șaisprezecimea etc.; în sistemul cu baza treisprezece, după „virgula treisprezecimală" urmează treisprezecimea, o sutășaizecinoimea, douămiiosutănouăzecișeptimea etc., iar în sistemul zecimal, zecimea, sutimea, miimea etc. În general, într-un sistem cu baza g în scrierea pozițională, cu condiția ca indicii de putere să fie scriși în sistemul cu baza zece, un număr oarecare — de exemplu un număr cu cinci cifre (cinci poziții pentru întregi) și patru poziții fracționare — se scrie în modul următor:

$$mg^4 + ng^3 + og^2 + pg^1 + qg^0 + r\left(\frac{1}{g^1}\right) + s\left(\frac{1}{g^2}\right) + t\left(\frac{1}{g^3}\right) + \\ + u\left(\frac{1}{g^4}\right);$$

sau dacă folosim puterile negative:

$$mg^4 + ng^3 + og^2 + pg^1 + qg^0 + rg^{-1} + sg^{-2} + tg^{-3} + ug^{-4}.$$

„Virgula zecimală" ar trebui plasată între qg^0 și rg^{-1}. Nu vrem însă să examinăm toate sistemele posibile, ci ne vom mulțumi numai cu studiul sistemului zecimal. Un număr din sistemul cu baza zece cu cifre după virgula zecimală, ca de exemplu 50 341,7328, este de forma $5 \cdot 10^4 + 0 \cdot 10^3 +$

$+ 3 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10^1 + 1 \cdot 10^0 + 7 \cdot 10^{-1} + 3 \cdot 10^{-2} + 2 \cdot 10^{-3} + 8 \cdot 10^{-4}$; această scriere pune în evidență structura numărului respectiv.

Deci, încă o dată: prin fracție sistematică, notată în general cu litera grecească σ (sigma), înțelegem reprezentarea unui număr fracționar într-un sistem pozițional. Înainte de a stabili care sînt unicele tipuri posibile de asemenea fracții sistematice vom face cunoștință cu un nou simbol, care ne va permite să simplificăm considerabil scrierea seriilor sistematice. Este vorba de așa-numitul operator de însumare, semnul de sumă, semnul „sumă de .....", exprimat prin litera Σ (sigma majuscul) din alfabetul grec. Trebuie însă să delimităm și „domeniul" de sumare. Definirea acestui domeniu, ca și utilizarea simbolului de sumă Σ, au sens numai dacă termenii care trebuie sumați sînt expresii identice ca structură și se deosebesc unul de celălalt numai prin cîțiva indici. Presimțim că un număr dintr-un sistem pozițional sau un număr exprimat de o serie îndeplinește aceste condiții, deoarece fiecare termen dintr-un număr pozițional se compune din coeficient și bază: coeficientul are un indice de poziție, iar baza un indice de putere; în plus există o legătură între acești doi indici — de poziție și de putere. Numărul pozițional

$$a_1g^0 + a_2g^1 + a_3g^2 + a_4g^3 + a_5g^4 + a_6g^5 + a_7g^6 + a_8g^7$$

conține în fiecare termen pe a și pe g. Este deci o sumă a tuturor produselor de forma a de înmulțit cu g. Dar care a și care g? a cu indicii de la 1 la 8 și g la puterile 0, 1 etc. pînă la 7, iar în fiecare termen indicele lui a este cu o unitate mai mare decît puterea lui g. Numărul respectiv este deci suma tuturor expresiilor de forma $a_\nu g^{\nu-1}$ sau $a_{\rho+1}g^\rho$. Indicii ν (nü) și ρ (ro) sînt litere minuscule ale alfabetului grec. N-am terminat încă. Nu cunoaștem încă domeniul pe care trebuie să definesc suma. Cum ne-am putea ajuta? Foarte simplu! Dat fiind că cea mai mică valoare a indicelui este unu și cea mai mare valoare este 8, 1 este marginea inferioară a „domeniului de variație" a indicelui și 8 este marginea superioară a domeniului. Marginile trebuie considerate ca incluse în domeniu. Indicele de putere are marginea inferioară 0 și cea superioară 7; „variază" de la 0 la 7. Atragem aici atenția — este una dintre cele mai importante și esențiale observații din cuprinsul acestei cărți — asupra faptului că această variație este numită discontinuă sau discretă. Este vorba, de fapt, de un salt cu o unitate de la un indice la altul, de la un exponent la celălalt. Și pentru a vă încuraja vă vom dezvălui un secret: mult temuta integrală este în fond numai suma unei serii la care „variația" indicelui de sumare nu este discretă, discontinuă, ci continuă. Dacă ne însușim temeinic noțiunea de sumă cu notația Σ, cîștigăm enorm pentru noțiunea de integrală, deoarece operatorul sumă este un operator de integrare într-o formă simplificată, discontinuu, vizibil cu ochiul liber. De altfel vă spunem de pe acum că în notița, de importanță istorică, din 29 octombrie 1675 marele Leibniz scria că noul semn de integrare $\int$ înseamnă numai „sumă de ...". Acest semn este, de altfel, un *S* latinesc alungit.

Dat fiind că adversarul meu își pierde răbdarea voi reveni îngrozit la semnul sumă. Adversarul meu susține, și încă pe drept cuvînt, că nici nu știm încă ce este o fracție zecimală.

Am stabilit deci că atît indicele cît și exponentul produselor de forma *a* de înmulțit cu *g* „variază" de la o margine inferioară la una superioară. Ceea ce înseamnă că luăm consecutiv, prin salturi de cîte o unitate, fără nici o omisiune, toate valorile cuprinse între marginea inferioară și cea superioară.

Cred că am ajuns suficient de departe pentru a putea scrie și operatorul sumă:

$$\sum_{\rho=0}^{7} a_{\rho+1}\, g^{\rho} \text{ sau } \sum_{\nu=1}^{8} a_{\nu}\, g^{\nu-1}.$$

Este logic și plauzibil că scriem marginea inferioară sub semnul sumă și marginea superioară deasupra semnului sumă. Tot jos sub semnul sumă se scrie mărimea „variabilă", indicele de sumare, egal cu marginea inferioară, pentru a arăta la ce valoare a acestui indice începe sumarea. Urmează apoi expresia, structura termenului cu indicele și exponentul general. Bineînțeles că lîngă semnul sumă pot figura două, trei, patru, cinci numere generale sau chiar mai multe, toate avînd numai indici sau numai exponenți, sau exponenți și indici în orice fel de combinație [1]. Sau un același număr poate avea și exponenți și indici; aceasta ar însemna că termenul general se schimbă, dar puterile sale cresc sau descresc după o lege. Ca să nu ne pierdem în abstracțiuni vom face împreună calculele pentru cîteva exemple, dat fiind că pentru început operatorul sumă este greu de înțeles. Mai observăm însă și că „ordinul de sumare" este o simplificare inestimabilă a calculelor, deoarece ne permite să concentrăm într-o singură expresie formule care nu ar putea fi scrise altfel.

Să presupunem că este dată $\sum_{\nu=2}^{9} a^{\nu} b_{\nu+1}\, c_{\nu}^{\nu+2}$. Cum arată suma „dezvoltată"? Foarte simplu:

$$a^2 b_3 c_2^4 + a^3 b_4 c_3^5 + a^4 b_5 c_4^6 + a^5 b_6 c_5^7 + a^6 b_7 c_6^8 + a^7 b_8 c_7^9 + a^8 b_9 c_8^{10} + \\ + a^9 b_{10} c_9^{11}.$$

La „dezvoltare" trebuie să acordăm mare atenție. Dar atenția necesară și efortul nu sînt unul și același lucru, nici în matematică și nici în viață.

Să luăm un caz practic. Cum scriem o fracție cu patru zecimale în sistemul zecimal?

Evident, $0 \cdot g^0 + \sum_{\nu=1}^{4} a_{\nu} \cdot \frac{1}{g^{\nu}}$ sau $0 \cdot g^0 + \sum_{\nu=1}^{4} a_{\nu} g^{-\nu}$. În primul caz obținem

$$0 \cdot g^0 + a_1 \cdot \frac{1}{g^1} + a_2 \cdot \frac{1}{g^2} + a_3 \cdot \frac{1}{g^3} + a_4 \cdot \frac{1}{g^4},$$

iar în al doilea caz

$$0 \cdot g^0 + a_1 g^{-1} + a_2 g^{-2} + a_3 g^{-3} + a_4 g^{-4},$$

ceea ce evident înseamnă același lucru, și anume: 0 unități, a_1 zecimi, a_2 sutimi, a_3 miimi, a_4 zecimi de miimi.

Bineînțeles că putem determina și altfel „marginile domeniului de variație". Dacă am fi vrut să scriem o fracție zeci-

[1] Nu vom menționa alte posibilități.

mală cu n zecimale, unde n este un număr nedeterminat dar finit, ar fi trebuit să scriem

$$0 \cdot g^0 + \sum_{1}^{n} a_\nu g^{-\nu} = 0 \cdot g^0 + a_1 g^{-1} + a_2 g^{-2} + \dots + a_n g^{-n}.$$

Marginile pot fi indicate și mai general. De exemplu, pentru o fracție zecimală căreia i se adaugă continuu noi zecimale,

$$0 \cdot g^0 + \sum_{1}^{\infty} a_\nu g^{-\nu} = 0 \cdot g^0 + a_1 g^{-1} + a_2 g^{-2} + a_3 g^{-3} + \dots$$

În sfîrșit, vrem să încercăm să găsim cea mai generală formă a unui număr pozițional, folosind noul „ordin". Observăm că și de data aceasta, ca și în toate cazurile în care se pune o astfel de problemă, există mai multe soluții. Să alegem o expresie simplă, ușor de înțeles.

Să luăm numărul pozițional $= \sum_{\nu=+m}^{-\infty} a_\nu g^\nu$, unde $(+m)$ este arbitrar de mare. Dezvoltarea seriei este

$$a_m g^m + a_{m-1} g^{m-1} + \dots + a_2 g^2 + a_1 g^1 + a_0 g^0 + a_{-1} g^{-1} + \\ + a_{-2} g^{-2} + \dots$$

Ținînd seama de modul în care scriem numerele, marginile superioară și inferioară au fost scrise aparent contrar convenției: acest nou algoritm ne dă următorul rezultat:

1. În fiecare grup a ori g indicele și exponentul sînt egali.

2. Ambii variază discret, parcurgînd numerele întregi în ordine descrescătoare de la m pînă la zero, iar de la zero încolo variază ca numere negative, în ordinea crescătoare a valorii absolute, pînă la $-\infty$.

Nu vom merge prea departe, ci vom mai indica o metodă mult utilizată cu care putem scrie seriile alternante. Acestea sînt serii la care semnul se schimbă sistematic. Să încercăm să scriem celebra serie a lui Leibniz

$$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$$

pentru un număr oarecare, dar par de termeni, și anume folosind simbolul sumei. Concretizăm intenția noastră prin următoarea propoziție:

$$\text{valoarea aproximativă a lui } \frac{\pi}{4} = \sum_{\nu=1}^{2n} \frac{1}{2\nu-1}(-1)^{\nu+1}$$

și vrem să vedem cum funcționează algoritmul nostru:

primul termen: $\frac{1}{(2\cdot 1)-1}(-1)^{1+1} = \frac{1}{1}\cdot(-1)^2 = +1$;

al doilea termen: $\frac{1}{(2\cdot 2)-1}(-1)^{2+1} = \frac{1}{3}\cdot(-1)^3 = -\frac{1}{3}$;

al treilea termen: $\frac{1}{(2\cdot 3)-1}(-1)^{3+1} = \frac{1}{5}\cdot(-1)^4 = +\frac{1}{5}$;

al patrulea termen: $\frac{1}{(2\cdot 4)-1}(-1)^{4+1} = \frac{1}{7}\cdot(-1)^5 = -\frac{1}{7}$;

etc.

al $2n$-lea termen: $\frac{1}{(2\cdot 2n)-1}(-1)^{2n+1} = \frac{1}{4n-1}(-1)^{2n+1} =$

$$= -\frac{1}{4n-1}.$$

Obținem chiar seria lui Leibniz. Mai trebuie observat numai că expresia $2n$ reprezintă orice număr par. Oricare ar fi numărul întreg n (și considerăm numai numere întregi), înmulțindu-l cu 2 obținem un număr par. Dacă $n = 2$, atunci $2n = 4$. Dacă $n = 27$, atunci $2n = 54$ ș.a.m.d. De aceea, $2n + 1$, care apare ca exponent la al $2n$-lea termen, este număr impar. Și acest fapt convine algoritmului nostru, dat fiind că toți termenii „pari" au exponenți impari, de exemplu termenul al patrulea are exponentul 5. Semnul nostru magic a funcționat impecabil și am avut satisfacția să constatăm că am putut îngloba foarte simplu în algoritm condiția, aparent inexprimabilă, alternării sistematice a semnului termenilor, folosind proprietățile puterilor. Puterile numerelor negative dau și ele plus în cazul cînd sînt pare și minus în cazul cînd sînt impare [1]. Pentru a nu modifica nimic altceva în afară de semn, care trebuie să alterneze, am ales ca bază (—1). Un șiretlic foarte rafinat!

Cu toate că este foarte tentant să studiem în continuare acest algoritm, fapt pe care îl recomandăm călduros cititorilor, avînd în vedere că cele arătate nu reprezintă decît o mică parte a proprietăților sale, ne vom întoarce totuși la fracțiile sistematice, și anume vom recurge la exemple. Anunțăm de la început că lucrăm numai cu fracțiile „ireductibile"; acestea sînt fracții a căror valoare absolută este mai mică decît unu și la care numitorul și numărătorul sînt numere prime între ele, adică nu au divizor comun. Dintr-o dată am întîlnit mai multe noțiuni noi. Am vorbit de valoare „absolută" și am vrea să explicăm această expresie. Evident că afirmația „mai mic decît unu" are două sensuri. În primul rînd, ceea ce se înțelege de obicei prin aceasta: 1/2 este mai mic decît 1, 4/7 este mai mic decît 1. Orice fracție subunitară este mai mică decît unu, deoarece orice fracție mai mică decît unu a fost numită fracție subunitară. Expresia „mai mic decît unu" mai are însă și un alt sens în cazul numerelor negative. 0 este sigur mai mic decît 1. Dar mai mici decît 0 sînt (—1), (—2), (—3) etc. și, desigur, oricare alt număr negativ. Cine are datorii are cu siguranță averea mai mică decît cel care poate afirma că posedă măcar un țechin. În virtutea acestei interpretări nu pot să afirm că numai fracțiile subunitare sînt mai mici decît unu. De aceea, oricărui număr pot să îi atribui trei valori: valoarea sa ca număr pozitiv, valoarea sa ca număr negativ și, în sfîrșit, valoarea lui absolută, abstracție făcînd de semn, ca număr propriu-zis. Scriu atunci numărul încadrat de două bare verticale și spun: $|5|$ este în orice caz mai mare decît $|3|$, deși (-5) este cu siguranță mai mic decît $(+3)$, ba chiar decît (-3). Numărul „absolut" $|1/2|$ este desigur mai mic decît $|1|$; de asemenea, orice altă fracție subunitară este în valoare absolută mai mică decît valoarea absolută a lui unu.

După această digresiune putem reveni la problema noastră. Încercăm să găsim mai întîi valoarea lui 3/40. Prin împărțire

---

[1] Rezultă din regulile „combinării ordinelor", deoarece $(-a)^3 = (-a)\cdot(-a)\cdot(-a)$ și $(-a)^6 = (-a)\cdot(-a)\cdot(-a)\cdot(-a)\cdot(-a)\cdot(-a)$. Dacă minusul apare într-o înmulțire de un număr par de ori, rezultatul este plus, iar în caz contrar — minus.

găsim 0,075, adică am obținut o fracție zecimală finită. Tot așa, 4/125 scris ca fracție zecimală este 0,0312. Orice copil știe că $1/2 = 0{,}5$ și că $1/5 = 0{,}2$. Dacă urmăm convenția generală și notăm cu p numărătorul unei fracții subunitare „ireductibile" și cu q numitorul ei, atunci este adevărată următoarea regulă: orice asemenea fracție ordinară la care numitorul q se descompune ca produs al factorilor primi 2 și 5 ai bazei 10 este o fracție sistematică finită:

$$40 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 = 2^3 \cdot 5^1, \qquad 125 = 5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^3 \cdot 2^0*,$$

$$2 = 2^1 \cdot 5^0 \quad \text{și} \quad 5 = 5^1 \cdot 2^0.$$

Regula putea fi aplicată în toate exemplele date de noi. De aici putem deduce că, în general, putem spera sau, mai bine zis, putem fi siguri că două numere se împart exact numai atunci cînd, după simplificarea cu toți divizorii comuni în deîmpărțit și împărțitor, acesta din urmă este un produs de puteri ale lui 2 și 5, eventual de puteri nule ale lor. Dacă formăm numărul $2^{27} \cdot 5^{13}$ sau în general $2^n \cdot 5^m$, atunci orice alt număr rațional împărțit la acest $2^n \cdot 5^m$ trebuie să dea un cît finit, exprimat ca număr întreg sau fracție sistematică finită. Orice fracție de forma $\frac{p}{2^n \cdot 5^m}$ este o fracție sistematică neperiodică finită. În general, în orice sistem de numerație obținem o astfel de fracție sistematică finită dacă împărțim numărătorul p la un numitor format din puteri de numere prime ale divizorilor bazei. În sistemul cu baza doi, orice număr se împarte la orice putere a lui 2 și rezultatul este un număr cu un număr finit de cifre. În sistemul cu baza șase împărțitorul trebuie să fie format din puteri ale lui 2 și 3; în sistemul cu baza 12 tot din puteri ale lui 2 și 3, în sistemul cu baza treizeci din puteri ale lui 2, 3 și 5 ș.a.m.d. Repetăm: anumite forme de fracții ordinare, și anume cele indicate anterior, au ca rezultat fracții sistematice finite. În scris: $\sigma^n = 0 \cdot g^0 + \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu g^{-\nu}$, unde marginea superioară n este finită.

---

* Puterea zero a factorului care lipsește se scrie pentru a respecta regula sub forma cea mai generală.

Dacă în fracția p/q apare la numitor un număr format numai din numere prime care nu sînt divizori ai bazei (adică în sistemul cu baza zece din numerele 3 sau 7), atunci rezultatul împărțirii este o fracție sistematică pur periodică. O anumită cifră sau un grup de cifre se repetă la nesfîrșit. De exemplu, $(1/7) = 0,\overparen{142857}\,\overparen{142857}\,\overparen{142857}\ldots$, $(3/7) = 0,\overparen{428571}\,\overparen{428571}\ldots$, $(5/21) = 0,\overparen{238095}\,\overparen{238095}\ldots$, $(4/11) = 0,\overparen{36}\,\overparen{36}\,\overparen{36}\ldots$, $(2/3) = 0,\dot{6}\dot{6}\dot{6}\ldots$ etc. În general se obișnuiește să se pună puncte deasupra numărului care reprezintă perioada sau deasupra cifrelor care delimitează perioada. În acest ultim caz se pune uneori deasupra perioadei o linie orizontală. Astfel, $7,\dot{3}$ înseamnă de fapt 7,3333333 etc., $0,\dot{5}43218\dot{9}$ sau $0,\overline{5432189}$ este de fapt $0,\overparen{5432189}\,\overparen{5432189}$ etc.

Ca ultimă posibilitate mai menționăm și cazul în care numitorul (împărțitorul) conține nu numai puteri ale divizorilor bazei, ci și puteri de numere prime între ele și prime cu baza sistemului. De exemplu, numărul 6 este un produs al puterilor lui 2 și 3 și în cazul sistemului cu baza zece 3 nu are divizor comun cu baza. Ca fracție sistematică 5/6 este 0,83333 ..., adică un tip de fracție zecimală pe care nu l-am mai întîlnit încă și care se numește fracție periodică mixtă. Întîi apare cifra 8 și abia apoi perioada 3. Situația este încă simplă. Se poate întîmpla însă ca atît grupul dinaintea perioadei cît și perioada însăși să fie formate din mai multe cifre; de exemplu, pentru fracția $5/22 = 0,2\overparen{27}\,\overparen{27}\,\overparen{27}\ldots$, în grupa dinaintea perioadei apare o singură cifră, dar perioada însăși este un număr cu două cifre. $3/26 = 0,1\overparen{153846}\,\overparen{153846}$; grupa dinaintea perioadei apare tot cu o singură cifră, dar perioada are șase cifre. În sfîrșit, pentru $0,26\overline{387}$, adică fracția ordinară (2929/11 100), grupul anteperiodic are două cifre.

Acestea sînt unicele posibilități existente de formare a divizorului sau numitorului. Deși nu cunoaștem temeinic dificila teorie a fracțiilor sistematice, putem totuși afirma că transformarea fracțiilor ordinare în fracții sistematice (deci, împărțirea a două numere) poate avea ca rezultat sau o fracție sistematică finită, sau o fracție sistematică pur periodică, sau o fracție sistematică periodică mixtă.

Un număr irațional este o fracție sistematică infinită construită la întîmplare, nu conform vreuneia din regulile descrise mai înainte pentru fracțiile periodice sau periodice mixte, de aceea nu poate fi gîndit ca rezultat al împărțirii a două numere. El poate fi obținut prin extragerea de rădăcină (ridicări la puteri cu exponenți fracționari) sau prin sumări de serii infinite descrescătoare de puteri negative sau din alte serii de fracții descrescătoare (de exemplu, cu factoriale la numitor). Sîntem deci siguri că orice fracție sau orice împărțire de numere raționale este tot un număr rațional. Prin urmare, $p/q = r$ (număr rațional), oricare ar fi p și q întregi, fracționare, pozitive sau negative.

Dacă lucrurile stau așa, atunci și calea inversă trebuie să fie posibilă, și anume transformarea oricărei fracții sistematice finite sau pur periodice infinite, sau periodice mixte infinite, într-o fracție ordinară ireductibilă de forma p/q. O fracție sistematică infinită cu structură neperiodică sau fără nici un fel de lege de formare nu poate fi niciodată transformată într-o fracție de tip p/q, dat fiind că fracțiile neperiodice infinite descriu numere iraționale.

Totodată, această „transformare inversă“ este o verificare importantă a afirmațiilor noastre de pînă acum. Numai că, deocamdată, nu ne putem da încă seama cum ar fi posibil un calcul cu asemenea fracții infinite, chiar dacă sînt periodice. Este adevărat, știm că $1/3$ este egal cu $0.\dot{3}$ (periodică infinită), dar dacă l-am fi avut în fața ochilor pe 0,333333 ... n-am fi știut să-l transformăm în fracție ordinară fără raționamente lungi și dificile.

Cel mai simplu caz este cel al transformării unei fracții zecimale finite în fracție ordinară; de exemplu, 0,225. Este suficient să îl citim și apoi să îl scriem ca fracție ordinară și obținem rezultatul, adică $0{,}225 = 225/1\,000$, ceea ce simplificat cu 25 dă „fracția ireductibilă“ $9/40$, care nu poate fi redusă mai departe. Dacă vrem să formulăm această regulă riguros științific, punem

$$\sigma_m = \frac{\sum\limits_{\mu=1}^{m} c_\mu \, g^{m-\mu}}{g^m}$$

Aici μ (litera grecească mū) este „numărul variabil“, c este coeficientul respectiv (adică la noi 2, 2, 5), iar g este numărul de bază al sistemului (în cazul nostru 10); m reprezintă numărul de cifre situate după virgulă (la noi $m=3$). Trebuie deci să înlocuim

$$\sigma_m = \frac{2 \cdot 10^{3-1} + 2 \cdot 10^{3-2} + 5 \cdot 10^{3-3}}{10^3} = \frac{2 \cdot 100 + 2 \cdot 10 + 5 \cdot 1}{1\,000} =$$

$$= \frac{225}{1\,000},$$

adică exact ceea ce ne-a dictat rațiunea. Formula are însă avantajul inestimabil de a fi valabilă pentru orice sistem pozițional și de a dezvălui structura numărului respectiv.

Pentru transformarea inversă a fracțiilor periodice în fracții ordinare folosim formula [1]

$$\sigma_r = \frac{\sum_{\rho=1}^{r} c_\rho\, g^{r-\rho}}{g^{r-1}},$$

de unde se vede că perioada trebuie scrisă ca număr întreg la numărător, în timp ce la numitor trebuie pus un număr compus din tot atîția 9 cîte cifre sînt la numărător. Această explicație este evident valabilă numai pentru sistemul cu baza zece.

Dacă ar trebui să-l transformăm pe 0,3 într-o fracție ordinară vom scrie imediat 3/9 și rezultatul este 1/3. Tot așa, la 0,6 scriem 6/9 și deci 2/3. Fracția periodică 0,076923 ar trebui să fie scrisă ca 76923/999999, ceea ce, după simplificări, este egal cu 1/13. Trebuie să fim prudenți cu această regulă și să o verificăm cu formula exactă.

De exemplu, dacă perioada începe cu zero sau cu mai multe zero-uri, atunci aceștia nu trebuie transcriși la numărător, căci nici un număr întreg nu are voie să înceapă cu zero. Aceste zero-uri trebuie însă numărate și luate în considerație la scrierea numitorului. În cazul de mai înainte, dat fiind că perioada era formată din șase cifre (inclusiv zero),

[1] Deducerea ei este dificilă și nu folosește scopurilor noastre.

am scris la numitor de șase ori cifra nouă, deși numărătorul, din cauza lui zero, era un număr cu cinci cifre.

Transformarea fracțiilor periodice mixte în fracții ordinare este o combinație a metodelor folosite pînă acum. Dacă am vrea să facem uz de regula enunțată pentru fracțiile pur periodice ar trebui să spunem: „Scrie la numărător toate cifrele de după virgulă (atît partea neperiodică cît și perioada) ca număr întreg. Scade din acest număr întreg numărul întreg format de cifrele care preced perioada (dar de după virgulă). La numitor scrie de tot atîtea ori cifra nouă cîte cifre are perioada. După acești nouă scrie tot atîția zero cîte cifre sînt cuprinse între virgulă și perioadă !“

Dacă ar trebui să transformăm după această regulă pe $0{,}2\overbrace{27}\overbrace{27}\overbrace{27}\ldots$, atunci ar trebui să scriem

$$\sigma(m,r) = \frac{227-2}{990} = \frac{225}{990} = \frac{45}{198} = \frac{5}{22}.$$

Constatăm că prin aceste transformări inverse obținem, de regulă, fracții reductibile pe care trebuie să le aducem la forma p/q (unde p și q sînt numere prime între ele). Această ultimă operație este foarte simplă, orice elev de școală elementară fiind în stare să o facă.

Evident că și pentru acest al treilea și ultim caz de „transformare inversă“ există o formulă generală elegantă, care se exprimă astfel:

$$\sigma(m,r) = \frac{\sum\limits_{\nu=1}^{m+r} c_\nu\, g^{m+r-\nu} - \sum\limits_{\mu=1}^{m} c_\mu\, g^{m-\mu}}{g^m\,(g^r-1)},$$

unde m este numărul cifrelor părții neperiodice, r este numărul cifrelor din perioadă, g este baza sistemului de numerație, c coeficientul (prevăzut cu indice) puterii lui g; ν este indicele de sumare în prima sumă, μ are aceeași semnificație în cea de-a doua sumă, iar limitele de sumare sînt indicate de numerele scrise deasupra și dedesubtul semnului sumă.

Stăpînim acum teoria fracţiilor sistematice: putem scrie, în orice sistem de numeraţie, orice fracţie sistematică şi putem să o transformăm în fracţie ordinară ireductibilă.

Dacă scriem în sistemul cu baza zece $0{,}23\dot{4}7\dot{1}$ ..., atunci, conform ultimei noastre formule aparent monstruoase[1], obţinem

$$\sigma\,(2{,}3) = \frac{(2\cdot 10^{5-1}+3\cdot 10^{5-2}+4\cdot 10^{5-3}+7\cdot 10^{5-4}+1\cdot 10^{5-5}) - (2\cdot 10^{2-1}+3\cdot 10^{2-2})}{10^2(10^3-1)} = \frac{23\,471-23}{100\cdot 999} = \frac{23\,471-23}{99\,900} = \frac{23\,448}{99\,900} = \frac{1\,954}{8\,325}.$$

Pe acest exemplu se poate constata că o fracţie periodică mixtă, simplă în aparenţă, poate să corespundă de fapt unei fracţii ordinare destul de complicate.

Ne putem mîndri cu cunoştinţele noastre. Nu ne mai sînt străine teoriile numerelor întregi, fracţionare şi iraţionale. Ştim ce este valoarea absolută a unui număr, ce sînt numerele negative şi cele pozitive. Toate acestea fiind valabile pentru orice sistem de numeraţie. Mai mult decît atît: am avut de-a face cu numere în sens general, cu constante şi cu numere necunoscute. Dat fiind că am studiat şi algoritmul ecuaţiei cu o necunoscută şi al aşa-numitei ecuaţii diofantice, sîntem suficient de pregătiţi pentru a aborda unul dintre cele mai importante capitole ale matematicii — teoria funcţiilor. Totodată pătrundem cu curaj şi mîndrie în domeniul matematicilor superioare, în care ne vor călăuzi ideile lui Leibniz. El a fost cel care a înţeles — în al nouăsprezecelea an al secolului al XVII-lea — noţiunea de funcţie în toată profunzimea şi generalitatea ei şi care i-a dat numele. Şi îl aprobăm pe Oswald Spengler, care numeşte funcţia „număr faustian", deoarece chiar latura „faustiană" a matematicii superioare este cea care o face atît de variată, bogată în surprize şi antrenantă şi, în ultimă instanţă, atît de uşoară.

---

[1] Vezi regula precedentă!

Anunțăm de pe acum, pe deplin conștienți de faptul că mai tîrziu va trebui să demonstrăm concret afirmația de aici: tot ce va urma în cartea de față este mai ușor decît tot ce a fost pînă acum! De acum încolo vom vorbi mult, vom lămuri multe, vom discuta multe împreună. Nu ne vom mai frămînta mintea cu subtilități, nu ne vom mai chinui cu calcule, ci ne vom delecta cu surprizele pe care ni le rezervă studiul matematicilor superioare, cu noțiunile ei, cu paradoxurile ei bizare și rezolvările lor surprinzătoare.

FUNCȚII (DERIVATA ALGEBRICĂ)

Fie dată ecuația diofantică simplă

$$3x - y = (-5).$$

Dacă rezolvăm această ecuație după metoda lui Euler pentru a obține soluții în numere întregi, găsim

$$x = \frac{y-5}{3} \quad \text{și} \quad \frac{y-5}{3} = n, \text{ deci } x = n.$$

Pentru y obținem $3n + 5$. Lăsăm pe n să parcurgă numerele naturale de la 1 pînă la o valoare oarecare:

$$n = 1, x = 1, y = 8; \text{ proba: } 3 - 8 = -5,$$

$$n = 2, x = 2, y = 11; \text{ proba: } 6 - 11 = -5,$$

$$n = 3, x = 3, y = 14; \text{ proba: } 9 - 14 = -5,$$

$$n = 4, x = 4, y = 17; \text{ proba: } 12 - 17 = -5,$$

$$n = 5, x = 5, y = 20; \text{ proba: } 15 - 20 = -5$$

etc. pînă la infinit.

Prin metoda lui Euler am obținut un șir infinit de soluții întregi și pozitive. Tot așa puteam obține și un șir infinit de soluții întregi negative, căci

$$n = -1, x = -1, y = 2; \text{ proba: } -3 - (+2) = -5,$$

$$n = -2, x = -2, y = -1; \text{ proba: } -6 - (-1) = -5,$$

$$n = -3, x = -3, y = -4; \text{ proba: } -9 - (-4) = -5 \text{ etc.}$$

Se vede că începînd de la $n = -2$ toate perechile de valori pentru cele două necunoscute sînt negative, dat fiind că $x = n$ și deci x este negativ atunci cînd n este negativ. Dar și y devine negativ și rămîne negativ atunci cînd n devine mai mic decît (-1), deoarece constanta pozitivă din $y =$

$= 3n + 5$ este 5 și pentru $3 \cdot (-2)$ ecuația devine $y = (-6) + 5$, adică y este negativ; cu atît mai mult pentru $n = (-3)$ sau $y = (-9) + 5$ etc.

Am găsit o infinitate dublă de soluții posibile, și anume o infinitate de soluții întregi și pozitive și o infinitate de soluții întregi negative. Acestor soluții li se adaugă cazurile particulare pentru $n = -1$, cînd $x = -1$ și $y = +2$, și perechea obținută pentru $n = 0$, cînd $x = 0$ și $y = 5$. Există deci $(2 \times \infty) + 2$ soluții în numere întregi.

Vrem să transformăm întrucîtva ecuația diofantică, fără a o modifica în fond, și anume în loc de $3x - y = -5$ vom scrie

$$y = 3x + 5;$$

putem face aceasta fără nici o ezitare. Să admitem acum că nu ne-ar interesa numai soluțiile în numere întregi, ci și soluțiile exprimate prin numere fracționare. În continuare precizăm că întîi înlocuim valoarea lui x și abia apoi căutăm pe y corespunzător. În cazul nostru, calea aceasta este mai simplă — nu procedăm așa din principiu — deoarece y are coeficientul 1 și astfel evităm împărțirile. Să căutăm cîteva perechi de valori ca numere fracționare:

$$x = \frac{1}{2},\ y = 3 \cdot \frac{1}{2} + 5 = \frac{3 + 10}{2} = \frac{13}{2},$$

$$x = \frac{1}{3},\ y = 3 \cdot \frac{1}{3} + 5 = \frac{3 + 15}{3} = \frac{18}{3} = 6,$$

$$x = \frac{2}{7},\ y = 3 \cdot \frac{2}{7} + 5 = \frac{6 + 35}{7} = \frac{41}{7} \text{ etc.}$$

Bineînțeles că putem obține pentru y și valori întregi, ca de exemplu în cazul $x = 1/3$. Totuși vor fi preponderente cazurile în care pentru x fracționar și y devine fracționar. Pentru ecuația noastră cu două necunoscute, neconsiderată ca ecuație diofantică (la care căutăm soluții x și y în numere întregi) obținem o infinitate de soluții fracționare. „Puterea“ acestei noi mulțimi de soluții poate fi apreciată din faptul că, între 0 și 1, x poate lua o infinitate de valori. Tot așa și pentru intervalele cuprinse între 1 și 2, între 2 și 3 etc. La acestea se adaugă posibilitățile de a alege pe x ca fracție negativă, de exemplu $x = - 10/3$ etc. În cazul de față constatăm, la o privire mai atentă, că avem de-a face cu următoarele mulțimi infinite de soluții: toate fracțiile pozitive considerate ca valori posibile pentru x dau lui y valori fracționare (în marea majoritate) pozitive. Dacă punem $x = 0$, ceea ce poate fi interpretat ca fracția „zero împărțit la un număr oarecare", obținem $y = 5$. Dacă dăm lui x valori fracționare negative, atunci mulțimea infinită de fracții negative de la $- 1/\infty$ pînă la $x = - 5/3$ dă lui y valori pozitive. Pentru $x = - 5/3$, $y = 0$. Pentru toate fracțiile negative mai mici decît $-5/3$ (adică situate la stînga față de $-5/3$ pe axa numerelor), de exemplu, pentru $-6/3$, y devine negativ.

Am determinat pentru această ecuație nedeterminată o infinitate dublă de soluții întregi și o infinitate multiplă de soluții fracționare; în plus, soluția particulară pentru $x = - 5/3$.

Amintindu-ne de generalizările noțiunii de număr ne-ar putea veni ideea să dăm lui x una sau toate valorile iraționale posibile între două fracții oarecare; de exemplu, $\sqrt[4]{25}$ sau ceva asemănător. Este absolut clar că în acest caz și y devine irațional. Dacă am fi reprezentat pe x ca o fracție zecimală infinită și am fi adunat constanta, atunci y ar fi fost suma unei fracții zecimale neperiodice și a unei constante. Rezultatul unei asemenea adunări este evident tot o fracție zecimală neperiodică, adică tot un număr irațional.

Avem în față o infinitate de soluții ale ecuației

$$y = 3x + 5,$$

atît pentru partea pozitivă a axei reale cît și pentru cea negativă. Printre acestea există cîteva cazuri particulare ciudate și în plus o infinitate de perechi de valori pentru x și y, la care x și y au semne opuse. Repetînd încă o dată, putem da lui x orice valoare, pozitivă sau negativă, întreagă, fracționară sau irațională; pentru fiecare valoare a lui x obținem un y corespunzător. Aceste două valori corespunzătoare ale lui x și y se numesc „perechi de valori".

Acest algoritm extraordinar de asociere a valorilor (y, x), ale cărui posibilități le bănuim numai, dar nu le sesizăm dimpreună cu toate consecințele lui, vom încerca să-l lămurim

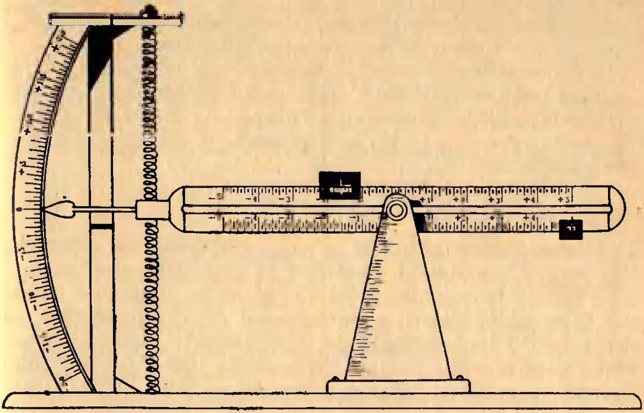


FIG. 13

cu un exemplu: vom construi mintal un mecanism simplu și ne vom imagina modul lui de funcționare.

Instrumentul arată astfel:

Un fel de braț de balanță este prevăzut la unul din capete cu un indicator, care se poate deplasa de-a lungul unei scale gradate, semicirculare. Brațul este și el gradat și este format din două șine; pe fiecare din aceste șine poate aluneca o greutate; cele două greutăți pot fi și schimbate. Conform unor legi simple de mecanică, efectul unei greutăți depinde nu numai de greutatea în sine, ci și de poziția ocupată de ea pe brațul pîrghiei. Un kilogram situat în poziția 5 are un efect de cinci ori mai mare decît un kilogram situat în poziția 1. După cum se știe, acesta este principiul balanței zecimale. Acum afirmăm că acul indicator ne arată pe scala gradată „încărcarea" balanței noastre „variabile". Dacă balanța este în echilibru, indicatorul trebuie să fie la zero. Acul indicator este însă fixat atît sus cît și jos prin resorturi construite în așa fel încît să reacționeze puternic la tracțiune, însă să opună o rezistență neglijabilă la compresiune (teoretic nulă). În sfîrșit, șina inferioară a brațului este utilizată pentru instalarea „constantei“, iar șina superioară pentru instalarea „x“-ului. În toate cazurile unitatea este kilogramul.

Putem să utilizăm această mașină pentru scopurile noastre. În fond vrem să clarificăm situația sub forma unui „mod de întrebuințare“. Să presupunem că avem la dispoziție o cutie cu greutăți; extragem din ea o greutate de un kilogram pentru ecuația

$$y = 3x + 5$$

și plasăm această greutate pe șina inferioară, pe care scrie „constanta“; deplasăm greutatea pe șină pînă cînd semnul de pe greutate coincide cu linia care indică diviziunea numărul 5 pe scală. Pentru a realiza acest lucru este necesar ca greutatea să fie prevăzută cu o „fereastră“. Asemenea greutăți există la orice balanță zecimală la farmacie. Dat fiind că este vorba de o constantă, o mărime invariabilă, fixăm această greutate pentru toate operațiile următoare, bineînțeles atîta vreme cît studiem ecuația

$$y = 3x + 5,$$

în care constanta este egală cu 5. În sistemul balanței noastre acest kilogram va avea un efect de cinci ori mai mare decît al unei greutăți egale, situată însă în dreptul diviziunii numărul 1. Dacă nu am mai încărca balanța, indicatorul ar trebui să urce pe scala semicirculară și să se oprească la diviziunea 5, deoarece presupunem că resorturile au fost calculate în modul corespunzător. Acuma trebuie să-l introducem pe „x“. Dat fiind că x nu apare direct, ci înmulțit cu coeficientul 3, alegem o greutate de 3 kilograme, deoarece 1 kilogram concretizează pentru noi numărul 1. Oare unde trebuie plasată greutatea? Sîntem în mare încurcătură și trebuie să apelăm la raționamentul matematic. Acest raționament ne arată că trebuie să dăm diferite valori lui x, să îl înlocuim. De aici deducem că x trebuie ales în așa fel încît „balanța“ să fie în echilibru, adică în așa fel încît indicatorul să stea la zero pentru y. Dacă facem încercări, fără calcule, constatăm că ajungem la rezultatul dorit dacă plasăm greutatea de 3 kg în dreptul semnului $-5/3$ sau $-1\ 2/3$ pe șina superioară. De aici se deduce că încărcarea brațului stîng al balanței (pe care îl vom numi brațul negativ) este de 3 kg în poziția $(-5/3)$, iar încărcarea brațului drept (pozitiv) este de 1 kg în poziția $+5$. Conform legilor mecanicii, momentul se calculează ca produsul dintre greutate și distanța pînă la punctul de sprijin al brațului, așa încît într-unul din cazuri momentul este $3 \cdot (-5/3) = -5$, iar în al doilea caz, $1 \cdot 5 = 5$; așadar, valoarea absolută a momentului este aceeași în ambele cazuri. Pentru balanța noastră la care unul din brațe este negativ iar celălalt pozitiv echilibrul se realizează cînd momentul are aceeași valoare absolută pentru ambele brațe, însă semne opuse; deducem din rezultatul nostru o confirmare a faptului că în ecuația

$$y = 3x + 5$$

x trebuie ales egal cu $(-5/3)$ pentru a obține pentru y valoarea zero. Am mai cerut o dată ca constanta să nu fie modificată. Am fi putut să o reprezentăm pe balanță și într-un alt mod, mai elegant. Observăm că ecuația $y = 3x + 5$ poate fi scrisă și sub forma

$$y = 3x^1 + 5x^0,$$

deoarece puterea 0 a oricărui număr este totdeauna egală cu 1, deci această scriere nu modifică nimic în ecuație; notăm atunci cu x^1 șina de sus și cu x^0 pe cea de jos și interpretăm pe 5 ca pe coeficientul lui x^0. În acest caz avem voie să alegem o greutate de 5 kg și să o fixăm în dreptul diviziunii 1 a șinei de jos; greutatea rămîne mereu aici, deoarece oricare ar fi valoarea lui x, x^0 este totdeauna 1; așadar, întotdeauna 5 de înmulțit cu distanța 1 dă ca rezultat 5. Vom mai reveni asupra acestor considerații.

Ne vom mulțumi cu prima versiune în care am reprezentat „constanta" printr-o greutate de 1 kg fixată în dreptul diviziunii numărul 5, pe șina de jos; nu ne va mai interesa această „constantă", deoarece pentru ecuația noastră ea a devenit o parte imobilă și fixă a balanței.

Vom lucra însă tot timpul cu cea de-a doua greutate. Diviziunea de pe șină ne dă direct valoarea lui x, de aceea sîntem liberi să deplasăm greutatea de la un capăt la altul al șinei, de la -5 la $+5$, să-i „schimbăm" poziția. Schimbarea poziției înseamnă însă după legile pîrghiei, schimbarea momentului, ceea ce la rîndul său înseamnă schimbarea unei mărimi.

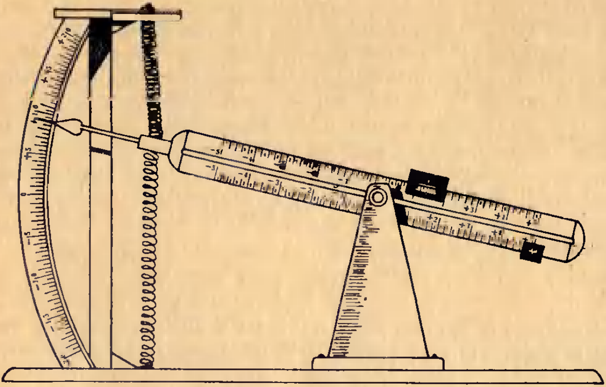


FIG. 14

Să facem o experiență. Să deplasăm, de exemplu, greutatea de 3 kg la diviziunea $x = 1\ 2/5 = 7/5$. Brațul drept al balanței se va înclina, iar indicatorul (care dă pe y) se va deplasa pe scală. După cîteva oscilații se va stabili la $9\ 1/5$. Într-adevăr, din ecuație rezultă că pentru $x = 7/5$, y este într-adevăr egal cu $9\ 1/5$, deoarece $3 \cdot 7/5 + 5 = (21 + +25)/5 = 46/5 = 9\ 1/5$ (vezi fig. 14).

Dacă „variem arbitrar" pe x, a „variat obligatoriu" și y.

Am ajuns destul de departe pentru a putea înțelege originea noțiunii de „funcție" din buna „funcționare" a balanței noastre [1].

Afirmăm, deocamdată neprecis, că avem de-a face cu o funcție atunci cînd variației „arbitrare" a unei necunoscute îi corespunde o variație forțată a unei alte necunoscute. Dacă în loc de necunoscută variabilă vom spune pur și simplu „variabilă", atunci putem afirma că în cazul unei funcții orice determinare a mărimii „variabilei" determină o anumită valoare pentru mărimea y. Legea după care se combină aceste valori se numește funcție. Mașina noastră ne-a dat pînă acum auto-

[1] Această deducere literală a noțiunii de funcție nu este valabilă decît pentru a ne ajuta în înțelegere.

mai rezultatul, deoarece a funcționat conform legii pe baza căreia fusese construită. „Legea" era însă ecuația

$$y = 3x + 5.$$

În lumina celor de mai înainte, această „ecuație" se numește funcție. După notația introdusă de Leibniz, funcția se notează în general sub forma $y = f(x)$ și se citește: y este funcție de x, ceea ce înseamnă de fapt că y depinde sistematic de o mărime.

Acum voi săvîrși un act revoluționar și îndrăzneț, pe care îl justifică numai calitatea mea de poet. Afirm că terminologia științifică generală prin care variabila arbitrară a fost denumită „independentă", iar cealaltă a fost numită „dependentă", este nesatisfăcătoare din punct de vedere practic, psihologic și pedagogic; înțelegeți afirmația mea dacă vă gîndiți cît de mult este atenuat contrastul între negație și afirmație dacă formăm negația prin adăugarea prefixului „ne", în loc să folosim o expresie adecvată. În limba germană prefixul „un"[1] înseamnă de obicei nu o negare precisă, ci de multe ori o întărire mascată a pozitivului; să ne gîndim la construcții de forma *Untier* și *Unsumme*[2]. Abstracție făcînd de aceste excepții, observăm desigur un contrast mai mare între bucurie (*Lust*) și durere (*Schmerz*) decît între bucurie și nebucurie. Această ștergere a contrastului se amplifică în cazul folosirii unor adjective ca substantive, ca de exemplu: variabilă dependentă și variabilă independentă. Ceea ce este mai grav este că prin asociație de idei cineva ar putea crede că într-unul din cazuri alegerea valorilor variabilei ar depinde numai de voința mea, pe cînd în celălalt caz ar fi independentă de voința mea. Concluzia ar fi complet greșită. Nu vrem să stîrnim nedumerire, vrem însă să justificăm de ce ne vom abate în cuprinsul acestei cărți de la terminologia științifică uzuală și vom vorbi de variabila „arbitrară" și de cea „dependentă". Încă o dată: în funcția

$$y = 3x + 5, \text{ în general } y = f(x),$$

---

[1] Corespondentul lui „ne". — *N.T.*

[2] *Untier* ar echivala cu monstru, mai mult decît o fiară; *Unsumme* — sumă enormă, mai presus de sumă. — *N.T.*

x este variabila „arbitrară", iar y este variabila dependentă; x și y se numesc „variabile".

Am cîștigat suficiente cunoștințe de terminologie a teoriei funcțiilor și acum apelăm iarăși la balanță, la mașina pentru calculul funcției pentru a face cîteva experiențe. Vom deplasa cu grijă greutatea de 3 kg pe scala x și vom observa ce se întîmplă cu acul indicator pe scala y; acul s-a oprit undeva, între două diviziuni. Dar și greutatea (x-ul) are o poziție intermediară pe șina sa.

Vom mai face o experiență folosind aceeași balanță. Să presupunem că șina reprezintă axa numerelor. După cum știm, axa numerelor se compune continuu din toate numerele existente, întregi, fracționare și iraționale; orice deplasare a greutății înseamnă de fapt că x ia toate valorile cuprinse între limitele între care s-a făcut deplasarea, adică valori egale pe rînd cu toate numerele întregi, raționale și iraționale cuprinse între aceste limite.

Noțiunea de „continuitate" are un rol uriaș în teoria funcțiilor, datorită descoperirilor marelui matematician Weierstrass [1]. Ne mulțumim însă deocamdată numai cu această aluzie la continuitate; mai tîrziu o vom lămuri mai bine pe cale geometrică.

Vom ataca o anumită problemă, bine determinată, înarmați cu cunoștințele noastre actuale asupra teoriei funcțiilor; sensul și scopul acestor probleme ne vor rămîne pentru moment ascunse. Dat fiind că este vorba însă de o problemă extrem de simplă de algebră, nu avem nici un motiv să o ocolim.

Ne întrebăm ce se întîmplă cu indicatorul y atunci cînd x crește cu o anumită cantitate, într-un punct dat. Probabil că și indicatorul se va deplasa cu o anumită cantitate. Am mai spus mai de mult că un raport nu depinde de mărimile care apar în raport, așadar vom lua ca măsură a variației raportul dintre creșterea lui x și creșterea forțată a lui y. Dacă vom exprima într-o formă generală această creștere a lui x într-un punct dat, evident că vom obține și creșterea corespunzătoare a lui y tot pentru un „anumit punct". Am putea să ne închipuim, de exemplu, că la un moment dat scalele de pe șină și de pe semicerc sînt acoperite sau ilizibile.

---

[1] În legătură cu noțiunea riguroasă de continuitate nu trebuie uitat numele lui A. Cauchy. — *N.T.*

În concluzie, „un x oarecare" sau „x" — ceea ce pentru noi este același lucru, pentru că x rămîne neprecizat — crește cu cantitatea Δx. Triunghiul Δ este litera mare grecească D (delta). Orice copil cunoaște această literă ca simbol al deltei Nilului. x este scris lîngă litera delta pentru a arăta că este vorba de o creștere a lui x. Această creștere a lui x „induce" o creștere silită a lui y (o deplasare a acului indicator) pe scala y. Această creștere o vom numi Δy. Subînțelegem că funcția noastră este „introdusă" în mașină; pentru aceasta este necesar ca o greutate de 1 kg să fie situată la diviziunea 5 pe șina de jos, iar o greutate de 3 kg undeva pe șina de sus.

Exprimîndu-ne pur algebric, întrebarea devine: care este raportul dintre Δy și Δx în ipoteza că balanța funcționează conform funcției noastre? Sau care este Δy care rezultă obligatoriu dintr-o variație Δx?

Pînă la urmă vom rezolva problema chiar fără să ne batem mult capul. Dacă vrem să înglobăm „creșterile" în funcția noastră trebuie să scriem

$$(y+\Delta y) = 3(x+\Delta x) + 5.$$

În urma creșterii, x s-a transformat în $x + \Delta x$, iar y obligatoriu în $y + \Delta y$.

Repetăm cu riscul de a ne plictisi: nu știm ce valoare are x. Nu știm nici măcar ce valoare are Δx. Cerem numai ca Δx să fie finit. În particular, Δx ar putea să aibă orice valoare. Îl vom alege mic pentru a ajunge mai ușor la rezultat. Deci,

$$(y+\Delta y) = 3(x+\Delta x) + 5.$$

Căutăm Δy: Δx sau $\Delta y/\Delta x$, sau raportul dintre Δy și Δx. Dacă efectuăm înmulțirile pentru a scăpa de paranteze obținem

$$y + \Delta y = 3x + 3\ \Delta x + 5.$$

Vom aplica o metodă învățată tot de la Leibniz, dar altfel formulată. Ne amintim că $y = 3x + 5$; deci putem scădea din ambii membri ai ecuației de sus această mărime, fără a distruge egalitatea. Primul nostru exemplu cu cîntarul și cu merele și decagramele ne-a convins de corectitudinea acestor calcule. Atunci,

$$
\begin{array}{rl}
y + \Delta y & = 3x + 3\Delta x + 5 \\
- y & = - 3x \qquad\quad - 5 \\
\hline
\Delta y & = 3\Delta x
\end{array}
$$

Dacă $\Delta y = 3\Delta x$, atunci desigur

$$\Delta y : \Delta x = 3\,\Delta x : \Delta x$$

sau

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 3$$

sau ca proporție

$$\Delta y : \Delta x = 3 : 1.$$

Am rezolvat problema. Mai știm și din teorema referitoare la independența rapoartelor de mărimile care apar în raport, că putem considera pe Δy și Δx oricît de mici și oricît de aproape de zero, care este limita lor inferioară. O asemenea creștere infinit mică a lui x nu o mai numim Δx ci $\mathrm{d}x$, iar Δy-ul corespunzător îl numim $\mathrm{d}y$, așa încît scriem

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 3 \quad \text{sau} \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{3}{1}.$$

În sfîrșit putem vorbi explicit: am calculat fără nici un fel de dificultăți mult temutul „cît diferențial" sau „derivata". Afirmăm: „cîtul diferențial" al funcției $y = 3x + 5$ are valoarea 3, sau $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x = 3$, sau $y' = 3$; y' este chiar $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ sau „cîtul diferențial de ordinul întîi" al unei funcții $y = f(x)$, adică o funcție în care y depinde de o anumită expresie în x.

Din definiția noastră anterioară constatăm că y' are aceeași valoare peste tot. Oriunde am varia pe x cu mărimea infinit mică $\mathrm{d}x$, raportul dintre creșterea corespunzătoare $\mathrm{d}y$ a lui y și $\mathrm{d}x$ este 3: 1 sau 3. „Constanta" nu a jucat nici un rol în această problemă. Dacă am fi făcut abstracție de ea, atunci

$$
\begin{array}{rl}
 & y = 3x \\
 & y + \Delta y = 3(x + \Delta x) \\
 & y + \Delta y = 3x + 3\Delta x \\
\text{de unde} & \underline{-y \qquad = -3x} \qquad \text{scăzut} \\
 & \Delta y = 3\Delta x \\
 & \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = 3 \text{ și } \dfrac{dy}{dx} = 3.
\end{array}
$$

Vom vedea mai tîrziu de ce se întîmplă așa. Putem înțelege însă dacă studiem balanța noastră. Echilibrul este perturbat [1] exclusiv prin deplasarea greutății de 3 kg care-l reprezintă pe x, indiferent de punctul în care se află greutatea. „Cîtul diferențial" este același pentru toate valorile lui x pentru funcția dată.

Să ne folosim mai departe de acest nou algoritm al calculului diferențial. O vom face cu îndrăzneală, încercînd să analizăm o nouă funcție

$$y = 2x^2 + 7,$$

funcția pătratică. Renunțăm acum la balanță și studiem numai ecuația. Conform schemei noastre,

$$y + \Delta y = 2(x+\Delta x)^2 + 7.$$

Nu putem calcula direct $(x+\Delta x)^2$; de aceea îl scriem ca $(x+\Delta x)(x+\Delta x)$ și obținem $[x^2+x\cdot\Delta x+x\cdot\Delta x+(\Delta x)^2]$, așadar $x^2 + 2x\cdot\Delta x + (\Delta x)^2$.

Facem artificiul

$$
\begin{array}{l}
y + \Delta y = 2x^2 + 4x\Delta x + 2(\Delta x)^2 + 7 \\
\underline{-y \qquad\quad = -2x^2 \qquad\qquad\qquad\qquad\quad -7} \\
\qquad \Delta y = 4x\Delta x + 2(\Delta x)^2.
\end{array}
$$

Rezultatul acesta nu ne permite să calculăm pe $\Delta y/\Delta x$ cu metoda de pînă acum. Să raționăm, să calculăm [2] puțin.

---

[1] Dacă facem abstracție de „inerția"celor 5 kg!
[2] De aici provine denumirea „calcul diferențial".

În definitiv vrem să obținem raportul diferențialelor dy/dx, nu pe cel al așa-numitelor „diferențe" $\Delta y/\Delta x$.

În acest caz, însă dx este un infinit mic. Dacă ne închipuim un astfel de număr extrem de mic ca o fracție $1/q$, unde evident q trebuie să fie enorm, atunci prin ridicare la putere, de exemplu la puterea a doua, numărul respectiv devine $(1/q)^2 = 1/q^2$, unde numitorul ridicat la pătrat devine un număr exorbitant. Cu metoda aceasta am ajuns la un „infinit mic", mai mic în raportul $1/q$ decît numărul inițial, adică un infinit mic care este neglijabil față de primul. Pentru a explica, a lămuri mai bine noțiunea de „infiniți mici de diferite ordine" Leibniz a spus că firmamentul este pentru Pămînt ceea ce Pămîntul este pentru firul de praf. Iar Pămîntul este ca mărime pentru firul de praf ceea ce este firul de praf față de o particulă magnetică ce trece prin sticlă [1]. $(dx)^2$ este față de (dx) în același raport ca firul de praf față de Pămînt. Este cu siguranță „un infinit mic de ordin superior" și de aceea poate fi neglijat. Prin urmare, atunci cînd vrem să trecem la „cîtul diferențialelor", scriem

$$\Delta y = 4x\Delta x + 2(\Delta x)^2$$

și numai

$$dy = 4x\, dx$$

obținînd ca rezultat

$$\frac{dy}{dx} = 4x \text{ sau } dy : dx = 4x : 1.$$

În cazul acestei funcții „pătratice" apare ceva deosebit, și anume „legea" variației nu mai este un simplu raport de numere, ci este dependentă de x; va varia deci cu fiecare valoare a lui x. Aici variația este ea însăși variabilă. În orice caz, ea este strîns legată de o nouă condiție, și anume trebuie să respecte raportul $4x : 1$.

[1] Astăzi am spune electron.

Pe această cale putem deduce tot algoritmul calculului diferențial. Am cîștiga ca rigoare matematică și acuratețe. Avînd însă în vedere faptul că un începător înțelege mai bine modul de calcul dacă are imagini pentru fiecare noțiune și faptul că din punct de vedere istoric evoluția „calculului diferențial“ a pornit de la geometrie, vom părăsi modul sintetic de prezentare adoptat pînă acum și vom deduce tot ce este cu putință din geometrie; aceste deducții ne vor folosi pentru înțelegerea temeinică a noilor operații de calcul și a analizei infinitezimale.

CAPITOLUL XIX

TEOREMA LUI PITAGORA

Vrem să ne transpunem în timpuri străvechi, pe vremea vechilor egipteni și indieni. Chiar și astăzi, orice arhitect este surprins de extraordinara precizie a măsurătorilor efectuate de egipteni la construcția clădirilor. Geometrilor li se datoresc cunoștințele care au permis măsurarea precisă a unghiurilor, în particular a unghiului drept. Vom afla imediat cum s-a realizat aceasta: să ne închipuim că se construiește un templu uriaș, dreptunghiular. Micile abateri în determinarea unghiurilor nu pot fi neglijate. Spre a ne convinge de acest lucru este suficient să fim atenți la felul cum muncesc zidarii. Aceștia controlează permanent construcția lor cu ajutorul firului cu plumb și al echerului. Spre a reveni la „fundații" trebuie menționat că cei care „întindeau frînghiile" formau o corporație care constituia tagma sacerdotală și tot ei puneau prima piatră a edificiului. Totul era însoțit de o ceremonie. În acest scop foloseau o frînghie foarte lungă, divizată prin noduri în segmente cu lungimile în raportul 5: 3: 4. Deci de forma (vezi fig. 15).

Pentru scopurile noastre vom nota nodurile cu *a*, *b*, *c*, *d*. Dacă unghiul drept trebuia realizat în punctul *c*, atunci segmentul 3 era fixat prin țăruși în punctele *b* și *c*. Apoi segmentul 4 era orientat aproximativ în unghi drept, iar segmentul 5 era rotit în jurul punctului *b* pînă cînd punctele

FIG. 15

a și *d* coincideau. La întinderea frînghiei și fixarea ei în *a* și *d* cu un țăruș, în *c* se forma unghiul drept (vezi fig. 16).

Triunghiul ale cărui laturi sînt în raportul 3: 4: 5 se numește în general „triunghiul egiptean". Se vede pe figură că este într-adevăr un triunghi dreptunghic.

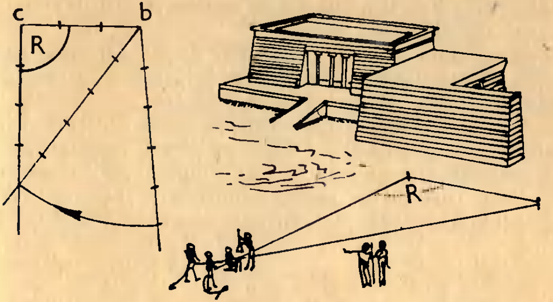


FIG. 16

Nu numai egiptenii ci și preoții vechilor indieni posedau o metodă asemănătoare de trasare a unghiurilor pentru construcții de altare etc. În India însă era cunoscut un triunghi la care raportul dintre laturi era 15: 36: 39. Pentru a ne face mai ușor înțeleși amintim că cea mai lungă latură a unui triunghi se numește „ipotenuză", pe cînd celelalte două, mai scurte, sînt numite „catete". Triunghiul egiptean are ipotenuza 5 și catetele 3 și 4, pe cînd cel indian are ipotenuza 39 și catetele 15 și 36.

Triunghiul dreptunghic este un caz particular de triunghi posibil. În triunghiul dreptunghic catetele formează un unghi de 90° (nouăzeci de grade), iar suma celorlalte două unghiuri este tot de 90°. Se știe că suma unghiurilor într-un triunghi este de 180° sau egală cu suma a două unghiuri drepte. Se mai știe și că latura mai mică este opusă unui unghi mai mic și deci ipotenuza, latura cea mai mare, este opusă unghiului drept. Putem presupune, și pe drept cuvînt, că aceste relații de mai mic sau mai mare pot fi scrise cantitativ. Adică este de presupus că laturile se pot exprima în funcție de unghiuri și, invers, unghiurile în funcție de laturi. Pe scurt bănuim că, deoarece unghiul drept din triunghiul dreptunghic este egal cu suma celorlalte două unghiuri, trebuie să existe o relație asemănătoare și pentru laturi. Dacă ne verificăm ipoteza ne așteaptă însă o deziluzie, deoarece $4 + 3 = 7$ și nu 5, iar $15 + 36 = 51$, ceea ce diferă apreciabil de 39. Teoria noastră este infirmată atît de triunghiul egiptean cît şi de cel indian.

Poate că triunghiurile cu laturile menţionate mai înainte nu erau dreptunghice? Piramidele egiptene şi construcţiile indiene pledează împotriva acestei ipoteze.

Să nu ne descurajăm! Triunghiurile sus-amintite sînt triunghiuri dreptunghice! Dar relaţia pe care o bănuim între laturile triunghiului nu este atît de simplă cum ne-am închipuit. Dacă ridicăm la pătrat numerele respective, fără să mai căutăm alte justificări, situaţia se schimbă radical, deoarece

$$3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25, \text{ deci } 3^2 + 4^2 = 5^2$$

şi

$$15^2 + 36^2 = 225 + 1\,296 = 1\,521, \text{ deci } 15^2 + 36^2 = 39^2.$$

Aceasta este una dintre cele mai importante reguli din geometrie. Se numeşte „teorema lui Pitagora" sau, în limbajul şcolarilor din evul mediu *pons asinorum*, puntea măgarilor. Pitagora însuşi, care probabil cunoştea datele de care dispuneau egiptenii şi indienii, a jertfit zeilor în semn de mulţumire pentru descoperirea sa o hecatombă de boi [1].

Dacă notăm, în general, catetele cu a şi b şi ipotenuza cu c, atunci teorema afirmă că: pentru orice triunghi dreptunghic

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Există multe demonstraţii ale acestei teoreme. Vom indica una nu prea riguroasă însă semnificativă (vezi fig. 17).

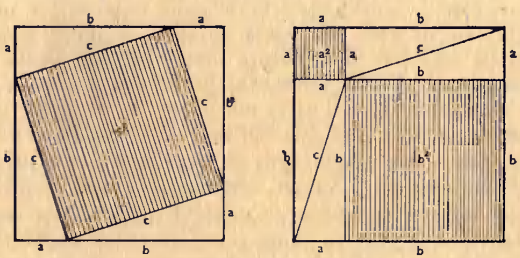


FIG. 17

[1] De aici probabil zicala că toţi boii tremură cînd se face vreo descoperire extraordinară.

Se înscrie în primul pătrat mare un alt pătrat cu latura egală cu ipotenuza triunghiului, deci cu suprafața c^2. Putem spune c^2 = aria pătratului mare — aria celor patru triunghiuri (abc).

În cel de-al doilea caz am înscris în același pătrat mare două pătrate cu laturile egale cu catetele triunghiului, deci cu ariile a^2 și b^2. Rezultă

$a^2 + b^2$ = aria pătratului mare — aria celor patru triunghiuri (abc).

Dacă două cantități sînt egale cu o a treia, atunci sînt egale și între ele. Adică

$$a^2 + b^2 = c^2, \text{ ceea ce era de demonstrat.}$$

Am stabilit teorema lui Pitagora și totodată am presupus că există oricît de multe triunghiuri care să verifice această teoremă. Cu alte cuvinte teorema lui Pitagora este o proprietate generală a oricărui triunghi dreptunghic.

Avînd în vedere că noua formulă a fost demonstrată pentru cazul general și că se poate constata de la prima privire că există o infinitate de triunghiuri care verifică această teoremă, vom considera pentru moment această formulă ca o ecuație pe care putem să o atacăm pe baza teoriei ecuațiilor. Adică, dacă nu cunoaștem una din laturile triunghiului, o putem calcula din celelalte două. Pentru a înțelege mai bine să scriem și soluțiile problemei, care desigur sînt de formă pătratică:

$$c^2 = a^2 + b^2,$$
$$a^2 = c^2 - b^2,$$
$$b^2 = c^2 - a^2.$$

Dacă vrem să calculăm nu pătratul unei laturi, ci latura însăși, trebuie să extragem radicalul din ambii membri ai ecuației:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2},$$
$$a = \sqrt{c^2 - b^2},$$
$$b = \sqrt{c^2 - a^2}\ [1].$$

[1] Pentru scopurile noastre nu vom lua în considerație decît rădăcinile pozitive. Vom vorbi și de cele negative cînd vom studia numerele complexe.

Mai știm însă că mulți radicali reprezintă numere iraționale. Pentru exemplificare vom examina un caz interesant. Să presupunem că într-un triunghi dreptunghic catetele sînt egale între ele, astfel încît le desemnăm pe amîndouă cu a; pentru un asemenea triunghi dreptunghic isoscel obținem

$$c^2 = a^2 + a^2,$$

$$c^2 = 2a^2,$$

$$c = \sqrt{2\,a^2}$$

și, dat fiind că putem extrage rădăcina pătrată din a^2, rezultatul este $c = a\sqrt{2}$.

Deoarece 2 nu este pătratul nici unui număr întreg, radicalul lui 2 este un număr irațional. Observăm că două triunghiuri dreptunghice isoscele pot fi alăturate pentru a forma un pătrat și c este atunci diagonala pătratului. De aici rezultă că diagonala unui pătrat și latura lui sînt incomensurabile: raportul lor este un număr irațional. Și reciproc. Dacă alegem pe c ca număr întreg și calculăm din el pe a,

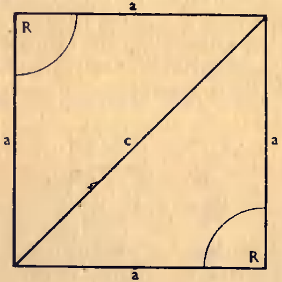


FIG. 18

deducem $2a^2 = c^2$, iar $a^2 = c^2/2$, de unde $a = c/\sqrt{2}$, ceea ce puteam obține și din relația $c = a\sqrt{2}$.

În geometrie, „iraționalitatea" nu este o proprietate absolută a unei mărimi, ci o proprietate relativă a două mărimi; una din ele se exprimă prin numere iraționale în funcție de cealaltă. Același lucru îl exprimă și „incomensurabilitatea".

Sîntem liberi să alegem ca unitate sau multiplu întreg de unităţi orice mărime pe care vrem s-o comparăm cu alta. Dacă în pătratul de care am vorbit alegem pe a ca unitate, atunci c este iraţional. Dacă dimpotrivă îl alegem pe c ca unitate, atunci a este iraţional. Este greşită deci afirmaţia că perimetrul cercului ar fi iraţional, afirmaţie care se bazează pe formula: perimetrul $= 2\pi r$, unde r este raza cercului; în această formulă se pare că înmulţim un număr raţional — raza cercului — cu un număr iraţional, 2π. Sîntem obişnuiţi ca, în general, raza cercului să fie cunoscută. Dacă am desfăşura un cilindru de metal şi am găsi cu mare precizie un perimetru de 1 m, din formula precedentă am obţine pentru rază valoarea perimetru/2π, ceea ce reprezintă un număr iraţional. Uneori perimetrul este un număr iraţional, alteori raza este iraţională, după cum exprimăm raza sau perimetrul printr-un număr raţional.

Pitagora a considerat această incomensurabilitate un simbol al vieţii, care sfidează orice măsurabilitate. Nu vrem însă să ne pierdem în semnificaţia profundă a noii cabale geometrice, ci ne vom pune următoarea întrebare. Există oare o regulă cu care putem construi toate triunghiurile dreptunghice ale căror laturi se pot exprima în numere întregi?

În acest scop vom lua din *Culegerea de formule* a prof. O. Th. Bürklen (prelucrată de dr. F. Ringleb, Colecţia Göschen) un tabel care va răspunde la întrebarea pusă. Dacă u şi v sînt numere întregi pozitive oarecare, unde $u > v$, atunci formulele $c = u^2 + v^2$, $a = u^2 - v^2$, $b = 2uv$ determină triunghiuri dreptunghice raţionale.

u	v	$u^2 + v^2 = c$	$u^2 - v^2 = a$	$2uv = b$
2	1	5	3	4
3	1	10	8	6
3	2	13	5	12
4	1	17	15	8
4	2	20	12	16
4	3	25	7	24
5	1	26	24	10
5	2	29	21	20

ş.a.m.d.

Mai este permis să înmulțim toate cele trei laturi ale triunghiurilor astfel obținute, de exemplu al triunghiului egiptean, cu un număr întreg oarecare și obținem o nouă infinitate de triunghiuri dreptunghice cu laturi numere raționale. De exemplu,

$$(3 \cdot 5)^2 = (3 \cdot 4)^2 + (3 \cdot 3)^2$$

$$15^2 = 12^2 + 9^2$$

$$225 = 144 + 81 = 225.$$

Conform tabelului nostru, triunghiul indian este

$$(3 \cdot 13)^2 = (3 \cdot 12)^2 + (3 \cdot 5)^2$$

$$39^2 = 36^2 + 15^2,$$

și prin împărțirea cu numere întregi trebuie să obțin o nouă infinitate de triunghiuri raționale, ale căror laturi, în general, nu se mai exprimă prin numere întregi, ci prin fracții. De exemplu,

$$\left(\frac{1}{4} \cdot 5\right)^2 = \left(\frac{1}{4} \cdot 4\right)^2 + \left(\frac{1}{4} \cdot 3\right)^2$$

$$\frac{25}{16} = \frac{16}{16} + \frac{9}{16}.$$

Procedeul poate fi continuat, înmulțind cu alte fracții:

$$\left(\frac{3}{7} \cdot 5\right)^2 = \left(\frac{3}{7} \cdot 4\right)^2 + \left(\frac{3}{7} \cdot 3\right)^2$$

$$\left(\frac{15}{7}\right)^2 = \left(\frac{12}{7}\right)^2 + \left(\frac{9}{7}\right)^2$$

$$\frac{225}{49} = \frac{144}{49} + \frac{81}{49}.$$

FUNCȚII TRIGONOMETRICE

Nu vrem însă să ne pierdem în amănunte. O nouă problemă importantă reclamă toată atenția noastră. Chiar atunci cînd am dedus teorema lui Pitagora am presimțit o anumită relație restrictivă între unghiurile și laturile unui triunghi dreptunghic. După cum se știe, disciplina care cercetează aceste relații restrictive se numește trigonometrie, iar aceste relații se numesc, așa cum am bănuit chiar la apariția cuvîntului „restrictiv", funcții goniometrice sau trigonometrice.

Desigur, nici această ramură a matematicii nu o vom putea dezvolta prea mult. Vom face cunoștință însă cu cîteva teoreme fundamentale, care vor apărea mai tîrziu în strînsă legătură cu calculul diferențial.

Să desenăm mai întîi un cerc, pe care să-l împărțim în patru părți egale, numite și cadrane, prin două diametre perpendiculare (vezi fig. 19).

Dacă ne închipuim acum că o rază r se rotește în jurul centrului, pornind din poziția de echilibru OA, în sensul săgeții pînă ce ajunge în noua poziție de echilibru OB, atunci latura OA și raza mobilă generează toate unghiurile cuprinse între 0 și 90 de grade. Putem presupune cunoscut faptul că întregul cerc este împărțit în 360 de grade și deci un sfert de cerc în 90 de grade. Fiecărui grad de cerc îi corespunde un unghi la centru (cu vîrful în centru). Dacă raza se află pe cerc la 45 de grade de arc, atunci unghiul la centru corespunzător acestui arc are tot 45 de grade ș.a.m.d. Putem spune atunci că, în ipoteza noastră, unghiul α (alfa) ia în primul cadran toate valorile cuprinse între 0 și 90 de grade. Dacă din punctul în care raza mobilă r întîlnește, la un anumit moment, cercul și pe care-l notăm cu C, coborîm o perpendiculară l pe segmentul inițial OA, se formează un triunghi dreptunghic, a cărui ipotenuză este raza, iar ale cărui catete sînt perpendiculara l și segmentul p de pe segmentul inițial. Acest triunghi va degenera, adică se va contopi într-un singur segment, la două poziții ale razei: prima dată, cînd raza mobilă se mai află

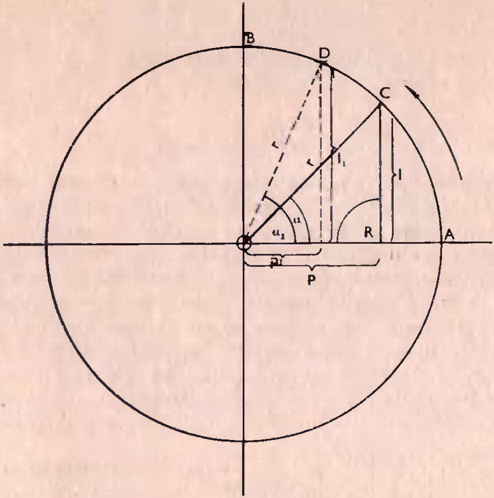


FIG. 19

pe segmentul inițial OA, iar a doua oară cînd se va afla pe dreapta finală. Între acestea se află în primul cadran o infinitate de triunghiuri dreptunghice, al căror unghi α este, desigur, mereu altul.

Problema fundamentală a „Trigonometriei" este să se determine unghiul α, cunoscînd doar lungimile laturilor triunghiului dreptunghic. Faptul că există o legătură este evident, deoarece în triunghiul punctat, al cărui unghi α este mai mare decît 45°, avem, la aceeași ipotenuză, alte catete, pe care le voi numi l_1 și p_1.

Lucrul cel mai simplu ar fi să determinăm unghiul prin cateta opusă, l respectiv l_1. Am văzut însă la teorema lui Pitagora că lucrurile nu sînt chiar atît de simple. De aceea trebuie să încercăm și aici pe o cale mai complicată. Anume, să exprimăm unghiul prin raportul a două laturi. Ca vechi matematicieni să ne amintim că, după regulile analizei combinatorii, cu trei laturi putem forma șase rapoarte diferite a cîte două laturi, deoarece cele trei laturi sînt „elementele", iar rapoartele sînt aranjări fără repetiție de șase elemente luate cîte două. Formula este $C_3^2 = (3 \cdot 2)/(1 \cdot 2) \cdot 1 \cdot 2 = 6$, iar rapoartele ar fi: $r:l$, $r:p$, $l:p$, $l:r$, $p:r$, $p:l$. Într-adevăr, acestea sînt toate „funcțiile trigonometrice".

Mai desenăm încă o dată triunghiul dreptunghic (vezi fig. 20).

Acum să dăm și numele celor șase funcții:

$l:r$ este „sinusul" unghiul (cateta opusă pe ipotenuză);

$p:r$ este „cosinusul" unghiului (cateta alăturată pe ipotenuză);

$l:p$ este „tangenta" unghiului (cateta opusă pe cateta alăturată);

$p:l$ este „cotangenta" unghiului (cateta alăturată pe cateta opusă);

$r:p$ este „secanta" unghiului (ipotenuza pe cateta alăturată);

$r:l$ este „cosecanta" unghiului (ipotenuza pe cateta opusă).

În mod normal sînt folosite doar primele patru funcții, așa încît nu trebuie să ne speriem. Pentru a vă încuraja, anunțăm că pentru scopurile noastre este necesară numai funcția tangentă. De asemenea, din motive de principiu, vom considera mai întîi comportarea sinusului în primul cadran. Să facem aici un artificiu. Deoarece sinusul este raportul dintre

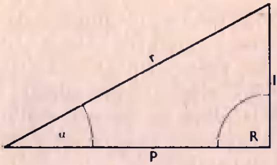


FIG. 20

cateta l opusă unghiului și raza r, să alegem un așa-numit cerc unitate, adică un cerc în care raza este egală cu unu; putem face acest lucru dat fiind că nimeni nu ne impune, sau nu ne poate impune, mărimea razei. Astfel, sinusul nostru devine 1:1, adică egal cu l, și am realizat ceea ce doream la început. Anume, putem reduce mărimea unghiului la lungimea laturii opuse, adică a perpendicularei l, și în acest mod am trans-

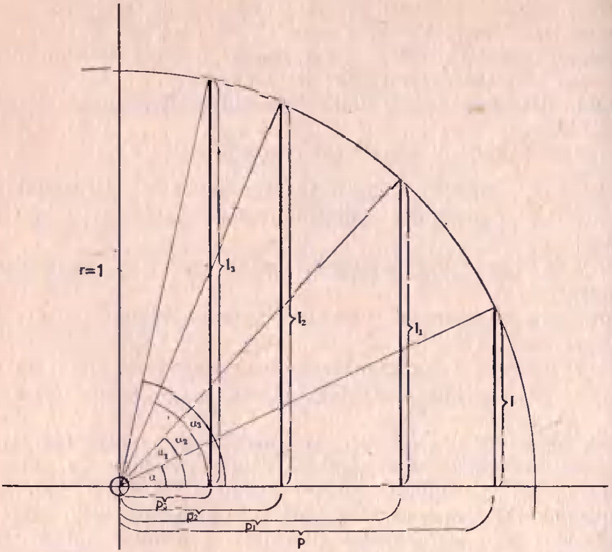


FIG. 21

format, într-un fel miraculos, un unghi într-o lungime măsurabilă. Întrucît „raza 1“ poate fi aleasă oricît de mare vrem şi deoarece putem lua chiar raza ca unitate, această „lungime adevărată a sinusului“ este convenabilă în toate cazurile, cu condiţia ca perpendiculara să fie măsurată în raze. Aceasta nu înseamnă însă altceva decît că „Sinus α“ reprezintă raportul $l:1$, sau $l/1$, sau l împărţit la 1.

În fig. 21 l, l_1, l_2, l_3 ş.a.m.d. reprezintă chiar mărimea sinusului lui α, α_1, α_2, α_3 ş.a.m.d. Putem să spunem imediat că sinusul de zero grade este 0, în timp ce sinusul de 90 grade este chiar egal cu raza, adică, după sistemul nostru de măsură, are valoarea 1. Sinusul creşte astfel în primul cadran de la valoarea 0 la valoarea 1 şi poate, între acestea două, să ia orice valoare (chiar iraţională) aflată între 0 şi 1. El se exprimă nu numai sub forma unor fracţii ordinare. Astfel, pentru $\alpha =$ $= 45°$, l este jumătatea diagonalei unui pătrat cu latura r.

Dar după teorema lui Pitagora $r^2 = l^2 + l^2$, sau $r = \sqrt{2l^2} = l\sqrt{2}$, adică $l = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1\sqrt{2}}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, care este cu siguranță un număr irațional.

Nu vrem însă să continuăm în această ordine de idei. Vrem doar să observăm că în practică nu se folosesc de obicei „lungimile adevărate", ci logaritmii lungimilor adevărate. În tabelele de logaritmi se găsesc logaritmii funcțiilor trigonometrice, calculabili pînă la secunde (1 grad = 60 minute; 1 minut = 60 secunde, sau $1^\circ = 60'$, $1' = 60''$).

Vom studia cu o metodă asemănătoare funcția tangentă, care este pentru noi deosebit de importantă. Presimțim că acest cuvînt este legat într-un anumit mod de noțiunea de „tangentă". Vom construi acum un aparat care va pune în evidență această legătură. Deoarece tangenta lui α este egală cu $l:p$, vom utiliza acum un alt artificiu. De data aceasta vrem ca p să fie unitate. De aceea, în acest caz segmentul mobil nu va mai fi raza, ci o altă dreaptă. Să desenăm (fig. 22 și fig. 23).

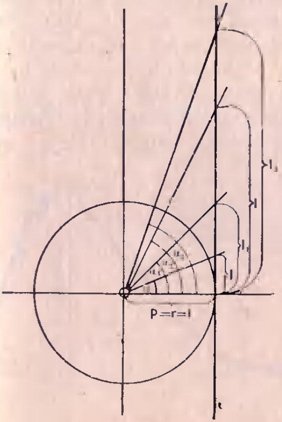


FIG. 22

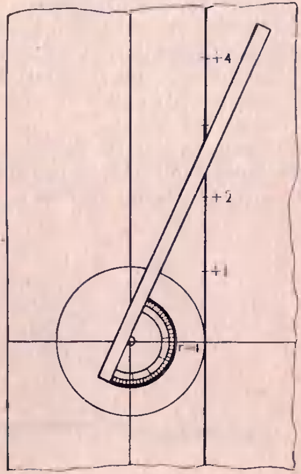


FIG. 23

Obținem acum raportul $l:p = l:r = l:1$ ca segment situat pe o tangentă a cercului unitate. Acuma raza este o catetă, în timp ce cealaltă catetă și ipotenuza sînt variabile. Aparatul nostru este construit întocmai după schema desenată. Vedem cercul unitate, raza = 1, tangenta, pe care purtăm lungimi egale cu raza, și, în sfîrșit, ipotenuza ce se poate roti în jurul centrului și care alunecă pe tangentă. Unghiul α poate fi citit direct pe un raportor așezat pe ipotenuză.

Unghiul 0 are tangenta egală cu 0, deoarece 0/1 este egal cu zero. Tangenta crește apoi rapid, iar valoarea ei poate fi „citită" mereu pe „tangentă". La $\alpha = 45°$ tangenta lui α este egală cu 1, la 60° este egală cu 1,73205, la 70° este egală cu 2,74748, la 80° este egală cu 5,67128, la 85° cu 11,43005, la 89° cu 57,28996, la $89^5/_6$° cu 343,77371 și, în sfîrșit, la 90° cu plus infinit, deoarece cateta mobilă nu mai întîlnește tangenta. După cum se vede, cea mai mare creștere are loc între $89^5/_6$° și 90 grade, și anume într-un ritm din ce în ce mai rapid.

Ne putem întreba, și pe bună dreptate, la ce folosește trigonometria. Vom răspunde că nu ne putem dispensa de funcția tangentă în studiile noastre de matematici superioare.

Trigonometria este folosită direct oriunde trebuie să determinăm unghiurile, cunoscînd laturile triunghiului, sau trebuie calculate anumite unghiuri și laturi necunoscute din cele cunoscute. Distanțele în spațiu se determină trigonometric. Geodezia se bazează pe metode trigonometrice. Înălțimea unui munte, cum ar fi cea a muntelui Everest, care a fost escaladat de curînd, se poate măsura cu precizie de la o mare depărtare, alegînd într-un plan o bază măsurată, vizînd cu

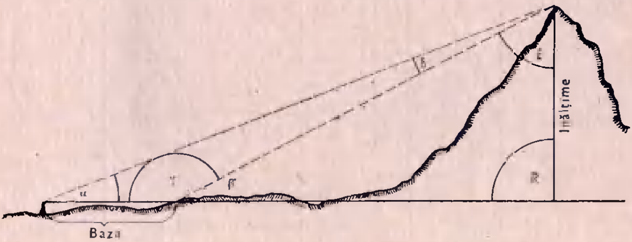


FIG. 24

un teodolit vîrful muntelui și calculînd apoi, din triunghiurile formate, cateta care reprezintă chiar înălțimea muntelui.

Prin determinarea unghiului α și a unghiului β (beta grecesc minuscul) obțin unghiul γ (gama), care nu este altul decît $(180^\circ - \beta)$. Cu aceasta δ (delta) devine cunoscut, fiind egal cu $[180^\circ - (\alpha + \gamma)]$. Mai departe $(\beta + \varepsilon) = 90^\circ$, deci ε este egal cu $(90 - \beta)$. Cunoscînd însă toate unghiurile, cunoaștem și valoarea funcțiilor trigonometrice și putem, cu ajutorul unei formule relativ simple din trigonometrie, să calculăm din bază și din unghiurile α și γ mai întîi lungimea uneia din distanțele de vizǎ și apoi, din aceasta și din α, respectiv β, înălțimea h.

Artileria se servește la vizarea unor ținte îndepărtate de metode asemănătoare.

Însă nu vrem să adîncim prea mult studiul deosebit de interesant al trigonometriei și, mai ales, al trigonometriei pe sferă (sau al trigonometriei sferice), care joacă în geografie și astronomie un rol imens, ușor de înțeles. Pentru ca expunerea să fie cît se poate de completă și pentru a realiza o introducere într-un nou domeniu important al geometriei, vom face cunoștință însă cu un nou tip de numere — ciudatele numere imaginare. Ele au fost reprezentate grafic pentru prima dată de marele matematician Karl Friedrich Gauss (1777—1855).

NUMERE IMAGINARE

După metoda noastră, devenită obişnuită, vom păşi în acest domeniu dificil pornind de la cele mai simple raţionamente. Ne amintim că extragerea radicalului ne-a adus prima mare surpriză în teoria numerelor: ne-a dus la numerele iraţionale. Tot calculul cu radicali ne va introduce şi în cîmpul celor imaginare. *Imago* se traduce prin imagine, în orice caz printr-o uşoară nuanţă de irealitate. De aceea şi *imaginatio* înseamnă imaginaţie sau nălucire. De la bun început, numerelor noastre li se acordă o semnificaţie aproape degradantă. Mai de mult ele mai erau numite şi numere „imposibile".

Vom arăta acum cum au apărut aceste numere. Să ne reamintim de calculul cu simboluri, şi anume de cel mai simplu caz al acestui calcul: „regula semnelor" la înmulţire. Observăm, şi acesta este un fapt remarcabil, că după efectuarea calculului nu se mai poate spune cum s-au petrecut lucrurile. Nimeni nu poate spune dacă un plus s-a obţinut prin înmulţirea a două plusuri sau a două minusuri. Dacă scriem $(+a^2)$, atunci acest a^2 ar fi putut proveni atît din $(+a)\cdot(+a)$ cît şi din $(-a)\cdot(-a)$. Pentru numerele obişnuite întrebarea nu este interesantă, ceea ce înseamnă că nu are importanţă pentru cele patru operaţii de calcul, deoarece atît la adunare cît şi la scădere nu ne interesează cum s-a format numărul $(+a^2)$. El este $(+a^2)$ şi va fi tratat în continuare ca atare. Tot aşa şi la înmulţire sau împărţire. Dacă împărţim cu $(+a)$ sau cu $(-a)$ obţin un rezultat unic şi corect, independent de modul în care a fost obţinut $(+a^2)$. Să presupunem că el a fost format din $(-a)\cdot(-a)$. Atunci împărţirea cu $(+a)$ ne dă

$$\frac{(-a)\cdot(-a)}{(+a)}=\frac{(-a)\cdot[(+a)\cdot(-1)]}{(+a)}=\frac{(-a)\cdot(+a)\cdot(-1)}{(+a)}=$$

$$=\frac{(-a)\cdot(-1)}{1}=(+a).$$

iar împărţirea cu $(-a)$

$$\frac{(-a)\cdot(-a)}{(-a)}=(-a).$$

Dacă ar fi fost obţinut din $(+a)\cdot(+a)$, atunci prin împărţirea cu $(+a)$ am avea

$$\frac{(+a)\cdot(+a)}{(+a)}=(+a),$$

iar prin împărţirea cu $(-a)$

$$\frac{(+a)\cdot(+a)}{(-a)}=\frac{(+a)\cdot[(-a)\cdot(-1)]}{(-a)}=\frac{(+a)\cdot(-a)\cdot(-1)}{(-a)}=$$

$$=(+a)\cdot(-1)=(-a).$$

Aceleaşi rezultate corecte le-am fi obţinut şi prin împărţire algebrică obişnuită, fără a ţine seama de provenienţa semnului plus la $(+a^2)$, deoarece prin efectuarea înmulţirii la numărător obţinem $(+a^2):(\pm a)$, deci sau $(+a^2):(+a)$, sau $(+a^2):(-a)$. Faptul că $(+a^2):(+a)=(+a)$ şi $(+a^2):(-a)=(-a)$ nu ne dă nici durere de cap şi nici nu produce vreo îndoială.

Altfel stau lucrurile la extragerea rădăcinii. Aşa cum am mai scris de atîtea ori, atît $(+a)\cdot(+a)$, cît şi $(-a)\cdot(-a)$ dau acelaşi rezultat, şi anume $(+a^2)$; de aceea, operaţia inversă, extragerea „radicalului lui $(+a^2)$", $\sqrt{a^2}$, nu ne duce la un rezultat unic. Chiar dacă ştim că valoarea absolută a rădăcinii trebuie să fie $|a|$, în ceea ce priveşte semnul nu ştim nimic şi nici nu putem afla din simbolul $\sqrt{a^2}$. De aceea, ca oameni de cuvînt, trebuie să mărturisim acest lucru şi să scriem cinstit $\sqrt{a^2}=\pm a$, adică $(+a)$ sau $(-a)$. Această nesiguranţă nu este proprie oricărei extrageri de rădăcină. La $\sqrt[3]{a^3}$, de exemplu, ştim sigur că soluţia trebuie să fie $(+a)$, deoarece $(-a)\cdot(-a)\cdot(-a)$ ar da $(-a)^3$, de unde rezultă că $\sqrt[3]{(-a)^3}$ este chiar $(-a)$. La radicalul de ordinul patru, adică la $\sqrt[4]{a^4}$ ne aflăm din nou în încurcătură, deoarece $+a^4$ poate proveni atît din $(+a)\cdot(+a)\cdot(+a)\cdot(+a)$ cît și din $(-a)\cdot(-a)\cdot(-a)\cdot(-a)$. $\sqrt[4]{a^4}$ este și el $(\pm a)$, plus sau minus a. Începem să bănuim legea de calcul. După regula semnelor, un număr par de plusuri dă plus, la fel ca și un număr par de minusuri. Deoarece puterile conțin atîtea semne ca factori cît indică exponentul, rădăcinile cu indice par au mai multe valori, rădăcinile cu indice impar au o singură valoare. În general,

$$\sqrt[2n]{r} = (\pm s), \quad \sqrt[2n+1]{r} = (+s), \quad \sqrt[2n+1]{(-r)} = (-s).$$

Pînă aici lucrurile par clare. Nimeni nu ne poate împiedica să întrebăm care este valoarea unei rădăcini „pare" cînd numărul de sub radical are semn negativ. De exemplu,

$$\sqrt[2n]{(-r)} = ?$$

Nu sîntem nicidecum în stare să răspundem la această întrebare justificată, deoarece în domeniul de numere cercetat pînă acum nu găsim nici un fel de numere negative care să poată fi obținute ca rezultat al ridicării la o putere pară. Orice număr ridicat la puterea $2n$ trebuie să aibă semnul plus. Dar dacă numărul de sub radical nu poate fi conceput ca puterea $2n$—a a unui număr, atunci nici nu putem extrage rădăcina, nici ca număr abstract, nici concret, nici ca număr întreg, nici fracționar, nici ca irațional, nici ca pozitiv, nici ca negativ.

Ne aflăm, prin urmare, în fața unui nou tip de număr, incontestabil nou și necunoscut, care are proprietatea ciudată că cea de-a $2n$—a putere a sa este un număr negativ. După cum vom vedea, toate aceste numere se pot exprima prin rădăcina pătrată a lui (-1); vom renunța deocamdată la generalitate și vom vorbi numai despre rădăcina pătrată a lui (-1), despre $\sqrt{-1}$, care este desigur un caz particular al problemei noastre generale. Vom introduce acest nou număr $\sqrt{-1}$ și îl vom nota cu i. Acest i, adică $\sqrt{-1}$, este extrem de util deoarece, de exemplu, $\sqrt{-15} = \sqrt{(-1)\cdot(+15)} = (\sqrt{-1})\cdot(\sqrt{15}) = \mathrm{i}\sqrt{15}$.

Cu această ocazie vom demasca viclenia matematicii superioare printr-o problemă pusă de Dedekind, renumit teoreician al numerelor. Ştim că $\sqrt{1}$ este atît $(+1)$ cît şi (-1). Notăm rădăcina lui $\sqrt{1}$ cu r şi nu ne mai interesează rezultatul, deoarece rădăcina lui 1 conţine ambele valori, (-1) şi $(+1)$, pe care, fără a greşi, le putem alege la întîmplare. Am fi putut admite că $(r + 1) = (+2)$, ca rezultat al alegerii soluţiei pozitive $r = +\sqrt{1}$. Să alegem pentru $(r - 1)$ valoarea negativă a lui r şi obţinem (-2). Să înmulţim mai întîi, în general, $(r + 1) \cdot (r - 1) = r^2 + r - r - 1 = r^2 - 1$. Deoarece $r = \sqrt{1}$, r^2 este, în orice caz, $(+1)$ şi $r^2 - 1 = 1 - 1 = 0$. Dacă am fi înmulţit rezultatele noastre $(+2)$ şi (-2), am fi obţinut pentru $(r + 1) \cdot (r - 1)$ rezultatul (-4). Deoarece acuma $(r + 1) = (+2)$ şi este prin urmare diferit de zero, ca şi $(r - 1) = (-2)$, iar $(r^2 - 1)$ a rezultat egal cu zero, deducem că există cazuri în care înmulţirea a două numere, diferite de zero, dă, în funcţie de modul de înmulţire, o dată un rezultat nul, iar altă dată unul diferit de zero; această concluzie distruge algoritmul nostru de pînă acuma.

Noile noastre numere imaginare ne duc şi la alte lucruri de neînţeles. De pildă, dacă ar trebui să înmulţim $\sqrt{-9} \cdot \sqrt{-4}$, atunci din cele cercetate pînă acum am scrie în linişte $\sqrt{(-9) \cdot (-4)}$, tot aşa cum putem scrie $\sqrt{16} \cdot \sqrt{4} = \sqrt{16 \cdot 4} = \sqrt{64} = \pm 8$. Am obţine în acest mod $\sqrt{(-9) \cdot (-4)} = \sqrt{+36} = \pm 6$. Veţi fi miraţi dacă voi afirma că acest rezultat este întru totul fals. Deoarece $\sqrt{-9}$ este egal cu i $\sqrt{9}$ şi $\sqrt{-4} = \mathrm{i}\sqrt{4}$, deci $\sqrt{-9} \cdot \sqrt{-4} = \mathrm{i}\sqrt{+9} \cdot \mathrm{i}\sqrt{4} = \mathrm{i}^2 \sqrt{9 \cdot 4} = \mathrm{i}^2 \sqrt{36} = (-1)\sqrt{36} = -\sqrt{36} = \mp 6$. În ultimul rezultat s-au schimbat numai semnele din $(\pm)$ în $(\mp)$. Dacă am fi notat pe $\sqrt{36}$ cu m, atunci deosebirea ar fi fost mult mai mare, cînd rezultatul înmulţirii este $(+m)$ sau $(-m)$, deoarece schimbarea semnelor în ultimul rezultat este o altă regulă de calcul cu (-1) şi $(+\sqrt{36})$.

Dar cu numerele imaginare se întîmplă şi alte lucruri ciudate. Marele fizician şi matematician Huygens din Züllichem era pe drept cuvînt mirat cînd Leibniz i-a pus problema de a calcula $\sqrt{1 + \sqrt{-3}} + \sqrt{1 - \sqrt{-3}}$ şi a mai susţinut că rezultatul simplu al acestui calcul ar fi numărul concret 2,4494897 ... , adică $\sqrt{6}$. Cum este posibil, a exclamat Huygens, ca din suma a două rădăcini, care conţin sumele şi diferențele lui unu cu rădăcini imaginare, să se obțină un număr pozitiv, concret, chiar dacă este irațional? Prin ce prăpăstii înfiorătoare — dincolo de orice putere de înțelegere a omului —, a putut tîrî moara infailibilă a algoritmului, aceste lucruri ininteligibile, pentru a le face, în cele din urmă, de înțeles? Sau totul nu este decît un joc formal? Să urmărim modul de obținere a rezultatului nostru. Trebuie să avem

$$\sqrt{1+\sqrt{-3}}+\sqrt{1-\sqrt{-3}}=\sqrt{6}\,^{1}.$$

Pentru a verifica, să ridicăm ambii membri la pătrat. Obținem

$$\left(\sqrt{1+\sqrt{-3}}+\sqrt{1-\sqrt{-3}}\right)\left(\sqrt{1+\sqrt{-3}}+\right.$$

$$\left.+\sqrt{1-\sqrt{-3}}\right)=\sqrt{6}\cdot\sqrt{6}$$

$$\sqrt{1+\sqrt{-3}}\cdot\sqrt{1+\sqrt{-3}}+\sqrt{1-\sqrt{-3}}\cdot\sqrt{1+\sqrt{-3}}+$$

$$+\sqrt{1+\sqrt{-3}}\cdot\sqrt{1-\sqrt{-3}}+\sqrt{1-\sqrt{-3}}\cdot\sqrt{1-\sqrt{-3}}=6$$

$$\sqrt{(1+\sqrt{-3})^2}+2\sqrt{(1-\sqrt{-3})(1+\sqrt{-3})}+$$

$$+\sqrt{(1-\sqrt{-3})^2}=6$$

$$1+\sqrt{-3}+2\sqrt{1-\sqrt{-3}+\sqrt{-3}-\sqrt{(-3)^2}}+$$

$$+1-\sqrt{-3}=6.$$

$$1+\sqrt{-3}+2\sqrt{1-(-3)}+1-\sqrt{-3}=6$$

$$1+\sqrt{-3}+2\sqrt{4}+1-\sqrt{-3}=6$$

$$1+\qquad\qquad 4+\quad 1\qquad\qquad =6 \text{ sau } 6=6.$$

[1] Egalitatea, ca și justificarea care urmează, nu sînt corecte. Exemplul are mai degrabă un interes istoric, deoarece astăzi știm să deosebim între radicalii aritmetici și cei algebrici. — *N.T.*

Prin urmare am verificat în mod strălucit afirmația lui Leibniz. Pentru a nu mai fi expuși în viitor unor șiregăerii de calcul ca mai înainte, vrem să menționăm două reguli simple. Anume,

$$(a + b)(a - b) = a^2 + ab - ab - b^2 = a^2 - b^2,$$

ceea ce înseamnă: suma înmulțită cu diferența acelorași mărimi este egală cu diferența pătratelor acestor mărimi și

$$(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2; \ (a - b)^2 = (a - b)(a - b) = a^2 - ab - ab + b^2 = a^2 - 2ab + b^2,$$

ceea ce înseamnă: pătratul sumei sau diferenței a două mărimi este egal întotdeauna cu suma pătratelor acestor două mărimi, plus sau minus „dublul produs" al celor două mărimi. Aceasta pe de o parte. Am spus mai sus că notăm unitatea imaginară, $\sqrt{-1}$, cu litera i (imaginar). Dacă i este legat, într-un mod oarecare, aditiv sau substractiv, cu un număr „real", atunci vorbim despre un număr „complex", a cărui formă generală se poate scrie $a + bi$. Dacă avem însă, ca în exemplul lui Huygens–Leibniz, două numere complexe de forma $(a + bi)$ și $(a - bi)$, atunci ele se numesc numere „complex conjugate". Înmulțirea numerelor complex conjugate dă ca rezultat numere reale, deoarece $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$, deci $(a + bi) \cdot (a - bi) = a^2 - b^2\mathrm{i}^2 = a^2 - b^2 \left(\sqrt{-1}\right)^2 = a^2 - b^2(-1) = a^2 + b^2$, unde i, evident, a dispărut.

Cu aceasta am ajuns, în sfîrșit, în mod incontestabil pe ultimul vîrf al unui munte de numere ridicat pînă în imaginar. Mai sînt „curiozități" ca, de exemplu, „cuaternionii" lui Hamilton și așa-numitele numere hipercomplexe etc. Putem fi însă mai mult decît mulțumiți de înălțimea la care am ajuns, deoarece cu ceea ce știm putem pătrunde mai adînc în orice domeniu al matematicii.

Să ne întoarcem acum la obișnuita „axă a numerelor", care ne-a mai făcut de atîtea ori servicii excepționale la intuirea unor noțiuni complicate, și să vedem cum putem ordona sau supune aceste numere imaginare, pe cît de remarcabile, pe atît de neplăcute — adevărate fantome numerice.

Să desenăm axa numerelor și să încercăm diferite artificii (fig. 25).

Pentru a putea socoti în general, să considerăm o porțiune a ramurii pozitive a axei numerelor și să o numim a. În cazul nostru am ales pentru a numărul 5. Desigur, am putea da lui a orice altă valoare absolută finită. Dacă ne închipuim acum

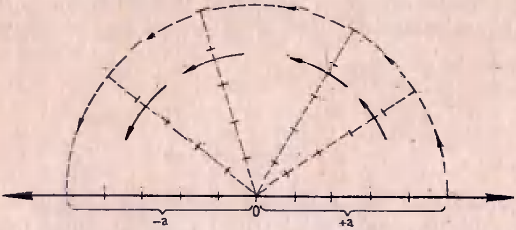


FIG. 25

că originea este un centru de rotație, atunci putem roti numărul nostru $(+a)$ pînă ce el se așază peste $(-a)$, egal cu el în valoare absolută, ca și cum s-ar transforma în el. Cu această ocazie am făcut două afirmații complet arbitrare. Mai întîi am definit porțiunea de la stînga lui zero a axei numerelor ca domeniu al valorilor negative și în al doilea rînd am declarat pozitivă acea rotație care se face în sens opus sensului de mișcare al acelor unui ceasornic. Ne mai întrebăm încă o dată cum putem face din $(+a)$ dintr-o dată $(-a)$? Cum trebuia să procedăm geometric și aritmetic pentru a ajunge la acest rezultat? Geometric este clar, am efectuat o rotație de un „semicerc", am rotit pe $(+a)$ cu 180 grade în jurul originii. Dacă vrem să dăm acestei rotații o interpretare aritmetică, care să nu strice algoritmul general, atunci trebuie să afirmăm, pentru a „menține algoritmul", că o astfel de rotație de 180° corespunde înmulțirii cu (-1). Aparent sîntem într-un cerc vicios, dar afirmațiile se vor dovedi îndată utile, deoarece am aflat deocamdată că $(+a) \cdot (-1) = (-a)$. Pe (-1) îl vom numi „factor de rotație". Dacă vrem să continuăm rotația, atunci $(-a)$ se transformă după 180° din nou în $(+a)$ și aritmetic obținem: de $(-a)$ ori factorul de rotație (-1) dă $(+a)$. **Algoritmul nostru este pentru moment necontradictoriu.**

Să încercăm să regăsim prin mijloace proprii artificiul lui Karl Friedrich Gauss. Ne întrebăm: ce se întîmplă dacă facem o rotație de numai 90°? Ce devine numărul nostru $(+a)$? În orice fază a rotației el are valoarea absolută $|a|$; acest fapt este clar, deoarece a este raza unui cerc obișnuit, descris de rotația segmentului de lungime $|a|$ în jurul originii. Dar care este semnul acestui nou $|a|$, așezat vertical? Afirmăm, adică convenim ca semnul liniei dirijate în sus să fie $(+)$ și am susține că $+|a|$ este „desigur" $(+a)$. Dar aceasta nu este de loc sigur, deoarece dacă prima rotație de 90 de grade nu schimbă semnul, de ce ar trebui ca a doua să-l schimbe brusc în $(-a)$? Că așa se întîmplă, ne arată figura 26.

Factorul de rotație nu poate fi o dată $(+1)$, iar apoi, la o rotație consecutivă, (-1)? Nu am putea admite un asemenea factor de rotație variabil. El ar rămîne inacceptabil, deoarece dacă am roti din nou cu 90° ar trebui, în mod logic, să luăm

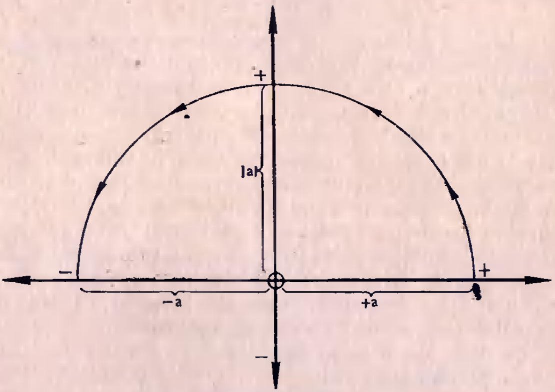


FIG. 26

axa verticală îndreptată în jos cu semnul $(-)$ și nu s-ar modifica nimic, adică factorul de rotație ar fi $(+1)$. Dacă probăm al patrulea sfert de cerc, plusul se transformă din nou în minus, deoarece $(-a)$ trebuie înmulțit cu (-1) pentru a obține numărul $(+a)$ de la început. Pe scurt, o situație nesatisfăcătoare, care se agravează dacă susținem că rotației de 180 de grade îi corespunde factorul de rotație (-1), iar fiecărei jumătăți de 180 de grade, îi corespunde alternativ $(+1)$ și (-1).

Există însă o cale de a ieși din dilemă. Să vedem cît de mare trebuie să fie factorul de rotație pentru $90°$! A căuta cît de mare trebuie să fie ceva încă necunoscut înseamnă însă a opera cu o ecuație. În cazul nostru, totul depinde numai de posibilitatea scrierii unei ecuații. Se știe că rotației de $180°$ îi corespunde factorul (-1). Acest număr (-1) trebuie însă să apară prin combinarea a două rotații de cîte 90 de grade fiecare. De aici rezultă că dacă notăm cu x factorul de rotație necunoscut, corespunzător celor 90 de grade, atunci $a \cdot x$ este valoarea pentru 90 de grade. Dacă mai rotim cu 90 de grade atunci trebuie să mai înmulțim cu acest factor de rotație. Deci, $(a \cdot x) \cdot x$ trebuie să fie egal cu $a \cdot (-1)$ sau ca ecuație $(ax)x = a(-1)$.

Prin împărțire cu a,

$$x^2 = (-1)$$

$$x = \pm\sqrt{-1}.$$

Spre marea noastră mirare am obținut numărul i ca factor de rotație pentru 90 de grade: cu aceasta însă și axa numerelor pentru numerele imaginare. Și o descoperire de-a dreptul misterioasă ne arată că numerele imaginare se află pe o axă perpendiculară pe axa numerelor reale, în dreptul originii. Algoritmul a mai avut în vedere ceva, și anume posibilitatea de a roti orice valoare absolută cu $90°$, un fapt pe care ni-l va lămuri urmărirea rotației în toate cele patru sferturi de cerc. Pornim din nou de la $(+a)$. Dacă facem o rotație de $90°$ obținem $(+ai)$. Următoarele $90°$ dau $(+ai)i$, deci $(+ai^2)$. Dar din $i^2 = -1$ rezultă, după $180°$, numărul $(-a)$, adică un rezultat concordant. După parcurgerea celui de-al treilea sfert de cerc obținem pentru $(-a) \cdot (+i) = -ai$ și după ultimele $90°$ obținem $(-ai) \cdot i = (-a) \cdot i^2 = (-a)(-1) = (+a)$.

Dacă încercăm să ne reprezentăm situația, constatăm că ne putem închipui că toate numerele, adică cele imaginare și cele reale la un loc, sînt dispuse într-adevăr pe o suprafață sau, mai corect, pot fi reprezentate pe o suprafață, deoarece o pereche de axe perpendiculare nu poate fi realizată decît pe o suprafață. Ea presupune așa-numita „a doua dimensiune".

Nu sîntem încă mulțumiți și vrem să valorificăm noile noastre cunoștințe. În acest scop să desenăm din nou axele

„suprafeței numerelor", dar de dată aceasta cu numere concrete (vezi fig. 27).

Axa orizontală, adică linia numerelor reale obișnuite, să o numim axa x, iar cele două părți ale ei $(+x)$ și $(-x)$. Linia imaginară să o numim axa y; partea superioară, care conține

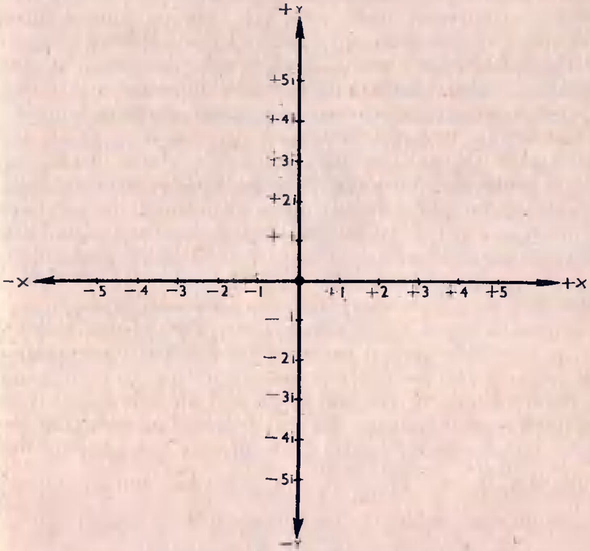


FIG. 27

pe $(+i)$ să o numim $(+y)$, iar partea inferioară, cu $(-i)$, să o numim $(-y)$. Aceste notații sînt valabile pentru toate sistemele de axe, în mod convențional, oricare ar fi scopul lor. Le vom mai folosi încă de multe ori.

Ne interesează în primul rînd dacă axa numerelor imaginare este tot atît de densă ca și cea a numerelor reale, deoarece de aceasta depinde, evident, densitatea și popularea întregii suprafețe a numerelor. Dacă axa imaginară nu ar fi umplută tot atît de dens ca și cea reală, atunci, desigur, nu am putea ocupa orice punct din suprafața numerelor prin combinarea unui număr imaginar cu unul real, oricare ar fi poziția acestui punct. De fapt anticipăm. Noi nu știm încă dacă o asemenea combinație poate fi realizată grafic și nu cunoaștem forma ei.

Să raționăm acum în modul următor: numărul nostru i este și el un fel de „ordin". Anume, ordinul înmulțirii cu $\sqrt{-1}$. Orice număr a este caracterizat și de valoarea sa absolută $|a|$. Indiferent dacă acest $|a|$ este un număr întreg, fracționar sau irațional, $|a|$ poate fi găsit numai în partea pozitivă naturală a axei numerelor reale, deoarece din punct de vedere „istoric" această parte a axei numerelor a constituit punctul de plecare pentru tot ce a urmat. Pe partea pozitivă au fost situate numerele naturale; pe această parte am definit fracțiile și apoi numerele iraționale. Acum devine însă actuală problema „ordinului", a semnului. Asociem acum algebric pe $|a|$ cu plus sau cu minus și obținem în acest mod $(+a)$ sau $(-a)$. Apoi, printr-un sfert de rotație, putem obține alte combinații de ordine, anume $(+ai)$ și $(-ai)$. Ordinul plus i spune: „perpendicular, din zero în sus, cu $|a|$!" Ordinul minus i, dimpotrivă: „perpendicular, din zero în jos, cu $|a|$!"

Cu acestea am rezolvat prima noastră problemă. Valoarea absolută $|a|$ este aceeași pentru toate cele patru segmente de axe. Această valoare poate fi modificată numai prin „semn" sau prin ordinul „i". Nu mai avem nici un dubiu în privința densității axei imaginare. Ea este identică ca structură, izomorfă, cu axa reală. Există, într-adevăr, numere cum ar fi $(1/5)i$, $(1/17)i$, $i\cdot\sqrt[4]{25}$, $\frac{16b}{9i}$, $\frac{9i}{5}$ ş.a.m.d. Am putea trata pe i ca pe un semn sau ca pe un coeficient și să scriem

$$i\cdot\frac{1}{5},\ i\cdot\frac{1}{17},\ i\cdot\sqrt[4]{25},\ \frac{1}{i}\cdot\frac{16b}{9},\ i\cdot\frac{9}{5}\ \text{etc.}$$

Ne mai întrebăm: cum arată combinațiile aditive sau substractive de numere reale și imaginare?

Pe scurt, cum reprezentăm numerele „complexe" (laterale) de forma $(a \pm ib)$? Faptul că nu putem presupune „perechea" pe o axă este clar, deoarece factorii de rotație de forma $(+1)$ sau (-1) rotesc numărul $|a|$ pe axa reală, iar factorii de rotație de forma $(\pm i)$, dimpotrivă, pe cea imaginară. Dacă scriem factorii de rotație, cea mai generală formă de numere ar trebui scrisă în felul următor

$$(\pm 1)\,|a| \pm (\pm i)\,|b|.$$

Acum singura deosebire dintre numerele reale și cele imaginare constă numai în anularea lui $|a|$ sau $|b|$. Dacă $|a|$ este egal cu zero, atunci rămîne $(\pm i)|b|$, adică numărul imaginar $(\pm ib)$. Dacă $|b|$ devine egal cu zero, atunci rămîne $(\pm 1)|a|$, adică numărul real $(\pm a)$. Dacă $|a|$ și $|b|$ sînt simultan nuli, atunci se obține chiar zero. Dacă $|a|$ este diferit de 0, ca și $|b|$, atunci obținem cea mai generală și cuprinzătoare schemă a unui număr, și anume „complexul", combinația tuturor numerelor posibile, numărul complex sau lateral.

Pentru reprezentare trebuie să ne întrebăm ce înseamnă un ordin ca $a + bi$ sau $a - bi$ etc.; a sau $(+a)$ înseamnă că trebuie să ne deplasăm pe partea pozitivă a axei numerelor cu distanța a. De exemplu, putem lua $a = 3$. Iar bi înseamnă că trebuie să urcăm de aici perpendicular, cu bi; concret, de exemplu, cu $4i$. Acesta este însă un proces de mișcare, o problemă cinematică sau foronomică (*Kinema* = mișcare, *foronomie* = teoria abstractă, generală, a mișcării). Și într-adevăr, scopul final al mișcării este atins prin două mișcări efectuate în două direcții perpendiculare, de aceea trebuie reprezentat ca rezultat al acestor două mișcări. Pe scurt, punctul final trebuie să corespundă simultan ordinului real și celui imaginar. Să desenăm acest număr $(3 + 4i)$ (vezi fig. 28).

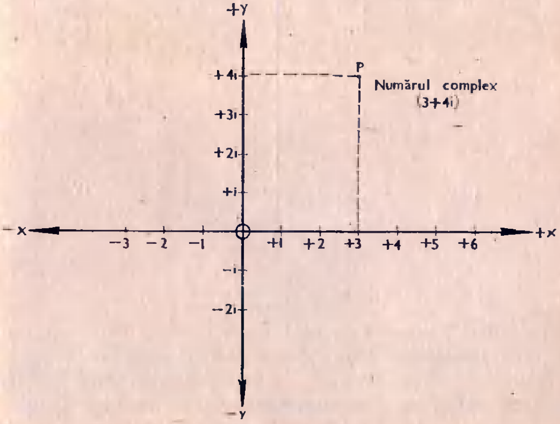


FIG. 28

Problema noastră a reuşit: „numărul complex“ se află în afara axelor, pe suprafaţa numerelor! Acum vrem, pentru o lămurire mai bună, să desenăm numere complexe în toate cele patru cadrane (vezi fig. 29).

Ordinele semnelor şi ordinul i sînt acum clare. Deosebit de remarcabil este numărul din cadranul IV, deoarece aici componenta imaginară este iraţională. Anume, $-\pi i$ este egal cu $-(3{,}1415926...) \times (\sqrt{-1})$.

Oricît de interesantă şi fructuoasă ar fi teoria numerelor imaginare, pe a cărei folosire sistematică se sprijină una din

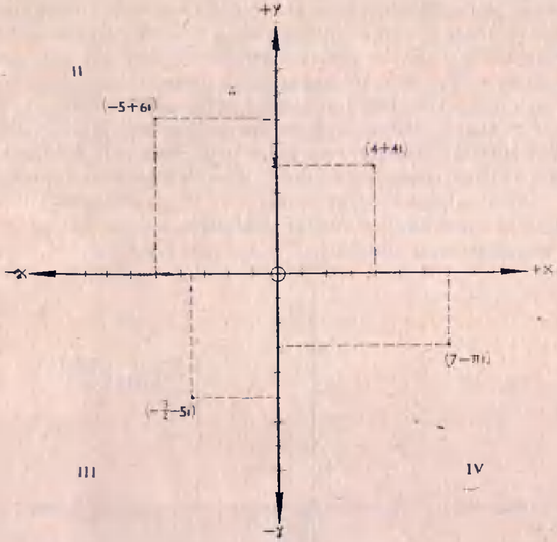


FIG. 29

cele mai înalte ramuri ale matematicii superioare, aşa-numita „teorie a funcţiilor“ sau „teorie a variabilelor complexe“, am fi neconsecvenţi faţă de problema noastră dacă am zăbovi mai mult. De aceea ne limităm la a observa că pentru noi „numerele complexe“ apar ca simple „expresii cu mai mulţi termeni" şi cu ele putem calcula, cu precauţie, dar fără timiditate, în cadrul celor patru operaţii fundamentale, deoarece, la urma urmelor, şi i nu este decît un „măr". În orice caz, în calculele concrete trebuie să observăm că i înseamnă chiar $\sqrt{-1}$. Însă în toate calculele o scoatem cu siguranţă la capăt cu legile noastre referitoare la „combinarea ordinelor".

Am menţionat mai înainte faptul că cele patru operaţii fundamentale (adunarea, scăderea, înmulţirea, împărţirea) nu prezintă dificultăţi, chiar dacă apar numere imaginare. Însă nu vrem să părăsim această lume a fantomelor din matematică, în care apar legături între numere şi forme, pe care în lumina strălucitoare a numerelor reale nici un ochi omenesc nu le bănuieşte, fără a da cel puţin o mică sugestie a minunilor acestei lumi. De aceea să dezvăluim că ridicarea la putere a lui i, în concordanţă cu proprietatea lui i ca factor de rotaţie, produce un ciclu, care decurge în modul următor:

$$
\begin{aligned}
i^2 &= (\sqrt{-1})^2 = (-1)^{\frac{2}{2}} = (-1)^1 = -1\\
i^3 &= i^2 \cdot i = (-1) \cdot i = -i\\
i^4 &= i^3 \cdot i = (-i) \cdot i = (-1) i^2 = +1\\
i^5 &= i^4 \cdot i = (+1) \cdot i = +i\\
i^6 &= i^5 \cdot i = (+i) \cdot i = i^2 = -1
\end{aligned}
$$

etc.

Sau, mai general,

$$
\begin{aligned}
i^{4n} &= +1\\
i^{4n+1} &= +i\\
i^{4n+2} &= -1\\
i^{4n+3} &= -i\\
i^{4n+4} &= +1
\end{aligned}
$$

ş.a.m.d., unde n poate lua orice valoare naturală de la 1 pînă la orice valoare finită.

Mai dificilă şi mai misterioasă decît ridicarea la putere se dovedeşte a fi extragerea rădăcinii din numere imaginare şi complexe. Deoarece străduința noastră principală rămîne mereu îndreptată spre reducerea tuturor rădăcinilor superioare din (-1) la rădăcini pătrate din (-1), adică la valorile lui i, au fost obținute, în acest scop, numeroase formule, prin diferite artificii geniale, cu ajutorul ideii de factor de rotație, a căror dezvoltare ne-ar duce prea departe[1]. De aceea, ne mulțumim să arătăm că rădăcina pătrată a unui număr complex $a + bi$ se calculează în modul următor:

$$\sqrt{a \pm bi} = \sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} + a}{2}} \pm \mathrm{i} \cdot \sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} - a}{2}},$$

o formulă care poate fi aplicată, desigur, și pentru rădăcinile pătrate ale lui i însuși, deoarece i este și el un număr complex $(a + bi)$, unde $a = 0$ și $b = \pm 1$. Astfel $\sqrt{\mathrm{i}}$ devine prin formula noastră $\frac{1}{\sqrt{2}} + \mathrm{i} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$, iar rădăcina $\sqrt{-\mathrm{i}}$, din aceeași formulă, $\frac{1}{\sqrt{2}} - \mathrm{i} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$. Faptul că rădăcina lui i nu mai este pur imaginară, ci complexă, se explică prin aceea, că ea se află pe suprafața numerelor.

În general, orice rădăcină de ordinul n a lui i, pe care am putea-o obține treptat și cu osteneală din formula precedentă, numai în cazul rădăcinilor de ordinul 2, 4, 8, 16, 32 ș.a.m.d. se poate obține direct printr-o altă formulă, mai ușor și mai sigur. Ea este

$$\sqrt[n]{\mathrm{i}} = \cos\left(\frac{90}{n}\right)^\circ + \mathrm{i} \cdot \sin\left(\frac{90}{n}\right)^\circ,$$

unde n este un număr întreg. Pe lîngă aceasta observăm că toate rădăcinile de ordinul n din i sînt rădăcini „pare" de forma $\sqrt[2r]{\mathrm{i}}$, deoarece i însuși este o rădăcină de ordinul doi și

---

[1] Un coeficient în fața lui i nu provoacă dificultăți. Putem să-l facem întotdeauna real. De exemplu,

$$\sqrt[12]{-9} = \sqrt[12]{9} \cdot \sqrt[12]{-1} = \sqrt[12]{9} \cdot \sqrt[6]{\mathrm{i}}$$

și în general

$$\sqrt[2n]{-a} = \sqrt[2n]{a} \cdot \sqrt[n]{\mathrm{i}}.$$

deci trebuie să legăm de fiecare indice al radicalului o rădăcină „pară":

$$[(\sqrt[3]{\sqrt{-1}}) = \sqrt[3\cdot 2]{-1} = \sqrt[6]{-1} \text{ ş.a.m.d.}]$$

Acum, pe deplin stăpîni pe universul numerelor, vrem să aplicăm experienţa noastră în ceea ce priveşte îndeplinirea ordinelor de mişcare, în vederea unui scop, care va reuni într-un mod surprinzător tot ceea ce pînă acum am fost obişnuiţi să considerăm a fi domenii separate.

O lungă dezvoltare istorică a dus la descoperirea „geometriei analitice", sau a „coordonatelor", de la Apollonius din Perga, trecînd prin cercetările scolastice din mănăstiri, ale lui Nicole din Oresme, din secolul al XIV-lea, şi Johannes Kepler — pînă la lucrările lui Fermat şi Descartes. De numele lui Descartes (Cartesius), care ca tînăr ofiţer de cavalerie în taberele de iarnă ungare, în mijlocul grozăviilor războiului de 30 de ani, a dus această artă a „analizei" la o perfecţiune provizorie, vrem să legăm definitiv respectul faţă de geniul forţei creatoare a spiritului omenesc.

COORDONATE

După cum sîntem obișnuiți, vrem ca înainte de a vorbi mai amănunțit să ne construim o mașină explicativă, care să ne procure mai întîi cîteva noțiuni asupra celei mai generale științe a mișcării și anume foronomia. Această foronomie este astăzi dată uitării. Se vorbește într-un sens similar despre „cinematică"; fizica și mecanica cunosc numeroase legi de mișcare, dar subînțeleg aproape întotdeauna mișcarea fizică, adică mișcarea unui „Ceva" concret, chiar dacă este doar un „punct material" fizic, insesizabil.

Pe noi nu ne interesează însă acel „Ceva" în mișcare. Vom merge cu abstractizarea atît de departe, chiar dacă așa ceva nu este posibil în „realitate", încît vom considera doar mișcarea. De aceea operăm cu puncte matematice, cu linii matematice lipsite de lărgime și cu suprafețe lipsite de grosime, deci cu figuri care pot fi gîndite, dar nu percepute. De aici și grotescul următoarei anecdote: un parvenit reușește să încorporeze pe fiul său într-un regiment de elită, cu termen redus. Fiul are nevoie de bani și deoarece nu mai găsește motive pentru a-i cere, scrie tatălui că la exercițiile de tragere a spart „linia de ochire" și trebuie s-o înlocuiască. O astfel de linie de ochire ar fi pentru noi un ideal, deoarece ea este o adevărată linie matematică, imaterială, și anume ea este linia imaginară care pornește din ochiul care vizează, trece prin vizor și ajunge la țintă. Ea are, prin urmare, numai lungime și nici o lățime. Datorită acestei imaterialități ea poate fi spartă cu „mare greutate".

Toate acestea au servit numai la a lămuri ce înțelegem, în cele ce urmează, atunci cînd vom desena puncte și linii. Le conferim o materialitate simbolică, dar nu trebuie să uităm niciodată că ele trebuie să fie de fapt invizibile. Să trecem acum la „mașina" noastră. Vom lua o planșetă obișnuită, pe care vom fixa o coală de hîrtie și de care vom sprijini un teu. Vom trasa mai întîi, la marginea inferioară, o linie orizontală, de la un capăt al planșetei la celălalt. Acum vom ruga pe cineva să deplaseze teul într-o mișcare dezordonată de jos în sus, iar noi vom sprijini mereu creionul de teu și, cu o viteză constantă, îl vom plimba pe hîrtie de la stînga spre dreapta (vezi fig. 30).

Spre mirarea noastră, pe hîrtie a apărut o linie neregulată, șerpuită, care nici măcar nu este continuu ascendentă; există

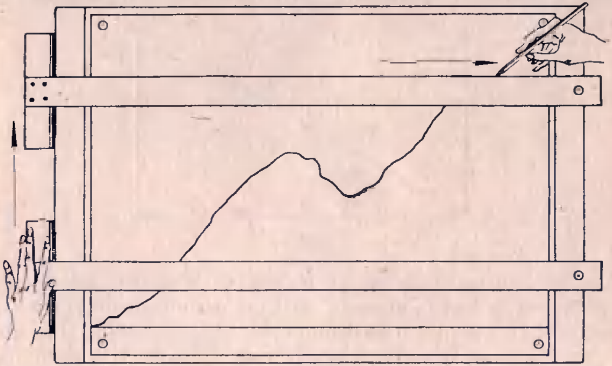


FIG. 30

regiuni în care coboară, și aceasta s-a întîmplat atunci cînd ajutorul nostru a coborît teul. Desigur putem repeta exercițiul nostru de nenumărate ori. Am putea chiar să ne înțelegem cu „ajutorul" nostru ca în deplasarea teului să observe o anumită uniformitate sau să păstreze un anumit ritm. Ceea ce va rezulta de aici vom descoperi mai tîrziu.

Vom cerceta acum, în primul rînd „foronomic", de ce a apărut de fapt această linie ciudată și vom explica fenomenul printr-o analiză profundă. Au avut loc, evident, două mișcări perpendiculare simultane. Anume, deplasarea uniformă a creionului în lungul teului, efectuată de mine spre dreapta, și deplasarea verticală neregulată a teului efectuată de ajutorul meu. În fiecare porțiune a mișcării creionul a fost deplasat atît spre dreapta cît și în sus sau în jos. Cu o figură de stil, putem spune că creionul a încercat să fie credincios ambelor mișcări. Atunci cînd un tren trece printr-o rafală de ploaie, ale cărei picături cad vertical, picăturile nu lasă pe geamuri urme verticale, ci oblice. Aceste urme sînt cu atît mai înclinate, cu cît trenul merge mai repede. Picăturile de ploaie încearcă să asculte de două mişcări perpendiculare una pe alta (fig. 30).

Ne-am putea închipui o mică fracţiune a unei astfel de mişcări şi în modul acesta (fig. 31).

Acest „paralelogram al mişcării" exprimă tendinţa punctului P de a urma ambele mişcări. Această tendinţă nu rămîne fără

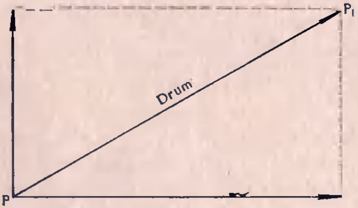


FIG. 31

nici un rezultat, deoarece în P_1 punctul a urmat ambele mişcări care i-au fost imprimate, atît cea orizontală cît şi cea verticală. El s-a deplasat pe drumul impus spre dreapta şi în sus.

Totuşi, această explicaţie este doar aproximativă dacă mişcarea verticală nu este riguros uniformă. Aceasta înseamnă că „drumul parcurs de punct între P şi P_1 este o dreaptă, numai dacă ambele mişcări sînt uniforme. Însă am presupus

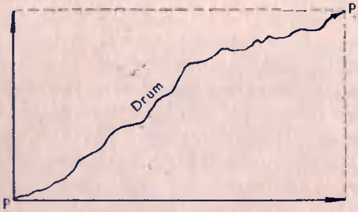


FIG. 32

că mişcarea verticală este arbitrară şi dezordonată. De aceea putem considera că „paralelogramul mişcării" este valabil doar aproximativ, pentru porţiunile infinit mici ale mişcării, deoarece în realitate, chiar şi în interiorul unui paralelogram infinit mic, mişcarea este neregulată, aşa cum se arată în fig. 32.

Oricît de mici am alege porțiunile, datorită neregularității mișcării verticale am dă întotdeauna de „elemente de drum" neregulate.

De aceea trebuie să facem „analiza" noastră din alt punct de vedere. Singura cale pe care putem evita drumurile neregulate, în cazul neregularității cel puțin a uneia din mișcări, este de a încerca să excludem lungimea drumului și să cercetăm un punct lipsit de lungime al drumului, și anume un punct arbitrar.

Vom alege punctul pe planșetă, după ce am îndepărtat teul. În ce mod participă punctul la cele două mișcări, din punct de vedere „foronomic"? Punctul a fost deplasat spre

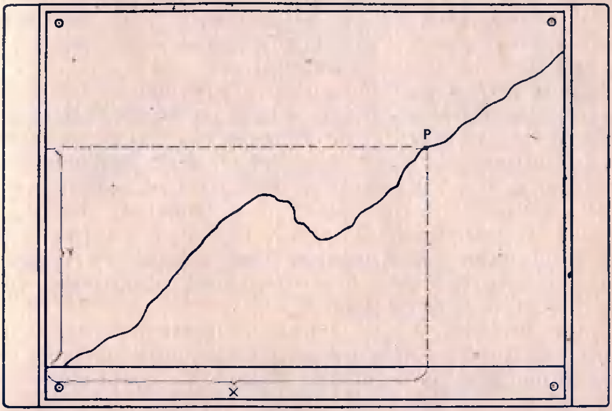


FIG. 33

dreapta cu distanța x, adică creionul a fost deplasat cu x spre dreapta, iar înălțimea pe care a atins-o prin mișcarea verticală o notăm cu y.

Acum am putea face același raționament pentru fiecare punct al „drumului" și de fiecare dată putem nota „lungimea" cu x și „înălțimea", sau „lățimea", cu y. Fiecare punct al drumului este determinat în mod unic de x-ul și de y-ul său. Valorile lui x și y, pe care le putem chiar măsura, sînt asociate, „coordonate" punctului corespunzător. De aceea, Leibniz le-a dat numele de „coordonate". Mai precis, am determinat așa-numitele „coordonate punctuale", deoarece am asociat, coordonat, unui punct anumite valori poziționale caracteristice.

Dar cu aceasta am realizat foarte puțin, deoarece nu putem măsura pentru o infinitate de puncte pe x și pe y și să determinăm în acest mod coordonatele lor. Sîntem siguri că traiectoria constă dintr-o infinitate de puncte, deoarece fiecărui punct al dreptei fundamentale îi corespunde un punct al traiectoriei (situat deasupra dreptei fundamentale) și deoarece la trasarea liniei spre dreapta nu am lăsat creionul din mînă, iar după concepțiile noastre de pînă acum o astfel de linie continuă este formată dintr-o infinitate de puncte. Din punct de vedere aritmetic am mai putea susține că linia x, adică linia fundamentală, nu este altceva decît linia numerelor reale, deoarece putem să alegem pe x oriunde la dreapta lui 0, fie ca fracție, fie ca număr irațional.

Ceea ce ne lipsește este, evident, o formulă generală prin care să putem determina pe x și pe y. Acum mai știm că o formulă în care apar x și y și în care acestea sînt necunoscute nu este altceva decît o ecuație diofantică sau nediofantică, în orice caz o ecuație nedeterminată cu două necunoscute. Este convenabil să considerăm pe x cunoscut, alegîndu-l în mod arbitrar. Dacă însă putem alege pe x arbitrar și îl putem înlocui cu ceea ce am ales, atunci valoarea corespunzătoare a lui y trebuie să fie bine determinată, obligatorie, pentru ca formula să corespundă.

Întrevedem dintr-o dată un drum și cunoaștem chiar instrumentul cu care ne putem deplasa cu mai multă siguranță pe acest drum. Este chiar funcția! Funcția are proprietatea ca un x arbitrar să determine obligatoriu pe y. Cum obținem însă această funcție care să aibă proprietatea de a descrie corect traiectoria? Situația pare desperată. Intuiția îmi spune că în cazul unei traiectorii ascendente, al unei drepte, al unui cerc sau chiar pentru o elipsă, putem găsi o funcție corespunzătoare, dar că putem face acest lucru și pentru traiectorii oricît de neregulate, ni se pare aproape imposibil. Am mai avea o ultimă șansă. Poate că această traiectorie neregulată se descompune în porțiuni care pot fi considerate mai regulate și pentru fiecare din aceste porțiuni se poate forma funcția corespunzătoare. Mărturisim că toate obiecțiile și toate propunerile sînt valabile. Și noțiunea de „regulat" este foarte vagă. Am putea răsturna problema și să susținem că dacă oricărei traiectorii îi corespunde o funcție atunci și oricărei funcții trebuie să-i corespundă o traiectorie. Și aceasta este corect, în linii mari. Cu toate acestea, pentru a conferi presimțirilor noastre o formă, vrem să procurăm „analizei“ sau „geometriei noastre analitice“ un alt instrument important.

Mai întîi să ne reamintim o observație mai veche: și anume, că funcția ar fi un număr faustic. Ce înțelegem prin aceasta? Să lămurim mai bine natura funcției. Am menționat că o funcție se scrie în general sub forma $y = f(x)$ și înțelegem prin aceasta că y este o combinație de valori ale lui x și ale unor constante. Eventual una foarte complicată. Astfel, ecuația

$$y = (2x + 5) \cdot \frac{\sqrt{5x^3 - 19}}{x^5 - x^3 + 2} \cdot 25x^7$$

este o funcție, chiar una foarte complicată. $y = 5x + 13 \cdot \sin x$ este de asemenea o funcție. Cuvîntul funcție nu este chiar fără echivoc. Uneori prin funcție înțelegem toată ecuația, în care se presupune că x poate fi substituit în mod arbitrar. Alteori înțelegem chiar y-ul însuși, deoarece acest y este chiar rezultatul calculelor efectuate cu x-ul ales. Am mai putea scrie

$$(\text{Funcție de } x) = f(x) = 5x + 13 \cdot \sin x$$

sau mai explicit

$$\begin{array}{l} y = f(x) \\ \underline{y = 5x + 13 \sin x} \\ f(x) = 5x + 13 \sin x. \end{array}$$

Desigur, s-ar putea și în felul următor

$$\begin{array}{l} f(x) = y \\ \underline{f(x) = 5x + 13 \sin x} \\ y = 5x + 13 \sin x \end{array}$$

Este o mare greșeală să confundăm diferitele semnificații ale cuvîntului „funcție“, care în fond are doar un singur înțeles. Un începător este complet derutat de acest fapt. De aceea vom studia situația de la început. Să presupunem că avem ecuația

$$15x^2 + 9x + 3y = 12x - 27.$$

Aici apar x şi y. Pe lîngă aceasta, x apare cu două puteri diferite, iar y-ul are un coeficient, pe 3. Dacă ar trebui să lucrăm cu această „funcţie" am fi puşi în mare încurcătură. Chiar maşina noastră ingenioasă, cu indicator, nu ne-ar ajuta, deoarece indicatorul arată pe y şi nu pe $3y$. Acest tip de funcţie se numeşte funcţie „implicită" şi trebuie să căutăm să o explicităm, să o facem „explicită". Deoarece pînă acum ne-a interesat mereu aflarea lui y trebuie să „izolăm" pe y tot aşa cum am procedat în studiul ecuaţiilor obişnuite cu necunoscuta x. În fond este vorba de acelaşi lucru, deoarece dacă avem dreptul să alegem pentru x valori oarecare, atunci transformăm în constante toate mărimile în care apare x şi rămîne ca necunoscută (în limbajul tehnicii ecuaţiilor) numai y-ul. Rezolvăm ecuaţia în raport cu y, tot aşa cum putem rezolva o ecuaţie de forma

$$2x + 5a = 24 + 17b$$

în raport cu x, atunci cînd ne este permis să alegem pentru a şi b valori oarecare, de exemplu $a = 2$, $b = 4$. Atunci am avea

$$2x + (5 \cdot 2) = 24 + (17 \cdot 4) \quad \text{sau}$$

$$2x = 24 + (17 \cdot 4) - (5 \cdot 2)$$

$$2x = 82$$

$$x = 41.$$

Caracterul funcţional este conferit unei ecuaţii numai atunci cînd în locul lui x putem substitui nu numai un singur număr, ci orice număr.

În continuare, pentru a putea rezolva uşor în raport cu y vom explicita mai întîi funcţia noastră

$$15x^2 + 9x + 3y = 12x - 27.$$

Găsim:

$$3y = 12x - 27 - 9x - 15x^2$$

$$3y = 3x - 15x^2 - 27$$

$$y = x - 5x^2 - 9,$$

sau ordonat

$$y = -5x^2 + x - 9.$$

Acum putem spune că y este o funcție de x, sau $y = f(x)$, dacă ținem seama de faptul că x-ul poate fi ales în mod arbitrar. Pentru fiecare alegere a lui x vom obține, în general, un alt y. Prin urmare, putem determina nenumărate valori ale lui y. Vom face concret aceste calcule și vom întocmi un tabel.

x	y	x	y	x	y
1	-13	$\frac{1}{2}$	$-\frac{39}{4}$	0	-9
2	-27	$\frac{2}{3}$	$-\frac{95}{9}$	$\sqrt{2}$	$-17,586\ldots$
3	-51	$\frac{1}{8}$	$-\frac{573}{64}$	π	$-55,2064\ldots$
4	-85	$\frac{4}{7}$	$-\frac{493}{49}$	e	$-43,227\ldots$

În prima coloană a tabelului am trecut numerele întregi naturale pozitive, în cea de-a doua, fracțiile ordinare, iar în cea de-a treia, pe zero și numerele iraționale. De fiecare dată a rezultat o valoare determinată pentru y.

Dacă, în continuare, desemnăm pe fiecare x împreună cu y-ul corespunzător ca pereche de numere, am obține tot atîtea perechi de numere cîte valori ale lui x am introdus în ecuație.

Cu aceasta nu am rezolvat încă prima problemă: cum ajungem să desemnăm pe y drept „număr", drept „număr faustic"? Răspundem că y-ul este un fel de număr mobil, dat de valoarea lui x și chiar de x-ul corespunzător. Dacă acest x poate fi arbitrar, y-ul nu poate lua chiar orice valoare. El este constrîns, între anumite limite, de felul în care apare x și nu va forma o succesiune arbitrară de numere, ci una bine determinată, oricît de mici am alege intervalele dintre valorile lui x. y-ul capătă o formă impusă de modul în care a fost ales x. El se modifică în mod dependent, impus, iar această „succesiune de numere" a valorilor lui y poate fi concepută ca număr „faustic", mobil. Imaginea lor, considerată foronomic, este chiar „drumul" nostru sau, cum se mai spune, „o curbă", „graficul funcției".

Dar situația se prezintă în așa fel încît, așa cum am mai spus, putem interverti lucrurile. Am fi putut susține, tot atît de bine, că o succesiune de perechi de numere este o funcție. Din această observație vedem că o funcție ne poate fi dată în trei moduri:

1. Ca ecuație implicită sau explicită cu două[1] necunoscute. De exemplu: $y = -5x^2 + 3x - 9$.

2. Sub formă de „curbă", pentru care urmează să căutăm mai întîi formula, „funcția".

3. Ca tabel de perechi de numere, care pot fi luate din observații (de exemplu, numărul furtunilor dintr-o lună, în funcție de temperatura medie a fiecărei luni).

În cel de-al doilea caz, așa cum am mai spus, trebuie să căutăm funcția. În cel de-al treilea caz trebuie să stabilim mai întîi dacă este vorba despre o dependență funcțională.

Dar cu toate considerațiile noastre profunde nu putem progresa fără a utiliza metode „analitice". De aceea vrem să ne întrebăm cum se poate transforma o funcție dată într-o curbă. Întrebarea cum se poate transforma o curbă într-o funcție ne va preocupa de-abia în ultimul capitol. De asemenea, și întrebarea cum se poate obține o curbă din perechi de numere (problema interpolării).

Întrebarea noastră mai presupune ceva, înainte de a răspunde repede și simplu, anume stabilirea convențională a „sistemului de coordonate". Nu vom avea dificultăți în această privință, deoarece cu noțiuni asemănătoare am mai lucrat la numerele imaginare.

Îl urmăm, deci, pe Descartes (Cartesius) și alegem un așa-numit sistem de coordonate cartezian ortogonal, în care atît denumirile cît și ipotezele referitoare la ordonare le adoptăm în mod convențional. Încă o dată, adoptăm în mod convențional sistemul nostru. Principial vorbind, el nu este cu nimic preferabil față de alte sisteme posibile, decît, cel mult, printr-o anumită simplitate. El arată ca în fig. 34.

Punctul O se numește originea sistemului de coordonate. Axa x se numește axa absciselor, axa y, axa ordonatelor, iar ambele axe la un loc, „axele de coordonate". „Cadranele" sînt chiar „sferturile" planului infinit. Ele sînt numerotate în sensul opus sensului de rotație al acelor unui ceasornic. Semnificația semnelor de mai jos o lămurim foarte simplu (fig. 34).

---

[1] Ne limităm la două variabile!

Anume, putem privi axele ca fiind două axe de numere reale, dispuse perpendicular. De aici rezultă semnificația semnelor în mod obligatoriu, dacă presupunem că semnele minus se află pe linia orizontală la stînga lui zero, iar pe linia verticală sub zero. Sîntem acum în stare să plasăm așa cum trebuie „perechile de numere".

Orice pereche de numere se reprezintă în sistemul de coordonate ca un punct, cu condiția ca ea să fie o pereche de numere

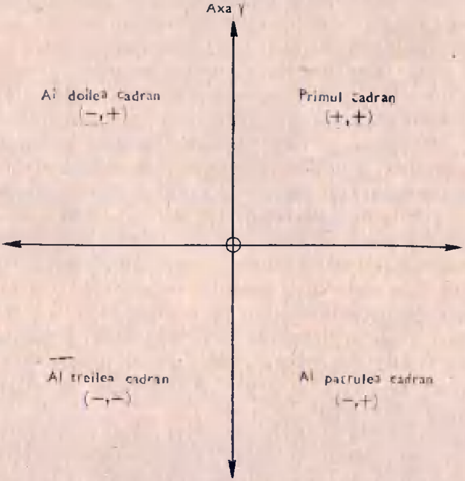


FIG. 34

reale, deoarece am presupus că ambele axe sînt reale. Plasarea numerelor imaginare și complexe am văzut-o mai înainte. Perechile de numere imaginare și complexe sau perechile de numere imaginare (complexe) și reale nu pot fi plasate în același plan. Avem nevoie, pentru aceasta, de două plane și ajungem la „reprezentarea conformă". Acest domeniu depășește cu mult cadrul nostru, deoarece aparține matematicilor superioare.

GEOMETRIA ANALITICĂ

Scopul, de nenumărate ori mărturisit, al ambiției noastre rămîne mereu însușirea noțiunilor fundamentale ale analizei infinitezimale, deci a disciplinei care, în general, este denumită „matematica superioară". Și trebuie să fim conștienți că prin fiecare pas pe care îl facem ne apropiem tot mai mult de acest scop. Neglijăm într-o oarecare măsură amănuntul, care ar fi deosebit de interesant și de important în sine. Multe lucruri le vom prezenta numai în linii mari sau într-o lumină deosebită de aceea în care ele sînt predate în învățămînt. Așa, de exemplu, vom face geometrie „analitică" într-un mod defectuos și ciudat, cu toate că tocmai această parte a geometriei a fost și este una din condițiile principale ale matematicii superioare. Să lăsăm acum vorba și să trecem la acțiune.

Ne punem mai întîi problema, în mod aparent lipsită de legătură cu cele spuse mai înainte, de a determina în ce condiții segmente perpendiculare pe o dreaptă au extremitățile așezate pe o a doua dreaptă. Sau, mai bine, presupunem că problema este deja rezolvată, așa cum se procedează de obicei în geometrie, și vom căuta să deducem „condițiile" din soluție (vezi fig. 35.)

În punctele de la A la K ale „dreptei g" sînt ridicate segmente perpendiculare, a căror lungime este astfel aleasă încît extremitățile lor să se afle pe o dreaptă g_1. Fie l_0, l_1, ..., l_9 aceste segmente, ridicate la o distanță arbitrară unul de altul. Dacă aleg punctul A ca origine a măsurării și o unitate de lungime oarecare, atunci unul sau altul din picioarele acestor perpendiculare se poate afla într-un loc „irațional". Acest lucru, prin convențiile făcute, este indiferent. Oricine are puțină intuiție geometrică va putea citi cu ușurință „condiția", din figură: segmentul AB, segmentul perpendicular l_1 și segmentul interceptat a_1 al dreptei cerute g_1 formează un triunghi. Acest triunghi este asemenea cu triunghiul format din AC, l_2 și $(a_1 + a_2)$. Aceste două triunghiuri sînt asemenea cu triunghiul format din AD, l_3 și $(a_1 + a_2 + a_3)$ ş.a.m.d. pînă la ultimul triunghi, format din AK, l_9 şi $(a_1 + a_2 + \dots + a_9)$. Avem de-a face însă cu triunghiuri dreptunghice. Acestea sînt asemenea numai atunci cînd cele două catete sînt mereu în acelaşi raport. Deoarece asemănarea triunghiurilor este o condiţie pentru posibilitatea de a uni extremităţile segmentelor noastre perpendiculare printr-o dreaptă g_1 şi deoarece această asemănare cere menţinerea unui raport constant al catetelor, deducem că „condiţia" care ne dă soluţia problemei noastre

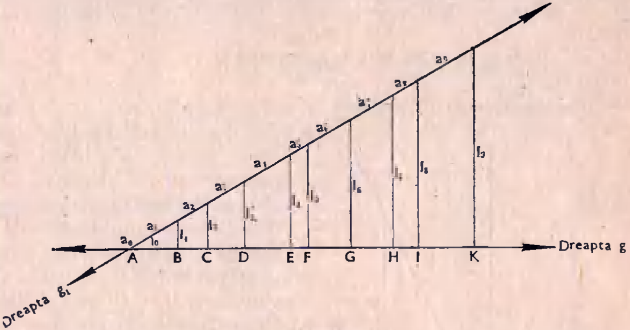


FIG. 35

este chiar menţinerea acestui raport constant. Pentru că alegerea distanţelor perpendicularelor noastre faţă de un punct fixat este arbitrară, ar trebui să stabilim un singur raport între segmentul perpendicular şi distanţă, pentru a cunoaşte comportarea întregii drepte g_1. Am putea scrie:

distanţa: perpendiculară este egal cu $m : n$ sau

de n ori distanţa = de m ori perpendiculara sau

$$\text{perpendiculara} = \frac{\text{de } n \text{ ori distanţa}}{m}.$$

Dar acum ultima noastră formulare arată ca o funcţie şi anume chiar ca una explicită. Dacă notăm perpendiculara cu y şi distanţa cu x obţin

$$y = \frac{n}{m} x.$$

Dar acum m și n, care apar într-o fracție, pot fi înlocuite cu k, astfel încît, în sfîrșit, obținem

$$y = kx$$

drept condiție generală pentru ca toate extremitățile considerate să se afle pe o dreaptă.

Deoarece o dreaptă este determinată în mod unic prin două puncte, vrem să introducem dreapta noastră g_1 într-un sistem de coordonate ortogonal, concretizînd-o prin alegerea lui $k = 2$.

Cele două puncte alese vor avea respectiv $x = 3$ și $x = -2$ (vezi fig. 36).

Deoarece condiția noastră $y = kx$ (pentru $k = 2$) devine $y = 2x$, y va fi egal pentru $x = (+3)$ cu $(+6)$, iar pentru $x = (-2)$ cu (-4). Dreapta noastră trece prin originea sistemului de coordonate. Cititorul poate găsi pentru orice alt x pe y-ul corespunzător, folosind hîrtie milimetrică. Va găsi că extremitatea corespunzătoare se va afla mereu pe dreaptă. Am determinat în acest mod, așa cum se spune, „ecuația analitică" a unei drepte sub forma unei ecuații $y = kx$. Ambele necunoscute apar aici la puterea întîi. Deoarece, însă, ecuația unei drepte conține întotdeauna puterea întîi a necunoscutelor, o astfel de ecuație (funcție) se numește liniară (de la *linea*, ceea ce înseamnă linie dreaptă). Înainte de a merge mai departe vom mai spune cîteva cuvinte despre folosirea cuvintelor funcție și ecuație. Vrem să ieșim din dilemă, și anume vom spune că orice funcție este o ecuație,

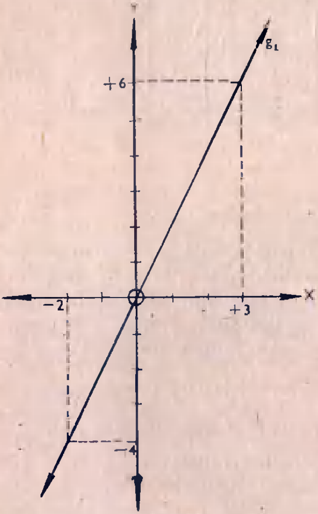


FIG. 36

deoarece ea poate fi scrisă în mod formal astfel: $y = f(x)$. Nu orice ecuație este, însă, o funcție.

Astfel, $5x^2 + 3x + 9 = 27$ este o ecuație, dar în nici un caz o funcție, deoarece în ea apare numai necunoscuta x și nu putem vorbi nici despre variabilă arbitrară și nici despre variabilă dependentă și această terminologie încîlcită provoacă începătorilor mari dificultăți.

Nu am terminat însă studiul „ecuației" dreptei noastre, care trebuie să fie o „funcție", pentru a putea fi reprezentabilă analitic. Afirmăm că și

$$y = 2x + 3$$

este o funcție „liniară", deci și ea dă o dreaptă. Să facem proba:

Pentru $x = (+3)$ obținem $y = 9$, pentru $x = (-2)$ avem $y = (-1)$. Dreapta nu trece prin originea sistemului de coordonate, ci taie partea pozitivă a axei ordonatelor în $(+3)$. Acest lucru ar fi putut fi stabilit și prin calcul, deoarece pentru $x = 0$ obținem $y = (+3)$. Dacă însă $x = 0$ aceasta nu înseamnă altceva, din punct de vedere analitic, decît că se caută un punct al axei ordonatelor prin care trece dreapta noastră, deoarece chiar acolo $x = 0$. Tot așa $y = 0$ reprezintă punctul de intersecție cu axa absciselor. Deci, $0 = 2x + 3$, sau $2x = -3$, sau $x = -3/2$. O singură privire ne convinge că, într-adevăr, dreapta taie axa absciselor în punctul $x = -3/2$. Noua noastră mașină de calculat și de gîndit se arată a fi din nou ceva miraculos, cu atît mai miraculos cu cît ea leagă

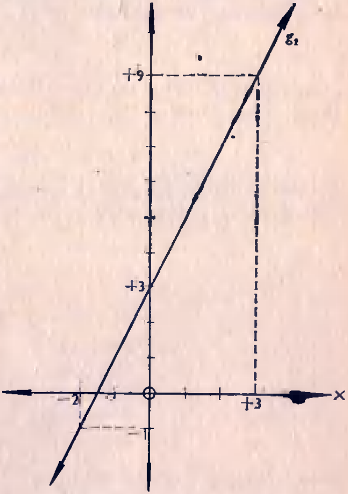


FIG. 37

în mod magic geometria de aritmetică. Ne vom mai mira de această vrajă și în alte exemple mult mai complicate. Iată un exemplu: Am afirmat că forma generală a „ecuației dreptei", dedusă din raționamente în care a intervenit asemănarea, este

$$y = \frac{n}{m} x,$$

unde $\frac{n}{m}$ este raportul dintre segmentul perpendicular și distanță. Dar acest segment și distanță sînt „catetele". Prin urmare, raportul lor este una din funcțiile trigonometrice ale unghiului α.

Și într-adevăr, în baza definițiilor introduse ea este chiar tangenta. Dar, deoarece fracția n/m poate fi „calculată" întotdeauna, în ecuația

$$y = kx$$

„coeficientul" lui x nu este altceva decît valoarea „tangentei" lui α. Deci, într-o funcție liniară explicită de forma

$$y = kx + c \quad (c \text{ este o constantă})$$[1]

k este valoarea tangentei unghiului α, adică a unghiului pe care dreapta îl formează la intersecția cu axa absciselor. Dacă

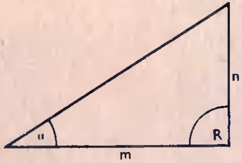


FIG. 38

însă tangenta acestui unghi ne este cunoscută, atunci cunoaștem și unghiul și înclinarea față de axa absciselor. Vom analiza mai tîrziu aceste raționamente.

---

[1] Constanta aditivă nu modifică funcția trigonometrică, după cum ne putem convinge prin desen. Ea deplasează doar dreapta fără a modifica unghiurile.

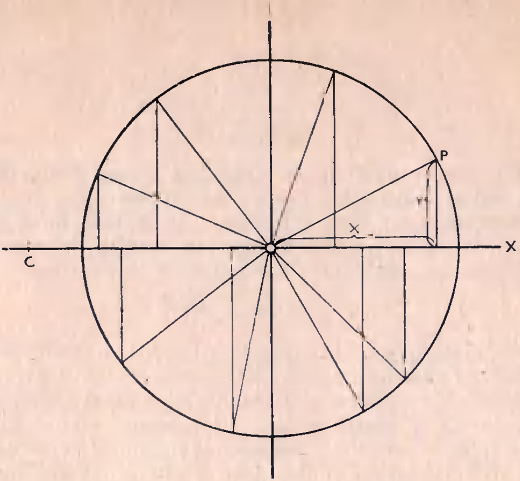


FIG. 39

Ambiţia noastră a crescut şi vrem să găsim şi ecuaţia unei figuri curbe, cum ar fi cea a cercului.

Pe scurt, vrem să găsim o formulă care pentru orice x să ne furnizeze un y, astfel încît punctul corespunzător să se afle pe cerc. În primul rînd, vedem că au sens numai acele valori ale lui x care, atît în partea pozitivă cît şi în partea negativă a axei, nu depăşesc raza cercului, deoarece o perpendiculară în punctul C nu ar întîlni niciodată cercul. Cum să atacăm însă această problemă dificilă? Poate din nou printr-un „raport", deoarece oriunde am alege un x, „perpendiculara" întîlneşte cercul într-un punct. Acest lucru a fost cerut. Acum putem uni acest punct cu centrul cercului printr-o rază. În acest mod apar însă mereu triunghiuri dreptunghice, a căror ipotenuză este, în orice caz, egală cu raza, în timp ce catetele sînt mereu „distanţa" şi „perpendiculara".

Dacă notăm distanţa cu x şi perpendiculara cu y şi dacă cunoaştem sau, cel puţin, presupunem cunoscută raza cercului, atunci are loc relaţia

$$r^2 = x^2 + y^2$$

$$y^2 = r^2 - x^2$$

sau

$$y = \pm \sqrt{r^2 - x^2},$$

în baza teoremei lui Pitagora. Faptul că pentru y vom obţine adesea valori iraţionale, rezultă din teoria radicalilor. În continuare, pentru fiecare valoare a lui x obţinem două valori pentru y, una pozitivă şi una negativă, care au, în orice caz, aceeaşi valoare „absolută". Am putea să mai scriem

$$|y| = |\sqrt{r^2 - x^2}|.$$

Tot ce am dedus pe cale pur aritmetică este corect. O privire aruncată pe figură ne arată că, într-adevăr, fiecărui x îi corespund două valori pentru y, şi anume un y pentru semicercul superior şi un y pentru semicercul inferior. Ambii au însă aceeaşi valoare „absolută", aceeaşi lungime şi se deosebesc numai prin semnul lor şi deci prin poziţia lor în sistemul de coordonate.

Ne minunăm încă o dată de puterea miraculoasă a geometriei analitice; pentru noi este aproape de neînţeles faptul că multiplicitatea unei rădăcini pătrate este reprezentată în interpretare geometrică, în sistemul de coordonate. Această legătură, neliniştitoare şi surprinzătoare pentru începător, dintre aritmetică şi geometrie, această identitate a două ramuri atît de deosebite ale matematicii, formează desigur unul din cele mai mari triumfuri ale capacităţii creatoare a minţii omeneşti. Iar clarificarea acestei legături este o problemă care necesită discuţii matematice şi filozofice adînci şi dificile, care depăşesc cu mult cadrul nostru. De aceea vrem să ne mulţumim cu cea mai simplă explicaţie şi afirmăm că de fapt nu facem geometrie atunci cînd folosim coordonate. Folosim mai degrabă două axe numerice perpendiculare şi operăm cu perechi de numere din aceste două axe. Acestea capătă însă, printr-o reprezentare simbolică, caracterul unor puncte pe o suprafaţă şi se supun în această suprafaţă condiţiilor geometrice, tot aşa cum punctele axei numerice ascultă de geometrie (chiar dacă numai în ceea ce priveşte lungimea). Spunem aceste lucruri numai pentru stimularea cititorilor înclinaţi

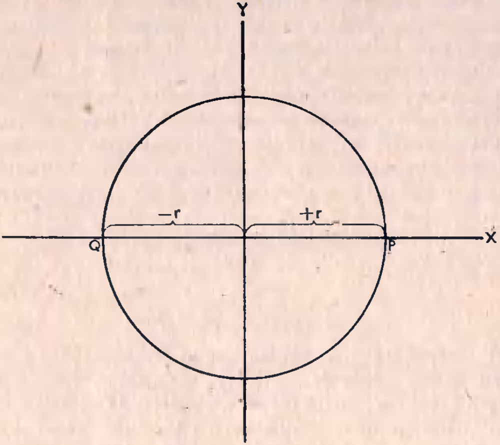


FIG. 40

spre filozofie, care pot găsi toate lămuririle necesare în orice carte bună de geometrie analitică.

Vrem să abordăm însă geometria noastră analitică şi în alt mod, şi anume încercînd cu dibăcie să rezolvăm o ecuaţie pătratică cu ajutorul ecuaţiei cercului:

$$y = \sqrt{r^2 - x^2}.$$

Aceasta este ecuaţia cercului. Acum, desigur, este posibil să căutăm punctul, sau punctele, cercului în care, $y = 0$. Înainte de aceasta să ridicăm ecuaţia la pătrat, membru cu membru:

$$y^2 = r^2 - x^2.$$

Dacă y trebuie să fie egal cu zero, obţinem

$$0 = r^2 - x^2 \quad \text{sau} \quad x^2 = r^2.$$

Deci

$$x = \pm\sqrt{r^2} = \pm r.$$

Din punct de vedere analitic vedem că în punctele în care $y = 0$, adică în locurile în care înălțimea ordonatei este egală cu zero, cercul intersectează axa absciselor (vezi fig. 40).

Fie acestea punctele P și Q. Și aici, deci, geometria analitică a dat un sens multiplicității rădăcinii pătrate.

Dezvăluim în treacăt că prin acest raționament am atins o problemă foarte importantă. Anume, putem interpreta orice ecuație cu o necunoscută, ca și cum ar fi rămășița unei funcții în care y-ul a fost făcut egal cu zero. Dacă am avea de exemplu ecuația

$$x^2 - 2x - 15 = 0,$$

formînd ecuația

$$y = x^2 - 2x - 15,$$

atunci x-ul căutat va rezulta, prin desen, acolo unde curba corespunzătoare funcției taie axa absciselor, anume în acele puncte ale acestei curbe în care y este egal cu zero. Dacă am desena curba pe hîrtie milimetrică într-un sistem de coordonate, atunci am vedea că ea taie axa x-lor în punctele $x = = +5$ și $x = -3$. Această metodă „grafică" de rezolvare a ecuațiilor se folosește pentru rezolvarea aproximativă a ecuațiilor care nu admit o tratare aritmetică.

Acestea sînt ecuațiile în care x apare la o putere mai mare decît puterea a patra. Pentru a da o mică indicație se dau lui x diferite valori, se desenează curba și se observă unde se apropie ea de intersecția cu axa absciselor. Acolo procedăm cu pași din ce în ce mai mici la substituirea valorilor lui x, pentru a nimeri cît mai precis pe acel x în care $y = 0$. Putem chiar să depășim acest punct și atunci am avea o imagine ca în fig. 41.

La $x = 1\frac{1}{2}$ curba se mai află sub axa x-lor. La $x = 1\frac{5}{6}$ curba se află deasupra. Deci x-ul în care $y = 0$ se află între $1\frac{1}{2}$ și $1\frac{5}{6}$. Putem continua încercările în interiorul acestui interval, pînă ce nimerim valoarea cît mai exact. Această metodă se numește „regula falsi" adică „regula falsului", și este o așa-numită metodă de aproximare. Încercăm mai întîi, în mod intenționat, valori false de ambele părți, pentru a vedea unde se poate afla valoarea adevărată.

Nici aici nu mai putem zăbovi mai mult, deoarece materialul care se acumulează devine din ce în ce mai abundent, pe măsură ce pătrundem mai departe. Menționăm doar că această cale de rezolvare a ecuațiilor ne arată că numărul punctelor de intersecție ale curbei cu axa absciselor depinde de puterea maximă a lui x. O ecuație „liniară" are un punct de intersecție, una pătratică două, una cubică trei ș.a.m.d. Prin urmare, orice ecuație are tot atîtea „soluții" pentru x cît indică cea mai mare putere a lui x. Menționăm doar că printre acestea se află și puncte de intersecție, adică soluții, „imaginare" și „complexe".

Din motive practice vrem să dăm foarte rapid soluția aritmetică a așa-numitei ecuații pătratice complete, care conține pe x atît la puterea a doua cît și la puterea întîi. Deci, o ecuație de formă generală

$$x^2 \pm b\,x \pm c = 0.$$

Știm că $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. Această teoremă o vom folosi acum. Luăm ecuația

$$x^2 + bx + c = 0$$

și trecem pe c în dreapta. Deci,

$$x^2 + bx = -c.$$

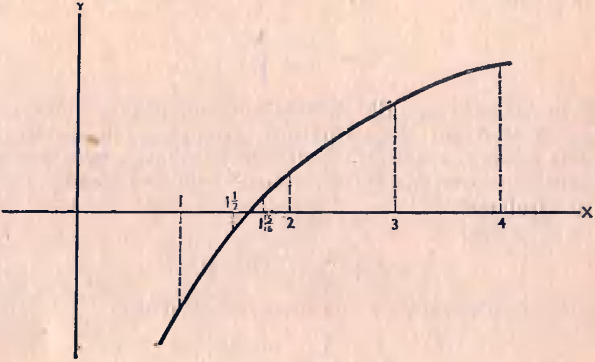


FIG. 41

Facem apoi un artificiu. Completăm „membrul stîng" pînă la un pătrat perfect. Vom face aceasta prin adunarea lui $b^2/4$, deoarece

$$(x + b/2)^2 \text{ trebuie să fie egal cu } x^2 + bx + b^2/4.$$

Pentru că am adunat în membrul stîng pe $b^2/4$ trebuie să facem același lucru și în membrul drept, pentru a păstra „echilibrul". Deci,

$$x^2 + bx + b^2/4 = -c + b^2/4,$$

care se mai poate scrie și sub forma

$$(x + b/2)^2 = b^2/4 - c.$$

Dacă extragem acum rădăcina pătrată din ambii membri obținem

$$\sqrt{\left(x + \frac{b}{2}\right)^2} = \pm\sqrt{\frac{b^2}{4} - c}$$

$$x + \frac{b}{2} = \pm\sqrt{\frac{b^2}{4} - c}$$

și în sfîrșit

$$x = -\frac{b}{2} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4} - c}.$$

Prin această formulă deosebit de importantă sîntem în stare să rezolvăm ecuații pătratice complete, în ipoteza că x^2 este izolat și apare fără coeficient în ecuație. Dacă această condiție nu este îndeplinită, atunci trebuie să efectuăm mai întîi „izolarea".

De exemplu,

$$4x^2 + 7x - 57 = 0.$$

Mai întîi eliberăm pe x^2 de coeficient. Obținem

$$x^2 + \frac{7}{4x} - \frac{57}{4} = 0.$$

Am obținut o ecuație în care $\frac{7}{4}$ corespunde lui b, iar $\left(-\frac{57}{4}\right)$ lui c. Substituim în formulă și obținem

$$x = -\frac{7}{8} \pm \sqrt{\frac{49}{64} - \left(-\frac{57}{4}\right)}$$

$$= -\frac{7}{8} \pm \sqrt{\frac{49}{64} + \frac{57}{4}}$$

$$= -\frac{7}{8} \pm \sqrt{\frac{49 + 912}{64}}$$

$$= -\frac{7}{8} \pm \sqrt{\frac{961}{64}}$$

$$= -\frac{7}{8} \pm \frac{31}{8}.$$

x este deci sau

$$-\frac{7}{8} + \frac{31}{8} = \frac{24}{8} = 3$$

sau

$$-\frac{7}{8} - \frac{31}{8} = -\frac{38}{8} = -\frac{19}{4} = -4\frac{3}{4}.$$

O curbă care ar avea ecuația $y = 4x^2 + 7x - 57$ ar trebui să taie axa x-lor în punctele $x = +3$ și $x = -4\frac{3}{4}$, ceea ce cititorul poate verifica pe hîrtie milimetrică.

Vrem să încheiem capitolul nostru referitor la coordonate, în cuprinsul căruia ne-am pierdut în numeroase digresiuni, cu următoarele concluzii:

Orice funcție de forma generală

$$y = f(x)$$

este reprezentabilă printr-o curbă, într-un sistem de coordonate. Aici termenul „curbă" are un înțeles atît de general, încît și o dreaptă este considerată o curbă. Ea este „cazul limită" al unei curbe, o curbă fără curbură. Această metodă, care constă în a încadra într-o noțiune mai cuprinzătoare lucruri diferite, pentru a obține unitatea sistemului, ne este cunoscută de la puterea de exponent zero. Distingem „ordinele" curbelor după puterea lui x. Astfel, dreapta este o curbă de ordinul unu, cercul o curbă de ordinul doi. Curbe de ordinul doi sînt toate secțiunile conice, ca de exemplu cercul, elipsa, parabola, hiperbola. Curbele de ordin superior, cum ar fi $y = x^3 + x^2 + 5x - 17$, se numesc „parabole" de ordinul trei, sau de ordin superior, dacă x apare la puterea a patra sau la o putere mai mare; $y = x^7 + 4x^3 + 7x - 49$ ar fi o „parabolă" de ordinul șapte.

Geometria analitică pune numeroase probleme atrăgătoare. De exemplu, calcularea intersecției a două curbe sau exprimarea tangentei la o curbă printr-o ecuație. Trebuie să lăsăm de o parte toate aceste probleme ale geometriei analitice „inferioare" pentru a urca la problemele analizei „superioare". Pentru a înțelege însă aceste probleme le vom pune în capitolul următor cu toată rigoarea și vom urma în linii mari dezvoltarea lor istorică.

PROBLEMA CVADRATURII

Probabil că orice cititor a auzit cel puțin o dată de „cvadratura cercului". Bănuim de asemenea, că a auzit și că această problemă este nerezolvabilă, după cum este nerezolvabilă problema construirii unui „perpetuum mobile".

Ce este această „cvadratură"? Pur și simplu o măsurare a suprafeței. Problema cere sau să descompunem suprafața unui cerc în pătrate cu latura egală cu unitatea, astfel încît aria cercului să fie egală cu suma ariilor pătratelor (trebuie să determinăm cîte pătrate de acest fel sînt conținute în cerc), sau să determinăm un pătrat a cărui arie să fie egală cu cea a cercului; cele două probleme sînt echivalente[1]. Abia în 1890, Lindemann a demonstrat că problema este nerezolvabilă, oricît de mică ar fi latura pătratelor unitate, cu toate că se bănuia de multă vreme că problema nu are soluție, deoarece seria lui Leibniz dădea indicații în acest sens. Numărul π este o fracție zecimală infinită irațională; dat fiind că aria cercului este πr^2, înseamnă că $r \cdot r \cdot \pi$ este un număr irațional. O arie care se exprimă printr-un număr irațional nu poate fi scrisă niciodată ca sumă finită de pătrate, deoarece aceste pătrate trebuie micșorate încontinuu pentru ca să nu rămînă rest. Pătratele infinit de mici sînt puncte, iar suprafața unui cerc conține o infinitate de astfel de „puncte".

Arhimede știa că există figuri mai complicate decît cercul, a căror arie poate fi totuși exprimată printr-un număr rațional. De altfel, nu există nici un motiv pentru ca o figură geometrică mărginită de o linie curbă să nu aibă o arie care să fie un multiplu rațional al ariei unui pătrat ales ca unitate. Putem da și o demonstrație semnificativă acestei afirmații. Să presupunem că decupăm dintr-o foaie de carton, omogenă ca grosime, un pătrat cu latura de 1 cm, cîntărim apoi acest pătrat pe o balanță de precizie și constatăm că are o greutate de

[1] Problema cere, mai precis, ca latura pătratului să poată fi construită, cunoscînd raza cercului, numai cu ajutorul riglei și compasului. — *N.T.*

$\frac{1}{10}$ g. Dacă ne-am da multă osteneală am putea decupa din aceeași foaie de carton un poligon neregulat oarecare, care să aibă greutatea de 3 g. Rezultă că suprafața acestui poligon este egală cu 30 cm^2. Nu apare nici urmă de iraționalitate.

La asemenea considerații au dus și au dat mult de gîndit „semilunele lui Hipocrate din Chios", matematician din Grecia antică. „Cvadratura" lor se bazează pe o generalizare a teoremei lui Pitagora. Se demonstrase și în antichitate că aria pătratului construit pe ipotenuză este egală cu suma ariilor pătratelor construite pe cele două catete și, în plus, că, în general, aria unei figuri geometrice construite pe ipotenuză este egală cu suma ariilor figurilor asemenea cu ea, construite pe cele două catete. În treacăt fie zis, această generalizare a teoremei lui Pitagora este o ilustrare semnificativă și simplă a „punții măgarului".

Figura 42 arată că triunghiul dreptunghic mare este descompus în alte două triunghiuri de înălțime h; aceste două triunghiuri trebuie să fie asemenea, deoarece unghiurile lor sînt două cîte două egale. În plus, aceste două triunghiuri pot fi privite ca figuri asemenea, construite pe cele două catete și orientate spre interior. În definitiv și triunghiul mare este asemenea cu cele două triunghiuri pe care le conține, tot în virtutea egalității unghiurilor, și poate fi deci considerat „figură asemenea construită pe ipotenuză". Această ultimă

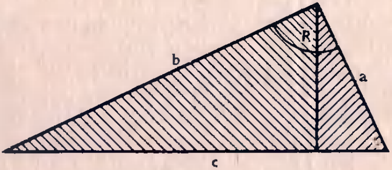


FIG. 42

constatare confirmă clar corectitudinea teoremei generalizate a lui Pitagora, deoarece suma ariilor triunghiurilor construite pe catete este egală cu aria triunghiului construit pe ipotenuză.

Conform acestei teoreme extinse, aria semicercului construit pe ipotenuză este egală cu suma ariilor semicercurilor construite pe cele două catete, deoarece semicercurile sînt totdeauna figuri asemenea. Aria semicercului construit pe ipotenuză este însă egală cu aria triunghiului dreptunghic hașurat plus ariile celor două segmente nehașurate S_1 și S_2, în timp ce ariile semicercurilor construite pe catete sînt date de suma ariilor lui S_1 și S_2, plus suma ariilor semilunei M_1 și a semilunei M_2. Din teorema lui Pitagora extinsă deducem:

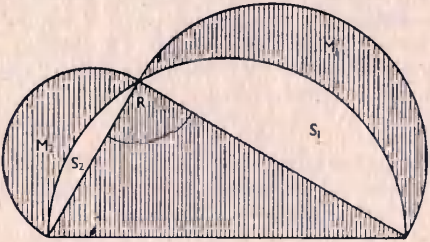


FIG. 43

$$\text{aria triunghiului} + S_1 + S_2 = (M_1 + S_1) + (M_2 + S_2)$$

sau

$$\text{aria triunghiului} + (S_1 + S_2) = (M_1 + M_2) + (S_1 + S_2),$$

sau

$$\text{aria triunghiului} = (M_1 + M_2) + (S_1 + S_2) - (S_1 + S_2)$$

sau

$$\text{aria triunghiului} = M_1 + M_2.$$

Spre marea noastră surprindere, constatăm că putem obține pe cale pur geometrică cvadratura sumei celor două semilune, deoarece aria triunghiului poate fi exprimată totdeauna printr-un număr rațional. Semilunele sînt însă suprafețe mărginite de două curbe — mai mult, de arce de cerc — astfel încît ne-am fi așteptat ca ariile lor să fie numere iraționale. Constatăm, evident fără drept de apel, că situația este cu totul alta.

Am mai spus că aceste rezultate erau cunoscute încă din antichitate și atunci s-a crezut că cvadratura cercului a eșuat din cauza metodei folosite. Pe lîngă aceasta, mai apare o împrejurare. În cazul corpurilor, „cvadraturii“ îi corespunde așa-numita „cubatura", reprezentarea unei figuri spațiale prin „cuburi unitate". În linii mari vorbind, problema cîntăririi unui kilogram de pere sau a confecționării unui ulcior pîntecos cu capacitatea de doi litri ar fi de la bun început imposibilă, dacă nu ar fi realizabilă „cubatura" corpurilor mărginite de suprafețe curbe. Cvadratura și cubatura, principial vorbind, nu eșuează datorită neregularității sau încovoierii suprafeței sau figurii spațiale, ci mai degrabă datorită lipsei unei metode de apreciere numerică a suprafețelor și corpurilor. Un dreptunghi, un triunghi, un con, o prismă, chiar și un trapez sau un octaedru pot fi măsurate prin cvadratură sau cubatură, dacă sînt date suficiente „porțiuni determinante" (laturi sau muchii). La cilindru, con și sferă apar iraționalități datorită inevitabilului π; tot așa, la elipsoidul de rotație. Modul în care trebuie însă considerate suprafețele delimitate de linii curbe sau corpurile delimitate de suprafețe încovoiate, mai complicate decît cele amintite anterior (despre unele se știa chiar că trebuie să fie carabile sau cubabile, convingere dobîndită prin cîntărire), constituie una din cele mai mari enigme și una din cele mai arzătoare probleme ale matematicii. Deși repetăm cele spuse, să ne punem în situația unui matematician, căruia îi este dată următoarea problemă. Să ne închipuim că 25 de centimetri cubi de plumb, care se află sub forma unor cuburi măsurate exact, de cîte 1 cm^3, sînt topiți și, fără a pierde din plumb, sînt turnați sub forma unei „figuri" neregulate, delimitată de o suprafață curbă; apoi se cîntărește figura obținută și se constată că ea are aceeași greutate ca și cele 25 de cuburi; putem susține că figura este cubabilă? Ea are chiar volumul celor 25 de centimetri cubi. Matematicianul poate doar să mărturisească că matematica este capabilă să efectueze cubatura, cel mult, în mod indirect. De exemplu, în felul în care Arhimede a determinat volumul aurului din coroana regelui Hieron din Siracuza, scufundînd-o în apă și măsurînd cantitatea de apă dislocuită, ceea ce a dus la descoperirea celebrului „principiu al lui Arhimede".

Nu vrem să mai prorocim, ci să facem cunoscut că milenii de gîndire, din cele mai vechi timpuri pînă la Kepler, au adus totuși multă lumină în această problemă. Astfel, Kepler în anul 1624, mare amator de vinuri, a făcut cercetări temeinice, în Austria de sus, referitoare la butoaiele de vin și a studiat nu numai cubatura lor, dar a abordat și problema mai grea de a construi butoaie de capacitate cît mai mare, consumînd cît mai puțin lemn, adică cu o suprafață cît mai mică.

În secolul al XVII-lea — să menționăm numai pe Fermat, Cavalieri, Pascal, Gregorius a Sto. Vincentio, Wallis, Sluse, de Witt — s-au făcut numeroase progrese în problema cvadraturii și a cubaturii și s-au obținut multe rezultate bune și corecte. Uneori au fost folosite metodele lui Arhimede, asupra cărora nu putem insista mai mult. Newton și Leibniz au clarificat complet aceste probleme pentru prima dată, prin crearea geometriei infinitezimale și a analizei infinitezimale.

De aceea vrem să încheiem discuțiile istorice și să încercăm să rezolvăm pas cu pas, cît mai concret, problema cvadraturii. Evităm în mod conștient subtilitățile filozofice, care nu sînt lămurite pe deplin nici pînă astăzi, și abordăm chestiunea într-un mod care va da adesea ocazie adversarului nostru să ridice ochii îngrozit. Părerea noastră este însă că o înțelegere aproximativă este preferabilă neînțelegerii. Mai ales nu vom păcătui acolo unde vom reda reprezentări pe care nici cei mai mari matematicieni ai secolului al XVIII-lea nu le considerau false. Cititorul mai ambițios poate oricînd să se lepede de ereziile noastre, citind lucrările marilor și riguroșilor virtuoși ai matematicii.

Observăm, ca introducere, că problema cvadraturii [1] a devenit abordabilă în toată generalitatea ei de-abia după ce a fost fundamentată geometria coordonatelor, deci, în fond, după Descartes. Ne punem acuma problema de a calcula aria unei suprafețe care nu este delimitată din toate părțile de segmente rectilinii. De exemplu, a suprafeței OBC.

Curba K nu este nicidecum un arc de cerc. Ea este o curbă oarecare, în orice caz o curbă a cărei „ecuație" o cunoaștem în mod întîmplător. Fie $y = f(x)$ această ecuație, adică y este calculabil pentru fiecare x prin substituirea, în locul lui x, a valorii sale concrete. În mod intenționat nu scriem nici o funcție complicată, pentru a putea calcula mai tîrziu cu mai multă ușurință. Se presupune însă că $f(x)$ este o expresie încîlcită, formată dintr-o combinație de puteri ale lui x, cu coeficienți și mărimi constante. $f(x)$ este deci o expresie

[1] Neglijăm problema analogă a cubaturii, deoarece presupunem cunoscută doar „geometria analitică a planului".

formată din puteri ale lui x și din constante, ale cărei amănunte nu ne interesează pentru moment.

Probabil că pe începător îl jenează această nouă generalitate. Într-adevăr, nu vrem să mai calculăm cu numere generale, ci cu entități superioare, și anume cu „numere faustice“

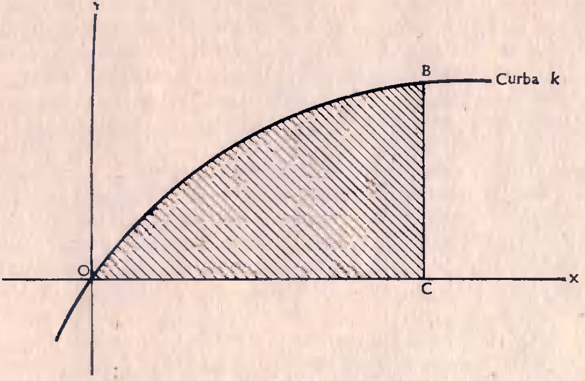


FIG. 44

sau cu funcții. De aceea să lămurim pe scurt procedeul încă o dată:

$$y = f(x) \text{ ar fi, de exemplu, } y = \frac{x^2}{5} + 3.$$

Desigur, tot atît de bine ar fi putut fi $y = 3x^2 + 4x + 9$ sau altceva, de exemplu $y = 2\sqrt{x^4 - 1}\left(\frac{2}{x} + 17\right)$. Tuturor acestor posibilități le este comună forma $y = f(x)$, adică în toate cazurile se presupune că valoarea lui x poate fi aleasă în mod arbitrar și că y rezultă apoi în mod obligatoriu. De aceea, din punct de vedere aritmetic este același lucru dacă spunem y sau $f(x)$. Ambele mărimi sînt egale și, din punct de vedere geometric, sînt ordonate. „Numărul faustic“ este, așadar, o ordonată ridicată din punctul x corespunzător al axei absciselor. „Capetele“ tuturor ordonatelor formează însă „curba“.

Să mai facem o mică observaţie înainte de a trece la descoperirea „cvadraturii". În realitate se numeşte „funcţie" faptul că o mărime depinde de alta în mod legic. Orice copil ştie că obiectele se dilată prin încălzire. Pe această experienţă fizică se bazează construcţia termometrului cu mercur. Pot să spun acuma că dilatarea este o funcţie de temperatură. Putem imagina mii de astfel de exemple. Drumul parcurs în cursul unei călătorii este o „funcţie" de viteza deplasării. Iuţeala căderii corpurilor este o funcţie de forţa de atracţie a Pămîntului, înălţimea omului este o funcţie de vîrstă. Şi calitatea vinului şi a brînzei poate fi o funcţie de timp.

Deoarece şi aria unui cerc depinde de rază, această arie este funcţie de rază. Iată un alt exemplu din viaţa de toate zilele: orice fumător versat ştie că ţigările sînt mai savuroase dacă sînt mai groase. Acelaşi tutun într-o ţigară mai subţire pare mai tare decît dacă e pus într-o ţigară de diametru mai mare. Cum se explică acest lucru? Foarte simplu. Cantitatea de hîrtie creşte cu grosimea ţigării, într-o dependenţă „liniară". Circumferinţa este $2\,r\pi$. Dacă r este de 5 mm, atunci înghiţim fumul produs de $(2 \cdot 5 \cdot 3{,}14)$ mm, adică de 31,4 mm de hîrtie. Dacă $r = 10$ mm, atunci arde un înveliş de hîrtie de $(2 \cdot 10 \cdot 3{,}14\ldots)$ mm, adică de 62,8... mm. Aria de tutun care arde se exprimă însă prin $F = r^2\pi$. Pentru $r = 5$ mm ea este de $(25 \cdot 3{,}14\ldots)$ mm^2 = 78,5 mm^2, iar pentru $r = 10$, de $(100 \cdot 3{,}14\ldots)$ mm^2 = 314,1... mm^2. Iată aplicaţia: „savoarea" este o funcţie pătratică de r, „tăria" este numai o funcţie liniară. Dacă am vrea să desenăm „curba reprezentativă" am vedea că „savoarea" creşte mult mai repede decît „tăria" [1]. De aceea, tocmai ţigările mai groase sînt mai savuroase decît cele subţiri, dacă sînt făcute din acelaşi material.

În încheiere, dăm un exemplu paradoxal, pe care îl reproducem din excepţionala carte a lui Georg Scheffers. Să presupunem că în lungul ecuatorului este întins un inel de fier, format din verigi de cîte un metru. Presupunem că Pămîntul este o sferă netedă, geometric ideală. Cu cît se va depărta inelul de Pămînt dacă într-un loc oarecare introducem o verigă de un metru? Oricine, bizuindu-se pe „bunul simţ", va răspunde că îndepărtarea va fi imperceptibilă. Îndepărtarea

[1] „Savoarea" creşte după o parabolă, „tăria" după o dreaptă.

va fi insesizabilă, deoarece ea va fi de cel mult cîteva milionimi de milimetru. Dar lucrurile nu stau chiar așa. Exemplul nostru ne va convinge nu numai de faptul că nu ne putem bizui pe „bunul simț", dar și de lipsa de echivoc a matematicii.

Raționăm în felul următor: cercul inițial are circumferința de $2r\pi$, deci raza este $\frac{2r\pi}{2\pi}$. Cercul mărit cu o verigă de un metru are circumferința $(2r\pi + 1)$, deci are raza $\frac{2r\pi + 1}{2\pi}$, deoarece orice rază se calculează după formula $\frac{\text{circumferința}}{2\pi}$. Să scădem acum raza mai mică din raza mai mare, obținînd în acest mod îndepărtarea noului inel circular de Pămînt. Deci,

$$\frac{2r\pi + 1}{2\pi} - \frac{2r\pi}{2\pi} = \text{îndepărtarea} = A$$

$$\frac{2r\pi}{2\pi} + \frac{1}{2\pi} - \frac{2r\pi}{2\pi} = A$$

$$A = (\text{îndepărtarea}) = \frac{1}{2\pi}.$$

Deoarece am folosit metrul ca unitate de lungime, avem $1 : 2\pi = 1$ m : 6,283..., ceea ce dă 15,92... cm sau aproximativ 16 cm. Un rezultat de-a dreptul surprinzător! Inelul din jurul Pămîntului se îndepărtează așadar de Pămînt, prin adăugarea unui metru la cei 40 000 de km existenți, cu 16 cm. Matematicianul, în orice caz, nu se miră, deoarece el vede din relația

$$A = \frac{1}{2\pi}$$

că îndepărtarea depinde numai de π, deci de o mărime care nu este legată de rază. El ar scrie

$$y = A = f(\pi)$$

și în felul acesta ar exprima faptul că îndepărtarea, prin adăugarea unei noi verigi, crește mereu cu aceeași mărime, fie că este vorba de înconjurarea ecuatorului, a unui deget, sau a orbitei circulare a lui Neptun. Întotdeauna avem

$$y = \frac{L}{2\pi},$$

unde L înseamnă lungimea verigii introduse. Dacă adăugăm, de exemplu, o întreagă circumferință, deci $2r\pi$, atunci obținem

$$y = \frac{2r\pi}{2\pi} = r,$$

ceea ce nu spune altceva decît că un cerc cu circumferința dublă are și raza dublă. Dar noi cunoaștem acest lucru încă din „exemplul cu țigara".

Pentru cei cu „inteligență naturală" vom adăuga că într-adevăr, 16 cm se află în același raport față de raza Pămîntului și deci înseamnă tot atît de puțin ca și metrul față de ecuator. Dacă acest lucru a fost sesizat în modul cuvenit, atunci se va înțelege, că 16 cm: raza Pămîntului = 1 m: circumferința Pămîntului și toată lumea va fi satisfăcută.

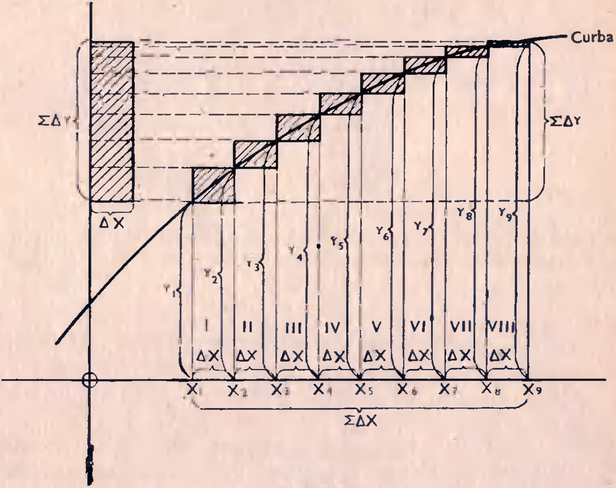


FIG. 45

Acum însă, posedînd un bagaj mai mare de cunoștințe și fiind mai abili ne vom dedica cvadraturii.

Ne-am pus mai înainte problema calculului ariei unei porțiuni delimitate de o curbă cunoscută, de ecuație $y = f(x)$, de axa absciselor și de două ordonate y_1 și y_9 (vezi fig. 45).

Se vede din figură că suprafața căutată de noi se află între suma tuturor fîșiilor (dreptunghiurilor) verticale, la care nu se adaugă dreptunghiurile hașurate mici, și suma tuturor fîșiilor, la care se adaugă aceste dreptunghiuri hașurate. Dacă nu ar fi fost vorba de o curbă ci de o dreaptă, atunci lucrurile ar fi fost simple, deoarece, în acest caz, fiecare din dreptunghiurile hașurate ar fi fost înjumătățite și am fi putut calcula totul foarte ușor. Acum vrem să folosim chiar o curbă pentru cvadratură și de aceea trebuie să continuăm cercetările. Care este suma ariilor așa-numitelor fîșii „înscrise în curbă"? Am numerotat fîșiile:

fîșia I este $(x_2-x_1)\cdot y_1$,

fîșia II este $(x_3-x_2)\cdot y_2$,

fîșia III este $(x_4-x_3)\cdot y_3$

ș.a.m.d. pînă la

fîșia VIII este $(x_9-x_8)\cdot y_8$.

Deoarece (x_2-x_1) este egal cu (x_3-x_2) ș.a.m.d., să notăm toate aceste diferențe, egale între ele, cu Δx. Atunci, suma ariilor tuturor fîșiilor înscrise este

$$S_i = y_1\Delta x + y_2\Delta x + y_3\Delta x + y_4\Delta x + y_5\Delta x + y_6\Delta x + $$
$$+ y_7\Delta x + y_8\Delta x.$$

Suma ariilor fîșiilor exînscrise, a căror înălțime este, desigur, mai mare decît aceea a fîșiilor înscrise corespunzătoare, deoarece se mai adaugă dreptunghiurile hașurate, va fi, după cum se vede din figură

$$S_e = y_2\Delta x + y_3\Delta x + y_4\Delta x + y_5\Delta x + y_6\Delta x + y_7\Delta x +$$
$$+ y_8\Delta x + y_9\Delta x.$$

Dacă ne reamintim acum că aceste sume pot fi scrise cu ordinul de însumare, putem pune pentru prima sumă $S_i = \sum_{\nu=1}^{8} y_\nu \Delta x$, iar pentru a doua $S_e = \sum_{\rho=2}^{9} y_\rho \Delta x$. Mai departe, în baza legii distributivității, factorii care apar la toți termenii pot fi puși în fața semnului de însumare. Putem scrie, prin urmare, $\Delta x \sum_{\nu=1}^{8} y_\nu$ și $\Delta x \sum_{\rho=2}^{9} y_\rho$. Dacă notăm acum cu F aria căutată, atunci, după cum știm,

$$\Delta x \sum_{\nu=1}^{8} y_\nu < F < \Delta x \sum_{\rho=2}^{9} y_\rho,$$

ceea ce este chiar formularea matematică a faptului că suprafața limitată de curbă se află între suma fîșiilor înscrise și suma fîșiilor exînscrise.

Acum am putea să facem efortul de a calcula valorile lui y pentru toate valorile lui x, cu ajutorul ecuației cunoscute $y = f(x)$. În acest fel am obține atît aria dreptunghiurilor înscrise cît și aceea a dreptunghiurilor exînscrise și am deduce că „cvadratura“ căutată se află undeva între aceste două valori. Dacă facem pe Δx din ce în ce mai mic, deci fîșiile din ce în ce mai înguste, atunci intervalul dintre „suma interioară“ și „suma exterioară“ a ariilor fîșiilor va deveni din ce în ce mai mic, după cum se poate observa din desen. Dacă continuăm cu această metodă, care epuizează aria reală din ce în ce mai mult (de unde și numele de metoda exhaustivă, de la *exhaurire* = a epuiza), ajungem în cele din urmă la rezultate din ce în ce mai bune. În orice caz, munca este extrem de anevoioasă, iar rezultatul, după cum am mai menționat, este doar aproximativ. Să ne imaginăm, de exemplu, parabola $y = \frac{x^2}{5} + 3$ pentru domeniul cuprins între $x_1 = 5$ și $x_{1\,000} = 10$, pe care să-l „epuizăm“. Ar trebui să stabilim mai întîi cît este de mare Δx. Deoarece între $x = 5$ și $x = 10$ trebuie să așezăm nu mai puțin de 999 fîșii, trebuie să avem $\Delta x = \frac{10 - 5}{999} = \frac{5}{999}$. Acum trebuie să calculăm, pas cu pas, pe y, de o mie de ori. Deci, pentru

$$x_1 = 5, \qquad y_1 = \frac{25}{5} + 3 = 8;$$

$$x_2 = 5 + \frac{5}{999}, \qquad y_2 = \frac{\left(5 + \frac{5}{999}\right)^2}{5} + 3;$$

$$x_3 = 5 + \frac{10}{999}, \qquad y_3 = \frac{\left(5 + \frac{10}{999}\right)^2}{5} + 3$$

ş.a.m.d.

Apoi ar trebui să calculăm ariile tuturor fîşiilor înscrise şi exînscrise. Deci,

$$\text{fîşia înscrisă } 1 = y_1 \Delta x = 8 \cdot \frac{5}{999} = \frac{40}{999},$$

$$\text{fîşia înscrisă } 2 = y_2 \Delta x = \left[\frac{\left(5 + \frac{5}{999}\right)^2}{5} + 3\right] \cdot \frac{5}{999}$$

ş.a.m.d.

$$\text{fîşia exînscrisă } 1 = y_2 \Delta x = \left[\frac{\left(5 + \frac{5}{999}\right)^2}{5} + 3\right] \cdot \frac{5}{999},$$

$$\text{fîşia exînscrisă } 2 = y_3 \Delta x = \left[\frac{\left(5 + \frac{10}{999}\right)^2}{5} + 3\right] \cdot \frac{5}{999}$$

ş. a. m. d.

Dacă am fi putut alege 1 000 de fîșii în loc de 999, pentru a simplifica socoteala, și chiar dacă fiecare fîșie următoare exînscrisă este egală cu fîșia înscrisă precedentă, se vede că și o funcție atît de simplă ca

$$y = \frac{x^2}{5} + 3$$

produce dificultăți de-a dreptul neobișnuite și că, în afară de aceasta, rezultatul obținut este aproximativ.

Mai vedem însă și altceva, și anume că exactitatea crește pe măsură ce mărim numărul fîșiilor. Dacă am putea alege pe Δx oricît de mic, dacă din Δx am putea face dx, care, „dispărînd", mai are încă o mărime pe care să o putem lua ca bază a fîșiilor, atunci am obține o cvadratură exactă. Pentru aceasta ar trebui, însă, să calculăm o infinitate de valori ale lui y, deoarece orice lungime a lui x constă dintr-o infinitate de dx. Cerem deci pentru cvadratură o operație care permite înmulțirea sumei tuturor ordonatelor cuprinse între x_1 și x_n cu dx. De aceea, marele Cavalieri a intitulat problema cvadraturii ca *summa omnium* y (suma tuturor y). Și Leibniz a scris pe notița de importanță istorică, la 29 octombrie 1676, următoarele cuvinte: „Ar fi util ca de acum înainte în loc de *summa omnium* y a lui Cavalieri să scriem semnul $\int y\, dx$..."

Am ajuns cu aceasta în punctul culminant al cărții noastre. Leibniz susține că este folositor să utilizăm ordinul de integrare [1] $\int y\, dx$ în locul ordinului *summa omnium* y. Nu este aceasta un simplu joc de cuvinte? Sau se ascund mai multe lucruri în spatele acestei schimbări? De pildă, o nouă „cabală"?

Trebuie să cercetăm acest lucru pas cu pas. În orice caz știm ce ni se cere. Vrem doar să enunțăm mai limpede. Ca și la semnul sumă, vom nota „domeniul" integralei făcînd-o în acest mod integrală „definită". Dacă primul x care ne inte-

[1] Cuvîntul integrală a fost introdus de Jacques Bernoulli și, în înțelegere cu Leibniz, a fost fixată notația $\int y\, dx$ pentru noul algoritm.

rezează este egal cu a şi dacă $x = b$ este capătul domeniului, atunci vom scrie

$$\int_a^b y\, \mathrm{d}x$$

şi citim: „integrală din y de la a la b". Sau „integrală din y de la limita inferioară a pînă la limita superioară b".

Vrem să facem acum încă un pas înainte. Ştim că y este egal cu $f(x)$, de aceea mai putem scrie

$$\int_a^b y\, \mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x.$$

Ordinul este, prin urmare, prezent. Mai lipseşte reţeta pentru efectuarea ordinului, deoarece ordinul în sine este şi de data aceasta o curată nebunie. Pentru constatarea acestei cereri psihopatice vom vedea pînă la urmă ce trebuie să se petreacă în miezul integralei pentru a putea îndeplini ordinul. Această maşină fermecată nu va face altceva decît să formeze următoarea sumă infinită:

fîşia 1 $f(a) \cdot \mathrm{d}x$,
fîşia 2 $f(a+\mathrm{d}x)\mathrm{d}x$,
fîşia 3 $f(a+2\,\mathrm{d}x)\mathrm{d}x$,
fîşia 4 $f(a+3\,\mathrm{d}x)\,\mathrm{d}x$
ş.a.m.d. de o infinitate de ori,
penultima fîşie $f(b-\mathrm{d}x)\,\mathrm{d}x$,
ultima fîşie $f(b) \cdot \mathrm{d}x$.

Aici $f(a)$, $f(a+\mathrm{d}x)$ ş.a.m.d. reprezintă valorile lui y corespunzătoare lui $x=a$, $x=a+\mathrm{d}x$, $x=a+2\mathrm{d}x$ ş.a.m.d. În afară de aceasta, $\mathrm{d}x$ trebuie să fie egal cu lim 0, adică să reprezinte ultima valoare înainte de nimic [1]. Sau, aşa cum se spune în mod imprecis, $\mathrm{d}x$ trebuie să fie un infinit mic.

Deoarece Leibniz şi toate celelalte minţi luminate care au fundamentat această ştiinţă nu au fost cîtuşi de puţin tulburaţi, nu vrem să ne mai batem capul ci vom primi minunea din mîinile lor, cu recunoştinţă.

---

[1] Modul de exprimare al autorului nu este corect. În ceea ce priveşte noţiunea de limită, se poate consulta M. Nicolescu, N. Dinculeanu, S. Marcus, *op. cit.*, vol. I, p. 151. — *N.T.*

DIFERENȚIALA ȘI PROBLEMA RECTIFICĂRII

Am mai vorbit de nenumărate ori despre Δx, despre Δy, despre dx și despre dy. În special am descris pe dx și pe dy ca un fel de cheie pentru ușa matematicilor superioare. Vom considera acum mai îndeaproape aceste lucruri minuscule. Aici trebuie să observăm că însăși expresia „lucruri" este o gravă erezie. Diferențialele nu sînt nici măcar „nelucruri". Ele sînt, din punct de vedere teoretic, diferențe dispărute sau „în dispariție", sînt limite ale unor Δx și Δy încă palpabili.

Dacă le materializăm oarecum o facem din motive atît istorice cît și pedagogice. Deoarece în această carte vrem doar să inițiem, să trezim oarecum prima înțelegere a infinitezimalului, nu putem proceda destul de sistematic. Istoricește vorbind, știința noastră a început foarte intuitiv și prin această intuiție au fost făcute primele mari descoperiri. Faptul că, ulterior, pe acest fundament au fost făcute timp de două secole toate calculele logice pline de rafinament nu îndreptățește pe nimeni să considere drept primitivi pe primii deschizători de drumuri. Chiar și cel mai frumos diamant este adus adeseori la suprafață din pămîntul albastru al Africii de sud, sub forma unui ciob tulbure. Desigur nu trebuie să disprețuim munca șlefuitorilor din Amsterdam, care fac ca piatra, în cele din urmă, să strălucească în mii de fațete. Dar fără diamant nu poate fi nici șlefuirea. Și tot așa, fără o prezentare, eventual brută, a „diferențialei" nu poate exista nici cea mai modernă matematică puritană.

Amînăm, de aceea, toate chestiunile subtile pînă cînd, prin studii îndelungate, vom stăpîni toate fundamentele matematicii. Atunci vom putea admira și gusta cu plăcere precizia lui Cesaro, Kowalewski sau Peano.

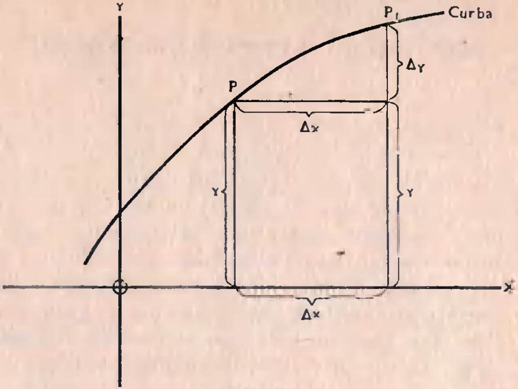


FIG. 46

Acum, însă, ne putem imagina o curbă la care, o dată cu creşterea lui x, va creşte şi y. Creşterea lui x este Δx, creşterea lui y este Δy sau $[\Delta f(x)]$.

x-ul, care împreună cu y-ul corespunzător determină în mod unic punctul P de pe curbă, a crescut cu o mărime finită Δx. În acest mod a rezultat în mod obligatoriu noul y, pe care îl reprezentăm sub forma $(y+\Delta y)$. Punctul corespunzător este punctul P_1. Porţiunea PP_1 este un arc al curbei. Dacă ne deplasăm acuma în lungul axei absciselor nu cu mărimea finită Δx, ci cu o mărime infinit mică dx, atunci curba urcă de asemenea, însă în cazul nostru, oricum, numai cu o porţiune dy atît de mică încît dispare. Punctele P şi P_1 se vor confunda într-unul singur, „punct dublu", iar arcul PP_1 ar fi, de asemenea, atît de mic, încît ar dispărea; atît de mic, încît este indiferent dacă îl considerăm curb sau drept. Acest „indiferent" dacă este drept sau curb reprezintă punctul de cotitură al analizei infinitezimale, deoarece prin el obţinem posibilitatea de a aplica toate regulile referitoare la figurile delimitate de linii drepte figurilor delimitate de curbe. Îl vom utiliza atît la „cvadratură" cît şi la „rectificare" [1]. Dar pentru a adînci cunoştinţele noastre vrem

[1] Se va explica mai tîrziu.

să mai considerăm așa-numitul „triunghi caracteristic" al lui Leibniz. Leibniz a găsit în moștenirea lăsată de Blaise Pascal un desen care servea unor scopuri cu totul diferite (referitoare la studiul funcției sinus). Acest desen a condus, însă, pe Leibniz ca o făclie, care a luminat ceea ce pînă atunci era ascuns, spre marea sa descoperire, calculul diferențial. Pentru a fi mai expliciți, vrem să desenăm *triangulum characteristicum* (triunghiul caracteristic) într-un mod puțin diferit de acela al lui Pascal și Leibniz, fără a modifica însă esențialul (vezi fig. 47).

Să ducem la o curbă oarecare o tangentă în punctul A. Pe această tangentă să luăm la distanțe egale, la dreapta și la stînga lui A, punctele B și C. Este evident acum, după cele mai simple legi geometrice, că triunghiul hașurat este asemenea cu acela care are laturile îngroșate, deoarece ipotenuza triunghiului cu laturile îngroșate este perpendiculară pe ipotenuza triunghiului hașurat, chiar prin construcție, iar cateta mai lungă a triunghiului cu laturi îngroșate este perpendiculară pe cateta mai lungă a celui hașurat. Prin urmare,

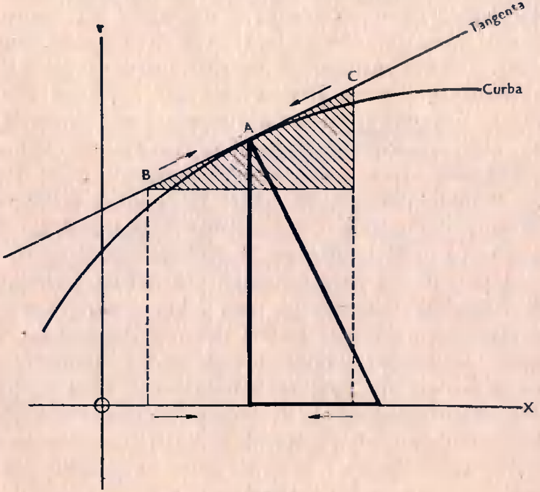


FIG. 47

unghiurile ascuţite ale ambelor triunghiuri sînt egale. Dacă însă în două triunghiuri dreptunghice cîte un unghi ascuțit este egal, atunci și celelalte unghiuri ascuțite ale fiecăruia sînt egale (el trebuie să fie de $90 - \alpha$ grade). Triunghiurile în care, însă, toate unghiurile sînt două cîte două egale sînt triunghiuri asemenea.

Să presupunem acum că punctele B și C alunecă uniform către A. În acest mod, triunghiul hașurat devine din ce în ce mai mic, fără ca prin aceasta să-și schimbe forma. Ne putem imagina, în cele din urmă, că B și C se confundă cu A. Avem acum în fața ochilor minunea diferențialei. În punctul A se află acum un triunghi microscopic, invizibil pentru ochiul liber. Forma lui este cea a triunghiului uriaș cu laturile îngroșate, mărimea unghiurilor sale și raportul laturilor fiind aceleași. S-a mai întîmplat o minune. Ipotenuza triunghiului hașurat este o porțiune a tangentei în punctul A. Avem deci în punctul A o porțiune dreaptă, infimă, de tangentă, care este în același timp o porțiune infimă de curbă.

Mărturisim că această însușire de cap al lui Janus a elementului de curbă, care — ca și zeul Janus cel cu două fețe — poate fi cînd curbă, cînd dreaptă, pare a fi de domeniul „magiei negre". Să ne gîndim însă la lanțul unei biciclete, care este într-adevăr format din porțiuni rectilinii și se înfășoară, cu toate acestea, în jurul roților dințate circulare. Să ne închipuim acum aceste verigi extrem de mici. Desigur, logic vorbind, există o deosebire între drept și curb. Dintr-un anumit punct de vedere, drept și curb sînt tot atît de deosebite ca și focul de apă, negrul de alb. Din alt punct de vedere, însă, ne putem închipui foarte bine o trecere treptată. Suprafața unui lac ne pare o suprafață plană ideală. În același timp, datorită formei sferice a Pămîntului, ea este curbată. Suprafața aceluiași lac pe o sferă de mărimea Soarelui ar fi mai puțin curbată. Dacă am lua o sferă de mărimea Căii Laptelui, curbura ar fi încă și mai mică ș.a.m.d., la nesfîrșit. Diferențiala acceptată de noi presupune însă astfel de aproximări cosmice, deoarece este „imaginabil" ca punctele B și C să se apropie din ce în ce mai mult unul de altul.

În cazul ideal, punctul nostru A conține deci un triunghi hașurat extrem de mic, care este asemenea cu cel „caracteristic" și pe care, mărit enorm, îl putem desena (vezi fig. 48).

Să numim „diferențiale" cele trei laturi ale triunghiului. Una din catete, cea paralelă cu axa absciselor, se numește dx, cealaltă catetă se numește dy, iar „elementul de curbă și tangentă" care apare ca ipotenuză să-l botezăm ds.

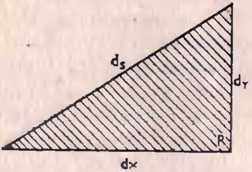


FIG. 48

Acum am putea considera, în fiecare punct al curbei, vîrful unui triunghi caracteristic. Dacă am repeta construcția noastră în fiecare punct al curbei, atunci curba ar fi formată dintr-un șirag de astfel de triunghiuri hașurate. Lungimea curbei ar fi formată prin înșiruirea tuturor elementelor ds, iar o porțiune a curbei, mărită enorm, ar arăta astfel (fig. 49).

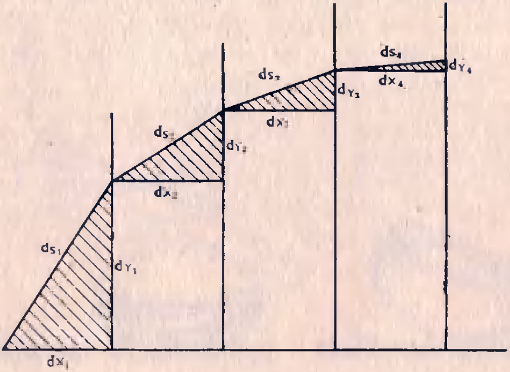


FIG. 49

Am înțelege acuma în mod greșit spiritul Analizei dacă ne-am lega prea mult de triunghiul caracteristic și dacă am uita primul desen. Trebuie să ținem seama de faptul că dx_1, dx_2 etc. sînt creșteri infime ale lui x, dy_1, dy_2 etc. sînt creșterile corespunzătoare ale lui y, deduse din ecuația curbei $y = f(x)$, iar ds_1, ds_2 etc. sînt porțiunile corespunzătoare ale curbei, respectiv ale tangentei. Orice curbă poate fi imaginată ca fiind formată de nenumăratele porțiuni de tangentă. Dacă, de exemplu, legănăm un tampon pe hîrtie, atunci hîrtia este tangenta, iar suprafața înfășurată cu sugativă a tamponului este curba. Dacă am răsturna lucrurile, așezînd tamponul cu sugativa în sus, pe hîrtie, și apoi am așeza o riglă rigidă pe tampon, atunci rigla ar fi tangentă în fiecare punct și ne-am putea închipui curbura tamponului ca fiind formată dintr-o infinitate de puncte sau porțiuni de tangentă.

În geometrie se construiesc adesea curbe prin tangentele lor. La drept vorbind, compasul cu trăgător nu este altceva decît o porțiune a tangentei la cerc.

Am ajuns acum la o concluzie foarte importantă, care, dintr-o lovitură, ne va da tot algoritmul matematicii superioare.

În primul rînd, „rectificarea". Prin aceasta se înțelege măsurarea lungimii unei curbe. Deoarece utilizăm numai măsuri rectilinii trebuie să transformăm în gînd curba într-o dreaptă, ceea ce în limba latină se exprimă prin *rectam facere*. De aici și expresia rectificare (*rectificatio*). Acest lucru, în principiu, nu este atît de dificil. Mai de mult se credea că

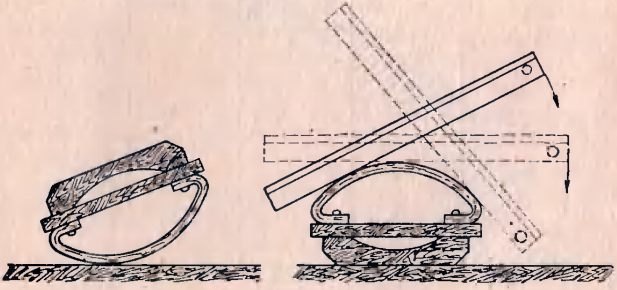


FIG. 50

orice curbă are lungimea exprimată printr-un număr irațional, ca de pildă cercul cu rază rațională. Am mai arătat că iraționalitatea este ceva relativ. Pentru curbe nu este necesar, cîtuși de puțin, ca lungimea să fie irațională. Într-adevăr, putem așeza orice sfoară pe masă, sub forma unei curbe. Aceasta în treacăt fie spus. Știm — pentru a reveni la rectificare — că o curbă este șiragul infinit format din toți ds. Fiecare ds se poate exprima însă, în baza teoremei lui Pitagora, prin $(\mathrm{d}s)^2 = (\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}y)^2$, sub forma $\mathrm{d}s = \sqrt{(\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}y)^2}$. Aceasta ar fi în perfectă ordine. Mai lipsește doar un lucru minor, și anume cum putem forma suma infinită a tuturor acestor ds. Ne lovim aici de un ordin, analog integralei, pe care nu știm încă să-l efectuăm, iar presupunerea că lungimea arcului aflat între limitele $x = a$ și $x = b$ trebuie să fie egală cu integrala tuturor ds sau cu integrala tuturor $\sqrt{(\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}y)^2}$, ceea ce de fapt este același lucru, ne ajută prea puțin. Integrala $\int_a^b \mathrm{d}s$ o mai putem rezolva prin bunul simț. Este pur și simplu lungimea s a curbei, aflată între abscisele a și b. Cu aceasta nu cîștigăm însă nimic, deoarece acesta nu este răspunsul, ci întrebarea. Răspunsul ar fi rezolvarea integralei $\int \sqrt{(\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}y)^2}$, în care sperăm să putem folosi ecuația $y = f(x)$ a curbei, pentru a o putea calcula. Dar cum?

În felul acesta ne-am întors la punctul de plecare. Știm acum precis, atît la cvadratură cît și la rectificare, ce *trebuie* să facem. Avem, de asemenea, un semn magic frumos, semnul integral. Dar stăm neputincioși pe loc și nu putem îndeplini ordinul, ca o persoană care visează și nu poate face nimic în somn, trezindu-se în sudorile spaimei. Această trezire salvatoare ne-o va aduce însă capitolul următor.

RELAȚIILE ÎNTRE CÎTUL DIFERENȚIAL ȘI ORDINUL DE INTEGRARE

Am arătat mai înainte că nu putem determina pur aritmetic diferențialele în sine, ci raportul dintre ele, așa-numitele cîturi diferențiale $\frac{dy}{dx}$, dacă ne este dată funcția $y = f(x)$. Am încercat să obținem, în două exemple, această așa-numită „derivată", sau „funcție derivată", nume sub care este mai cunoscut cîtul diferențial, și am reușit. Cititorul însuși ne poate crede pe cuvînt că orice funcție este derivabilă prin calcule mai mult sau mai puțin complicate [1]. Calculul diferențial, ale cărui reguli fundamentale le vom cunoaște în curînd, este o operație calculatorie, care poate fi aplicată cu aceeași siguranță ca și înmulțirea, de exemplu. Părerile sînt împărțite în privința faptului dacă ea face parte dintre calculele sintetice sau cele analitice. Ea are proprietăți care țin de ambele feluri de operații. În această privință nu vrem însă să ne mai batem capul, ci să cercetăm dacă nu cumva calculul diferențial ne dă cheia pentru stăpînirea calculului integral. Într-adevăr, vrem să părăsim geometria pentru un timp și să studiem problema pur formal și aritmetic. Încă la numerele imaginare am reușit, cu ajutorul unei ecuații, să rezolvăm o enigmă aparent insolubilă, și anume am obținut mărimea factorului de rotație pentru 90 grade, arătînd că el este egal cu i.

În cazul cvadraturii am obținut ordine de forma Aria $= \int y\,dx$ și $\int f(x)\,dx$. În ambele ordine intervin atît funcția curbei (o dată ca ordonată y și a doua oară aceeași ordonată exprimată în raport cu x) ca și dx. Prima problemă pe care trebuie să o cercetăm este să stabilim dacă acest dx pro-

---

[1] Desigur, numai dacă ea nu are proprietăți care contravin esenței derivabilității.

vine din funcția $f(x)$. Evident, nu este cazul, deoarece pînă acum cunoaștem o singură ecuație

$$\frac{dy}{dx} = f'(x).$$

Un dx, din cele cunoscute pînă acum, nu aparține unei „primitive", ci cîtului diferențial al unei primitive, pe care îl notăm cu y' sau $f'(x)$. Facem acuma, mintal, un artificiu îndrăzneț, pe care l-a făcut Leibniz în istorica zi de 29 octombrie 1676. Anume, considerăm integrala ca și cum după semnul integral s-ar afla nu o funcție de bază, ci cîtul diferențial al unei primitive. Subliniem că, în realitate, cu aceasta nu s-a schimbat nimic. S-a modificat doar marea cabală a interpretării noastre. Să vedem cum ar trebui să procedăm dacă curba a cărei arie trebuie calculată ar fi avut, de exemplu, ecuația $y = x^2$. Afirmăm că există o altă funcție, primitiva $F(x)$, al cărei cît diferențial este chiar funcția noastră $y = x^2$.

Sîntem conștienți de faptul că această răsturnare este cea mai mare dificultate a analizei infinitezimale. Dacă am înțeles o dată acest artificiu atunci restul este foarte ușor, devenind o chestiune mai mult sau mai puțin mecanică. Cu toată dificultatea problemei nu vrem să mai zăbovim și vom merge mai departe. Presupunem deci că am avea un cît diferențial

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = y'.$$

Din punct de vedere aritmetic, aceasta este o ecuație ca oricare alta, iar noi putem să o tratăm formal, după regulile teoriei ecuațiilor. De pildă, să o înmulțim cu dx. Aici nu trebuie să ne împiedice faptul că semnul egal apare de două ori, deoarece dacă am avea un dreptunghi cu laturile $a = 5$ și $b = 3$, atunci am mai putea scrie și $F_R = a \cdot b = 5 \cdot 3$ și chiar $F_R = a \cdot b = 5 \cdot 3 = 15$, și totul rămîne în vigoare dacă înmulțim cu 2: $2F_R = 2\ a \cdot b = 2 \cdot 5 \cdot 3 = 30$. Deci, înmulțim cu d$x$ și obținem

$$\frac{dy}{dx}dx = f'(x)\,dx = y'dx$$

sau

$$dy = f'(x)dx = y'dx.$$

Ținînd seama de regula noastră a cîntarului, după care egalitatea nu se modifică atunci cînd aceleași lucruri sînt supuse acelorași operații de calcul, putem pune ordinul de integrare în fiecare din membrii egalității. Deci,

$$\int dy = \int f'(x)dx = \int y'dx.$$

Spre surprinderea noastră am ajuns acum pe urmele unei proprietăți foarte importante a integralei. Este operația inversă calculului diferențial, (am putea spune dezintegrare), deoarece, dacă am lăsa de o parte toate integralele am obține

$$dy = f'(x)dx = y'dx$$

și prin împărțire cu dx,

$$\frac{dy}{dx} = f'(x)\frac{dx}{dx} = y'\frac{dx}{dx} = f'(x) = y',$$

adică cîtul diferențial inițial. Mai trebuie doar să ne gîndim la semnificația lui $\int dy$. Ea este o însumare infinită a tuturor dy, adică a tuturor creșterilor lui y în domeniul considerat de noi al curbei, desigur al acelei curbe pe care am derivat-o pentru a obține pe $f'(x)$ sau y', deci al curbei care corespunde „primitivei" necunoscute $y = f(x)$. $\int dy$ este deci, pur și simplu, y sau $f(x)$, ceea ce înseamnă același lucru. Putem deci scrie

$$f(x) = y = \int y'dx = \int f'(x)dx.$$

Cu aceasta a fost pusă problema calculului integral. Se enunță în felul următor: dacă avem de integrat o funcție oarecare, atunci rezultatul integrării este „primitiva", al cărei cît diferențial este funcția pe care o avem de integrat.

De obicei funcția „dată" se scrie $f(x)$, iar primitiva $F(x)$. Această notație este totuși confuză pentru începător, deoarece în $y = F(x)$ și $y = f(x)$ y-ul are două valori distincte. Ar trebui să scriem sau $y = F(x)$ și $y' = F'(x)$, sau, mai consecvent, $y = f(x)$, $y' = f'(x)$. Numai cel care și-a însușit calculul infinitezimal învățînd singur poate spune cîte dificultăți îi provoacă începătorului cea mai mică abatere de la o notație consecventă.

Dar știm acum că

$$F(x) = y = \int F'(x)\mathrm{d}x = \int y'\mathrm{d}x.$$

Mai trebuie să punem o întrebare. De ce, în cazul cvadraturii și al rectificării, am pus limitele de integrare, în timp ce aici le-am lăsat de o parte? Nu este ușor de răspuns la întrebare. Există o așa-numită integrală „definită", ca și una „nedefinită". Integrala definită ne dă însumarea în cadrul unui domeniu limitat, iar cea nedefinită, dimpotrivă, ne dă însumarea în cadrul unui domeniu nelimitat. În treacăt fie spus, integrala definită și cea nedefinită se comportă una față de cealaltă ca numărul concret față de numărul general. Dacă am găsit integrala „nedefinită", care se mai numește și integrală „generală", putem obține întotdeauna integrala „definită", sau „concretă", prin introducerea limitelor. Vom învăța să facem acest lucru curînd, prin cîteva exemple practice.

Acum trebuie să revenim la calculul diferențial, pentru a avea posibilitatea să efectuăm calculul integralelor. Spre deosebire de procedeul obișnuit, vom considera cele două feluri de calcul simultan. Ca pregătire mai avem de învins două piedici, și anume analiza infiniților mici de diferite ordine și așa-numita formulă a binomului, al cărei descoperitor celebru a fost Isaac Newton.

TREI FELURI DE „NIMIC"

Mai întîi să considerăm diferitele ordine ale infiniților mici: am mai menționat, pur formal, că în analiza infinitezimală „mic", „foarte mic" și „extrem de mic" joacă un mare rol. Am afirmat și am lămurit aritmetic prin fracții că un $(dx)^2$ față de un dx poate fi neglijat, deoarece x se află în raport cu dx ca și Universul față de Pămînt, iar dx față de $(dx)^2$ ca Pămîntul față de firul de praf. Dacă desenăm acum Pămîntul sau dacă-l considerăm într-un calcul ca un mic punct, atunci din firul de praf nu mai rămîne nimic. În orice caz, nu trebuie să trecem sub tăcere faptul că împotriva acestui mod de a raționa sînt îndreptate numeroase atacuri. Se admite că, din punct de vedere practic, firișorul de praf nu mai înseamnă nimic, pe cînd din punct de vedere

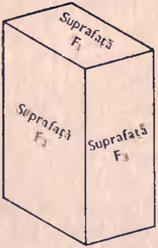


FIG. 51

teoretic poate fi neglijat, într-adevăr, dar în nici un caz nu dispare.

Oricît de interesant ar fi să discutăm încercările moderne de a înlătura această dificultate, trebuie totuși să renunțăm de a o face în cadrul pe care ni l-am propus. Vom încerca mai degrabă să exprimăm posibilitatea diferitelor ordine de mărime cît mai intuitiv, demonstrînd prin desen cele „trei feluri de nimic".

În acest scop să ne închipuim că am avea un așa-numit paralelipiped (adică o prismă sau o coloană, ale cărei muchii sînt două cîte două perpendiculare). Să presupunem că acest paralelipiped este confecționat dintr-un metal, care, ca orice metal, se dilată prin încălzire. Să presupunem, de asemenea, că dilatarea are loc nu în toate direcțiile, ci doar în cele trei dimensiuni. Am putea realiza acest lucru așezînd bucata de metal în colțul unei camere, astfel încît ea să se poată dilata numai în sus și spre cele două fețe din față.

Desigur, mărirea prismei metalice nu se face separat în diferitele direcții, ci simultan. Să descompunem acum mintal „creșterea", după ce prisma a atins volumul maxim. Și să facem acest lucru ca și cum fiecare din cele trei suprafețe F_1, F_2 și F_3 s-ar fi deplasat independent una față de cealaltă, din poziția lor inițială, în sus și în față.

Pentru claritate, am desenat încă o dată diferitele părți care constituie creșterea totală și le-am așezat în jurul figurii principale, care arată în ce fel trebuie îmbinate aceste părți. Este limpede că prisma noastră metalică, dacă o răcim pînă la temperatura inițială, își reia mărimea, sau mai bine zis revine la mărimea pe care a avut-o inițial. Toate bucățile care constituie creșterea, vorbind din punct de vedere pur aritmetic, se contractă la zero. Ele s-au transformat în nimic. Însă înainte de a ajunge la acest nimic, ele au avut, în mod miraculos, mărimi radical diferite între ele.

Creșterile suprafețelor (F_1, F_2, F_3) erau suprafețe cu o grosime extrem de mică, cele trei adaosuri în formă de bară (G_1, G_2, G_3) s-au redus la o linie, în timp ce, în sfîrșit, figura P, cu formă de zar, s-a contractat pînă la un punct. Ne lovim din nou de enigma deosebirilor dintre diferitele feluri de nimic. Un nimic-suprafață, un nimic-segment, un nimic-punct nu pot avea aceeași semnificație. Ele sînt, dacă ne este permisă expresia, nimicuri de diferite puteri. Menționăm doar că putem exprima acest lucru și în felul următor, luînd punctul ca „unitate de nimic". Un punct este un nimic. Un segment este o înșiruire a unei infinități de puncte, deci este de o infinitate de ori mai mare, cu toate că și el este, în sine, un nimic. Fiind produsul unei lungimi cu o lățime, o suprafață este o mulțime de o infinitate de ori o infinitate de puncte, deci o mulțime formată dintr-o dublă nfinitate

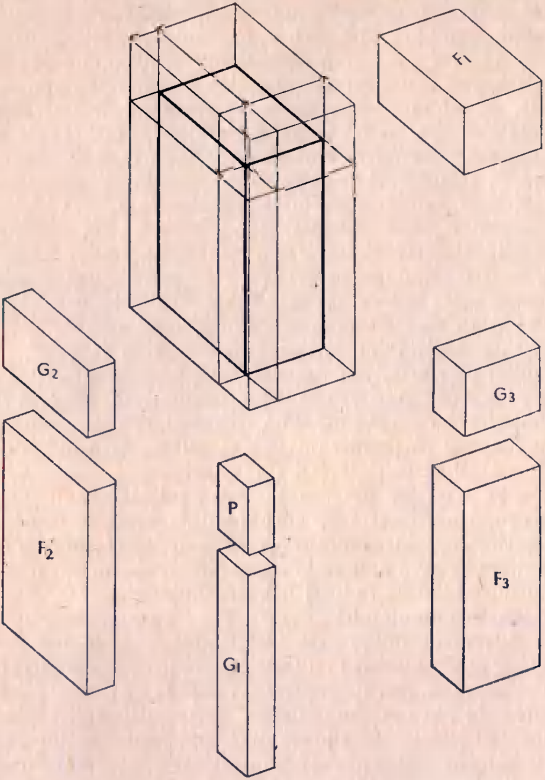


FIG. 52

de puncte. Cu toate acestea, prin lipsa ei de grosime este tot un fel de nimic.

Un Ceva începe deci, din punct de vedere fizic, de-abia o dată cu a treia dimensiune. „Ceva“ și „tridimensional“ înseamnă, dintr-un anumit punct de vedere, același lucru. Totuși nu vrem să ne aventurăm prea mult în aceste profuncțiuni foarte complicate ale așa-numitei „teorii a mulțimilor", o ramură nouă și foarte abstractă a matematicii superioare. Precizăm că am constatat nu numai aritmetic și logic, dar și pur intuitiv, că și în infinitul mic există anumite ordine de mărime relativă. Ele se numesc „diferite ordine de mărime", iar în infinitul mic, în mod special, ele se numesc „ordine ale infiniților mici" și se vorbește despre „infinit mic de ordinul întîi, de ordinul doi, trei etc."; dx este un infinit mic de ordinul întîi, $(dx)^4$ este un infinit mic de ordinul patru, $(dx)^n$ este un infinit mic de ordinul n ș.a.m.d., pînă la infinitul mic de ordinul ∞. Chiar dacă rațiunea și gîndirea se opun ca în „infinitul mic" să-ți închipui ceva încă mai mic, aceeași rațiune cere ca un infinit mic înmulțit cu el însuși să fie considerat mai mic decît cel neînmulțit, tot așa cum, cu siguranță, $\frac{1}{10}$ este mai mare decît $\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{10}=\frac{1}{100}$. S-ar putea obiecta, desigur, că nu este admisibilă transpunerea noțiunilor și a regulilor valabile numai în finit și demonstrabile doar acolo, la operații în care intervine infinitul inimaginabil și incontrolabil. Avem însă scuza bună că nu lucrăm cu infinitul mic, ci numai cu ceea ce este arbitrar de mic. Deci, întotdeauna cu lim 0 și nu cu 0, care, prin valoare, ar corespunde infinitului mic. În al doilea rînd, sîntem în situația de a verifica totuși, cu siguranță și fără greșeală, afirmațiile noastre „infinitezimale", chiar dacă nu le putem demonstra întotdeauna.

Trebuie să ne întoarcem, însă, la ceva foarte concret, părăsind discuțiile antrenante despre infinitul mic, pentru a crea ultima premisă pentru atacul final. Vom face apel la toate cunoștințele noastre aritmetice de pînă acum, pentru a obține celebra „formulă a binomului". Pentru această formulă există cele mai variate metode de a o deduce. Alegem reprezentarea combinatorică elegantă, pentru a scoate în evidență legătura dintre analiza combinatorie și „coeficienții binomiali" menționați atît de des.

FORMULA BINOMULUI

Mai întîi să definim o noțiune. Un număr de forma $(x+a)$ sau $(x+b)$ se numește „număr binomial" sau, dacă efectuăm o înmulțire cu un astfel de număr, „factor binomial". Aici x-ul nu trebuie conceput ca necunoscută, ci este folosit doar din motive de distincție grafică [1]. Se numește „binom" (și înseamnă „expresie cu doi membri") orice combinație aditivă sau substractivă a două numere, care este concepută ca o nouă entitate.

Dacă înmulțim acum pe $(x+a)$ cu $(x+b)$, deci dacă trebuie să formăm produsul factorilor binomiali $(x+a)$ și $(x+b)$, atunci obținem

$$(x+a)(x+b) = x^2 + ax + bx + ab = x^2 + (a+b)x + ab.$$

În mod similar vom avea

$$(x+a)(x+b)(x+c) =$$
$$= x^3 + (a+b+c)x^2 + (ab+ac+bc)x + abc,$$

ceea ce cititorul poate verifica cu ușurință.

Pentru a scoate mai bine în evidență structura rezultatului nostru, să alegem o reprezentare, pe care Leibniz a mai folosit-o de nenumărate ori, și să scriem

$$(x+a)(x+b) = x^2 + \left.\begin{matrix} a \\ b \end{matrix}\right\} x + ab$$

și

$$(x+a)(x+b)(x+c) = x^3 + \left.\begin{matrix} a \\ b \\ c \end{matrix}\right\} x^2 + \left.\begin{matrix} ab \\ ac \\ bc \end{matrix}\right\} x + abc.$$

---

[1] Sensul mai profund al utilizării lui x constă în faptul că „formula binomului" este folosită mai ales la dezvoltarea funcțiilor în care variabila x apare într-un binom.

Un ochi exersat va descoperi aici două lucruri. În primul rînd, mărimea x conținută în fiecare factor binomial apare ordonată după puterile descrescătoare, iar în al doilea rînd, „coeficienții" acestor puteri au un caracter combinatoric incontestabil, deoarece mai întîi apar toate singletele, apoi toate perechile și, în sfîrșit, toate tripletele elementelor a, b și c. Forma legăturii combinatorice este „combinarea fără repetiție". Elementele sînt toate mărimile inegale a, b, c, care apar în factorii binomiali.

Pentru mai multă claritate vrem să considerăm încă un exemplu, mai complicat, și anume

$$(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)(x+e) =$$

$$= x^5 + \left.\begin{matrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{matrix}\right\} x^4 + \left.\begin{matrix} ab \\ ac \\ ad \\ ae \\ bc \\ bd \\ be \\ cd \\ ce \\ de \end{matrix}\right\} x^3 + \left.\begin{matrix} abc \\ abd \\ abe \\ acd \\ ace \\ ade \\ bcd \\ bce \\ bde \\ cde \end{matrix}\right\} x^2 + \left.\begin{matrix} abcd \\ abce \\ abde \\ acde \\ bcde \end{matrix}\right\} x + abcde.$$

Cum apare această structură remarcabilă nu este chiar atît de enigmatic, pe cît pare la prima vedere. Această structură rezultă pur și simplu pentru că, la înmulțire, în cazul nostru, trebuie să fie înmulțiți întotdeauna cinci factori [1]. x^5 nu este altceva decît $x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x$, iar $a\,x^4$ nimic altceva decît $x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot a$. Mai departe, de exemplu, $a\,c\,e\,x^2 = a\,c\,e\,x \cdot x$ ș.a.m.d. Această indicație ar putea fi suficientă pentru a convinge pe cititorul care judecă, de necesitatea legăturilor combinatorice.

Vrem să rezumăm ceea ce am învățat pînă acum sub forma unei reguli și să stabilim forma unui produs de factori binomiali, în care fiecare binom constă dintr-un x și o altă mărime, care în fiecare binom are o altă valoare.

Produsul unor astfel de factori binomiali se va reprezenta sub forma unei sume de puteri descrescătoare ale lui x, înce-

[1] În general, tot atîția cît este și numărul binoamelor.

pînd cu puterea al cărei exponent este egal cu numărul binoamelor. În această sumă de puteri exponenții scad cu cîte o unitate. După x^1 mai vine și puterea zero a lui x, astfel încît rezultatul înmulțirii are un termen mai mult decît numărul binoamelor. Această sumă, scrisă deocamdată fără coeficienți

$$x^n + x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x^2 + x^1 + x^0,$$

unde n este numărul binoamelor, are coeficienții

$$C_0\, x^n + C_1\, x^{n-1} + C_2\, x^{n-2} + \dots + C_{n-2}\, x^2 + C_{n-1} x^1 + C_n x^0.$$

Acești coeficienți indică acuma, prin indicele lor, care este clasa de combinări de n elemente pe care o reprezintă; x^n are coeficientul $C_0 = 1$, deoarece constă numai din x, x^{n-1} are drept coeficienți toți singleții, x^{n-2} toate perechile, x^{n-3} toate tripletele, ș.a.m.d., formate din cîte n-elemente, combinările fiind fără repetiție. Aceste „combinări" nu sînt însă simple modificări ale poziției, ci produse adevărate. Aici se împletește analiza combinatorie cu înmulțirea.

Dacă recurgem acuma la un artificiu, făcînd ca toate mărimile a, b, c, ș. a. m. d. să fie egale, astfel încît $a = b = c = d = e$ ș.a.a.m.d., atunci putem scrie mai simplu

$$(x+a)\ (x+a)\ (x+a)\ (x+a)\ (x+a) \dots$$

sau, ceea ce înseamnă același lucru,

$$(x+a)^n = ?$$

Am ajuns acum în miezul problemei așa-numitei „formule a binomului", care are o importanță imensă în matematică. Prin rezolvarea problemei noastre (mai întîi pentru exponenți întregi pozitivi) vom fi în stare să scriem orice putere a unui binom oarecare, direct, sub forma unei sume de puteri descrescătoare. Nu mai are nici o importanță acum dacă îl lăsăm pe x sau dacă îl înlocuim cu orice altă literă. Îl lăsăm pe loc numai pentru a menține legătura cu cele precedente.

După regulile noastre ar trebui ca rezultatul înmulțirii binomului $(x+a)$, luat ca factor de n ori, ceea ce nu este altceva decît $(x+a)^n$, să arate în felul următor:

$$C_0\, x^n + C_1\, x^{n-1} + C_2\, x^{n-2} + \dots + C_{n-2}\, x^2 + C_{n-1}\, x^1 + C_n\, x^0.$$

Știm că C_0 este egal cu unu. Cît de mari sînt însă C_1, C_2, C_3 ș.a.m.d.? Vom stabili acest lucru prin concluzii logice. C_1 nu este altceva decît suma tuturor singleților care rezultă din cei n termeni, diferiți de x, ai binoamelor. Dar, deoarece acești termeni sînt toți egali cu a, suma tuturor singleților este $a + a + a + a + \dots + a$ (de n ori), adică $n a$, sau, cu notație combinatorică, $C_n^1 a$. Al doilea coeficient, C_2, este suma tuturor dubleților formați cu a. Deoarece orice dublet este de forma $a \cdot a$, el este suma tuturor a^2, sau, combinatoric, $C_n^2 a^2$. Tripletele ar fi $a \cdot a \cdot a = a^3$, deci $C_3 = C_n^3 a^3$. Acuma legea de formare este clară. Cu aceasta am reușit să rezolvăm problema. Prin urmare,

$$(x+a)^n = C_n^0 x^n + C_n^1 a x^{n-1} + C_n^2 a^2 x^{n-2} + \dots + C_n^{n-1} a^{n-1} x + C_n^n a^n.$$

Înainte de a calcula un caz concret vrem să mai considerăm tabelul cunoscut sub numele de „triunghiul lui Pascal" sau „triunghiul coeficienților binomiali", care ne permite să formăm „coeficienții binomiali" în modul cel mai simplu. El are forma următoare:

0	1								
I	1	1							
II	1	2	1						
III	1	3	3	1					
IV	1	4	6	4	1				
V	1	5	10	10	5	1			
VI	1	6	15	20	15	6	1		
VII	1	7	21	35	35	21	7	1	etc.

Fără a efectua demonstrația destul de obositoare a acestui fapt, atragem atenția că orice număr din interiorul tabelului de mai înainte este egal cu suma celor două numere aflate mai sus, la stînga și la dreapta. Cu aceasta sîntem în stare să continuăm acest „triunghi", pas cu pas, pe o cale pur mecanică, pînă la infinit. Mai menționăm încă faptul că Blaise Pascal a descoperit acest triunghi, pe care l-a numit *triangulus mathematicus* (triunghiul matematic), dar că coeficienții binomiali au fost menționați de Stifel (1544) înaintea lui Pascal și erau cunoscuți de matematicienii chinezi încă în jurul anului 1300 al e.n.

Se va pune întrebarea, pe bună dreptate, cum se poate folosi acest triunghi. Cifrele romane aflate la marginea din stînga indică puterea întreagă pozitivă la care trebuie ridicat binomul. Numerele din rîndul corespunzător sînt coeficienții pe care i-am notat mai înainte cu $C_0, C_1, C_2, \ldots, C_{n-1}, C_n$; prin urmare, ei trebuie să fie egali cu coeficienții binomiali scriși combinatoric. Dacă luăm, de exemplu, cazul lui $(x+a)^7$ și dacă dezvoltăm puterea, după formula binomului, într-o sumă de puteri, după puterile descrescătoare ale lui x, obținem

$$(x+a)^7 = x^7 + C_7^1\, x^6a + C_7^2\, x^5a^2 + C_7^3\, x^4a^3 + C_7^4\, x^3a^4 + \\ + C_7^5\, x^2a^5 + C_7^6\, x\, a^6 + a^7.$$

Dacă pentru completarea notației introducem expresia C_7^0 drept coeficient al lui x^7 și expresia C_7^7 drept coeficient al lui a^7, atunci pentru un binom ridicat la puterea a 7-a rezultă următorii coeficienți binomiali

$$C_7^0 \quad C_7^1 \quad C_7^2 \quad C_7^3 \quad C_7^4 \quad C_7^5 \quad C_7^6 \quad C_7^7,$$

care, calculați, sînt

$$1 \quad 7 \quad 21 \quad 35 \quad 35 \quad 21 \quad 7 \quad 1,$$

ceea ce confirmă în mod strălucit triunghiul lui Pascal.

Iată încă cîteva exemple pentru formula binomului:

$(4+7)^5 = ?$ Desigur, am putea aduna aici, pur și simplu, pe 4 cu 7 și apoi am putea calcula îndată puterea a 5-a a lui 11, obținînd $11^5 = 161\,051$. Vrem să folosim însă ocazia pentru a confirma și verifica încă o dată formula binomului, remarcînd și faptul că descompunerea unui număr într-un binom este recomandabilă și din punct de vedere practic [1]. Calculăm deci:

$$(4+7)^5 = C_5^0\, 4^5 \cdot 7^0 + C_5^1\, 4^4 \cdot 7^1 + C_5^2\, 4^3 \cdot 7^2 + C_5^3\, 4^2 \cdot 7^3 + \\ + C_5^4\, 4^1 \cdot 7^4 + C_5^5\, 4^0 \cdot 7^5 = 1 \cdot 1024 \cdot 1 + 5 \cdot 256 \cdot 7 + \\ + 10 \cdot 64 \cdot 49 + 10 \cdot 16 \cdot 343 + 5 \cdot 4 \cdot 2401 + 1 \cdot 1 \cdot 16807 = \\ = 1024 + 8960 + 31360 + 54880 + 48020 + 16\,807 = 161051,$$

obținînd rezultatul așteptat.

---

[1] În afară de aceasta, ridicarea la pătrat și la cub a numerelor se bazează, în sistemele poziționale, pe operații binome. De exemplu, $13^2 = (10+3)^2$ ș.a.m.d.

Iată un al doilea exemplu:

$$(1+x)^9 = C_9^0 \cdot 1^9 x^0 + C_9^1 1^8 x^1 + C_9^2 1^7 x^2 + C_9^3 1^6 x^3 +$$

$$+ C_9^4 1^5 x^4 + C_9^5 1^4 x^5 + C_9^6 1^3 x^6 + C_9^7 1^2 x^7 + C_9^8 1^1 x^8 +$$

$$+ C_9^9 1^0 x^9 = 1 + 9x + 36\,x^2 + 84x^3 + 126x^4 + 126x^5 +$$

$$+ 84\,x^6 + 36\,x^7 + 9\,x^8 + x^9.$$

În încheiere vrem să mai adăugăm că binomul poate să arate și sub forma $(x-a)^n$ sau $(-x-a)^n$. După regula semnelor, semnele trebuie determinate potrivit cu puterile corespunzătoare ale lui x și a. Dacă am avea de stabilit semnul lui $4x^3a$ în dezvoltarea binomului $(x-a)^4$, este clar că poate fi vorba numai despre semnul minus, deoarece numărul este $4 \cdot x \cdot x \cdot x \cdot (-a)$, deci $(-4x^3a)$.

Vrem să încercăm apoi să scriem formula binomului cu ajutorul semnului sumă

$$(x+a)^n = \sum_{\nu=0}^{\nu=n} C_n^\nu\, x^{n-\nu} \cdot a^\nu = C_n^0\, x^n a^0 + C_n^1\, x^{n-1}\, a^1 +$$

$$+ \ldots + C_n^n\, x^0\, a^n.$$

Deoarece în matematică nu se cere întotdeauna doar ridicarea binoamelor la puteri întregi pozitive, trebuie să mai discutăm pe scurt cazul în care ne sînt date puteri fracționare sau negative. Alegem mai întîi binomul $(1+x)^n$ și cerem ca numărul n să fie sau un număr fracționar, sau un număr negativ. Deoarece, din păcate, în cadrul nostru nu dispunem de cunoștințele necesare pentru a discuta în amănunt acest caz, trebuie să ne mulțumim să afirmăm că, în cazul exponenților fracționari sau negativi, formula binomului, sau dezvoltarea binomială, se transformă în așa-numita „serie binomială" infinită, care are forma

$$(1+x)^n = 1 + C_n^1\, x + C_n^2\, x^2 + C_n^3\, x^3 + \ldots + C_n^r\, x^r + \ldots .$$

Aici r este un număr finit, care poate fi însă mai mare decît n.

Dacă vrem să dezvoltăm după seria binomială nu pe $(1+x)$, ci, de exemplu, pe $(a+x)$, atunci putem realiza forma $(1+x)$ printr-un artificiu, scriind pe $(a+x)^n$ sub forma $a^n\left(1+\frac{x}{a}\right)^n$. În felul acesta putem trata pe $\left(1+\frac{x}{a}\right)^n$ după formula anterioară, dezvoltînd într-o serie binomială infinită şi înmulţind apoi rezultatul cu a^n.

Totuşi, aşa cum am mai spus, vrem doar să menţionăm aceste lucruri. Dar, deoarece am vorbit o dată despre „serii infinite", trebuie să lămurim pe scurt ce se înţelege prin „serie".

După cum arată chiar numele, o serie este o înşiruire de mărimi legate prin adunare sau scădere. Ea este finită cînd conţine un număr finit de termeni şi infinită, în cazul contrar, cînd se prelungeşte la infinit. De exemplu, seria lui Leibniz $\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ldots$ este o serie infinită. Pe exemplul acestei serii a lui Leibniz putem discuta încă o noţiune importantă. Ştim că suma tuturor acestor termeni, în număr infinit, are valoarea $\frac{\pi}{4}$, deci o valoare concretă. O astfel de serie infinită se numeşte serie convergentă, deoarece ea converge (tinde, sau se apropie) spre o valoare limită, aici $\left(\frac{\pi}{4}\right)$. O serie de forma $1+3+5+7+9+\ldots$ are suma, evident, infinită. Aceste serii se numesc divergente; ele diverg.

Stabilirea faptului dacă o serie este convergentă sau divergentă este una din cele mai dificile probleme ale matematicii. În nici un caz nu este sigur că o serie de termeni care se micşorează treptat este convergentă. Aşa, de exemplu, seria infinită

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{4}}+\frac{1}{\sqrt{5}}+\ldots,$$

în mod ciudat, diverge, cu toate că fiecare termen al seriei este mai mic decît precedentul. Adunarea acestei serii duce la o sumă infinită, în timp ce, de exemplu, seria infinită

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}+\cdots$$

converge, iar suma tuturor termenilor ei este 1.

După cum am văzut, în cazul seriei lui Leibniz, o serie infinită este un auxiliar al cvadraturii. De fapt, orice integrală se poate transforma într-o serie infinită și chiar Arhimede a lucrat cu serii infinite convergente, pentru a efectua cvadraturi.

CVADRATURA PARABOLEI LUI ARHIMEDE

Arhimede are fără îndoială meritul de a fi găsit prima dată metode geniale pentru efectuarea cvadraturilor suprafețelor mărginite de linii curbe, metode care au fost folosite pînă la sfîrșitul secolului al XVII-lea.

De aceea nu ne vom teme de oboseala de a pătrunde mai adînc în studiul metodei lui Arhimede și alegem ca exemplu cvadratura „parabolei obișnuite", pe care Arhimede a efectuat-o primul și pe care el a tratat-o în scrierile *Cvadratura parabolei* și *Despre echilibrul planului II* ș.a. Vrem să luăm în considerație încercările sale pur geometrice și să lăsăm de o parte metodele sale statice, prea dificile pentru noi.

Metoda geometrică, pe care o folosește Arhimede, este metoda care, mai tîrziu, a fost numită metoda exhaustiunii sau a epuizării și care, în esență, nu este altceva decît metoda înscrierii în curbă a unor figuri regulate, mărginite de linii drepte. Mărind mereu numărul acestor figuri, care devin din ce în ce mai mici, ajungem la o aproximare din ce în ce mai bună a curbei cu figuri mărginite de linii drepte, pînă ce, printr-o repetare infinită, se ajunge la segmente atît de mici ale figurilor mărginite de linii drepte, încît ele pot fi considerate ca elemente ale curbei. Mai trebuie făcut acum al doilea pas esențial: trebuie să fim în stare să sumăm numărul infinit al figurilor mărginite de linii drepte, deoarece numai această sumă infinită ne poate da aria figurii mărginite de linia curbă, epuizată, umplută de numărul infinit de figuri mărginite de linii drepte. Vom vedea mai tîrziu cum este posibil acest lucru. Să desenăm deocamdată o porțiune oarecare a unei „parabole obișnuite", ale cărei proprietăți erau cunoscute încă de pe vremea lui Arhimede (vezi fig. 53).

Se caută aria unui segment de parabolă[1]. Înscriem în acest segment un triunghi, al cărui vîrf se află în vîrful para-

[1] Segmentul este o secțiune, ca și sectorul. Începătorii pot să-și reprezinte segmentul prin secțiunea unei pîini rotunde, iar sectorul printr-o felie dintr-un tort rotund.

bolei. Pentru a simplifica lucrurile și pentru o mai bună comparație cu tratarea parabolei cu ajutorul calculului integral, pe care o vom întreprinde mai tîrziu, să considerăm doar jumătatea superioară a segmentului. În această jumătate se

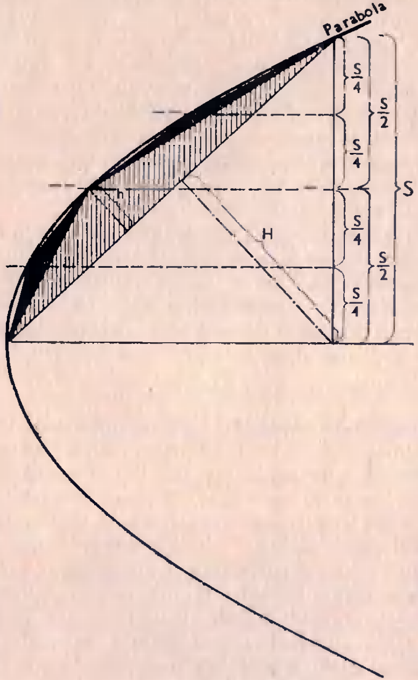


FIG. 53

află deci un triunghi dreptunghic mare (jumătatea întregului triunghi înscris), a cărui ipotenuză pornește din vîrful parabolei și ajunge în punctul în care coarda care delimitează secțiunea intersectează parabola, sus. Catetele acestui triunghi, pe care l-am botezat „triunghiul mare", sînt axa mediană a parabolei și o dreaptă S, perpendiculară pe ea, care nu este decît jumătatea coardei. Acum începem „exhaustiunea", „epuizarea". Facem ca ipotenuza triunghiului mare să devină baza unui nou triunghi (hașurat în figură), care nu mai este dreptunghic.

Pe cele două laturi ale acestui triunghi hașurat se află acum două triunghiuri „negre", al căror vîrf, ca toate vîrfurile triunghiurilor noastre, se află pe parabolă. Putem continua acum jocul nostru în minte. Pe fiecare din laturile „triunghiurilor negre" vom așeza alte triunghiuri mai mici, ale căror vîrfuri se află din nou pe parabolă ș.a.m.d. pînă la infinit. Faptul că aceste triunghiuri trebuie să umple pînă la urmă întregul nostru semisegment va fi acceptat de oricine. Cum putem afla însă suma ariilor tuturor acestor triunghiuri, al căror număr este infinit?

Aici vom admira geniul matematic al vechilor greci, în toată strălucirea lui. Și vom mai admira claritatea și simplitatea de necrezut cu care a fost stăpînită această problemă aparent irezolvabilă. Arhimede a spus că o sumă infinită poate fi formată numai dintr-o serie descrescătoare, ai cărei termeni se pot afla doar într-un raport rațional. Astfel, de exemplu, se știa că suma seriei $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots$ are o valoare rațională rotundă, dacă adunăm toți termenii ei, al căror număr este infinit. Anume, suma are valoarea 2. Dacă reușim să aducem triunghiurile noastre, care devin, evident, din ce în ce mai mici, într-un raport constant de micșorare, atunci întreaga problemă s-ar reduce la problema sumării unei serii infinite descrescătoare, iar „triunghiul mare" ar putea fi oricît de mare. Am lua acest triunghi egal cu 1 și am exprima celelalte triunghiuri în raport cu acesta. Dacă, însă, însumarea seriei infinite ar reuși, atunci am putea înmulți rezultatul cu aria reală a „triunghiului mare", de unde s-ar deduce cvadratura parabolei, exact și rațional.

Arhimede a realizat acest lucru, iar noi vom urma ideile sale într-o formă simplificată. În acest scop ne va fi de un real folos figura schematică a lui Hans Strohofer, desenatorul tuturor figurilor din text. Menționăm că parabola are proprietăți remarcabile, a căror discutare ne-ar duce prea departe. Specificăm doar că toate dreptele orizontale care întîlnesc parabola în S, S_3, S_2, S_3' ș.a.m.d. se numesc diametre ale parabolei. Un astfel de diametru taie o coardă în două părți egale, dacă porțiunea diametrului cuprinsă între coardă și parabolă este mai mare decît toate porțiunile celorlalți diametri duși prin alte puncte ale coardei. În acest caz, intersecția diametrului cu parabola se numește „vîrful" segmentului de parabolă considerat. Astfel, de exemplu, S_1 este vîrful segmentului tăiat de coarda SS', S_2 este vîrful segmentului cuprins între S și S_1, S_3'' este vîrful segmentului de coardă $S_2' S'$ ș.a.m.d. Mai adăugăm faptul că vechii greci și, desigur, și Arhimede, știau că porțiunea de axă b se află față de o parte a lui b în același raport ca și h^2 față de pătratul segmentului perpendicular pe axă, cuprins între parabolă și extremitatea părții corespunzătoare a lui b. În limbajul nostru matematic modern aceasta nu înseamnă altceva decît că ecuația parabolei obișnuite este $y^2 = x$ sau $y = \sqrt{x}$ [1].

Vrem să studiem acuma problema noastră și să ne folosim de figura corespunzătoare (vezi fig. 54). „Triunghiul mare" are aici catetele b și h și ipotenuza SS'. Aria lui este deci $\frac{bh}{2}$. Dacă ducem prin punctul $\frac{h}{2}$ un diametru obținem un nou vîrf de parabolă, și anume vîrful S_1 al segmentului $SS'S_1$. Ne putem închipui că triunghiul $SS'S_1$, înscris în noul segment, este împărțit prin segmentul $\frac{b}{4}$ în două triunghiuri parțiale, care au amîndouă baza $\frac{b}{4}$ și înălțimea $\frac{h}{2}$. Prin urmare, ele au la un loc mărimea $2 \cdot \left(\frac{b}{4} \cdot \frac{h}{2}\right) : 2$. Aceasta înseamnă, însă, că triunghiul $SS'S_1$ are aria $\left(\frac{bh}{8} \cdot 2\right) : 2$, adică $\frac{hb}{8}$. Avînd în vedere figura precedentă am putea să spunem deci că „triunghiul mare" $\frac{bh}{2}$ este de patru ori mai mare decît „triunghiul hașurat" $\frac{bh}{8}$. Să trasăm acum alți doi dia-

[1] Abscisele punctului final x și a extremității porțiunii x' sînt în același raport ca și pătratele ordonatelor corespunzătoare y^2 și y'^2. Fiecare punct al parabolei se exprimă atunci prin $y^2 = x$.

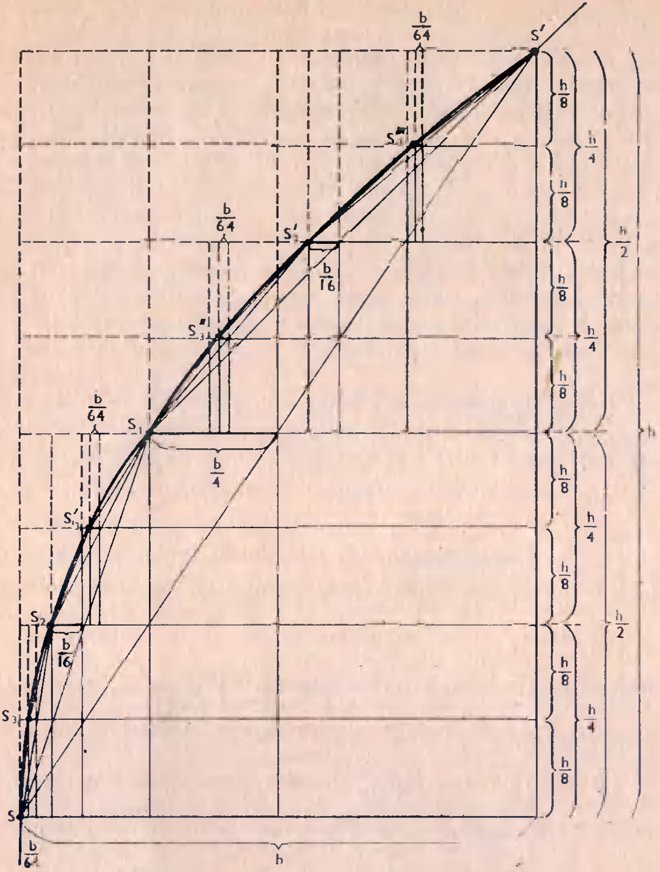


FIG. 54

metri prin $\frac{h}{4}$ și $\frac{3h}{4}$; cu alte cuvinte, împărțim în două părți egale cele două jumătăți $\frac{h}{2}$. Diametrii care trec prin aceste puncte de diviziune dau două noi vîrfuri de parabolă S_2 și S'_2. Deoarece în noile segmente SS_1S_2 și $S_1S'_2S'$ putem înscrie două noi triunghiuri SS_1S_2 și $S_1S'_2S'$, pe care în figura precedentă le-am denumit „triunghiuri negre", datorită proprietăților generale ale parabolei se repetă jocul precedent cu noile mărimi. Avem acum patru triunghiuri, la fel de mari, dintre care fiecare este împărțit de bazele $\frac{b}{16}$ și care, cîte două, formează un „triunghi negru". Fiecare triunghi parțial are aria $\left(\frac{b}{16}\cdot\frac{h}{4}\right):2$, iar toate patru la un loc au aria $4\left(\frac{bh}{64}\right):2$, adică $\frac{bh}{32}$. Dar aceasta nu înseamnă altceva decît că cele două triunghiuri negre la un loc au o arie egală cu un sfert din aria $\frac{bh}{8}$ a „triunghiului hașurat". Continuînd această lege de formare și înjumătățind segmentele $\frac{h}{4}$ din figură, obținem prin patru noi diametri patru noi vîrfuri de segmente de parabolă S_3, S'_3, S''_3, S'''_3. Cu aceasta obținem patru „triunghiuri de exhaustiune", care la un loc formează opt triunghiuri parțiale cu baza $\frac{b}{64}$. Aria lor totală este deci $8\left(\frac{b}{64}\cdot\frac{h}{8}\right):2$ sau $4\cdot\frac{bh}{512}=\frac{bh}{128}$. Aceasta nu înseamnă, însă, altceva decît că cele patru noi „triunghiuri de exhaustiune" au la un loc o arie de $\frac{1}{4}$ ori mai mare decît cele două „triunghiuri negre", a căror arie era $\frac{bh}{32}$. Fără a insista asupra concluziilor interesante pe care le-am mai putea obține din figura noastră, să ne oprim numai la cele referitoare la problema considerată. Am găsit deci că prin „exhaustiunea" noastră, prin înjumătățirea succesivă a lui h, prin trasarea diametrilor corespunzători și prin formarea triunghiurilor, obținem o serie descrescătoare, pe care vrem să o descriem, pentru moment, în cuvinte: triunghiul mare este de patru ori mai mare decît cel hașurat; cel hașurat de patru ori mai mare decît cele două negre; cele două triunghiuri negre sînt de patru ori mai mari decît cele patru triunghiuri cu vîrfurile S_3, S'_3, S''_3, S'''_3 ș.a.m.d., pînă la infinit.

Dacă luăm acum ca unitate „triunghiul mare", ceea ce putem face, atunci seria este: aria segmentului de parabolă este egală cu $1+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}+\ldots$, deoarece în această serie fiecare termen este cît $\frac{1}{4}$ din cel precedent. După cum am mai menționat, trebuie să înmulțim rezultatul însumării acestei serii infinite cu aria efectivă a „triunghiului mare". Deci, rezultatul final este

$$\text{Segmentul de parabolă} =$$
$$= \text{Triunghiul mare} \times \left(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}+\ldots\right).$$

Rămîne să mai aflăm acuma cît este de mare suma seriei descrescătoare. Anticipînd, vrem să dezvăluim că ea se calculează prin formula $S_\infty = \frac{a}{1-q}$, unde a este „termenul inițial", iar q este „rația", sau factorul de micșorare. La noi, termenul inițial este 1, factorul de micșorare este $\frac{1}{4}$, deci $S_\infty = \frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{1}{\frac{3}{4}} = \frac{4}{3}$. Cu aceasta am obținut tot ce ne trebuia. Semisegmentul de parabolă este cît $\frac{4}{3}$ sau $1\frac{1}{3}$ din mărimea triunghiului mare. Dacă adăugăm liniile punctate, atunci obținem un dreptunghi cu laturile b și h, care este de două ori mai mare decît triunghiul mare. Dacă ne mai gîndim că „triunghiul mare" mai poate fi notat și cu $\frac{3}{3}$, deoarece $\frac{4}{3}:1$ este egal cu $\frac{4}{3}:\frac{3}{3}$, atunci dreptunghiul are mărimea $\frac{6}{3} = 2$. Dacă ne mai întrebăm, în sfîrșit, care este raportul dintre semisegmentul de parabolă și dreptunghi, obținem răspunsul: este egal cu $\frac{4}{3}:\frac{6}{3}$! Însă aceasta nu înseamnă nimic altceva decît $\frac{4}{3}$ împărțit la $\frac{6}{3}$, adică la 2, și arată că semisegmentul de parabolă este cît două treimi din dreptunghiul format din semicoardă și din porțiunea de axă tăiată de această semicoardă [1]. Înainte de a părăsi această incursiune în domeniul captivant al geometriei clasice grecești a proporțiilor, adăugăm că primul triunghi nu trebuie să fie dreptunghic. Am fi putut alege și un segment de parabolă oblic, ca de exemplu acela corespunzător triunghiului hașurat, pe care să-l fi luat ca triunghi inițial, și ar fi trebuit să facem acest lucru dacă am fi vrut să obținem generalitatea maximă. Dacă am fi procedat așa, am fi constatat că parabola care trece prin două vîrfuri alăturate ale unui paralelogram și este tangentă laturii opuse împarte aria paralelogramului în raportul $\frac{2}{3}:\frac{1}{3}$, și aria tuturor triunghiurilor de exhaustiune, la un loc, este de $\frac{1}{3}$ ori mai mare decît aria triunghiului inițial, a cărui bază este coarda de secțiune și al cărui vîrf este adevăratul vîrf al segmentului inițial. Am considerat reprezentarea ortogonală a segmentului de parabolă numai pentru a facilita expunerea demonstrației și pentru a obține anticipat rezultatul lui Arhimede, în sistemul de coordonate cartezian, pe care îl vom regăsi cu ajutorul calculului integral.

---

[1] În enunț analitic, el este dreptunghiul format de coordonatele punctului de pe parabolă, în care o intersectează coarda.

Trebuie să revenim acum la teoria seriilor și să menționăm alte deosebiri între serii. Există serii care cresc aditiv sau care scad substractiv. De exemplu,

$$1 \pm 3 \pm 5 \pm 7 \pm 9 \pm \ldots$$

sau

$$500 \pm 496 \pm 492 \pm 488 \pm \ldots$$

În prima serie, fiecare termen crește cu 2, în cea de-a doua, scade cu 4. Astfel de serii se numesc aritmetice. Dacă seriile cresc prin înmulțire, adică fiecare termen se obține din precedentul prin înmulțire cu un factor constant (sau se împarte printr-un divizor constant), atunci se spune că seria este geometrică. De exemplu,

$$1 \pm 3 \pm 9 \pm 27 \pm 81 \pm \ldots$$

sau

$$1 \pm \frac{1}{4} \pm \frac{1}{16} \pm \frac{1}{64} \pm \frac{1}{256} \pm \ldots$$

Forma generală a seriei aritmetice este

$$a \pm (a + d) \pm (a + 2d) \pm (a + 3d) \pm \ldots \pm (a + nd)$$

sau

$$a \pm (a - d) \pm (a - 2d) \pm (a - 3d) \pm \ldots \pm (a - nd),$$

iar a celei geometrice este

$$a \pm aq \pm aq^2 \pm aq^3 \pm \ldots \pm aq^{n-1}$$

sau

$$a \pm a\frac{1}{q} \pm a\frac{1}{q^2} \pm a\frac{1}{q^3} \pm \ldots \pm a\frac{1}{q^{n-1}}$$

Și aici renunțăm la dezvoltări, menționînd doar faptul că aceste serii se mai numesc și „progresii" și că a, care nu trebuie să fie nicidecum egal cu 1, se numește „termenul inițial". În progresia aritmetică, numărul d, cu care cresc sau descresc termenii, se numește „rație", ca și numărul q sau $\frac{1}{q}$ din cazul progresiei geometrice.

În primul rînd ne interesează suma unei astfel de serii. Pentru seria aritmetică, formula sumei este

$$s_n = \left[a_1 - \frac{d(1-n)}{2}\right] \cdot n,$$

unde a_1 este termenul inițial, d este rația, iar n este numărul termenilor.

Progresiile aritmetice au suma tuturor termenilor infinită, orice serie aritmetică fiind divergentă[1]. Prin urmare, dacă problema are sens, n trebuie să fie un număr finit. Ca exemplu, să calculăm suma primelor nouă numere pare

$$2 + 4 + 6 + 8 + 10 + 12 + 14 + 16 + 18 = ?$$

Termenul inițial este $a_1 = 2$, rația este 2 și numărul termenilor este $n = 9$, deci

$$s_n = \left[2 - \frac{2(1-9)}{2}\right] \cdot 9 = [2 - (-8)] \cdot 9 = 90,$$

ceea ce confirmă formula noastră întru totul.

Pentru progresia geometrică este valabilă formula

$$S_n = \frac{q^n - 1}{q - 1} \cdot a_1.$$

Dacă am căuta deci suma primilor șase termeni ai progresiei

$$3 + 15 + \ldots$$

am ști că $a_1 = 3$, $q = 5$ și $n = 6$. Deci,

$$S_6 = \frac{5^6 - 1}{5 - 1} \cdot 3 = \frac{15625 - 1}{4} \cdot 3 = 3906 \cdot 3 = 11\,718,$$

---

[1] Dacă rația sau termenul inițial sînt diferite de zero. — *N.T.*

ceea ce prin adunare dă

$$3 + 15 + 75 + 375 + 1875 + 9375 = 11\ 718$$

şi se verifică cu uşurinţă.

Vrem să cercetăm acum o progresie geometrică a cărei raţie este o fracţie. Menţionăm că tocmai aceste serii geometrice care descresc şi care ar trebui să se numească mai propriu „regresii" în loc de „progresii", joacă în matematică un rol imens.

În general, dacă au n termeni, ele se scriu

$$\sum_{\nu=0}^{n-1} a \cdot \frac{1}{q^{\nu}} = a + a\frac{1}{q} + a\frac{1}{q^2} + \dots + a\frac{1}{q^{n-1}}.$$

Din cele văzute pînă acum, la acest fel de serie ar putea să aibă sens să ne întrebăm care este suma unui număr infinit de termeni. De aceea se pune problema stabilirii limitei către care „converge" o astfel de serie, adică sumei către care tinde. Pentru o astfel de serie are loc formula

$$S_\infty = \frac{a}{1-q},$$

unde aici s-a pus q în locul lui $\frac{1}{q}$, pentru a nu obţine o fracţie suprapusă. Putem scrie, de aceea,

$$S_\infty = \frac{a}{1-q},$$

cu condiţia ca $|q| < 1$, ceea ce nu spune altceva decît că „raţia" este o fracţie subunitară. Cu ajutorul acestei formule vrem să cercetăm mai întîi seria lui Arhimede pentru segmentul de parabolă. Ea avea forma

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \frac{1}{256} + \frac{1}{1024} + \cdots$$

Aici termenul iniţial este egal cu 1. Raţia este $\frac{1}{4}$, deoarece fiecare termen este un sfert din termenul precedent (sau, orice termen trebuie înmulțit cu $\frac{1}{4}$, pentru a obține termenul următor). Suma trebuie deci să conveargă spre

$$S_\infty = \frac{a}{1-q} = \frac{1}{1-\frac{1}{4}},$$

în cazul unei infinități de termeni.

Dar acum $\frac{1}{1-\frac{1}{4}}$ este egal cu $\frac{1}{\frac{3}{4}} = \frac{4}{3}$, adică tocmai ceea ce am susținut mai înainte.

Dacă am fi avut seria

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots,$$

atunci deduceam imediat că suma ei este

$$S_\infty = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2.$$

O altă serie

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} + \ldots$$

are însă suma

$$S_\infty = \frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}} = \frac{1}{2}.$$

În general, folosind formula noastră, se poate afirma că dacă $|x| < 1$ atunci orice serie de forma $1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 \ldots$ are suma $\frac{1}{1-x}$, ceea ce prezintă, de asemenea o însemnătate deosebită.

Din aceste exemple am văzut că la calcularea sumelor infinite ale seriilor convergente se ascunde un principiu infinitezimal evident, care ne permite să rezolvăm tot felul de probleme geometrice. Îndată ce sîntem în stare să descompunem o figură mărginită de linii curbe, într-o infinitate de figuri ale căror arii se pot ordona sub forma unei serii geometrice descrescătoare, cvadratura se poate efectua fără ajutorul calculului integral. Am mai văzut un exemplu de acest fel la Arhimede și nu sîntem îndreptățiți să disprețuim ingeniozitatea imensă a ultimilor discipoli ai lui Arhimede, cum ar fi, de exemplu, Galilei sau Viviani, care au realizat prin metoda exhaustiunii lucruri de-a dreptul de necrezut. Desigur, aceasta nu schimbă cu nimic faptul că tocmai Viviani, un prieten al marelui Leibniz, a trebuit să trăiască tragedia ca la apogeul creației să fie lipsit de fructele strădaniei sale și izgonit de pe tronul matematicii de către minunile calculului infinitezimal. Noi, epigonii, vrem însă să punem stăpînire pe fructul copt.

TEHNICA CALCULULUI DIFERENȚIAL

După ce am clarificat foarte bine bazele artei noastre avem dreptul să deducem acuma, în mod pur formal, algoritmul matematicii superioare. Punem la baza calculului diferențial așa-numita ecuație a lui Leibniz, pe care o vom lua ca teoremă fundamentală. Enunțul ei este: cîtul diferențial $= \frac{dy}{dx} = y' = f'(x) = \frac{f(x+dx) - f(x)}{dx}$[1]. În fond, această ecuație nu ne aduce altceva decît un alt mod de scriere pentru ceva ce a mai fost studiat prin calcul. Am mai format, mai demult, cîtul diferențial în modul următor: am scăzut funcția inițială din noua funcție $(y + dy) = f(x + dx)$, obținută prin creșterea dx, obținînd

$$\begin{array}{rcl} y + dy & = & f(x+dx) \\ -y & = & -f(x) \\ \hline dy & = & f(x+dx) - f(x). \end{array}$$

Împărțind ambii membri ai ecuației cu dx, obținem

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(x+dx) - f(x)}{dx}.$$

Acum, după cum știm, $\frac{dy}{dx}$ mai poate fi scris și sub forma $f'(x)$ sau y'. În felul acesta, prima noastră ecuație este justificată.

Trebuie să fim sinceri și să spunem că „ecuația lui Leibniz" este un fel de nucă din care trebuie să scoatem miezul, în fiecare caz aparte, ceea ce nu este totdeauna atît de ușor. Dacă procedăm însă sistematic putem obține reguli de calcul pentru

---

[1] Formula corectă este $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$. În această privință se poate consulta M. Nicolescu, N. Dinculeanu, S. Marcus, *op. cit.*, vol. I, p. 223. — *N.T.*

derivare, care permit efectuarea calculelor de derivare complicate, cu aceeași ușurință ca și o înmulțire sau o împărțire. Mai întîi ne vom strădui să obținem o lege generală pentru derivarea unei puteri, deoarece în orice funcție intervin puteri ale lui x. Să începem cu cazul cel mai simplu, al puterii întîi. De exemplu,

$$y = x + 6.$$

Atunci $y + \mathrm{d}y = (x + \mathrm{d}x) + 6$, iar cîtul diferențial, în baza formulei lui Leibniz, este

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{(x + \mathrm{d}x) + 6 - (x + 6)}{\mathrm{d}x} = \frac{x + \mathrm{d}x + 6 - x - 6}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}x} = 1.$$

Cu această ocazie, să observăm că toate constantele aditive sau substractive (în cazul nostru $+6$) dispar prin derivare. Vom vedea mai tîrziu cauza acestui fapt. Acum puterea a doua este

$$y = x^2 - 7.$$

După formula lui Leibniz avem

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{(x + \mathrm{d}x)^2 - 7 - (x^2 - 7)}{\mathrm{d}x} = \frac{x^2 + 2x\mathrm{d}x + (\mathrm{d}x)^2 - 7 - x^2 + 7}{\mathrm{d}x} =$$

$$= \frac{2x\mathrm{d}x + (\mathrm{d}x)^2}{\mathrm{d}x}.$$

Și aici constanta (substractivă!) a dispărut. A rămas o expresie mai încîlcită în care apare $(\mathrm{d}x)^2$, un „infinit mic de ordinul doi". Din motive pe care le-am mai discutat îl vom neglija și atunci obținem

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{2x\mathrm{d}x}{\mathrm{d}x} = 2x.$$

Am putea acum să urcăm din putere în putere pe calea așa-numitei „inducții complete". Ca matematicieni versați nu ne interesează astfel de ocolișuri, deoarece formula binomului ne permite să rezolvăm probleme în general. Am avea, prin urmare, de derivat funcția $y = x^n + a$.

Deoarece constanta oricum trebuie să dispară, datorită structurii formulei lui Leibniz, să o lăsăm de o parte și să considerăm doar funcția

$$y = x^n.$$

Mărirea lui x cu dx dă funcția

$$y = dy = (x + dx)^n,$$

iar cîtul diferențial, în baza formulei lui Leibniz, va fi

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(x + dx)^n - x^n}{dx}.$$

Dacă dezvoltăm acum binomul $(x + dx)^n$ după formula binomului obținem

$$\frac{dy}{dx} = \frac{[x^n + C_n^1 x^{n-1}\,dx + C_n^2 x^{n-2}(dx)^2 + C_n^3 x^{n-3}(dx)^3 + \dots] - x^n}{dx}.$$

După cum se vede, x^n dispare întotdeauna și rămîne

$$\frac{dy}{dx} = \frac{C_n^1 x^{n-1}\,dx + C_n^2 x^{n-2}(dx)^2 + C_n^3 x^{n-3}(dx)^3 + \dots}{dx}.$$

Acum vedem că, în orice caz, în dezvoltarea binomului termenul al treilea (al doilea, după reducerea lui x^n) trebuie să conțină pe dx la o putere mai mare decît puterea întîi. Aceasta rezultă din structura formulei binomului. Dar $(dx)^2$ este un infinit mic de ordinul doi. Înmulțirea cu un infinit mic de ordinul doi dă însă din nou un infinit mic de ordinul doi, dacă înmulțirea se face cu valori finite. Afirmația este adevărată cu atît mai mult pentru ceilalți termeni, care conțin drept factori infiniți mici de ordinul trei, patru ș.a.m.d. Prin urmare, pentru derivare trebuie să folosim doar primul termen, toți ceilalți trebuie neglijați fiind infiniți mici de ordin superior. Rămîne deci

$$\frac{dy}{dx} = \frac{C_n^1 x^{n-1}dx}{dx} = C_n^1 x^{n-1} = nx^{n-1}.$$

Am obținut direct formula generală de derivare a unei puteri. Ea este

$$(x^n)' = nx^{n-1}.$$

Se poate verifica cît de bine se potrivește algoritmul luînd $y = x$ și $y = x^2$ sau o constantă. Pentru $y = x$ rezultă $y' = 1 \cdot x^{1-1} = 1 \cdot x^0 = 1 \cdot 1 = 1$, pentru $y = x^2$ rezultă $y' = 2x^{2-1} = 2x^1 = 2x$, iar pentru o constantă, care mai poate fi scrisă și sub forma $y = ax^0$, rezultă $y' = a \cdot 0 \cdot x^{0-1} = a \cdot 0 \cdot x^{-1} = 0$. Astfel, derivata funcției $y = x^{16}$ ar fi egală cu $\frac{dy}{dx} = y' = 16x^{16-1} = 16x^{15}$. Se observă că derivarea are proprietatea de a micșora exponentul puterii cu o unitate. Pentru a completa expunerea să observăm că formula noastră nu este valabilă doar pentru exponenți întregi pozitivi, ci și pentru exponenți negativi și fracționari, astfel încît cîtul diferențial pentru $y = x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$ este

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}},$$

iar pentru $y = x^{-3}$ are forma $\frac{dy}{dx} = -3x^{-3-1} = -3x^{-4} = -\frac{3}{x^4}$. Faptul că aici, în cazul exponentului negativ, puterea crește în loc de a scădea, este doar o excepție aparentă, deoarece un exponent negativ înseamnă o fracție, iar o fracție se micșorează atunci cînd puterea crește. Din această „micșorare" a funcției date prin derivare, ca și din faptul că derivarea ia ca bază un cît, s-ar putea deduce că ea face parte din operațiile analitice, de descompunere. Integrala, dimpotrivă, este un fel de sumă și, așa cum vom vedea, mărește exponentul funcției putere. De aceea, calculul integral ar face parte din calculele sintetice, constructive. Îl vom trata ca atare. O obiecție principală împotriva unei astfel de clasificări este însă faptul că derivata, ca și suma și produsul, se pot forma întotdeauna ușor și în mod unic, în timp ce calculul integralei arată o înrudire structurală cu împărțirea și extragerea rădăcinii, prin faptul că el este însoțit de o anumită nesiguranță, ambiguitate, și de necesitatea efectuării probei.

Cititorul atent a observat că în calculele noastre de derivare de pînă acuma, variabila arbitrară x a apărut mereu fără coeficient. În cazul variabilei dependente y, acest lucru este de la sine înţeles, deoarece derivăm de-abia după ce funcţia a fost adusă la forma explicită $y = f(x)$. Acest lucru nu este de la sine înţeles în cazul puterilor lui x. Dimpotrivă, puterile lui x apar chiar în formulă cu coeficienţi. Deoarece coeficienţii nu sînt altceva decît constante multiplicative, trebuie să verificăm imediat dacă mărimile constante multiplicative dispar tot aşa ca şi cele aditive şi substractive. Încercăm deci să derivăm funcţia

$$y = 3x^2 + 19.$$

După formula lui Leibniz avem

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3(x+dx)^2 + 19 - (3x^2+19)}{dx},$$

deci

$$= \frac{3[x^2 + 2xdx + (dx)^2] + 19 - 3x^2 - 19}{dx} =$$

$$= \frac{3x^2 + 3 \cdot 2xdx + 3(dx)^2 + 19 - 3x^2 - 19}{dx} =$$

$$= \frac{3 \cdot 2xdx + 3(dx)^2}{dx}$$

şi după neglijarea infinitului mic de ordinul doi $3(dx)^2$ avem

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3 \cdot 2xdx}{dx} = 3 \cdot 2x = 6x.$$

Vedem de aici că constantele multiplicative rămîn coeficienţi pe lîngă derivate. Am fi obţinut acelaşi rezultat dacă am fi derivat funcţia $y = 3(x^2) + 19$ separat, căutînd mai întîi derivata lui x^2, pe care am fi înmulţit-o apoi cu 3. Derivata lui x^2 este $2x$ şi aceasta luată de trei ori este $3 \cdot 2x = 6x$. Constanta aditivă 19 dispare în orice caz.

Acum să mai studiem posibilitatea ca într-o funcţie să apară mai multe puteri ale lui x. Dacă am efectuat acest lucru cu succes, sîntem în stare să derivăm toate funcţiile raţionale întregi şi pe acelea cu exponenţi fracţionari şi negativi de forma

$$y = ax^n \pm bx^{n-1} \pm cx^{n-2} \pm \ldots$$

După cum s-a spus, aici n poate fi şi o fracţie sau un număr negativ.

Să încercăm deci să tratăm funcţia

$$y = 4x^3 - 7x^2 + 9x - 26$$

în modul obişnuit:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4(x+dx)^3 - 7(x+dx)^2 + 9(x+dx) - 26 - (4x^3 - 7x^2 + 9x - 26)}{dx} =$$

$$= \frac{4[x^3 + 3x^2dx + 3x(dx)^2 + (dx)^3] - 7[x^2 + 2xdx + (dx)^2] +}{dx}$$

$$\frac{+ 9(x+dx) - 26 - (4x^3 - 7x^2 + 9x - 26)}{dx} =$$

$$= \frac{4x^3 + 4 \cdot 3x^2dx + 4 \cdot 3x(dx)^2 + 4(dx)^3 - 7x^2 - 7 \cdot 2xdx}{dx} -$$

$$- \frac{7(dx)^2 + 9x + 9dx - 26 - 4x^3 + 7x^2 - 9x + 26}{dx} =$$

iar după neglijarea tuturor infiniţilor mici de ordin superior şi reducerea termenilor asemenea obţinem

$$= \frac{4 \cdot 3\, x^2\, dx - 7 \cdot 2xdx + 9dx}{dx} = 12x^2 - 14x + 9.$$

Am fi obţinut acelaşi rezultat dacă am fi derivat termen cu termen, deoarece derivata lui $4x^3$ este $4 \cdot 3x^2 = 12x^2$, aceea a lui $-7x^2$ este egală cu $-7 \cdot 2x = -14x$, iar aceea a lui $9x$ este $9 \cdot 1 \cdot x^0 = 9$. Evident, constanta (-26) dispare. Ştim, prin urmare, că derivata unei sume este egală cu suma derivatelor termenilor[1].

[1] „Suma" este înţeleasă aici în sensul „sumei algebrice", care cuprinde şi scăderea, care poate fi interpretată ca adunare cu termeni cu coeficienţi negativi.

Atragem atenția în modul cel mai insistent că la derivarea unui produs sau a unui cît, cum ar fi $y = (x^2 + 3x + 1) \times \times (5x - 16)$ sau $y = \frac{2x^3 - 7}{3x + 9}$, în nici un caz nu putem proceda în mod analog. În aceste cazuri, sînt valabile cîteva formule care depășesc, însă, cadrul nostru. Putem însă să încercăm, acolo unde este posibil, să efectuăm înmulțirile sau împărțirile înaintea derivării, dacă în acest mod obținem o funcție întreagă accesibilă cunoștințelor noastre.

Acum, după ce am aflat tot ceea ce trebuia să știm despre calculul diferențial, este timpul să dăm interpretarea geometrică a derivatei, din care rezultă un larg cîmp de aplicabilitate a algoritmului nostru, și anume determinarea maximelor și minimelor, a valorilor celor mai mari și mai mici, sau, cum se mai spune, a valorilor extreme. Știm că derivata nu este altceva decît raportul dintre creșterea infinitezimală (mai bine, arbitrar de mică) a ordonatei și creșterea arbitrar de mică a absciselor. Cu alte cuvinte, cum se raportează creșterea ordonatei la creșterea abscisei, atunci cînd un x crește cu o cantitate arbitrar de mică? (fig. 55).

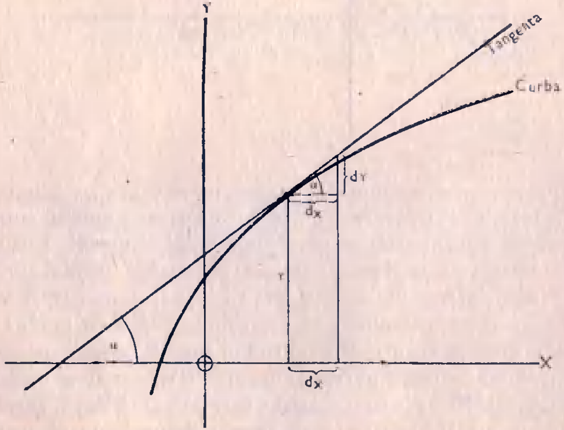


FIG. 55

Deoarece, după cum știm, ds este o porțiune a tangentei, putem prelungi această porțiune pînă ce ea intersectează axa Ox. Unghiul sub care tangenta taie axa absciselor este egal cu unghiul dintre ds și dx, deoarece o latură (ds și prelungirea lui) este comună, în timp ce cealaltă latură dx, prin ipoteză, este paralelă cu axa Ox. Dacă interpretăm acuma cîtul diferențial $\frac{dy}{dx}$ ca funcție trigonometrică, atunci trebuie să admitem că raportul dintre cateta opusă unghiului și cateta

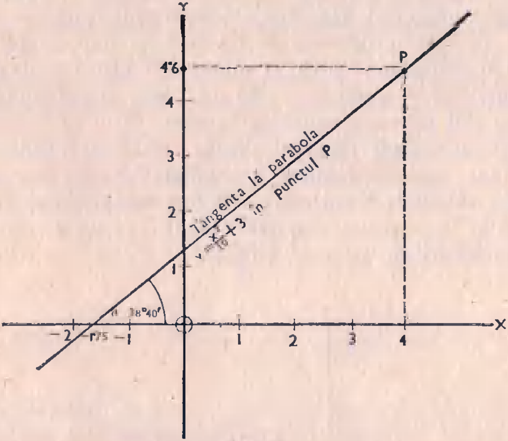


FIG. 56

alăturată este chiar tangenta unghiului α. Valoarea numerică a cîtului diferențial este deci egală, în fiecare punct al curbei, cu valoarea tangentei unghiului pe care tangenta în acest punct o face cu sensul pozitiv al axei absciselor. De aici rezultă concluzia, extrem de importantă, că ecuația analitică a unei curbe permite calcularea coordonatelor oricărui punct al curbei, în timp ce cîtul diferențial al funcției descrie comportarea curbei, adică direcția tangentei. Trebuie doar să înlocuim în funcție pe x cu un număr oarecare și obținem imediat pe y, adică aflăm poziția punctului corespunzător al curbei.

Dacă înlocuim pe x cu aceeași valoare în cîtul diferențial mai aflăm și înclinarea tangentei în punctul corespunzător al curbei. Vom exemplifica această vrăjitorie prin care putem trasa tangenta la o curbă, fără a o vedea pe aceasta din urmă, printr-un exemplu concret. O parabolă $\frac{x^2}{10} + 3$ va fi studiată în punctul $x = 4$.

Pentru $x = 4$ avem $y = \frac{16}{10} + 3 = \frac{46}{10} = 4{,}6$. Punctul P are deci coordonatele $x = 4$, $y = 4{,}6$. Dacă derivăm funcția $y = \frac{x^2}{10} + 3$ obținem $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{10} \cdot 2x = \frac{x}{5}$. Pentru $x = 4$, valoarea tangentei unghiului pe care tangenta îl face cu axa absciselor este deci egală cu $\frac{4}{5}$, adică cu 0,8. Acestei valori îi corespunde un unghi de aproximativ 38 grade și 40 minute. Tangenta are deci poziția indicată în desen. Dacă am desena acuma toată parabola, tangenta ar trebui să se potrivească cu exactitate, atît în ceea ce privește locul, cît și în ceea ce privește poziția față de parabolă.

CAPITOLUL XXXII

MAXIME ȘI MINIME

Proprietatea cîtului diferențial studiată în capitolul precedent a fost, din punct de vedere istoric, cauza descoperirii lui. Originea lui se află oarecum în „problema tangentelor", care, mai ales în secolul al șaptesprezecelea, după Descartes, a fost considerată și studiată din ce în ce mai mult. Interesul pentru această problemă a fost determinat de următorul fapt: evoluția regulată a oricărui fenomen, sau o legătură dintre mărimi, se poate exprima printr-o funcție și deci printr-o curbă. Acum poate să devină importantă problema aflării punctului, din domeniul în care se studiază curba, în care această curbă (și deci și funcția) atinge punctul (valoarea) cel mai înalt sau cel mai coborît. Aceste valori extreme se numesc maxime și minime, expresii pe care desigur le-a întîlnit oricine (vezi fig. 57).

Din desen se vede imediat că între x_1 și x_2 curba are atît un maxim cît și un minim. Acum este clar pentru oricine că tangenta este orizontală atît în punctul cel mai înalt cît și în cel mai coborît al porțiunii considerată de curbă, adică este paralelă cu axa Ox. Trebuie să ne imaginăm doar că această curbă este o fîșie de tablă de care sprijinim o riglă. Sau mai bine, punem fîșia de tablă pe masă, fără a-i schimba poziția. Ea atinge masa cu siguranță în punctul cel mai coborît, deoarece dacă ar exista un punct mai coborît, atunci ea ar trebui să pătrundă în tăblia mesei. Acuma intervine artificiul lui Leibniz, pe care el l-a publicat în 1684 în „Acta Eruditorum", prima revistă științifică din Germania, în celebra lucrare *Despre maxime și minime* ș.a.m.d., împreună cu algoritmul calculului diferențial. Dacă, așa cum s-a stabilit, derivata are valoarea tangentei, atunci ea trebuie să se anuleze în punctele în care tangenta este paralelă cu axa Ox și deci nu este înclinată față de axa absciselor, pentru că, după cele ce știm, tangenta de zero grade este egală cu zero. Prin urmare, pentru a descoperi un maxim sau un minim punem $\frac{dy}{dx} = f'(x) =$

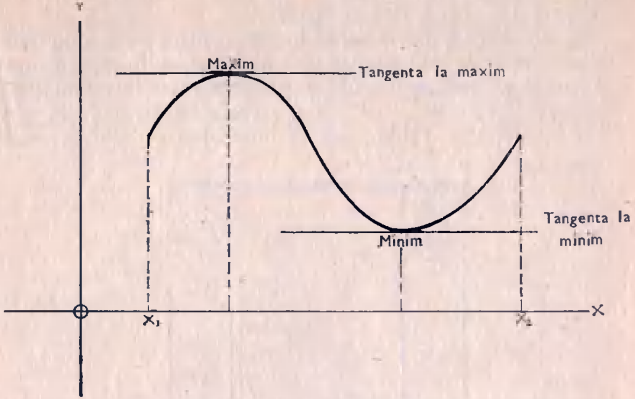


FIG. 57

= 0, printr-o răsturnare genială a problemei, și calculăm valoarea lui x din ecuația obținută în acest mod[1]. Din acest punct x trebuie să tragem doar ordonata curbei și dăm peste un maxim sau un minim cu cea mai mare siguranță[2].

Spunem maxim „sau" minim, ceea ce pare nesigur și echivoc. Pentru liniștirea cititorului dezvăluim însă că Leibniz a studiat, de asemenea, toate calculele și „criteriile" cu ajutorul cărora se poate decide care este natura valorii extreme în fiecare caz dat. De multe ori se poate afla acest lucru și dintr-o reprezentare grafică a curbei sau din alte împrejurări evidente. În orice caz, această analiză nu intră în cadrul preocupărilor noastre, deoarece ea presupune prea multe noțiuni, care ne depășesc intențiile. Vom arăta prin cîteva exemple inte-

---

[1] De acest procedeu se leagă mai degrabă numele lui P. Fermat, matematician francez (1601—1665). — *N.T.*

[2] Afirmația nu este chiar corectă, deoarece punctul corespunzător poate fi și un punct de inflexiune, în care caz el nu este nici punct de maxim, nici de minim. În această problemă se poate consulta, M. Nicolescu, N. Dinculeanu, S. Marcus, *op. cit.*, vol. I, p. 258. — *N.T.*

resante cum se procedează la calculul valorilor extreme, indispensabil în tehnică și fizică.

În primul rînd, o problemă clasică: dintr-o bucată de tablă trebuie confecționată o cutie pătrată deschisă la partea superioară. În ce mod se pot obține vase de capacitate maximă? Deoarece fiecare vas, sau cutie, trebuie să fie confecționat dintr-o bucată de tablă, care trebuie apoi sudată, foaia de

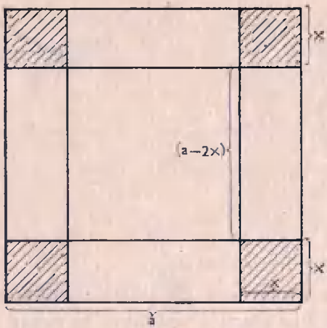


FIG. 58

tablă trebuie tăiată mai întîi în bucăți pătrate, care constituie, fiecare, materialul pentru o cutie.

Orice copil știe că se poate obține o cutie dintr-un pătrat tăind în fiecare colț cîte un pătrat mic și ridicînd apoi pereții astfel formați. Dar nu știm cît de mari trebuie să fie aceste pătrate (hașurate) pe care le tăiem. Teoretic, lungimea x a laturii lor ar putea varia de la 0 la $\frac{a}{2}$. Pentru $x = 0$ pătratele noastre s-ar reduce la cele patru vîrfuri și cutia nu ar avea nici o înălțime, nefiind nici un perete de ridicat. Pentru $x = \frac{a}{2}$ ar trebui să tai toată tabla și cutia nu ar mai avea fund. Între aceste două cazuri extreme, care cuprind așa-numitul „domeniu" al problemei, se află o infinitate de cutii posibile, începînd cu o cutie care nu are înălțime, pînă la o cutie a cărei bază este un pătrat infim și are înălțimea $\frac{a}{2}$. Cum putem găsi oare din toate aceste cutii nenumărate tocmai pe aceea care are volumul cel mai mare? Dacă reuşim să exprimăm printr-o funcţie modul în care depinde capacitatea de mărimea pătratelor tăiate, putem să desenăm graficul acestei dependenţe prin substituirea diferitelor valori ale lui x cuprinse între 0 şi $\frac{a}{2}$. Din acest desen am putea vedea în mod aproximativ unde se află acest „maxim", deoarece punctul cel mai înalt al curbei indică acest maxim din domeniul nostru. În acest mod, am şti însă valoarea extremă doar „aproximativ" şi, după cum am explicat mai înainte, îl putem găsi căutînd punctul în care tangenta este paralelă cu axa absciselor, adică, vorbind aritmetic, căutînd valoarea lui x în care derivata este nulă. O problemă de extrem reclamă deci mai multe operaţii. În primul rînd, delimitarea domeniului în care se caută maximul sau minimul. În al doilea rînd, deducerea funcţiei al cărei grafic trebuie să indice valoarea extremă prin cel mai înalt sau cel mai coborît punct. În al treilea rînd, formarea derivatei acestei funcţii. În al patrulea rînd, anularea derivatei, obţinînd în acest mod o ecuaţie în necunoscuta x. În al cincilea rînd, rezolvarea acestei ecuaţii în raport cu x, prin care se obţine punctul în care funcţia ia valoarea extremă. Renunţăm la analiza necesară pentru a stabili dacă există o valoare extremă în interiorul domeniului şi cercetarea faptului dacă valoarea extremă găsită este un maxim sau un minim, deoarece ea iese din cadrul preocupărilor noastre. De aceea alegem numai exemple în care această întrebare are un răspuns evident.

Acum să mergem mai departe, respectînd cu stricteţe regulile noastre. Ca domeniu am găsit că x ia valori cuprinse între 0 şi $\frac{a}{2}$. Acum trebuie să formăm funcţia. Deoarece căutăm un volum care trebuie să fie maxim, notăm cu y fiecare din volumele posibile. Acest y trebuie exprimat în funcţie de mărimea dată a (latura bucăţii de tablă) şi x-ul arbitrar (latura unuia din pătratele tăiate). Volumul unui paralelipiped de acest fel (prismă dreaptă cu baza pătrată)[1] este însă egal

[1] În general, baza unui paralelipiped poate fi un dreptunghi oarecare. În cazul nostru, ea este un dreptunghi particular, anume un pătrat.

cu aria bazei înmulțită cu înălțimea. Baza cutiei trebuie să aibă lungimea laturii egală cu $(a - 2x)$, deci baza are aria egală cu $(a - 2x)^2$. Înălțimea cutiei corespunzătoare este însă egală cu x, deoarece pereții ridicați au această lățime. Deci, volumul $= y = (a - 2x)^2 x$ sau $y = (a^2 - 4ax + 4x^2)x$ ceea ce dă, prin dezvoltare și ordonare după puterile descrescătoare ale lui x, funcția $y = 4x^3 - 4ax^2 + a^2x$. Acuma trebuie să formăm derivata acestei funcții:

$$y' = \frac{dy}{dx} = 4 \cdot 3x^2 - 4 \cdot 2ax + a^2 \cdot 1 \cdot x^0 = 12ax^2 - 8x + a^2.$$

Această derivată trebuie anulată. Deci,

$$12x^2 - 8ax + a^2 = 0.$$

După regulile ecuației complete de gradul doi trebuie să izolăm mai întîi pe x^2. Rezultă, prin împărțirea întregii ecuații cu 12:

$$x^2 - \frac{8a}{12}x + \frac{a^2}{12} = 0$$

sau

$$x^2 - \frac{2a}{3}x + \frac{a^2}{12} = 0,$$

unde a este o mărime „constantă“ cunoscută. Ea este lungimea laturii bucății de tablă din cazul nostru concret. De aceea, îl considerăm pe a ca pe un număr concret sau ca pe un coeficient. După regulile rezolvării ecuației complete de gradul doi (p. 232) rezultă pentru x valoarea

$$x = \frac{2a}{6} \pm \sqrt{\frac{4a^2}{36} - \frac{a^2}{12}}$$

$$= \frac{2a}{6} \pm \sqrt{\frac{4a^2 - 3a^2}{36}}$$

$$= \frac{2a}{6} \pm \sqrt{\frac{a^2}{36}}$$

$$= \frac{2a}{6} \pm \frac{a}{6}.$$

Pentru x obținem deci valorile $\frac{a}{2}$ și $\frac{a}{6}$. Deoarece $\frac{a}{2}$ nu poate fi luat în considerare, pentru că el nu se află în interiorul domeniului, ci este una din extremitățile lui și corespunde unui caz absurd, am găsit că cutia are volumul maxim atunci cînd foaia de tablă este îndoită la distanța de $\frac{a}{6}$ de margine. Aceasta

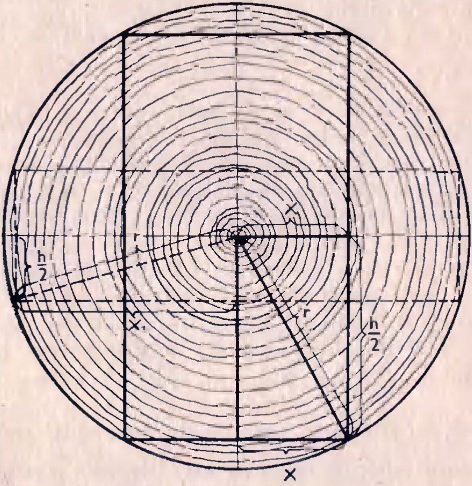


FIG. 59

înseamnă că pătratul de bază are lungimea laturii de $\frac{4}{6}\,a = \frac{2}{3}\,a$, iar înălțimea cutiei este $\frac{a}{6}$. Pentru a verifica aproximativ dacă calculul nostru este corect, să presupunem că am avea o foaie de tablă cu latura de 60 cm. Baza „cutiei" ar avea aria de 4×4 dm^2, dacă decupăm pătrate cu latura de $\frac{a}{6}$, adică de 10 cm, deci ar avea 16 dm^2, iar înălțimea ar fi de 1 dm. Volumul ar fi așadar de 16 dm^3, adică de 16 l. Dacă am decupa pătrate cu latura de 5 cm, atunci baza ar avea aria de 5×5 dm², deci de 25 dm². Înălțimea ar fi acuma de 5 cm $= \frac{1}{2}$ dm, ceea ce prin înmulțire cu 25 dm² dă un volum de numai $12\frac{1}{2}$ dm³, adică de $12\frac{1}{2}\,l$. Deci, cu siguranță mai mic. Dacă am alege acuma pătrate cu latura de 15 cm, baza cutiei ar avea aria de 3×3 dm² $= 9$ dm², iar înălțimea ar fi de 15 cm $=$ $= 1{,}5$ dm, volumul fiind astfel de $9 \cdot 1{,}5 = 13{,}5$ dm³ $= 13{,}5\,l$, ceea ce este de asemenea mai puțin decît volumul cutiei pentru care $x = \frac{a}{6}$.

Pe baza acestui exercițiu, al doilea exemplu, împrumutat din statică, ne va produce mai puține greutăți (vezi fig. 59).

Dintr-un trunchi rotund de copac trebuie confecționată o grindă cu secțiune dreptunghiulară, astfel încît rezistența sa să fie maximă, la o lungime dată[1]. Raza secțiunii trunchiului este cunoscută și o notăm cu r. Fără a demonstra acest lucru, menționăm că este cunoscută contribuția pe care o aduce rezistenței înălțimea și lățimea grinzii. Această „rezistență“ $= F =$ pătratul înălțimii înmulțit cu lățimea secțiunii. Deci, $F = h^2b$. Dacă notăm acuma cu x jumătatea lățimii, atunci din teorema lui Pitagora avem $\left(\frac{h}{2}\right)^2 = r^2 - x^2$ sau $\frac{h^2}{4} = r^2 - x^2$, sau $h^2 = 4r^2 - 4x^2$. Acuma „rezistența“ trebuie să fie maximă. Rezistența este $F = h^2b$. Deoarece știm că $h^2 =$ $= 4r^2 - 4x^2$ și $b = 2x$, deducem $F = y = (4r^2 - 4x^2) \cdot 2x$ sau $y = 8r^2x - 8x^3$. Am obținut în acest mod funcția. Care este însă „domeniul“ considerat? Lățimea $2x$ se poate afla între limitele 0 și $2r$. Acest fapt se vede clar din desen, iar ambele limite sînt evident lipsite de sens pentru problema noastră, deoarece în cazul lor grinda are lățimea nulă sau înălțimea nulă. În afară de aceasta, menționăm că ne interesează doar valorile pozitive ale lui x, deoarece o grindă care ar avea o lățime negativă ar fi, din punct de vedere tehnic,

---

[1] Secțiunea trasată punctat indică o altă posibilitate de secționare a grinzii.

tot atît de absurdă ca şi o grindă cu lăţimea sau înălţimea nulă. Să formăm acuma derivata funcţiei

$$y' = \frac{dy}{dx} = 8r^2 \cdot 1 \cdot x^0 - 8 \cdot 3 \cdot x^2$$

$$= 8r^2 - 24x^2.$$

Să anulăm acuma derivata şi să rezolvăm ecuaţia în x astfel obţinută

$$8r^2 - 24x^2 = 0$$

$$24x^2 = 8r^2$$

$$x^2 = \frac{8}{24} r^2$$

$$x^2 = \frac{1}{3} r^2$$

$$x = \pm \sqrt{\frac{r^2}{3}}$$

$$x = \pm r \sqrt{\frac{1}{3}} = \pm \frac{r}{\sqrt{3}} = \pm \frac{r\sqrt{3}}{3} = \pm \frac{r}{3} \sqrt{3}.$$

Deoarece ne interesează doar semnul plus, am stabilit că grinda are cea mai mare rezistenţă atunci cînd lăţimea ($b = 2x$) are valoarea $\frac{2r}{3}\sqrt{3}$. Pentru o rază de 1 dm am obţine o lăţime a grinzii de 1,15470 dm.

În încheiere, o problemă de minim. După cum se ştie, putem înscrie într-un pătrat o infinitate de pătrate. Care din acestea este cel mai mic?

Ca domeniu se consideră toate pătratele pentru care x se află între 0 şi a. Cel mai mare pătrat înscris corespunde desigur lui $x = 0$, deoarece atunci el este chiar pătratul mare. Acuma x creşte în direcţia săgeţii, iar pătratul înscris devine din ce în ce mai mic. În orice caz, pînă la un anumit punct, necunoscut pentru moment, de pe segmentul a, deoarece dacă x a ajuns în a atunci pătratul înscris pare rotit cu 90 de grade şi este, în acest caz, din nou egal cu pătratul mare. Acum să căutăm funcţia. Pătratul înscris are latura b şi deci aria lui este b^2. Această arie trebuie să fie minimă. Deci $b^2 = y$. Cum putem exprima acuma pe b^2 în funcţie de x, de care depinde evident mărimea pătratului, aşa cum am văzut la „stabilirea domeniului"? Acum ne vine din nou Pitagora în ajutor, deoarece $b^2 = x^2 + (a - x)^2$, ceea ce prin calcul dă $b^2 =$

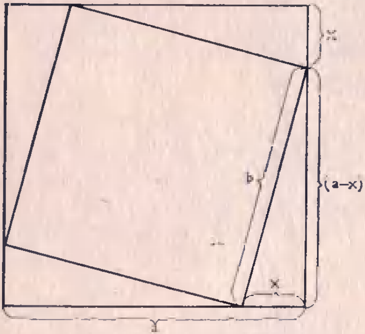


FIG. 60

$= x^2 + a^2 - 2ax + x^2 = 2x^2 - 2ax + a^2$. Am obţinut deci funcţia.

Aria pătratului înscris $= b^2 = y = 2x^2 - 2ax + a^2$.

Derivarea funcţiei dă $y' = 2 \cdot 2x - 2a \cdot 1 \cdot x^0$ sau $y' = \dfrac{dy}{dx} = 4x - 2a$. După reţeta veche anulăm acuma derivata şi rezolvăm ecuaţia în raport cu x. Deci,

$$4x - 2a = 0$$

$$4x = 2a$$

$$x = \frac{a}{2}.$$

Deoarece punctele de maxim ale domeniului erau chiar limitele, între ele trebuie să se afle un minim. Am văzut cu ochii noştri că pătratul înscris, pornind din limita $x = 0$, mai întîi se micşorează, pentru ca apoi la $x = a$ să fie tot aşa de mare ca şi pentru $x = 0$. Calculul dă apoi o singură valoare pentru acest minim. Acest minim există deci şi se află simetric între 0 şi a adică în $x = \frac{a}{2}$. Lăsăm pe seama cititorului să verifice cît de mare este pătratul înscris pentru $a=1$ dm, dacă încercăm mai întîi cu $x = \frac{a}{2}$, corespunzător valorii minime, deci $x = 5$ cm $= \frac{1}{2}$ dm, şi dacă punem apoi $x = \frac{a}{4}$, şi $x = \frac{3a}{4}$. Deoarece curba este simetrică trebuie să obţinem pentru ultimele două valori ale lui x pătrate egale, care în orice caz trebuie să fie mai mari decît pătratul minim, care corespunde lui $x = \frac{a}{2}$. Ariile se calculează după formula $b^2 = 2\,x^2 - 2\,ax + a^2$. (Soluţie: minimul este $b^2 = \frac{a^2}{2}$, iar pentru celelalte valori ale lui x avem $b^2 = \frac{5}{8}a^2$).

TEHNICA CALCULULUI INTEGRAL

Trebuie să revenim acum la locul în care am discutat posibilitatea integrării. Am stabilit acolo că funcţia de sub semnul integral se află faţă de integrala calculată, în acelaşi raport ca şi derivata faţă de funcţia de la care provine. Deci $f(x) = \int y'\mathrm{d}x$ sau $\int f'(x)\mathrm{d}x$, deoarece $\mathrm{d}y = f'(x)\mathrm{d}x$ şi integrarea ambilor membri ai ultimei ecuaţii ne dă $\int \mathrm{d}y = \int f'(x)\mathrm{d}x$; $\int \mathrm{d}y$ este însă egală cu $f(x)$, care se mai numeşte primitivă.

Deoarece, între timp, am învăţat regulile fundamentale ale calculului diferenţial, vom trece acum la deducerea anumitor reguli de calcul pentru integrare. Vom deriva mai întîi o funcţie şi vom încerca să obţinem apoi, prin integrarea derivatei, funcţia primitivă. Prin această încercare sperăm să putem lămuri esenţa procesului de integrare din punctul de vedere al tehnicii de calcul. O dată ajunşi însă în posesia algoritmului integrării am atins şi ultimul ţel al cărţii noastre.

Să alegem atunci ca „primitivă" funcţia

$$f(x) = y = 2x^3 - 7x^2 + x + 89$$

şi să calculăm derivata ei. Ea este

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f'(x) = y' = 2 \cdot 3x^2 - 7 \cdot 2x + 1 \cdot x^0 = 6x^2 - 14x + 1.$$

Chiar de aici observăm echivocul integrării. Nimeni nu va fi în stare să indice care a fost constanta, atunci cînd va încerca restabilirea primitivei din derivata ei (şi aceasta este chiar integrarea). Nici nu se ştie măcar dacă a existat vreo constantă. Poate au fost chiar mai multe constante sau un produs, sau un cît de constante, care prin derivare au dispărut. Prin urmare, dacă funcţia de sub semnul integral este gîndită ca derivată a unei primitive încă necunoscute, atunci în mod logie nu se poate vorbi de o singură primitivă. Oricărei derivate îi corespund o infinitate de primitive din care ea poate proveni, iar aceste primitive se deosebesc tocmai printr-o constantă aditivă sau substractivă C. Riguros vorbind, trebuie să scriem deci $f(x) = y = \int f'(x) \pm C$ sau $\int f'(x) + C$, dacă admitem și valori negative pentru C. Sub această formă chiar se și scrie integrala generală, sau nedefinită, iar dacă nu este scrisă astfel, atunci constanta aditivă arbitrară C trebuie totuși gîndită. Vom arăta mai tîrziu de ce această constantă nu influențează integrala definită, care este utilizată în calculele reale, și care este semnificația fizică și geometrică a acestei constante. Pentru moment să nu ne neliniștim din cauza ei.

Am susținut, prin urmare, că primitiva $f(x)$ sau y trebuie să fie egală cu integrala $\int f'(x)dx$ sau, în cazul nostru concret,

$$f(x) = y = \int (6x^2 - 14x + 1)dx + C.$$

Din punct de vedere practic să observăm că dx limitează la dreapta „conținutul" integralei, astfel încît nimeni nu se poate îndoi că $+C$ trebuie să stea în afara integralei. Să ignorăm acum acest C și să comparăm termenii care conțin pe x din primitivă cu termenii corespunzători de sub semnul integral. În acest scop să-i scriem unul sub altul:

puterile lui x din primitivă:	$2x^3 - 7x^2 + x$
puterile lui x de sub semnul integral:	$6x^2 - 14x + 1.$

Mai întîi să observăm că putem integra „termen cu termen", ca și în cazul derivării, atîta timp cît este vorba despre puteri ale lui x legate aditiv sau substractiv. Adoptăm acest fapt ca regulă și scriem

$$\int (6x^2 - 14x + 1)dx = \int 6x^2dx - \int 14\,xdx + \int 1\,dx.$$

Integrala unei sume este deci egală cu suma integralelor termenilor. În al doilea rînd să ne amintim că integrala este un fel de sumă a unor părţi infinitezimale. Pentru o astfel de sumă este valabilă legea distributivităţii în raport cu factorii (coeficienţii) constanţi, deoarece orice sumă $3a + 3(a + h) + 3(a + 2h) + 3(a + 3h) + \cdots$ poate fi scrisă $3[a + (a + h) + (a + 2h) + (a + 3h) + \cdots]$ sau $3 \sum_{\nu=0}^{n} (a + \nu h)$. De aceea, toate constantele multiplicative pot fi puse în faţa semnului integral, aşa că putem scrie şi

$$\int (6x^2 - 14x + 1)\mathrm{d}x = 6 \int x^2\mathrm{d}x - 14 \int x\mathrm{d}x + 1 \int \mathrm{d}x.$$

Vrem să ne întoarcem acum la problema determinării puterilor lui x din primitivă, corespunzătoare puterilor lui x de sub semnul integral. Anume, cum putem reveni de la $6x^2$ la $2x^3$, de la $14x$ la $7x^2$ şi de la 1 la x? Primul lucru pe care îl observăm este faptul că integrarea măreşte exponentul lui x cu o unitate, ceea ce este de la sine înţeles, dacă ne gîndim că prin derivare exponentul lui x este micşorat cu o unitate. Prin urmare, în general, $\int x^m\mathrm{d}x =$ ceva înmulţit cu x^{m+1}; care este însă acest coeficient? Din $2x^3$ se face $6x^2$, iar din $6x^2$ trebuie să revenim la $2x^3$. Deoarece ştim ce se petrece cu x, ne mai întrebăm cum se ajunge la 2 din 6. Foarte simplu, şi anume prin împărţire cu 3. Eu nu am însă primitiva, ci numai derivata. Întrucît bănuiesc că modificarea coeficienţilor depinde de puterea lui x şi deoarece la derivare coeficientul care apărea este chiar exponentul puterii lui x, trebuie să încerc să obţin coeficientul, cunoscînd puterea lui x de sub semnul integral. Deci, din $6x^2$ trebuie să obţin $2x^3$. Deoarece mai înainte am considerat exponentul general m, trebuie să împărţim pe 6 cu $(m + 1)$, adică cu 3, pentru a obţine coeficientul 2 al lui $2x^3$. Susţinem deci că $\int x^m\mathrm{d}x$ este egală cu $\frac{1}{m+1}x^{m+1}$. Să facem probă cu celelalte puteri. Care este valoarea lui $\int 14x\mathrm{d}x$? Aici $m = 1$. Deci, valoarea este $\frac{14}{1+1}x^{1+1} = \frac{14}{2}x^2 = 7x^2$, adică tocmai ceea ce așteptam. Dacă ne interesăm acum de $\int 1\,\mathrm{d}x$ obținem $\frac{1}{0.+1}x^{0+1} = \frac{1}{1}x = x$, ținînd seama că $\int 1\mathrm{d}x = + \int x^0\mathrm{d}x$. Am ajuns astfel în posesia algoritmului temutului calcul integral și cu aceasta am respectat promisiunea că ordinul de integrare nu va fi mai greu de executat decît oricare alt ordin matematic. În orice caz, așa se întîmplă cu funcțiile algebrice raționale întregi. Nu ascundem însă faptul că integrarea funcțiilor mai complicate nu mai este o meserie, ci o artă. Faptul că

$$\int_0^x \sqrt{1+\frac{x^2}{k^2}}\,\mathrm{d}x \text{ este egal cu } \frac{x}{2}\sqrt{1+\frac{x^2}{k^2}} + \frac{k}{2}\log\left(\frac{x}{k}+\sqrt{1+\frac{x^2}{k^2}}\right)^{1}$$

nu poate f istabilit cu ajutorul regulilor noastre simple. Pentru aceasta sînt necesare nenumărate artificii. Pentru practica calculului cu integrale există tabele în care sînt dispuse ordonat diferite forme de integrale cu rezolvarea lor.

Nu trebuie să trecem sub tăcere nici faptul că există integrale care nu pot fi rezolvate, deoarece putem forma expresii care nu sînt derivate ale unor primitive. Să menționăm în încheiere că, pentru practică, o rezolvare aproximativă a oricărei integrale este posibilă cu o precizie oricît de mare.

Cu toate că am indicat limitele modeste între care se află cunoștințele noastre, nu vrem să capitulăm. Putem rezolva nenumărate probleme de calcul integral, cu toată pregătirea noastră redusă în acest domeniu. În primul rînd stăpînim

---

[1] Rectificarea parabolei $y = \frac{x^2}{2k}$ (din G. Kowalewski, *Einführung in die Infinitesimalrechnung*).

principiul cu care vom înțelege multe lucruri, care sînt pentru cei neinițiați o enigmă insolubilă.

Revenim deci la problema cvadraturii. Vrem să trasăm curba $y = x - x^2$ și să efectuăm cvadratura într-un anumit domeniu. Deoarece această curbă trece prin originea coordonatelor, pentru $x = 0$, iar la $x = 1$ trece din nou la valori negative ale ordonatelor, iar cînd x crește în continuare rămîne în cadranul al patrulea, să calculăm aria porțiunii cuprinse între $x = 0$ și $x = 1$.

Combinăm cunoștințele noastre și stabilim mai întîi printr-o problemă de maxim care este cea mai mare ordonată a acestei porțiuni de curbă. Pentru domeniul cuprins între $x = 0$ și $x = 1$ funcția $y = x - x^2$ are derivata $y' = f'(x) = \frac{dy}{dx} = 1 - 2x$. Anularea derivatei dă $1 - 2x = 0$. Rezolvarea acestei ecuații: $2x = 1$ sau $x = \frac{1}{2}$. Acest x se află desigur în domeniul cerut, și anume chiar la mijloc, între 0 și 1. Revenim acuma la funcția curbei și punem acolo $x =$

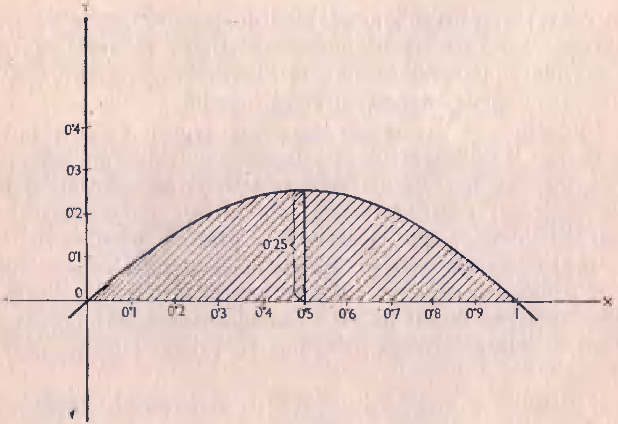


FIG. 61

$= \frac{1}{2}$. Deci, $y = x - x^2 = \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$. Depărtarea maximă a curbei deasupra axei Ox este deci $\frac{1}{4}$, ceea ce se vede imediat din desen. Tot așa se vede că acest „Maxim“ are loc pentru $x = \frac{1}{2}$.

Să trecem acum la cvadratură. Știm deja că cvadratura se face cu ajutorul unei integrale „definite“, adică cu al unei integrale prevăzute cu o limită superioară și una inferioară. Deci, în cazul nostru $\int_0^1 (x - x^2)\mathrm{d}x = ?$ Cum tratăm integrala „definită“? Calea este foarte ușoară. Avem, în primul rînd, o formulă generală cu care calculăm integrala nedefinită, care ne indică legea după care trebuie calculată aria curbei date. Deci,

$$F(x) = y = \int (x - x^2)\mathrm{d}x = \int x\mathrm{d}x - \int x^2\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{1}{1+1}x^{1+1} - \frac{1}{2+1}x^{2+1} = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3$$

(la care mai adăugăm constanta C).

Acum problema constă în considerarea „limitelor“. Pentru aceasta există o regulă foarte simplă, ca să vorbim oarecum superficial. Anume, trebuie să scădem integrala limitei inferioare din integrala limitei superioare. Dacă, în general, notăm cu a limita inferioară și cu b limita superioară și avem deci integrala $\int_a^b f'(x)\mathrm{d}x$, atunci soluția integralei nedefinite ar fi $f(x) + C$. Acum trebuie să punem $x = a$ și $x = b$ și obținem $\int_a^b f'(x)\mathrm{d}x = [f(b) + C] - [f(a) + C]$ sau, după desfacerea parantezelor $f(b) + C - f(a) - C = f(b) - f(a)$. Vedem că la calcularea integralei definite constanta dispare, în orice caz, obținînd o valoare unică. În exemplul nostru, limita superioară este 1, iar cea inferioară 0. Deoarece integrala nedefinită avea valoarea $\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 + C$, trebuie să calculăm

$$\left[\frac{1}{2}(1)^2 - \frac{1}{3}(1)^3 + C\right] - \left[\frac{1}{2}(0)^2 - \frac{1}{3}(0)^3 + C\right] = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} +$$

$$+ C - C = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{3}{6} - \frac{2}{6} = \frac{1}{6}.$$

Prima noastră cvadratură a reuşit. Suprafaţa haşurată are aria $\frac{1}{6}$, în unităţi corespunzătoare unităţii luate pe axa Ox, care este şi unitate pe axa ordonatelor. Deci, după cum se mai spune $\frac{1}{6}$ unităţi pătrate[1].

---

[1] Dacă ordonata şi abscisa nu ar fi fost măsurate in aceeaşi scară, atunci integrala ar da numărul „dreptunghiurilor unitate", ale căror laturi sînt unităţile abscisei şi ordonatei. „Unitatea pătrată" este deci un caz particular al unei posibilităţi mai generale. Totuşi, în această carte ne limităm la „unităţi pătrate".

VALOARE MEDIE ȘI INTEGRALĂ DEFINITĂ

Nu vrem să părăsim acest exemplu fără a mai menționa ceva. Deoarece baza figurii noastre este 1 și aria are $\frac{1}{6}$ unități pătrate, figura are aceeași arie ca și un dreptunghi cu baza egală cu 1 și înălțimea $\frac{1}{6}$. S-ar putea afirma acum că, deoarece unele ordonate[1] sînt mai mici și altele mai mari decît $\frac{1}{6}$, acest $\frac{1}{6}$ este „ordonata medie" sau „o valoare medie a tuturor ordonatelor". De aceea, trebuie să considerăm mai îndeaproape noțiunea de „valoare medie". Cel mai simplu fel de valoare medie este așa-numita medie aritmetică. Ea este forma de medie pe care o adoptă în mod instinctiv orice copil. Dacă trei mere au diametrul de 5 cm, 10 cm și 15 cm, atunci mărul mediu are diametrul de 10 cm. Sau, dacă cumpăr un kilogram de zahăr o dată cu 80 groschen[2], a doua oară cu 90 groschen, a treia oară cu 95 groschen și a patra oară cu 99 groschen, atunci prețul mediu al unui kilogram de zahăr este de $\frac{80 + 90 + 95 + 99}{4} = 91$ groschen. În general, media aritmetică se formează după formula

$$M_A = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n}{n}\,^{3}.$$

Valoarea medie („ordonata medie") nu este formată, în cazul nostru, dintr-un număr finit de valori ale ordonatelor, ci dintr-o infinitate de valori. Deci, dacă $y_1, y_2, y_3, y_4, \ldots$

---

[1] Desigur, în domeniul considerat.

[2] Groschen-ul este o veche monedă germană. — *N.T.*

[3] Media geometrică este rădăcina a n-a din produsul tuturor valorilor. Deci $M_G = \sqrt[n]{a_1 a_2 a_3 \ldots a_n}$.

sînt ordonatele, ea ar trebui să fie $M_A = \frac{y_1 + y_2 + \cdots + y_\infty}{\infty}$, ceea ce, evident, nu se poate calcula. Dacă însă privim această definiție a mediei ca problemă infinitezimală, putem ajunge la un rezultat, deoarece suma infinită a ordonatelor nu este altceva decît aria care trebuie calculată, iar valoarea ei este integrala definită pe domeniul cerut. Care este însă numitorul fracției care ne dă media? Este chiar expresia pentru numărul tuturor ordonatelor, deci, oarecum, segmentul format de toate picioarele perpendicularelor lor. Dar acesta nu este altceva decît porțiunea axei Ox, care formează domeniul. Formula noastră infinitezimală pentru medie este deci

$$\frac{\int_a^b f'(x)\, \mathrm{d}x}{b - a}.$$

Vrem să verificăm acum formula în cazul nostru, înainte de a arăta, printr-un exemplu concret, însemnătatea practică imensă a acestei formule. Am găsit pentru arie, dată de integrala $\int_0^1 (x - x^2)\mathrm{d}x$, valoarea $\frac{1}{6}$. Acest $\frac{1}{6}$ este deci numărătorul. Numitorul este diferența limitelor $1 - 0 = 1$. Deci, valoarea medie sau ordonata medie este în cazul nostru

$$M_A = \frac{\frac{1}{6}}{1} = \frac{1}{6}.$$

Aproape oricine a văzut un aparat cu înregistrare automată. Există termometre, barometre, higrometre etc. cu înregistrare automată, în orice stațiune meteorologică. Pe un tambur este înfășurată o hîrtie milimetrică, ale cărei diviziuni indică zilele și orele, care se succed în direcția înfășurării. În înălțime, diviziunile indică gradele de temperatură, presiunea atmosferică, gradul de umiditate al aerului sau altele. Tamburul este pus în mișcare de un mecanism, care îl rotește potrivit cu diviziunile care indică timpul, în timp ce un creion trasează prin mișcările lui, în sus și în jos, gradele de temperatură, presiunea atmosferică etc. Deoarece în fiecare moment există o temperatură sau o presiune atmosferică, sau o umiditate a aerului, acest mod de trasare este continuu, infinitezimal. Curba corespunzătoare este, de aceea, continuă și derivabilă[1], dar ea este atît de complicată și de accidentată, încît este imposibil să se indice o formulă pentru ea. Dacă după o lună de zile luăm hîrtia de pe tambur, atunci hîrtia arată, de exemplu, ca în fig. 62.

Acum ne-ar interesa „temperatura medie a lunii martie". Vom face un artificiu prin care vom determina această temperatură medie, fără nici un calcul deosebit, obținînd totuși o valoare medie integrală. Calculăm în modul următor, răsturnînd toate cu capul în jos: formula curbei, din care am putea

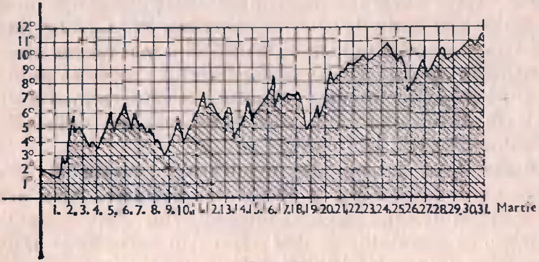


FIG. 62

calcula integrala definită ne este necunoscută și va rămîne necunoscută. Valoarea integralei este însă aria cuprinsă între curbă, ordonata inițială și cea finală ale domeniului și axa absciselor. Dacă decupăm această arie cu o foarfecă fină și dacă o cîntărim cu un cîntar de precizie și cîntărim apoi pătratul de arie unitate, putem determina în acest mod aria și deci valoarea integralei. Am fi luat ca latură a unității pătrate gradul de temperatură. De lungime egală cu acest grad apare pe axa Ox unitatea de lungime corespunzătoare unei zile. Acum nu avem nimic altceva de făcut decît să împărțim aria pe care am obținut-o prin cîntărire, cu „domeniul", adică cu $(b - a)$, care aici este egal cu $31 - 0 = 31$. În acest mod obținem cu exactitate temperatura medie a lunii respective, și chiar cu o exactitate infinitezimală, ca medie a unui număr infinit de temperaturi din acea lună. În ceea ce privește „funcția", ar mai fi de adăugat că aici temperatura depinde în mod necesar de timpul x. De asemenea nu ar fi trebuit

[1] Afirmația nu se poate demonstra, ea neavînd sens. Nu trebuie confundată noțiunea matematică de curbă cu desenul. — *N.T.*

să alegem în mod obligatoriu zilele ca unități pentru x. Am fi putut proceda măsurînd domeniul lui x cu unitățile folosite pentru y. În încheiere să transcriem artificiul nostru în termeni matematici:

$$\frac{\text{Rezultatul cîntăririi} = n \text{ unități pătrate} = \int_a^b f'(x)\,dx}{b-a},$$

unde b trebuie măsurat în unități egale cu latura unității pătrate. Acest exemplu ne demonstrează valoarea imensă a operațiilor efectuate de gîndire, deoarece în realitate doar am cîntărit, am împărțit şi am calculat. N-a mai rămas nici urmă de integrală, însă justificarea artificiului nostru se putea face numai cu calculul integral, deoarece o valoare medie dintr-o infinitate de ordonate nu s-ar putea obține niciodată fără raționamente infinitezimale.

Înainte de a începe alte cvadraturi trebuie să insistăm asupra unei proprietăți a integralei definite, care produce multă bătaie de cap, mai ales începătorilor. Este vorba despre dispariția constantelor de integrare. Am mai arătat aritmetic că scăderea integralei limitei inferioare din integrala limitei superioare face să dispară constanta. Este indiferent dacă constanta integralei „nedefinite“ intervine aditiv sau substractiv. Dacă integrala nedefinită ar fi fost $\int f'(x)dx$, la care s-a adăugat $+C$ sau $-C$, atunci calculul integralei definite al aceleiași funcții $\int_a^b f'(x)dx$ ar avea întotdeauna forma

$$[\int f'(b)dx + C] - [\int f'(a)dx + C] = f(b) + C - f(a) - C = \\ = f(b) - f(a)$$

sau

$$[\int f'(b)dx - C] - [\int f'(a)\,dx - C] = f(b) - C - f(a) + C = \\ = f(b) - f(a)$$

Din punct de vedere geometric, această scădere nu este altceva decît scăderea unei suprafețe din alta: în orice caz, numai în ceea ce priveşte rezultatul. Atîta timp cît constanta mai intervine, este vorba, din punct de vedere geometric, de scăderea unei ordonate din alta. Pentru a înțelege însă acest lucru corect trebuie să discutăm noțiunea de curbă diferențială şi integrală. Ştim că oricărei funcții îi corespunde analitic un „grafic". Dacă, de exemplu, am avea funcția $y = x - x^2$ de mai înainte, atunci am putea desena o curbă a acestei funcții sau al unei anumite porțiuni a ei, așa cum am și făcut (fig. 61). Dacă integrăm, obținem

$$F(x) = \int (x - x^2)\mathrm{d}x \pm C = \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \pm C,$$

deci o nouă funcție de x, pe care o putem desena. Această „primitivă" ne dă, față de funcția „inițială" $y = x - x^2$, așa-numita curbă integrală. Acum nu știm însă cît este de mare C. Nici nu știm măcar dacă este pozitiv sau negativ. Ar putea fi și egal cu zero. Ce înseamnă acum, din punct de vedere analitic, o constantă aditivă (substractivă)? Dezvăluim îndată: curba ca atare rămîne neschimbată, nu își schimbă forma dacă constanta apare sau nu. Constanta produce doar o translație a curbei în sistemul de coordonate. O parabolă cu formula $y = \frac{x^2}{4} \pm C$ arată ca în fig. 63, după diferitele valori ale lui C.

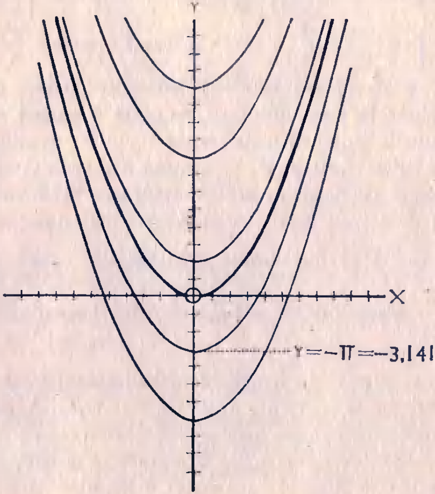


FIG. 63

Deoarece C poate lua orice valoare între $-\infty$ şi $+\infty$, orice integrală generală sau nedefinită reprezintă o familie de curbe, care umplu întreaga suprafaţă. Această proprietate a integralei are o însemnătate imensă în fizică. Dacă reuşim să formăm o „ecuaţie diferenţială" într-un domeniu (de pe o suprafaţă sau din spaţiu), atunci domeniul sau „cîmpul" este determinat în fiecare punct. Ecuaţia diferenţială se „rezolvă" prin integrare, iar această integrală îmi dă starea „cîmpului", în fiecare punct, prin determinarea constantelor. Aceasta însă am spus-o doar în treacăt. Ştim acum că există o infinitate de „curbe integrale", care de altfel sînt congruente şi se deosebesc numai prin poziţie, datorită constantei. Dacă am avea de integrat funcţia $y' = \frac{x}{2}$ am obţine drept curbe integrale toate funcţiile $F(x) = \int \frac{x}{2}\,\mathrm{d}x \pm C = \frac{x^2}{4} \pm C$, iar fiecare integrală definită $\int_a^b \frac{x}{2}\,\mathrm{d}x$ ar fi egală cu $\left(\frac{b^2}{4} \pm C\right) - \left(\frac{a^2}{4} \pm C\right) = \frac{b^2}{4} - \frac{a^2}{4}$. Dar întrucît fiecare $\frac{x^2}{4} \pm C = F(x) = y$ şi reprezintă deci ordonata curbei integrale, integrala generală este ordonata generală a curbei integrale, iar integrala definită este diferenţa a două ordonate determinate ale curbei integrale, şi anume ale ordonatei iniţiale şi a celei finale ale domeniului de integrare. Vrem să lămurim acest lucru printr-un desen în care apar atît funcţia de integrat $y' = \frac{x}{2}$ cît şi un număr arbitrar de curbe integrale $y = \frac{x^2}{4} \pm C$. Domeniul de integrare este domeniul dintre a şi b (vezi fig. 64).

După cum se vede cu uşurinţă, aria haşurată care trebuie calculată este egală cu triunghiul $OP_1b - OPa$. Această diferenţă de arii trebuie să fie însă egală cu diferenţa corespunzătoare a ordonatelor unei curbe integrale oarecare, şi anume chiar cu valoarea absolută a acestei diferenţe. După cum se vede cu uşurinţă din figură, aceste diferenţe de ordonate sînt egale la toate curbele integrale, astfel încît valoarea integralei definite este de fapt independentă de mărimea constantei aditive (substractive) din integrala nedefinită.

Acum am vorbit însă şi despre o curbă diferenţială. Să luăm din nou primul exemplu $y = x - x^2$, a cărui integrală este $F = \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \pm C$. În problema de maxim pentru ace-

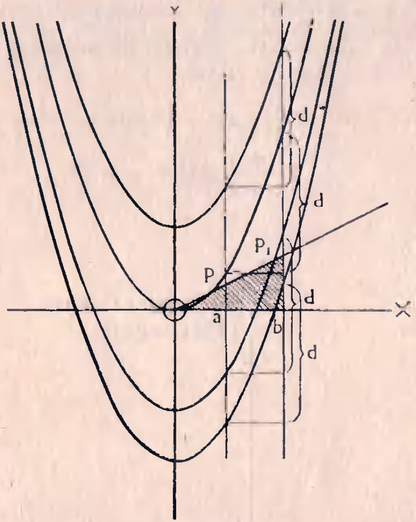


FIG. 64

eaşi curbă am găsit o a treia funcţie $\frac{dy}{dx} = f'(x) = y' = 1 - 2x$, pe care o putem reprezenta, de asemenea, printr-un grafic. Avem acuma trei curbe: una corespunde funcţiei date $y = x - x^2$, o curbă integrală $F = \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \pm C$ (în cazul nostru alegem $C = +1$) şi o curbă diferenţială $y' = 1 - 2x$. Vom trasa ordonatele acestor trei curbe pentru $x = 0{,}4$. Desigur, am putea desena curbele în întregime, dar lăsăm aceasta pe seama cititorului, care poate folosi hîrtia milimetrică (vezi fig. 65).

În punctul $x = 0{,}4$, ordonatele celor trei curbe sînt $y = 0{,}24$ (curba dată), $F = 1{,}0587$ (curba integrală) şi $y' = 0{,}2$ (curba diferenţială). Acum vom încerca să găsim curba diferenţială a curbei integrale. Deoarece $F = \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + 1$, avem $\frac{dF}{dx} = 2 \cdot \frac{1}{2} x - 3 \cdot \frac{1}{3} x^2 = x - x^2$, ceea ce, spre surprinderea noastră, este chiar funcţia iniţială. Să integrăm acum curba diferenţială $y' = 1 - 2x$. Avem

$$\int (1 - 2x)dx = \int 1 \cdot dx - \int 2x\, dx = \frac{1}{0 + 1} x^{0+1} - 2 \frac{1}{1 + 1} x^{1+1} = x - x^2.$$

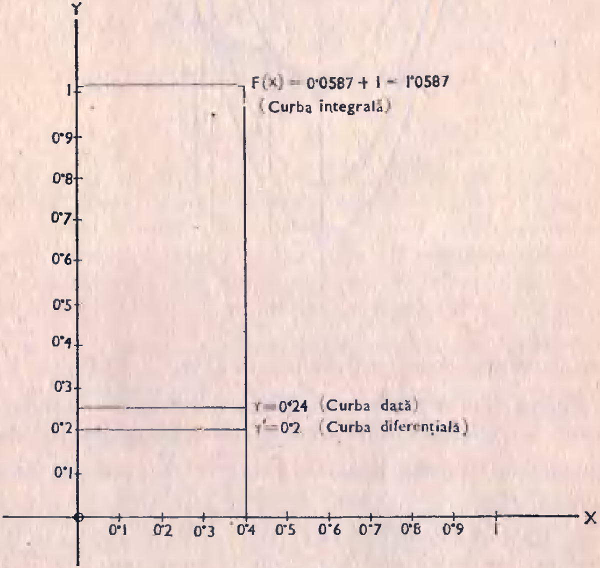


FIG. 65

Obținem din nou funcția inițială sau mai precis, funcția inițială cu constanta $C = 0$. Acum situația este clară pentru noi: curba diferențială integrată ne dă curba inițială. Curba inițială integrată ne dă curba integrală. Mai departe, curba integrală derivată ne dă curba inițială, iar curba inițială derivată ne dă curba diferențială. Dacă am cunoaște derivatele de ordin superior și integralele multiple, atunci am putea adăuga trepte scării noastre, prelungind-o la nesfîrșit în sus și în jos.

ALTE PROBLEME DE CVADRATURĂ

După aceste rezultate, pe care din păcate nu le putem duce mult mai departe, vrem să verificăm algoritmul integrării într-un caz limită. Vom încerca, în glumă, să efectuăm cvadratura pătratului, şi anume cu ajutorul calculului integral. „Curba" care trebuie să delimiteze pătratul nostru este, desigur, o dreaptă, paralelă cu axa absciselor. Distanţa dintre ea şi axă trebuie să fie egală cu lungimea laturii pătratului, şi anume egală cu a.

Ecuaţia acestei curbe este $y = a$ sau, pentru a introduce un x, $y = ax^0$. Pentru a obţine un pătrat trebuie să integrăm

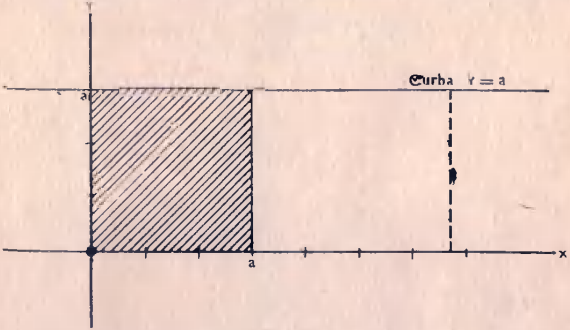


FIG. 66

între $x = 0$ şi $x = a$. Să scriem acuma $F = \int_0^a ax^0 \mathrm{d}x \doteq$ $= a\int_0^a x^0 \mathrm{d}x$. Integrala generală

$$\int ax^0 \mathrm{d}x \pm C \text{ dă } F = a\int x^0 \mathrm{d}x \pm C = a\frac{1}{0+1}x^{0+1} \pm C =$$

$$= ax \pm C$$

Integrala definită trebuie să fie, de aceea, $F = (a \cdot a \pm C) - (a \cdot 0 \pm C) = a^2 - 0 = a^2$, obținînd în acest mod aria pătratului prin integrare. Curba integrală este în cazul nostru o dreaptă cu ecuația $F = ax \pm C$. Vrem să mai adăugăm că în același mod se poate obține prin integrare formula pentru aria dreptunghiului. Dacă domeniul de integrare nu ar fi de la 0 la a, ci de exemplu de la 0 la b, atunci integrala generală ar rămîne neschimbată, deoarece curba inițială $y = ax^0$ rămîne neschimbată. Integrala definită ne-ar da însă

$$F = (a \cdot b \pm C) - (a \cdot 0 \pm C) = ab - 0 = ab,$$

care, evident, este formula pentru aria unui dreptunghi. În încheiere, observăm că curba integrală poate da valoarea ariei unui pătrat numai în locul $x = a$. În toate celelalte locuri ea dă, evident, valori pentru ariile dreptunghiurilor care au o latură egală cu a.

Vrem să mai verificăm acum, prin calculul integral, problema lui Arhimede, și anume cvadratura „parabolei obișnuite", pe care el o reprezintă sub forma: segmentul de parabolă = triunghiul înscris $\times \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \ldots\right)$, ceea ce dă: triunghiul înscris $\times \frac{4}{3}$. De obicei, în școală, formula parabolei este dată sub forma $y^2 = 2px$. Aceasta nu este cea mai simplă formă a ecuației unei parabole, ci o așa-numită funcție inversă. Dacă luăm parametrul parabolei $p = \frac{1}{2}$, ceea ce putem face întotdeauna, atunci din $y^2 = 2px$ se obține ecuația $y^2 = x$ sau $y = \sqrt{x}$. După regulile geometriei analitice și ale teoriei funcțiilor, permutarea lui x cu y nu înseamnă altceva decît oglindirea curbei, în sistemul de coordonate, față de dreapta $y = x$. Parabola $y^2 = x$ se află în sistemul de coordonate oarecum orizontal, iar parabola $x^2 = y$ (sau $y = x^2$) se află vertical.

Una din curbe în raport cu cealaltă se numește „curba inversă", iar cele două funcții se numesc „funcții inverse".

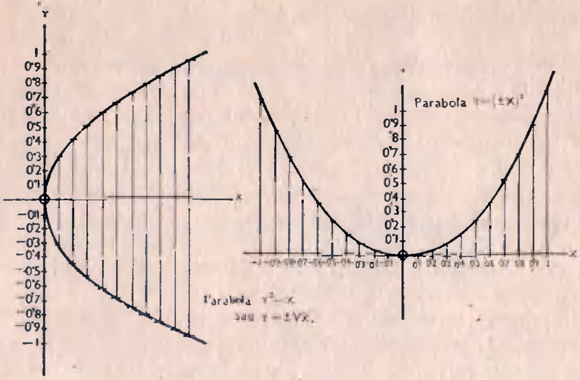


FIG. 67

Am menționat aceste lucruri doar pentru liniștirea unor eventuale scrupule, atunci cînd, în cele ce urmează, vom lua funcția $y = x^2$ ca funcție a parabolei inițiale.

Urmînd pe Arhimede, să înscriem un triunghi într-un segment de parabolă S, care este de fapt o jumătate de segment.

Calculului integral îi este accesibilă în primul rînd porțiunea de suprafață hașurată, care reprezintă domeniul de integrare de la $x = 0$ pînă la $x = a$. Funcția noastră este $y = x^2$, iar integrala generală este deci $F = \int x^2 dx \pm C$, ceea ce dă $F = \frac{1}{3} x^3 \pm C$. Deoarece trebuie să calculăm integrala definită $F_{(0,a)} = \int_0^a x^2 dx$, trebuie să punem

$$F_{(0,a)} = \left(\frac{1}{3} a^3 \pm C\right) - \left(\frac{1}{3} 0^3 \pm C\right) = \frac{a^3}{3}.$$

Cît este de mare acuma segmentul de parabolă? Putem afla acest lucru cu ușurință printr-o scădere. El este chiar egal cu dreptunghiul cu laturile $x = a$ și y, din care trebuie să scădem aria hașurată, deci este egal cu $ay - \frac{a^3}{3}$. Dar acuma, conform funcției inițiale, y este egal cu x^2, deci, în cazul $x = a$, cu a^2. Prin urmare,

$$ay - \frac{a^3}{3} = a \cdot a^2 - \frac{a^3}{3} = a^3 - \frac{a^3}{3} = \frac{3a^2 - a^3}{3} = \frac{2}{3}a^2.$$

Dar Arhimede nu a dat cvadratura sa în funcție de a, ci în raport cu triunghiuri înscrise. Trebuie să mai aflăm deci cît

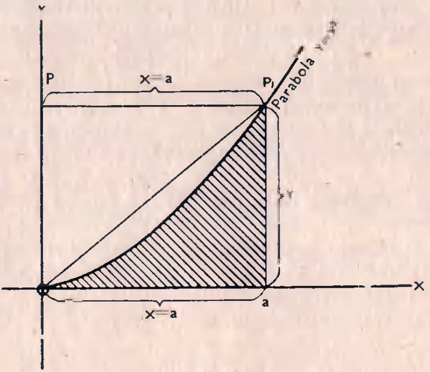


FIG. 68

este de mare aria triunghiului înscris OPP_1. El este un triunghi dreptunghic cu catetele y și $x = a$. Aria lui este deci $\frac{y \cdot a}{2}$ sau, deoarece $y = x^2 = a^2$, aria lui este egală cu $\frac{a^2 \cdot a}{2} = \frac{a^3}{2}$. Acum Arhimede înmulțește aria acestui triunghi cu suma seriei geometrice $\left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \dots\right)$, care în baza unei formule care a mai fost menționată, este $S_\infty = \frac{1}{1-q}$ (în cazul nostru q este egal cu $\frac{1}{4}$, deci $S_\infty = \frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{1}{\frac{3}{4}} = \frac{4}{3}$.

Avem acuma tot ce ne trebuie. După Arhimede, aria segmentului de parabolă este egală cu aria $\frac{a^3}{2}$ a triunghiului înmulțită cu suma seriei $\frac{4}{3}$, deci $\frac{a^3}{2} \cdot \frac{4}{3} = \frac{2a^3}{3}$, ceea ce este chiar valoarea obținută prin integrare. Admirăm cu deosebită considerație spiritul luminos al Greciei antice, în general, și al unui Eudoxus sau Arhimede în special, primii pionieri ai calculului integral.

De la sine înțeles, este posibil să calculăm direct, cu ajutorul calculului integral, jumătatea segmentului parabolei „orizontale“ ($y^2 = x$, sau $y = \sqrt{x}$). Putem vedea, prin acest exemplu, că algoritmul nostru de integrare poate fi aplicat cu siguranță și ușurință și în cazul puterilor fracționare. Dacă alegem „domeniul“ de la $x = 0$ pînă la $x = b$, pentru a evita confuzia cu notația folosită la cvadratura precedentă, atunci am avea de calculat integrala definită $F = \int_0^b \sqrt{x}\, dx = \int_0^b x^{\frac{1}{2}}\, dx$. b-ul nostru ar fi atunci porțiunea de axă a parabolei, cuprinsă între vîrf și intersecția cu coarda care delimitează segmentul; deci, chiar porțiunea pe care am notat-o cu b în fig. 54. Acum să calculăm integrala generală a lui $\sqrt{x} = f$; găsim

$$F = \int x^{\frac{1}{2}}\, dx \pm C = \frac{1}{\frac{1}{2}+1} x^{\frac{1}{2}+1} \pm C = \frac{1}{\frac{3}{2}} x^{\frac{3}{2}} \pm C =$$

$$= \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \pm C = \frac{2}{3} \sqrt{x^3} \pm C.$$

Dacă introducem acuma limitele 0 și b, atunci obținem ca integrală definită

$$F = \int_0^b x^{\frac{1}{2}}\, dx = \left(\frac{2}{3}\sqrt{b^3} \pm C\right) - \left(\frac{2}{3}\sqrt{0^3} \pm C\right) = \frac{2}{3}\sqrt{b^3}$$

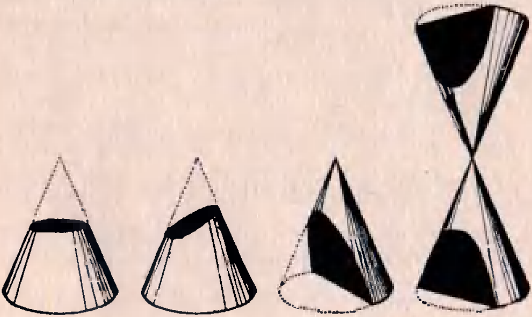
$$\text{sau} \quad \frac{2}{3}\, b\sqrt{b}.$$

Dar, deoarece în cazul parabolei „orizontale" b este chiar baza „triunghiului arhimedic mare", iar $\sqrt{b}$ (în baza ecuației parabolei $y = \sqrt{x}$) este jumătatea coardei și deci este chiar înălțimea „triunghiului mare", ar trebui ca, în concordanță cu metoda lui Arhimede, să formăm mai întîi „triunghiul mare" din b și $\sqrt{b}$, deci $\frac{b\sqrt{b}}{2}$, iar apoi să înmulțim aria lui cu suma seriei $s_\infty = \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \ldots\right) = \frac{4}{3}$. Am obține atunci pentru aria segmentului de parabolă valoarea $\frac{4}{3} \frac{b\sqrt{b}}{2} = \frac{2}{3} b\sqrt{b}$, care este chiar valoarea obținută prin integrare.

Acum avem destulă deprindere de calcul integral pentru a putea lua în considerare o putere negativă simplă a lui x, și anume pe x^{-1} sau, ceea ce este același lucru, $\frac{1}{x}$. Ecuația $y = \frac{1}{x}$ reprezintă o hiperbolă ale cărei ramuri pot fi trasate cu ușurință, dînd lui x diferite valori. Pentru $x = 1$, y este chiar egal cu 1 și nu avem intersecție cu axa Ox sau Oy, deoarece oricît de mare ar fi x, y nu se anulează, iar dacă punem $x = 0$, y devine $= \frac{1}{0}$, adică o valoare care se notează de obicei cu ∞. De aceea, curba noastră se află cu ambele ei ramuri în primul, respectiv al treilea cadran, iar axele de coordonate sînt, după cum se spune, asimptotele hiperbolei, adică drepte de care curba se apropie din ce în ce mai mult, fără a le atinge vreodată.

Înainte de toate, încă o paranteză: cercul, elipsa, parabola, hiperbola sînt curbe de ordinul doi, deoarece ecuațiile lor sînt pătratice. x-ul la puterea întîi de la numitorul ecuației hiperbolei nu trebuie să ne amăgească. Ecuația noastră $y = \frac{1}{x}$ este și ea o ecuație pătratică, după cum ne putem convinge aducînd la același numitor. Din punct de vedere geometric, curbele de ordinul doi sînt secțiuni conice. Natura secțiunilor se poate observa din figurile care urmează (fig. 69).

Oricine are simț geometric observă, din poziția pe care o au pe con, că hiperbola și parabola devin din ce în ce mai largi, în timp ce cercul și elipsa sînt „linii curbe închise".



Secțiune paralelă cu baza: Cerc — Secțiune înclinată față de bază: Elipsă — Secțiune paralelă cu generatoarea: Parabolă — Secțiune paralelă cu axa: Hiperbolă

FIG. 69

Din desenul care urmează mai observăm ceva, și anume că întotdeauna este posibilă cvadratura hiperbolei.

De exemplu, porțiunea cuprinsă între $x = a$ și $x = b$ trebuie să poată fi calculată foarte ușor, deoarece cunoaștem funcția $y = \frac{1}{x}$, care este foarte simplă, de altfel. După cum sîntem obișnuiți, să determinăm mai întîi integrala generală $F(x) = \int \frac{1}{x}\,dx = \int x^{-1}\,dx$. Am spus mai înainte că formula de calcul pentru $\int x^m dx$ este $\frac{1}{m+1}x^{m+1}$ pentru orice m pozitiv, negativ sau fracționar. Algoritmul nostru ar trebui să rămînă în vigoare și aici. Deci,

$$F(x) = \int x^{-1}\,dx \pm C = \frac{1}{-1+1}x^{-1+1} \pm C = ?$$

Rămînem înmărmuriți, deoarece obținem ca integrală generală, de care depinde cea definită, valoarea $\frac{1}{0} x^0 = \frac{1}{0} \cdot 1 = \frac{1}{0}$, adică ∞. Așa ceva nu ni s-a mai întîmplat, de-

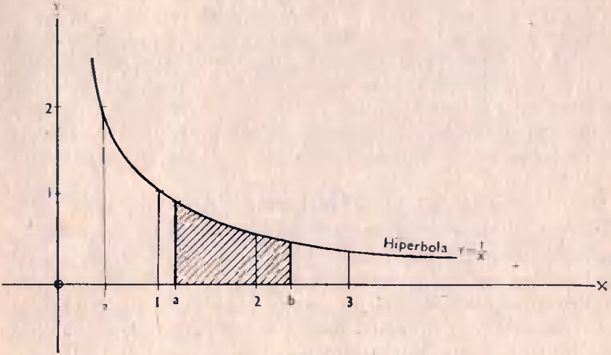


FIG. 70

oarece orice substituire ne-ar da de la bun început un rezultat absurd, ca de exemplu

$$(\infty b^0 \pm C) - (\infty a^0 \pm C) = \infty - \infty = 0,$$

în ipoteza că avem voie să calculăm în modul acesta. Pe de altă parte, cvadratura este hașurată și o vedem cu ochii noștri. Există deci un caz (și este singurul) în care formula $\int x^m \mathrm{d}x = \frac{1}{m+1} x^{m+1}$ nu poate fi aplicată. Aceasta se întîmplă pentru x^{-1} sau $\frac{1}{x}$. De aceea, formula se scrie întotdeauna $\int x^m \mathrm{d}x = \frac{1}{m+1} x^{m+1}$ $[m \neq -1]$, ceea ce înseamnă că m trebuie să fie diferit de -1, adică m nu trebuie să ia valoarea -1. Semnul de egalitate tăiat $\neq$ înseamnă „diferit de“ sau cum vrem să-i mai spunem.

Trebuie să mărturisim acum că am atras pe cititor în mod intenționat în cursă, pentru a-l face să simtă spaima pe care această lacună a calculului integral a produs-o primilor descoperitori. Leibniz a fost într-adevăr atît de genial, încît a știut cum să elimine lacuna. Pe vremea aceea mai domnea însă o mare nesiguranță, iar această lacună era folosită uneori ca punct de atac ieftin împotriva calculului integral, iar alteori era considerat un scandal al matematicii.

Noi, epigonii, sîntem în situația fericită de a cunoaște rezolvarea enigmei din atîtea părți, încît o putem prezenta chiar în mod plăcut și dramatic, dacă nu scamatorie. Cuvîntul fermecat al cabalei se numește „logaritm" și-l vom pronunța pentru a face lumină. Vreau ca nici această enigmă să nu rămînă nerezolvată, cu toate că, de fapt, am realizat scopul cărții și am condus pe cititor de la tabla înmulțirii pînă la integrală.

Încă un cuvînt despre „rectificare". Am mai spus că și lungimea unei curbe se poate determina prin integrare, și anume prin integrala $\int \mathrm{d}s = \int \sqrt{(\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}y)^2}$. Din păcate, nu o putem aplica în practică, deoarece la rectificare apar întotdeauna integrale atît de complicate, încît pentru noi ele sînt incalculabile. Pentru a da totuși un exemplu, menționăm doar faptul că lungimea unei porțiuni a parabolei $y = kx^2$, din punctul $x=0$ pînă la un punct oarecare $x = x$, este dată de valoarea integralei $\int\limits_0^x \sqrt{1 + 4k^2 x^2}\,\mathrm{d}x$. După numeroase calcule intermediare, care uneori sînt foarte îndrăznețe, obținem ca valoare a integralei următoarea formulă monstruoasă:

$$\text{porțiunea de parabolă} = s = \frac{1}{2}\,x\sqrt{1 + 4k^2x^2} +$$

$$+ \frac{1}{4k}\ln\left(\sqrt{1 + 4k^2x^2} + 2kx\right),$$

unde k este o constantă arbitrară, pozitivă sau negativă, întreagă sau fracționară, rațională sau irațională.

LOGARITMI

Dacă privim în urmă de pe înălţimea pe care ne-am urcat şi dacă facem o trecere în revistă a operaţiilor, atunci găsim:

	Operaţii sintetice	*Operaţii analitice*
1.	Adunarea	Scăderea
2.	Înmulţirea	Împărţirea
3.	Ridicarea la putere	Extragerea rădăcinii
4.	—	—
5.	Integrarea	Derivarea

Dar de ce a rămas oare neocupat numărul 4 din lista noastră? Răspunsul este simplu: deoarece chiar la numărul 4 trebuie să ia loc logaritmarea sau logaritmul. Înainte de toate, o lămurire. Logaritmul nu este un cuvînt înrudit cu algoritmul. Ştim că algoritmul nu este decît o alterare a numelui arab al lui Al-Horezmi. Logaritmul vine însă de la *logos arithmos*, care înseamnă „raport corect". Logaritmii au fost descoperiţi de Michael Stifel şi Sir John Napier (sau Neper).

Nu vom pierde însă vremea cu amintiri istorice oricît ar fi ele de interesante, ci vom urca ultima treaptă care ne-a mai rămas, tot atît de voioşi şi siguri ca şi pînă acum.

Este evident că din ridicarea la putere pot apărea două tipuri distincte de funcţii. Primul tip este acela cu care am lucrat pînă acum în mod exclusiv, şi anume y este un x ridicat la puterea a n-a, unde n este o constantă. Am făcut cunoştinţă cu x^0, x^1, x^2, x^3, x^4 ,..., x^n. Acestea sînt funcţiile putere, iar operaţia inversă a fost extragerea rădăcinii. Dacă $x^n = y$, atunci $x = \sqrt[n]{y}$. Desigur şi aici este posibilă inversarea funcţiei. Am mai fi putut scrie $y^n = x$ sau $y = \sqrt[n]{x}$. Acum ne putem imagina însă că exponentul nu este constant şi că în locul exponentului se află variabila arbitrară. De exemplu, $y = a^x$. Atunci întrebarea nu este: „ce se obține dacă ridic valoarea arbitrară a lui x la puterea n?“, ci „ce se obține dacă ridic constanta a la o putere arbitrară x?“ Această funcție în care variabila se află la exponent se numește funcție exponențială. Pentru a lămuri lucrurile pe deplin să luăm un exemplu. În ambele cazuri, să dăm variabilei arbitrare x valorile 1, 2, 3 și 4, iar constanta, în ambele cazuri, să fie egală cu 5. Atunci funcția putere $y = x^n$ are, pentru $n = 5$, valorile $y = 1^5 = 1$, $y = 2^5 = 32$, $y = 3^5 = 243$ și $y = 4^5 = 1\,024$, în timp ce funcția exponențială are, pentru $a = 5$, valorile $y = 5^1 = 5$, $y = 5^2 = 25$, $y = 5^3 = 125$ și $y = 5^4 = 625$. Este limpede acum că din $y = x^n$, pentru $y = 1\,024$ și $n = 5$ cunoscut, am fi putut obține pentru x valoarea $\sqrt[5]{1\,024} = 4$, deoarece am avut $y = x^5 = 1\,024$. În cazul funcției exponențiale $y = a^x$, întrebarea referitoare la operația inversă este cu totul alta, și anume: la ce putere trebuie să ridicăm constanta cunoscută $a = 5$ pentru a obține $y = 125$? Nu ne folosește la nimic să scriem $\sqrt[x]{125} = 5$, deoarece nu știm să efectuăm extragerea rădăcinii de ordinul x, necunoscut. În cazuri foarte simple am putea cel mult să găsim rezultatul prin încercări. Dar să încercăm numai să aflăm la ce putere trebuie să ridicăm pe 10 pentru a obține pe 2 și ne vom convinge de neputința în care ne aflăm în fața problemei inversării funcției exponențiale.

Deci, încă o dată: dacă $y = a^x$, trebuie să căutăm cît este x, dacă a și y sînt cunoscute. Această operație analitică, inversă funcției exponențiale, se numește „logaritm“. Dacă $y = a^x$, atunci x este logaritmul lui y în baza constantă a. În scris, $x = \log_a y$. Și această funcție, ca oricare alta, este inversabilă și putem scrie funcția logaritmică sub forma $y = \log_a x$, întrebarea fiind acum la ce putere y trebuie să ridicăm constanta a pentru a obține pentru x valoarea 2? Sau analitic: care este ordonata funcției $y = \log_{10} x$, pentru abscisa $x = 2$? Dezvăluim că y, în cazul nostru, este egal cu 0,30103 ..., știind astfel tot ce ne interesează, deoarece

$$0{,}30103\ldots = \log_{10} 2 \quad \text{sau} \quad 10^{0{,}30103\ldots} = 2.$$

Completăm deci tabelul nostru și afirmăm:

Operații sintetice	*Operații analitice*
1. Adunarea $(a+b+c+\ldots)$	Scăderea $(a-b-c\ldots)$
2. Înmulțirea $(a\cdot b\cdot c\ldots)$	Împărțirea $(a:b\ldots)$
3. Ridicarea la putere a^n	Extragerea radicalului $(\sqrt[n]{a})$
4. Funcția exponențială a^x	Logaritmul $(\log_a x)$
5. Integrarea $\int f(x)\mathrm{d}x$	Derivarea $\left[\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=y'=f'(x)\right]$

Prin urmare, cunoaștem ordinul de logaritmare, dar nu și metoda de calcul, adică „algoritmul logaritmului".

Pentru a-l obține trebuie să facem mai întîi două observații: logaritmii sînt, în general, dacă nu este vorba despre logaritmi ai puterilor raționale ale bazei, numere iraționale. Calculul lor este dificil și depășește cadrul nostru. Sîntem însă în situația fericită de a putea cumpăra în mod convenabil tabele de logaritmi, care conțin logaritmii pentru aproape toate numerele care intervin în practică; pe lîngă aceasta, și logaritmii funcțiilor trigonometrice. Nu se poate înțelege cu ușurință valoarea acestei munci pe care au făcut-o calculatori curajoși timp de trei secole, deoarece numai prin aplicarea logaritmilor putem calcula puteri și radicali complicați. Cuvîntul „numai" trebuie înțeles în sensul că altfel calculul direct al acestor puteri și radicali ne-ar cauza o oboseală imensă.

Nu intenționăm să lămurim alcătuirea și folosirea tabelelor de logaritmi. Menționăm doar faptul că prin logaritmi putem transforma înmulțirea în adunare, împărțirea în scădere, ridicarea la putere în înmulțire și extragerea radicalului în împărțire; deci, putem coborî cu cîte o treaptă atît operațiile sintetice cît și cele analitice, aflate pe a doua sau a treia treaptă.

Ca bază a unui sistem de logaritmi, adică drept constantă, se poate lua, în principiu, orice număr[1]. În practică însă se utilizează în mod exclusiv numărul 10 ca bază a așa-numiților logaritmi zecimali, sau ai lui Briggs, și numărul e (2,718281828...) ca bază a așa-numiților logaritmi naturali

[1] Pozitiv și diferit de 1. — *N.T.*

sau neperieni. Notația $\log_{10} x$ nu se folosește. Se scrie mai simplu $\log x$ și se înțelege că este vorba despre logaritmul în baza 10. Pentru logaritmul neperian se scrie fie $\log_e x$, sau $\ln x$. Notația $\ln x$ înseamnă *logarithmus naturalis* (logaritm natural). Vom scrie întotdeauna $\log x$ în cazul bazei zece și $\log_e x$ în cazul logaritmilor naturali. Pentru logaritmi într-o bază oarecare vom scrie $\log_a x$, unde a poate fi o constantă oarecare.

Din proprietățile egalității rezultă că o egalitate nu se modifică dacă o logaritmăm membru cu membru. Dacă $c = d$, atunci $\log_a c = \log_a d$, iar dacă $\log_a c = \log_a d$, atunci $c = d$. Al doilea calcul se numește antilogaritmare.

Proprietatea fundamentală a logaritmilor este

$$\log_a(c \cdot d) = \log_a c + \log_a d,$$

care arată că logaritmul produsului este egal cu suma logaritmilor factorilor. Vom deduce această proprietate fundamentală. Dacă ne sînt dați doi logaritmi în baza a, de exemplu $\log_a b = B$ și $\log_a c = C$, atunci, prin definiția logaritmilor, avem $b = a^B$ și $c = a^C$, deoarece logaritmul este puterea la care trebuie ridicată baza pentru a obține numărul (b sau c). Dacă însă $b = a^B$ și $c = a^C$, atunci $b \cdot c = a^B \cdot a^C = a^{B+C}$. Considerînd această ecuație mai îndeaproape, deducem că putem obține un nou logaritm în baza a, și anume $\log_a bc = B + C$, deoarece $B + C$ este exponentul la care trebuie ridicată baza a pentru a obține $b \cdot c$, deci este logaritmul lui bc. Dacă punem, în sfîrșit, valorile $B = \log_a b$ și $C = \log_a c$, pe care le avem date mai înainte, în egalitatea $\log_a bc = B + C$, obținem „proprietatea logaritmilor":

$$1)\quad \log_a b \cdot c = \log_a b + \log_a c.$$

Cititorii atenți vor vedea îndată că aici este vorba despre o influență a regulilor de calcul cu exponenți, ceea ce nu este de mirare, deoarece logaritmul a provenit din ridicarea la putere cu exponentul x.

Să scriem celelalte reguli de calcul cu logaritmi, fără a le mai deduce:

$$2)\quad \log_a \frac{c}{d} = \log_a c - \log_a d \qquad \text{(logaritmarea cîtului);}$$

3) $\log_a c^d = d \log_a c$ (logaritmarea puterii);

4) $\log_a \sqrt[d]{c} = \frac{1}{d} \log_a c$ (logaritmarea radicalului).

A patra regulă rezultă imediat din cea de-a treia, deoarece $\log_a \sqrt[d]{c} = \log_a c^{\frac{1}{d}}$, care este egal cu $\frac{1}{d} \log_a c$, în baza celei de-a treia reguli.

După această orientare rapidă în privința logaritmilor, pe care cititorul interesat o poate completa prin studiu și exercițiu cu tabele de logaritmi, în care se află indicații amănunțite în ceea ce privește utilizarea lor, să ne întoarcem la centrul matematicii superioare, la axa în jurul căreia se învîrt calculul diferențial și integral, și anume la baza e a logaritmilor naturali. Nu e necesar să insistăm asupra faptului că toate regulile pe care le-am enunțat mai înainte sînt valabile și pentru logaritmii naturali, deoarece am presupus că a (baza) poate fi egală cu orice număr, deci și cu e. De aceea, $\log_e a \cdot b$ este firește egal cu $\log_e a + \log_e b$ ș.a.m.d.

Într-un mod oarecum direct, să ne punem următoarea problemă: un număr oarecare, pe care îl vom lua egal cu 1, va fi mărit cu o cantitate foarte mică, deci cu o fracțiune foarte mică $\frac{1}{n}$ a lui 1, unde n este un număr foarte mare. Acest număr mărit trebuie să crească acum în mod „organic". Adică el trebuie să se dezvolte în continuare în același fel, și așa mai departe, pînă la infinit. Se pune acum întrebarea: pînă la ce valoare va crește 1 în acest fel. La prima vedere s-ar părea că el va crește pînă la infinit. Dar aceasta nu se întîmplă, tot așa cum prin îmbinarea ordonatelor nu se obține o suprafață infinită. Am văzut acest lucru în cazul cvadraturii, dar și la seriile „convergente". Și în seria lui Arhimede $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \ldots$ se adună o infinitate de mărimi și ea are totuși suma $S_\infty = \frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{1}{\frac{3}{4}} = \frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}$.

Tot astfel stau lucrurile cu seria lui Leibniz și în genere cu toate seriile geometrice descrescătoare. Să considerăm acuma cu atenție mărimea noastră crescătoare. Încă o dată: unitatea trebuie să capete la început cea mai mică creștere imaginabilă. Ca o compensație pentru această restricție, să-i permitem o creștere printr-o infinitate de trepte.

Deci, dacă 1 crește cu $\frac{1}{n}$, unde $\frac{1}{n}$ este oricît de mic, atunci se obține $\left(1+\frac{1}{n}\right)$, număr pe care îl vom nota deocamdată cu a. Acuma a trebuie să crească în același mod, adică a trebuie să se mărească cu aceeași fracțiune din el însuși, adică cu $\frac{a}{n}$. În acest mod se obține $\left(a+\frac{a}{n}\right)$, număr pe care îl vom nota cu b. Mergînd mai departe se obține $\left(b+\frac{b}{n}\right)$, ș.a.m.d. Să vedem ce rezultă de aici. Am cerut ca $\left(1+\frac{1}{n}\right)$ să fie egal cu a. De aceea se obține $\left(a+\frac{a}{n}\right)=\frac{an+a}{n}=$ $=a\frac{n+1}{n}=a\left(\frac{n}{n}+\frac{1}{n}\right)=a\left(1+\frac{1}{n}\right)$, adică $\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\right.$ $\left.+\frac{1}{n}\right)=\left(1+\frac{1}{n}\right)^2$, dacă înlocuim pe a cu $\left(1+\frac{1}{n}\right)$. A doua expresie este însă egală cu $\left(b+\frac{b}{n}\right)=\frac{bn+b}{n}=b\frac{n+1}{n}=$ $=b\left(\frac{n}{n}+\frac{1}{n}\right)=b\left(1+\frac{1}{n}\right)$. Dacă ținem seama de faptul că b a fost luat egal cu $\left(a+\frac{a}{n}\right)$ și că acest $\left(a+\frac{a}{n}\right)$ a fost găsit egal cu $\left(1+\frac{1}{n}\right)^2$, rezultă $b\left(1+\frac{1}{n}\right)=\left(1+\frac{1}{n}\right)^2\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)=$ $=\left(1+\frac{1}{n}\right)^3$. Deoarece putem continua la nesfîrșit acest calcul și pentru că știm acuma că „creșterea organică" dă la primul pas $\left(1+\frac{1}{n}\right)$, la al doilea $\left(1+\frac{1}{n}\right)^2$, la al treilea pas $\left(1+\frac{1}{n}\right)^3$ și că „legea noastră de formare" cere, fără îndoială, continuarea acestui procedeu, putem deduce cu toată certitudinea că valoarea unității mărite în mod imperceptibil cu $\frac{1}{n}$, după n pași, este $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. Dacă luăm acum acest n arbitrar de mare şi dezvoltăm binomul $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ după formula binomului, atunci obţinem

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1^n + C_n^1\left(\frac{1}{n}\right)^1 + C_n^2\left(\frac{1}{n}\right)^2 + C_n^3\left(\frac{1}{n}\right)^3 +$$

$$+C_n^4\left(\frac{1}{n}\right)^4 + \cdots = 1 + \frac{n}{1!}\cdot\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!}\cdot\frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)\,(n-2)}{3!}\cdot$$

$$\cdot\frac{1}{n^3} + \frac{n(n-1)\,(n-2)\,(n-3)}{4!}\cdot\frac{1}{n^4} + \cdots$$

Dacă n ia valori uriaşe, atunci scăzătorii finiţi 1, 2, 3 ş.a.m.d. nu mai joacă nici un rol şi pot fi neglijaţi, deoarece un număr n extrem de mare nu se modifică dacă din el scădem 1, 2, 3 ş.a.m.d. Deci, putem înlocui pe $n-1$, $n-2$, $n-3$ ş.a.m.d. cu n. Atunci, seria noastră binomială, care devine o serie infinită descrescătoare, capătă forma

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + \frac{n}{1!}\cdot\frac{1}{n} + \frac{n\cdot n}{2!}\cdot\frac{1}{n^2} + \frac{n\cdot n\cdot n}{3!}\cdot\frac{1}{n^3} + \frac{n\cdot n\cdot n\cdot n}{4!}\cdot\frac{1}{n^4} +$$

$$+ \cdots = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \cdots$$ [1]

Efectuînd calculele obţinem pentru această serie valoarea

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \cdots$$ [1]

Ne interesează acum suma acestei serii infinite. Cu siguranţă că ea va fi mai mare decît 2, deoarece chiar suma primilor doi termeni este egală cu 2. Dacă observăm că prin neglijarea primului termen seria noastră devine $\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \cdots\right)$ o putem compara cu o aşa-

[1] Egalitatea este doar aproximativă. — *N.T.*

numită serie „majorantă", a cărei sumă o putem calcula, fiind o serie geometrică descrescătoare. Să considerăm seria $\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots\right)$. Această serie este evident o „majorantă", adică o serie care, termen cu termen, este mai mare decît prima serie. Proprietatea caracteristică a majorantei este tocmai faptul că fiecare termen al majorantei este mai mare sau egal cu termenul corespunzător al seriei inițiale. Deci,

$$\text{seria inițială: } 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \cdots$$

$$\text{seria majorantă: } 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots$$

Un raționament simplu ne arată că suma seriei majorante trebuie să fie mai mare decît suma seriei inițiale (tot așa ca și în cazul unei sume finite). Dar, în cazul nostru, suma seriei majorante este $S_\infty = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$. Deoarece în seria inițială am lăsat deoparte termenul 1, trebuie să-l adăugăm și majorantei, pentru comparația finală. Deci, obținem: suma majorantei $+ 1$ este, în orice caz, mai mare decît suma seriei inițiale $+ 1$. Deoarece suma seriei majorante $+ 1$ este egală cu 3, atunci rezultă că 3 este mai mare decît $\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ pentru $n \to \infty$. Prin urmare, și tocmai aici am vrut să ajungem, valoarea lui $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ se află între 2 și 3, oricît de mare ar fi n.

Calculînd un număr destul de mare de termeni ai seriei binomiale găsim ca valoare pentru $\lim\limits_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, numărul 2,71828182845904...

Acest număr, ca și numărul π, este un număr irațional și a fost notat în toată lumea cu litera „e", încă de pe vremea lui Euler. Din motive pe care le vom cunoaște îndată, el este cel mai important număr din matematică.

Fără a indica scopurile noastre, vrem să ne punem problema dezvoltării funcției exponențiale cu bază e într-o serie. Scriem deci egalitățile

$$e = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n} \text{[1]},$$

$$e^x = \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n}\right]^{x} \text{[1]},$$

unde n trebuie considerat mereu un număr foarte mare. Deoarece în baza regulilor de calcul cu puteri expresia $\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]^x$ este egală cu $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{nx}$, atunci putem forma din nou o serie binomială:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{nx} = 1^{nx} + C^1_{nx}\left(\frac{1}{n}\right)^1 + C^2_{nx}\left(\frac{1}{n}\right)^2 + C^3_{nx}\left(\frac{1}{n}\right)^3 + \dots =$$

$$= 1 + \frac{nx}{1\,!}\cdot\frac{1}{n} + \frac{nx(nx-1)}{2\,!}\cdot\frac{1}{n^2} + \frac{nx(nx-1)(nx-2)}{3\,!}\cdot\frac{1}{n^3} + \dots$$

Printr-un raționament similar cu cel dinainte, presupunem că pentru o valoare finită a lui x, înmulțită cu numărul n foarte mare, obținem un produs nx atît de mare încît scăzătorii pot fi neglijați. Atunci obținem

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{nx} = 1 + \frac{nx}{1\,!}\cdot\frac{1}{n} + \frac{n^2x^2}{2\,!}\cdot\frac{1}{n^2} + \frac{n^3x^3}{3\,!}\cdot\frac{1}{n^3} + \dots \text{[1]} =$$

$$= 1 + \frac{x}{1\,!} + \frac{x^2}{2\,!} + \frac{x^3}{3\,!} + \dots \text{[1]}$$

Această serie se numește seria exponențială. Să revenim la egalitatea inițială și să scriem rezultatul:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1\,!} + \frac{x^2}{2\,!} + \frac{x^3}{3\,!} + \frac{x^4}{4\,!} + \dots + \frac{x^n}{n\,!} + \dots$$

---

[1] Egalitatea este aproximativă. — *N.T.*

Încercăm acum să derivăm seria exponențială, ceea ce este ușor, deoarece după regulile calculului diferențial avem voie să derivăm termen cu termen.

$$\text{Deci, } y = e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots, \text{ de unde}$$

$$\frac{dy}{dx} = y' = \frac{d(e^x)}{dx} = 0 + \frac{1}{1!} + \frac{2x}{2!} + \frac{3x^2}{3!} + \ldots,$$

și obținem

$$0 + 1 + \frac{2x}{1\cdot 2} + \frac{3x^2}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{4x^3}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \ldots$$

Prin efectuarea calculelor ajungem la seria $1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1\cdot 2} + {}$ $+ \frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \ldots$ Dar aceasta nu este altceva decît seria exponențială.

Am găsit deci o funcție a cărei derivată este egală cu funcția. Înțelegem acum de ce numărul e a fost considerat axă a matematicii superioare: e^x este singura funcție egală cu derivata ei [1]. Dacă însă o derivată este egală cu primitiva, atunci și integrala acestei derivate este egală cu derivata. Deci, $\frac{d(e^x)}{dx} = e^x$ și $\int e^x dx = e^x \pm C$. Vom vedea în continuare ce înlesnire imensă pentru calcul prezintă posibilitatea reprezentării unei mărimi sub forma unei puteri a lui e. Cu acest artificiu se lucrează mereu în matematica superioară.

Dar, după ce am discutat despre baza logaritmilor naturali și despre funcția exponențială cu această bază, trebuie să ne întoarcem la funcția logaritmică cu baza e:

$$y = \log_e x.$$

[1] Afirmația nu este chiar corectă. Forma generală a funcțiilor care au proprietatea $y' = y$ este $y = Ce^x$, unde C este o constantă arbitrară. — *N.T.*

Dacă y este logaritmul numărului x în baza e, atunci desigur $x = e^y$, ceea ce înseamnă același lucru. Prin operația noastră, variabilele și-au schimbat locul, adică am inversat relația funcțională. Acuma avem

$$x = e^y,$$

unde x este variabila dependentă și y este variabila independentă. Să derivăm această funcție „inversă". De data aceasta, desigur, „în raport cu y", adică cu x la numărător și y la numitor. Cu această ocazie putem vedea pentru prima dată noul „artificiu" la lucru. e^y fiind o funcție exponențială cu baza e, ca orice putere a lui e cu exponent variabil, este egală cu derivata ei. Deci,

$$x = e^y,$$

$$\frac{dx}{dy} = e^y.$$

Dacă două mărimi sînt însă egale cu a treia, atunci ele sînt egale între ele. Deci $\frac{dx}{dy} = x$. Dar nu am vrut să-l găsim pe $\frac{dx}{dy}$, ci pe $\frac{dy}{dx}$, și această problemă este ușor de rezolvat, deoarece, din punct de vedere aritmetic, $\frac{dy}{dx}$ nu este altceva decît inversul lui $\frac{dx}{dy}$, după cum $\frac{3}{2}$ este inversul lui $\frac{2}{3}$. Dar, întrucît avem egalitatea $\frac{dx}{dy} = x$, putem inversa ambii membri, obținînd o egalitate corectă. Dacă două mărimi sînt egale, atunci și inversele lor trebuie să fie egale. Dacă, de exemplu, $\frac{6}{2}$ este egal cu 3, atunci $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$. Să formăm acuma inversele:

$$\frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{x} \quad \text{sau} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}.$$

Am obținut deci, pe o cale complicată, rezultatul extrem de surprinzător că derivata funcției $y = \log_e x$ este egală cu $\frac{1}{x}$. Dar acest $\frac{1}{x}$ nu este decît x^{-1}, dacă ținem seama de regulile de calcul cu puteri. O derivată de forma x^{-1} nu ar fi putut fi obținută din regulile de derivare a puterilor, deoarece ea ar avea forma nx^{n-1}. Într-adevăr, derivata lui x^3 era $3x^2$, aceea a lui x^2 era $2x$, aceea a lui x^1 era egală cu 1, aceea a lui x^0 era egală cu $0x^{0-1} = 0x^{-1}$, ceea ce dă 0, deoarece $x^0 = 1$ este o constantă care dispare prin derivare. După x^0 urmează însă x^{-1}, care are derivata $-1 \cdot x^{-1-1}$, egală cu $-x^{-2}$. Nu este de mirare, de aceea, faptul că la integrare am găsit excepția regulii $\frac{1}{m+1}\, x^{m+1}$, în cazul cînd exponentul $m = -1$. Știm că „integrandul", adică expresia care se află sub semnul integral, trebuie să fie întotdeauna derivata unei primitive $F(x)$, pentru a putea găsi această primitivă. Deoarece regula $\frac{1}{m+1}\, x^{m+1}$ nu avea loc pentru $m = -1$ și deoarece în calculul diferențial nu găsisem nici o funcție a cărei derivată era egală cu x^{-1}, ne aflam într-o situație desperată și nu puteam efectua cvadratura hiperbolei $y = \frac{1}{x} = x^{-1}$.

Acuma, însă, enigma a fost rezolvată. Primitiva lui x^{-1} sau $\frac{1}{x}$ este $y = \log_e x$, deoarece derivata acestei funcții este $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} = x^{-1}$. Deci, $F(x) = \int_a^b x^{-1} dx = \int_a^b \frac{1}{x}\, dx = \int_a^b y'\, dx$, iar această funcție y este chiar $\log_e x$. Integrala generală a lui x^{-1} este așadar integrala $F(x) = \int x^{-1}\, dx = \log_e x \pm C$, iar integrala definită este

$$F_{(a,b)} = \int_a^b x^{-1}\, dx = (\log_e b \pm C) - (\log_e a \pm C) = \log_e b - \log_e a.$$

Datorită „proprietății logaritmice", mai putem face aici cîteva transformări, și anume putem scrie și $\log_e \frac{b}{a}$ în loc de $\log_e b - \log_e a$, ceea ce simplifică de multe ori calculele. Dacă, de exemplu, domeniul de integrare ar fi cuprins între

a și a^2, atunci integrala definită ar fi $\log_e a^2 - \log_e a$. Dar, deoarece $\log_e a^2 - \log_e a = \log_e \frac{a^2}{a}$, integrala definită se reduce la $\log_e a$. Tot astfel, constanta de integrare din integrala nedefinită se exprimă uneori sub forma următoare: $F(x) = \int x^{-1}dx = \log_e x + C$, care este egal cu $\log_e x + \log_e c$, adică exprimăm constanta C sub forma logaritmului unui alt număr c. Dar atunci, din $\log_e x + \log_e c = \log_e xc$. rezultă că integrala generală se poate exprima sub forma $\log_e cx$.

Acuma vrem să mai adăugăm că un sistem de logaritmi poate fi transformat în altul. În matematicile superioare, atîta timp cît lucrăm cu calcule generale, folosim în mod exclusiv logaritmii naturali. Motivul pentru care facem acest lucru este clar din cele spuse mai înainte. Dar, deoarece toate tabelele de logaritmi, cu rare excepții, nu conțin logaritmii naturali, ci pe cei zecimali, sîntem siliți adeseori să transformăm rezultatele din sistemul logaritmilor naturali în cel al logaritmilor zecimali. În acest scop ne servim de așa-numitul „modul". Dăm formula modulului, fără a arăta cum se deduce. Modulul este numărul 0,4342944819... și se notează cu m. Dacă vrem acuma să transformăm un logaritm natural într-un logaritm zecimal, atunci trebuie să folosim formula $\log_e x = \frac{1}{m} \log_{10} x$. De aici rezultă $\log_{10} x = m \log_e x$.

Pentru mai multă claritate să dăm și valoarea lui $\frac{1}{m}$, care este egală cu 2,3025850929... Acești moduli leagă, desigur, numai logaritmii naturali de cei zecimali și nu pot fi folosiți pentru transformarea altor logaritmi (care nu se consideră însă în practică).

În încheiere vrem să mai dăm graficul curbei $y = \log_e x$, adică al așa-numitei curbe logaritmice. Deoarece logaritmul lui 1 este egal cu 0 în orice sistem de logaritmi și întrucît din $e^y = x$ rezultă că x poate fi egal cu 1 numai dacă exponentul y la care ridicăm baza este egal cu 0, reiese că curba logaritmică taie axa Ox în $x = 1$, $y = 0$. Dacă $x = e$, atunci $y = 1$, deoarece din $e^y = x$ rezultă că $e^y = e$, numai dacă $y = 1$. În mod similar, dacă $x = e^2$ atunci $y = 2$, dacă $x = e^3$ atunci $y = 3$ ș.a.m.d. În general, în orice sistem

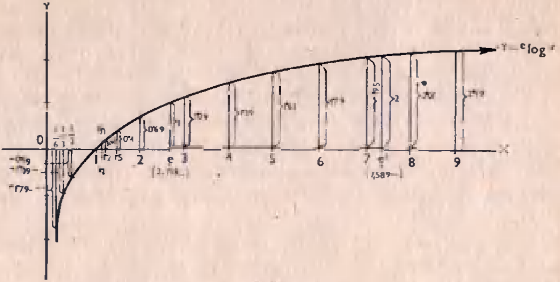


FIG. 71

de logaritmi, logaritmul bazei este egal cu 1, iar logaritmul unei puteri a bazei este egal cu exponentul, ceea ce rezultă de altfel din egalitatea de definiție $y = \log_a x$, $a^y = x$. Deci, logaritmul zecimal al lui 1 este egal cu 0, al lui 10 este egal cu 1, al lui 1 000 cu 3, al lui 1 000 000 cu 6. Al lui $\frac{1}{10}$, însă, cu —1, al lui $\frac{1}{1\,000}$ cu -3 ș.a.m.d. Pentru alte valori ale variabilei, cuprinse între valori întregi, se obțin pentru logaritm valori intermediare, care pot fi și iraționale. Astfel, de exemplu, $\log_{10}105$ este egal cu 2,02119... Acest 2, care este logaritmul lui $10^2 = 100$, se numește „caracteristica" logaritmului, iar restul zecimal se numește „mantisa" logaritmului (de la *mantissa*, ceea ce înseamnă rest). Pentru amănunte, trimitem încă o dată la tabelele de logaritmi.

INTERPOLARE, EXTRAPOLARE, ÎNCHEIERE

Atunci cînd avem de căutat logaritmi în tabele sîntem puşi în situaţia de a calcula valori intermediare, deoarece, evident, nu putem găsi în tabele logaritmii tuturor numerelor, al căror număr este infinit. Această căutare a valorilor intermediare se numeşte în matematică „interpolare" (de la interpolare, care în limba latină înseamnă a introduce, a insera).

Deoarece această noţiune are o însemnătate imensă în matematică şi fizică şi mai ales în statistica matematică, vrem să o explicăm pe scurt. Nu putem intra în amănunte, din cauza dificultăţilor problemei, a cărei tratare constituie o teorie de sine stătătoare. Întrebarea referitoare la natura unei valori interpolate are un răspuns aritmetic şi geometric. Din punct de vedere aritmetic, o valoare interpolată este un număr intermediar între două numere cunoscute, dar nu un număr oarecare, ci unul determinat. Dacă, de exemplu, logaritmul lui 1 499 este egal (aproximativ) cu 3,17580, iar acela al lui 1 500, cu 3,17609, atunci ne-ar putea interesa logaritmul lui 1 499,5, pe care nu-l putem găsi însă într-o tabelă cu cinci zecimale. Bunul simţ ne spune că 1 499,5 se află chiar la mijloc, între 1 499 şi 1 500 şi deci şi logaritmul ar trebui să se afle la mijloc. Ar fi deci valoarea medie dintre 3,17580 şi 3,17609 şi ne-ar da logaritmul 3,17595. Într-un mod similar am putea „interpola" în alt loc. Astfel, de exemplu, pentru 1 499,8 am putea spune că „intervalul" dintre logaritmi ar trebui împărţit şi el în zecimi şi ar trebui apoi să adăugăm logaritmului numărului mai mic opt zecimi de acest fel. Intervalul este 3,17609—3,17580, deci 0,00029 şi deci o zecime este de 0,000029. Opt zecimi fac 0,000232 şi deci logaritmul lui 1 499,8 ar fi egal cu logaritmul lui 1 499 plus opt zecimi de interval, ceea ce ne dă 3,17580 + 0,000232 adică 3,17603.

Pe această cale se şi face interpolarea în tabelele de logaritmi, cu ajutorul aşa-numitelor părţi proporţionale, care nu sînt decît zecimile de interval. Aici se face însă o ipoteză esențială, care nu are loc întotdeauna și care la interpolarea logaritmilor numerelor mai mici nu are loc, și anume, prin interpolarea proporțională sau „liniară“ se admite că întregul interval dintre cele două numere cunoscute are o comportare proporțională uniformă. Pentru a lămuri acest lucru vrem să studiem interpretarea geometrică a noțiunii de interpolare. Să asociem ordonate numerelor ale căror valori intermediare le căutăm. Vom numi ordonatele ale căror valori intermediare ne sînt cunoscute, „ordonate împrăștiate“. În momentul în care ecuația curbei ne este cunoscută, nu mai sînt nici ordonate necunoscute, deoarece putem substitui fiecare valoare a lui x și obținem astfel ordonata exactă. Din punctul de vedere al geometriei analitice, problema interpolării nu înseamnă deci altceva decît asocierea ecuației unei curbe la „ordonatele împrăștiate“, în așa manieră încît toate punctele să se afle pe curbă, în conformitate cu această ecuație. Dar chiar o schiță fugitivă ne arată că între puncte intermediare sînt posibile nenumărate curbe, care unesc toate aceste puncte (vezi fig. 72).

Problema interpolării nu este deci rezolvabilă, dacă nu facem anumite ipoteze, pe care le vom discuta acuma. Să presupunem că avem de interpolat între două puncte ale unei curbe încă necunoscute (vezi fig. 73).

Dacă alegem așa-numita interpolare liniară, atunci unim cele două puncte printr-o dreaptă. Dacă intervalul dintre cele două puncte este considerat ca sumă a tuturor intervalelor intermediare și dacă îl notăm cu $\Sigma\Delta x$, atunci diferența dintre cele două ordonate va fi $\Sigma\Delta y$. Să formăm acuma intervalele intermediare Δx, pe care le luăm egale între ele. Din desen se vede imediat că fiecărui Δx îi corespunde un Δy. Toți Δy sînt însă, prin ipoteză, egali, deoarece și Δx sînt egali între ei. Prin urmare, are loc proporția $\Sigma\Delta x : \Sigma\Delta y = \Delta x : \Delta y$, unde Δx este egal cu suma $\Sigma\Delta x$ împărțită la numărul părților. Dacă împărțirea se face deci în n părți, atunci $\frac{\Sigma\Delta x}{n} = \Delta x$ și deci $\frac{\Sigma\Delta y}{n} = \Delta y$. Acest procedeu al interpolării proporționale poate fi aplicat numai dacă „curba“ poate fi considerată dreaptă. Deoarece metoda noastră „liniară“ este folosită la logaritmii numerelor mari trebuie să privim curba logaritmică. Ea nu este o dreaptă, nici chiar

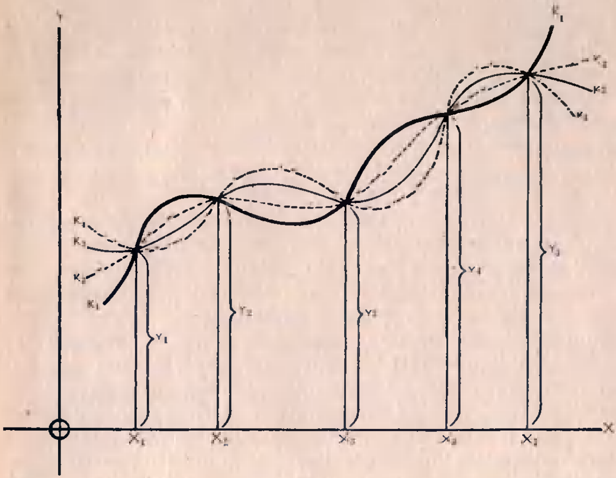


FIG. 72

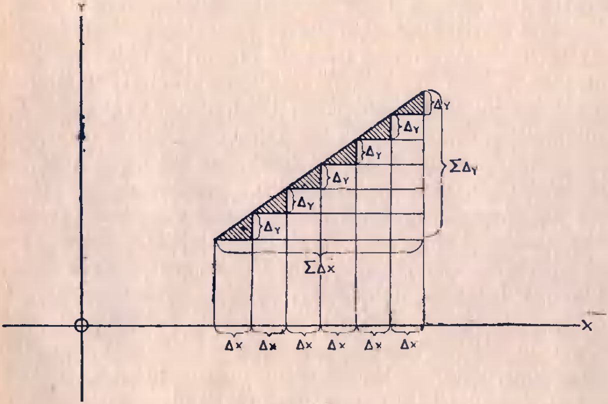


FIG. 73

pentru numerele mari, dar este atît de asemănătoare unei drepte, încît eroarea pe care o facem prin interpolare liniară este neglijabilă. Dar în practica și teoria statisticii nu se folosește doar interpolarea liniară, ci se mai poate presupune sau cere ca ecuația necunoscută a curbei, care trebuie să fie satisfăcută de toate punctele date, să aibă forma unui polinom sau a unei parabole de ordinul n. Ecuația ar fi deci

$$a_1x^n + a_2x^{n-1} + a_3x^{n-2} + \dots + a_{n-2}x^2 + a_{n-1}x^1 + a_nx^0 = y.$$

Pentru a obține astfel de ecuații din puncte date, au fost dezvoltate metode subtile și inspirate, ca și pentru a răspunde la întrebarea în ce mod trebuie făcută interpolarea, o dată ce ecuația a fost găsită. Aici creșterile lui y nu mai sînt proporționale cu intervalele intermediare, ci depind de ele într-un mod mult mai complicat. În afară de aceasta mai intervine și faptul dacă punctele date erau sau nu echidistante. Pe lîngă interpolarea „liniară" și „parabolică" mai există și alte feluri de interpolări, mai fine și mai dificile, pe care nu le menționăm. Prin urmare, se pot găsi adesea valori interpolate foarte precise, atît pentru scopurile practice cît și pentru cele științifice, cu toate că, de fapt, există o infinitate de metode de interpolare și problema este deci nedeterminată.

Pentru ca teoria să nu ne pară prea dificilă vrem să exemplificăm scopul interpolării. Într-o țară au loc recensăminte din zece în zece ani. Din lipsă de fonduri bănești, recensămîntul nu a avut loc o dată. De exemplu, recensămintele au avut loc în 1870, 1880, 1890, 1900, 1910, 1930 și au dat rezultatele $Z_1, Z_2, Z_3, Z_4, Z_5, Z_6$. Acuma ne interesează numărul populației în anii 1885 sau 1907, sau 1914, sau 1921, ca și în anul 1920, cînd nu a avut loc recensămîntul. Dacă facem abstracție de războaie, de epidemii etc., avem un caz de interpolare și chiar este vorba de interpolare între ordonate neechidistante, deoarece unul din intervale este de douăzeci de ani. În afară de aceasta, ne-ar putea interesa care a fost populația înainte de 1870, de exemplu în 1860, sau cum va fi ea în 1940. Această problemă a obținerii valorilor (ordonatelor), care ies din domeniul nostru, se numește problema „extrapolării". În esență este vorba de a afla care este forma unei funcții ce ne este cunoscută prin cîteva ordonate, în afara domeniului acestor ordonate.

În al doilea rînd, să luăm un exemplu din astronomie: cunoaștem o porțiune a traiectoriei unei comete; prin observații directe nu putem însă cunoaște traiectoria, deoarece s-au făcut prea puține observații. Dar acuma, dacă este probabilă o anumită traiectorie, putem s-o aflăm prin interpolare și extrapolare. Observația poate arăta apoi dacă ipotezele noastre au fost bune. În cazul „problemei celor *n*-corpuri", adică al unei traiectorii care este determinată de forțele de atracție ale mai multor corpuri, trebuie să procedăm întotdeauna în acest mod, deoarece „problema celor *n* corpuri" nu este încă rezolvată.

Vrem să mai adăugăm că noțiunile de interpolare și extrapolare au o importanță care depășește domeniul matematicii. Fără a ne da seama, în viața de toate zilele avem de-a face de sute de ori cu interpolări și extrapolări. Politica, istoria, comerțul, medicina etc. utilizează aceste noțiuni și încearcă să insereze valori intermediare între fenomene cunoscute și să extindă în trecut sau în viitor evoluția unui fenomen cunoscut în prezent. Ar trebui să se țină mai mult seama de precauția riguroasă a matematicienilor și în ceea ce privește extrapolarea în viața extramatematică. Atunci s-ar putea evita multe concluzii dăunătoare, emise pe baza prezentului în ceea ce privește viitorul.

Acuma am epuizat însă tema pe care ne-am propus-o și sperăm să ne fi ținut promisiunea de a conduce pe cititor de la tabla înmulțirii la integrală. Dacă, mai ales în domeniile superioare, s-a instaurat o situație din ce în ce mai nesatisfăcătoare, dacă a trebuit să spunem aproape mereu că o problemă sau o soluție depășește cu mult cadrul nostru, atunci această mențiune a fost făcută — să-mi fie iertat — referitor la insuficiența noastră. Cunoașterea precisă a propriilor limite nu poate deprima pe nimeni. Dimpotrivă, ea va îndemna spiritele superioare să scoată ghimpele necunoașterii. Recunoașterea propriei ignoranțe este singurul îndemn pentru îndepărtarea acestei deficiențe prin muncă. Orice om, orice popor, întreaga omenire, au tot atîta viitor cît și probleme nerezolvate, care îl urmăresc și preocupă, deoarece sfîrșitul progresului este o aparență subiectivă și așa-numita împlinire este împietrire. Fiecare din eroii matematieii, fie că se numeau Pitagora, Eudox, Euclid, Arhimede, Apollonius din Perga, Al-Horezmi, Kepler sau Descartes, și-au închipuit că dezvoltarea s-a încheiat la ei. Și toți contemporanii și-au închipuit acest lucru împreună cu conducătorii lor spirituali. Dar au venit apoi Newton, Leibniz, Euler, Lagrange, Gauss, Riemann, Weierstrass, Minkowski, Hilbert. Și vor veni mereu alții, și în matematică. Dacă pînă acuma am pătruns doar puțin în matematică, vrem să spunem totuși, spre mîndria noastră, că am studiat esențialul, cel puțin în mod principial și că am realizat ceva foarte însemnat. Știm anume ce trebuie obținut, învățat, studiat în matematică. Am cîștigat în acest mod lucrul cel mai important: respectul față de adevărata măreție spirituală. Se spune în Faust: „Sîntem obișnuiți ca oamenii să disprețuiască ceea ce ei nu înțeleg". Dacă formăm acum „funcția inversă" a acestei fraze a lui Goethe, atunci vom obține fraza cu care vrem să exprimăm folosul pe care credem că l-am adus prin munca noastră: „Omul respectă numai ceea ce înțelege". Respectul se arată însă numai lucrurilor valoroase. Spre ceea ce este valoros trebuie să tindă fiecare individ, fiecare popor, întreaga omenire.

CUPRINS

Prefață 5

CAPITOLUL I
„O adevărată cabală" 9

CAPITOLUL II
Sistemul zecimal 15

CAPITOLUL III
Sisteme de numerație cu diferite baze 21

CAPITOLUL IV
Simboluri și ordine 33

CAPITOLUL V
Analiza combinatorie 38

CAPITOLUL VI
Permutări 40

CAPITOLUL VII
Combinări în sens restrîns 47

CAPITOLUL VIII
Aranjări 56

CAPITOLUL IX
Primii pași în algebră 65

CAPITOLUL X
Notația algebrică 70

CAPITOLUL XI
Operații algebrice 82

CAPITOLUL XII
Fracții ordinare 105

CAPITOLUL XIII
Ecuații 117

CAPITOLUL XIV
Ecuații diofantice 133

CAPITOLUL XV
Puteri negative și fracționare 143

CAPITOLUL XVI
Numere iraționale 148

CAPITOLUL XVII
Fracții sistematice 154

CAPITOLUL XVIII
Funcții (Derivata algebrică) 168

CAPITOLUL XIX
Teorema lui Pitagora 182

CAPITOLUL XX
Funcții trigonometrice 189

CAPITOLUL XXI
Numere imaginare 196

CAPITOLUL XXII
Coordonate 212

CAPITOLUL XXIII
Geometria analitică 222

CAPITOLUL XXIV
Problema cvadraturii 235

CAPITOLUL XXV
Diferențiala și problema rectificării 249

CAPITOLUL XXVI
Relațiile între cîtul diferențial și ordinul de integrare 256

CAPITOLUL XXVII
Trei feluri de „nimic" 260

CAPITOLUL XXVIII
Formula binomului 264

CAPITOLUL XXIX
Cvadratura parabolei lui Arhimede 272

CAPITOLUL XXX
Serii 280

CAPITOLUL XXXI
Tehnica calculului diferențial 285

CAPITOLUL XXXII
Maxime și minime 294

CAPITOLUL XXXIII
Tehnica calculului integral 304

CAPITOLUL XXXIV
Valoare medie și integrală definită 311
CAPITOLUL XXXV
Alte probleme de cvadratură 320
CAPITOLUL XXXVI
Logaritmi 329
CAPITOLUL XXXVII
Interpolare, extrapolare, încheiere 343

E R A T Ă

Pg.	Rîndul	În loc de:	Se va citi:
180	11 de jos	și numai	și păstrăm numai
232	1 de jos	$x^2 + \frac{7}{4x} - \frac{57}{4} = 0$	$x^2 + \frac{7}{4}x - \frac{57}{4} = 0$
309	14 de jos	$= \frac{1}{2} - x^2 \frac{1}{3} x^3$	$= \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3$
346	8 de jos	$a_1x^n + a_2x^{n-1} + a_3x^{n-2} + \ldots$	$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots$