MINISTERUL EDUCAȚIEI ȘI ÎNVĂȚĂMÎNTULUI

INSTITUTUL POLITEHNIC – BUCUREȘTI

MARIANA CRAIU

VASILE V. TĂNASE

ANALIZĂ MATEMATICĂ

EDITURA DIDACTICĂ ȘI PEDAGOGICĂ
BUCUREȘTI

Referent științific: Acad. GH. MIHOC

Redactor: GABRIELA ILIESCU
Tehnoredactor: OPRIȘEANU ELENA
Coperta: N. SÎRBU

CAPITOLUL I

MULŢIMI. STRUCTURI. FUNCŢII

§ 1. MULŢIMI

În matematică lucrăm cu elemente ce au în comun anumite proprietăţi sau care se găsesc în raporturi bine determinate între ele. Aceste elemente le notăm prin simboluri $a, b, \ldots$ sau $x, y, \ldots$

Cînd scriem $x = y$ înţelegem prin aceasta că elementele x şi y coincid. Dacă cele 2 elemente sînt diferite notăm $x \neq y$.

Obiectele sau elementele ce au în comun o anumită proprietate vom spune că formează *o mulţime*.

Dacă A este o mulţime şi x este un element din mulţimea A spunem că x aparţine mulţimii A şi notăm $x \in A$.

Dacă A şi B sînt două mulţimi şi dacă orice element din mulţimea B este element în mulţimea A spunem că B este inclusă în A sau că B este *submulţime a mulţimii* A şi notăm $B \subset A$.

Prin definiţie mulţimile A şi B sînt egale dacă: $A \subset B$ şi $B \subset A$.

Dacă se dă o mulţime de elemente A şi o proprietate $\mathfrak{P}$ pe care o au numai anumite elemente din mulţimea A atunci notăm submulţimea formată cu aceste elemente prin $\{x \in A \mid \mathfrak{P}\}$.

Mulţimea fără nici un element o numim mulţime vidă şi o notăm $\varnothing$.

Mulţimea formată dintr-un singur element $a \in A$ o notăm prin $\{a\}$.

Dacă A este o mulţime, toate submulţimile mulţimii A formează o altă mulţime pe care o notăm $\mathfrak{P}(A)$.

1. Operaţii cu mulţimi

1. Fie $A \subset B$. Să considerăm mulţimea elementelor din B ce nu aparţin mulţimii A; vom nota această mulţime cu $\complement_B A$ şi o numim *complementara* mulţimii A (sau *diferenţa* mulţimilor B şi A).

Complementara are proprietăţile:

1. a) $\complement_A A = \varnothing$, 1. b) $\complement_\varnothing A = A$, 1. c) $\complement_B(\complement_B A) = A$

2. Dacă $A \in \mathfrak{P}(E)$ şi $B \in \mathfrak{P}(E)$ definim mulţimea

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ sau } x \in B\}$$

pe care o numim *reuniunea* mulţimilor A şi B.

Proprietățile reuniunii sînt:

2.a) $A \cup B = B \cup A$ (comutativitate)

2.b) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ (ascciativitate)

2.c) $A \cup \varnothing = A$, $A \cup E = E$

3. Dacă $A \in \mathfrak{P}(E)$ și $B \in \mathfrak{P}(E)$ numim *intersecție* a celor două mulțimi, mulțimea:

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ și } x \in B\}.$$

Proprietățile intersecției sînt:

3.a) $A \cap B = B \cap A$ (comutativitate)

3.b) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ (asociativitate)

3.c) $A \cap \varnothing = \varnothing$, $A \cap E = A$

3.d) $\complement_E(A \cap B) = \complement_E A \cup \complement_E B$ (relația De Morgan)

3.e) $\complement_E(A \cup B) = \complement_E A \cap \complement_E B$ (relația De Morgan)

Cele două operații de reuniune și intersecție sînt legate între ele prin distributivitatea uneia față de cealaltă, adică

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

4. Dacă $A \in \mathfrak{P}(E)$ și $B \in \mathfrak{P}(E)$ numim *produs cartezian* a celor 2 mulțimi, mulțimea perechilor:

$$A \times B = \{(x, y) \mid x \in A \text{ și } y \in B\}.$$

Produsul cartezian a 2 mulțimi are proprietățile:

4.a) $A \times \varnothing = \varnothing$. $A \times B \neq B \times A$.

4.b) $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$

4.c) $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$.

Produsul cartezian pentru mai mult de două mulțimi se definește prin:

$$A \times B \times C = (A \times B) \times C$$

Proprietățile operațiilor cu mulțimi se demonstrează avînd în vedere definiția egalității a 2 mulțimi.

Vom demonstra spre exemplificare proprietățile: 3.e) și 4.b)

3.e) Arătăm $\complement_E(A \cup B) \subset \complement_E A \cap \complement_E B$.

$$x \in \complement_E(A \cup B) \to x \notin A \cup B \to x \notin A \text{ și}$$

$$x \notin B \to x \in \complement_E A \text{ și } x \in \complement_E B \to x \in \complement_E A \cap \complement_E B.$$

Invers dacă: $x \in \complement_E A \cap \complement_E B$ rezultă $x \in \complement_E A$ și $x \in \complement_E B \to x \notin A$ și $x \notin B \to$ $\to x \notin A \cup B \to x \in \complement_E(A \cup B)$.

4.b) Arătăm $(A \cup B) \times C \subset (A \times C) \cup (B \times C)$.

Dacă $x \in (A \cup B) \times C$ el este de forma $x = (y, z)$, $y \in A \cup B$ şi $z \in C \to y \in A$ sau $y \in B \to (y, z) \in A \times C$ sau $(y, z) \in B \times C$.
Invers se demonstrează în acelaşi mod. Din cele două incluziuni rezultă egalitatea mulţimilor.

Exemple de mulţimi

I. *Mulţimea numerelor reale* **R**.

Definiţia 1.1 Cîmpul sau corpul numerelor reale **R** este o mulţime în care sînt definite operaţiile:

a) de adunare şi înmulţire prin care se asociază perechii (x, y) de elemente numere reale din **R**, numărul real $x + y$ respectiv numărul real $x \cdot y$.

b) de ordine $x \leqslant y$ (x este mai mic sau egal cu y) între elementele mulţimii **R** cu proprietăţile:

a_1) $x + (y + z) = (x + y) + z$ (asociativitate)

a_2) $x + y = y + x$ (comutativitate)

a_3) există elementul $0 \in \mathbf{R}$ (element neutru) astfel încît $0 + x = x$ pentru orice $x \in \mathbf{R}$.

a_4) pentru orice $x \in \mathbf{R}$ există un element $(-x) \in \mathbf{R}$ (simetric) astfel încît $x + (-x) = 0$.

a_5) $x(yz) = (xy)z$ (asociativitate)

a_6) $xy = yx$ (comutativitate)

a_7) există în **R** un element $1 \neq 0$ astfel ca $1 \cdot x = x$ pentru orice $x \in \mathbf{R}$.

a_8) pentru orice $x \neq 0$ în **R** există un element $x^{-1} \in \mathbf{R}$ astfel încît $x \cdot x^{-1} = 1$.

a_9) $x(y + z) = xy + xz$ (distributivitatea înmulţirii faţă de adunare).

b_1) dacă $x \leqslant y$ şi $y \leqslant z \to x \leqslant z$

b_2) dacă $x \leqslant y$ şi $y \leqslant x \to x = y$

b_3) pentru orice 2 elemente x, y din **R** sau $x \leqslant y$ sau $y \leqslant x$

b_4) dacă $x \leqslant y \to x + z \leqslant y + z$

b_5) dacă $x \geqslant 0$ şi $y \geqslant 0 \to xy \geqslant 0$.

Datorită proprietăţilor $b_1) - b_5)$ pe care le îndeplineşte mulţimea **R** spunem că **R** este un cîmp ordonat.

Relaţia $x \leqslant y$ şi $x \neq y$ se scrie sub forma $x < y$ sau $y > x$.

Dintre mulţimile de numere reale un loc deosebit va fi ocupat de mulţimile:

$(a, b) = \{x, x \in \mathbf{R} \mid a < x < b\}$, (interval)

$[a, b] = \{x, x \in \mathbf{R} \mid a \leqslant x \leqslant b\}$, (segment)

$[a, b) = \{x, x \in \mathbf{R} \mid a \leqslant x < b\}$ (semiinterval)

Mulţimea $\mathbf{R}$ verifică de asemenea următoarele axiome:

Axioma lui Arhimede: pentru orice pereche x, y de numere reale din $\mathbf{R}$, pentru care $x > 0$, $y \geqslant 0$ există un număr natural n, astfel încît $y \leqslant nx$.

Axioma de compunere a intervalelor: dacă $[a_n, b_n]_{n \in \mathbf{N}}$ este un şir de segmente astfel ca $a_n \leqslant a_{n+1}$, $b_{n+1} \leqslant b_n$, oricare ar fi $n \in \mathbf{N}$, intersecţia acestor segmente nu este vidă.

2. Mulţimea extinsă a numerelor reale

Definiţia 2.1. Prin mulţimea extinsă a numerelor reale se înţelege mulţimea $\overline{\mathbf{R}} = \mathbf{R} \cup \{-\infty\} \cup \{\infty\}$ unde $(-\infty)$ şi ∞ sînt 2 simboluri distincte. $\overline{\mathbf{R}}$ devine o mulţime ordonată cu ordinea din $\mathbf{R}$ dacă punem $-\infty < \infty$ şi $-\infty < x < \infty$ pentru orice $x \in \mathbf{R}$.

Mulţimi remarcabile din $\overline{\mathbf{R}}$ sînt:

$$(a, b) = \{x, x \in \overline{\mathbf{R}} \mid a < x < b\}$$

$$[a, b] = \{x, x \in \overline{\mathbf{R}} \mid a \leqslant x \leqslant b\}$$

$$[a, b) = \{x, x \in \overline{\mathbf{R}} \mid a \leqslant x < b\}$$

$$(a, b] = \{x, x \in \overline{\mathbf{R}} \mid a < x \leqslant b\}.$$

Dacă $a, b \in \mathbf{R}$ spunem că aceste mulţimi sînt *mărginite*. Dacă $a \in \overline{\mathbf{R}} - \mathbf{R}$ sau $b \in \overline{\mathbf{R}} - \mathbf{R}$ spunem că mulţimile sînt *nemărginite*. Cele două simboluri $-\infty$ şi ∞ operează astfel:

$$\infty + x = x + \infty = \infty$$

$$(-\infty) + x = x - \infty = -\infty$$

$$\infty + \infty = \infty$$

$$(-\infty) + (-\infty) = -\infty$$

$$-(\infty) = -\infty, \ -(-\infty) = \infty.$$

$\infty + (-\infty)$ şi $(-\infty) + \infty$ nu sînt definite.

Pentru $x \in \mathbf{R}$ şi $x > 0$ obţinem

$$\infty \cdot x = x \cdot \infty = \infty, \ (-\infty) \cdot x = x \cdot (-\infty) = -\infty$$

$$\infty \cdot \infty = \infty.$$

Pentru $x \in \mathbf{R}$ şi $x < 0$

$$\infty \cdot x = x \cdot \infty = -\infty, \ (-\infty) \cdot x = \infty.$$

$$(-\infty) \cdot (-\infty) = \infty$$

$\infty \cdot 0$ şi $(-\infty) \cdot 0$ nu sînt definite.

Numerele reale pot fi reprezentate ca puncte ale unei drepte numită dreaptă reală. Alegem o dreaptă L şi pe ea un punct 0 în dreptul căruia plasăm elementul 0 (zero). Alegem de asemenea o unitate de măsură şi la dreapta lui 0 aşezăm elementul $r (r > 0)$ la distanţa de r unităţi. La distanţa de r unităţi la stînga lui 0 aşezăm numărul $(-r)$ $(r > 0)$. Am pus astfel în

Fig. 1

corespondenţă fiecărui număr real cîte un punct pe dreapta reală; corespondenţă ce are proprietăţile:

— fiecărui număr real îi corespunde un punct şi numai un punct al dreptei L;

— la două numere diferite corespund întotdeauna două puncte diferite;

— la fiecare punct al dreptei reale L corespunde un număr real.

O asemenea corespondenţă se numeşte *bijectivă* (figura 1).

3. Mulţimi majorate, minorate. Margine superioară.

Definiţia 3.1. O submulţime $A \subset \mathbf{R}$ este majorată (minorată) dacă există $b \in \mathbf{R}$ astfel încît $x \leqslant b (x \geqslant b)$ pentru orice $x \in A$.

Elementul „b" se numeşte majorant al mulţimii A. El nu este unic.

Dacă există un majorant (minorant) în mulţimea A, acesta este *maximul (minimul)* mulţimii A.

Astfel mulţimea $(a, b] \subset \mathbf{R}$ este mărginită şi admite ca maxim pe b; nu admite minim dar este minorată.

Definiţia 4.1. Numim marginea superioară exactă pentru mulţimea A (sup A), marginea inferioară a majoranţilor ei şi margine inferioară exactă, marginea superioară a minoranţilor ei.

Are loc:

Teorema 1.1. Orice parte nevidă majorată din $\mathbf{R}$ înzestrată cu relaţia de ordine are o margine superioară exactă (şi orice parte nevidă minorată din $\mathbf{R}$ are o margine inferioară exactă).

Marginea superioară exactă M are proprietăţile:

1) pentru orice $x \in A$, $A \subset \mathbf{R}$, $x \leqslant M$

2) pentru orice $M_1 < M$ există $x \in A$ astfel încît $M_1 < x \leqslant M$.

Marginea inferioară exactă m are proprietăţile:

3) pentru orice $x \in A$, $A \subset \mathbf{R}$, $x \geqslant m$

4) pentru orice $m_1 > m$ există $x \in A$ astfel încît $m \leqslant x < m_1$.

Spaţii liniare

Vom nota prin K unul din corpurile $\mathbf{R}$ (al numerelor reale) şi $\mathbf{C}$ (al numerelor complexe).

Definiţie. Se numeşte spaţiu vectorial (faţă de corpul K) o mulţime X de elemente în care este definită o operaţie „$+$" de adunare între elemente din X şi o operaţie de înmulţire · între elementele din X şi elementele din K, operaţii care verifică proprietăţile:

I_1) $x + y = y + x$ (comutativitate), $x, y \in X$

I_2) $(x + y) + z = x + (y + z)$ (asociativitate), $x, y, z \in X$

I_3) există $0 \in X$ astfel încît

$$x + 0 = 0 + x = x, \quad (\forall)\ x \in X.$$

I_4) $(\forall)$ $x \in X$ există $x' \in X$ astfel încît

$$x + x' = x' + x = 0$$

II_1) $1 \cdot x = x, \quad x \in X$

II_2) $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)\, x, \ x \in X, \alpha, \beta \in K.$

II_3) $(\alpha + \beta)\, x = \alpha x + \beta x, \ \alpha, \ \beta \in K, \ x \in X$

II_4) $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y, \ \alpha \in K, \ x, \ y \in X$

Elementele spaţiului X se numesc puncte sau vectori.

Exemple

1) Mulţimea $\mathcal{P}_n$, a polinoamelor de grad „n" cu coeficienţi reali formează un spaţiu liniar faţă de $K = \mathbf{R}$.

2) Mulţimea $\mathcal{M}$ a matricilor 2×2 faţă de corpul $K = \mathbf{R}$ formează de asemenea un spaţiu vectorial.

Definiţia. Un *spaţiu liniar* X se numeşte *spaţiu liniar normat* sau *spaţiu vectorial normat* dacă se defineşte o funcţie $\|\cdot\|: X \to R^+$ cu proprietăţile:

1) $\| x \| = 0 \leftrightarrow x = 0$

2) $\| x + y \| \leqslant \| x \| + \| y \|$

3) $\| \alpha x \| = | \alpha | \, \| x \|, \ \alpha \in K.$

Această funcţie se numeşte normă.

În cele ce urmează ne vom ocupa de un spaţiu liniar particular.

II. *Spaţiul euclidian* $\mathbf{R}^k$

Definiţia 5.1. Mulţimea formată din grupe ordonate de cîte k numere reale o numim mulţime $\mathbf{R}^k$.

Astfel

$$\mathbf{R}^k = \{x, x = (x_1, x_2, \ldots, x_k) \mid x_i \in \mathbf{R}, i = 1, \ldots, n\}$$

Se observă că $\mathbf{R}^k = \mathbf{R} \times \mathbf{R} \times \ldots \times \mathbf{R}$ ceea ce justifică notaţia.

Elementele mulţimii $\mathbf{R}^k$ se numesc *puncte* sau *vectori*.

În mulţimea $\mathbf{R}^k$ definim operaţiile de adunare a vectorilor $(+)$ şi de înmulţirea vectorilor cu numere reale $(\cdot)$ astfel:

1. dacă $x \in \mathbf{R}^k$ şi $y \in \mathbf{R}^k$, $x + y = (x_1 + y_1, \ldots, x_k + y_k)$
2. dacă $x \in \mathbf{R}^k$ şi $\alpha \in \mathbf{R}$; $\alpha \cdot x = (\alpha x_1, \ldots, \alpha x_k)$.

Operaţiile definite mai sus au proprietăţile $I_1 - I_4$, $II_1 - II_4$ ale spaţiului liniar.

Putem construi un model geometric al spațiului $\mathbf{R}^2$ ($\mathbf{R}^3$) asemănător dreptei reale.

Vom considera în plan 2 drepte reale perpendiculare. Notăm punctul lor de intersecție cu O. Alegem pe fiecare din aceste drepte cîte un punct M_1 respectiv M_2 astfel încît O, M_1, M_2 să se succedă în sens direct (sensul invers acelor unui ceasornic).

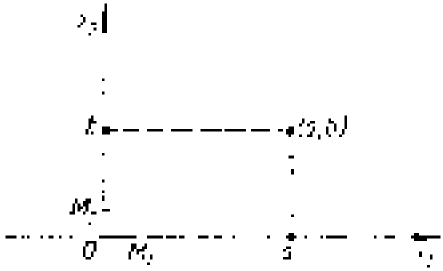

Fig. 2

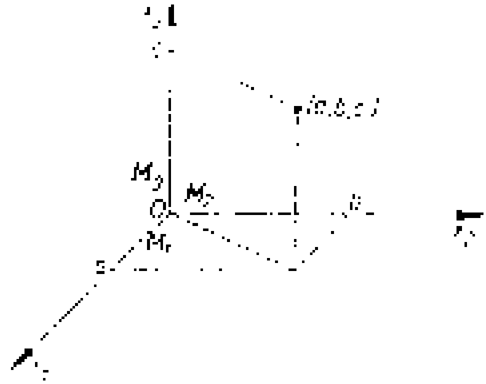

Fig. 3

Dreapta care trece prin O și M_i o notăm axa x_i ($i = 1, 2$).

Fie un element $(a, b) \in \mathbf{R}^2$. Așezăm numărul real a pe axa Ox_1 după convenția făcută la dreapta reală și numărul real b pe axa Ox_2. Ducînd paralele la axe prin aceste puncte obținem imaginea elementului (a, b) (fig. 2). La fel în $\mathbf{R}^3$ (fig. 3).

În mulțimea $\mathbf{R}^n$ definim și operația de produs scalar a doi vectori, astfel:

3. dacă $x \in \mathbf{R}^n$ și $y \in \mathbf{R}^n$ atunci

$$\langle x, y\rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n.$$

Operația de *produs scalar* are proprietățile:

3.1. $\langle x, x\rangle \geqslant 0$

3.2. $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$

3.3. $\langle x, y + z\rangle = \langle x, y\rangle + \langle x, z\rangle$

3.4. $\langle x + y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$

3.5. $\alpha\langle x, y\rangle = \langle \alpha x, y\rangle = \langle x, \alpha y\rangle$, $\alpha \in \mathbf{R}$.

Cu ajutorul produsului scalar definim pentru orice vector $x \in \mathbf{R}^n$, un număr real, numit *norma (lungimea) vectorului* $\|x\|$ astfel:

4. $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2} = \sqrt{\langle x, x\rangle}$.

Norma vectorului din $\mathbf{R}^n$ are proprietățile:

4.1. $\|x\| \geqslant 0$, $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

4.2. $\|\alpha x\| = |\alpha| \, \|x\|$

4.3. $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$

Demonstrațiile proprietăților 4.1 – 4.3 sînt aplicații ale definiției operațiilor cu vectori din $\mathbf{R}^k$ și le vom lăsa pe seama cititorului. Vom demonstra numai proprietatea 4.3.

Pentru aceasta fie $\sum_{i=1}^{k} (\lambda x_i - y_i)^2 \geq 0$ sau:

$$\lambda^2 \sum_{i=1}^{k} x_i^2 - 2\lambda \sum_{i=1}^{k} x_i y_i + \sum_{i=1}^{k} y_i^2 \geq 0.$$

Aplicînd semnul trinomului obținem:

$$\left(\sum_{i=1}^{k} x_i y_i\right)^2 \leq \sum_{i=1}^{k} x_i^2 \cdot \sum_{i=1}^{k} y_i^2$$

sau încă $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$.

Fie 4.5,

$$\|x + y\|^2 = \langle x + y, x + y \rangle = \langle x, x \rangle + 2\langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle \leq$$

$$\leq \|x\|^2 + 2|\langle x, y \rangle| + \|y\|^2 \leq$$

$$\leq \|x\|^2 + 2\|x\| \cdot \|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2$$

de unde rezultă relația cerută.

Spațiul vectorial $\mathbf{R}^k$ în care s-a definit produsul scalar cu proprietățile III.1—III.5 devine un spațiu liniar normat (spațiul euclidian).

Observație. În spațiul $\mathbf{R}^k$ se pot introduce și alte norme, astfel dacă $x = (x_1, ..., x_k) \in \mathbf{R}^k$ notăm

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{k} |x_i|$$

și aceasta verifică proprietățile (4.4) – (4.5), ale normei.
Această normă nu a fost însă construită cu ajutorul produsului scalar.

§ 2. FUNCȚII ÎN $\mathbf{R}^k$

Definiția 4.2. Prin aplicație (funcție) f a mulțimii X în Y înțelegem o regulă care asociază fiecărui element $x \in X$ un element $y \in Y$. Notăm valoarea funcției prin $y = f(x)$.

Exemple de funcții

1. Fie $f: A \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definită prin $f(x) = y$. O asemenea funcție o vom numi *funcție reală de variabilă reală*.

2. Fie $f: A \subset \mathbf{R}^k \to \mathbf{R}$ definită prin:

$$f(x_1, x_2, ..., x_k) = y, \quad x = (x_1, x_2, ..., x_k) \in A.$$

Funcția f se va numi în acest caz *funcție reală de variabilă vectorială*.

3. Fie $f: A \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}^m$ definită prin:

$$f(t) = (f_1(t), f_2(t), \ldots, f_m(t)), \; t \in A \subset \mathbf{R}.$$

Această funcţie se numeşte funcţie *vectorială de variabilă reală*.

4. Fie $f: A \subset \mathbf{R}^k \to \mathbf{R}^m$ definită prin:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_k) = (f_1(x_1, x_2, \ldots, x_k), f_2(x_1, \ldots, x_k), \ldots, f_m(x_1, \ldots, x_k))$$

care asociază fiecărui vector din A un vector din $\mathbf{R}^m$. Această funcţie o numim funcţie vectorială de variabilă vectorială.

Aplicaţia f a mulţimii X în Y este *injectivă* dacă $f(x_1) = f(x_2)$ implică $x_1 = x_2$ oricare ar fi $x_1, x_2 \in X$.

Aplicaţia f a mulţimii X în Y este *surjectivă* dacă fiecare element din Y este imaginea unui element din X.

O aplicaţie injectivă şi surjectivă este *bijectivă*.

Presupunem că f este o bijecţie; în acest caz vom nota cu $f^{-1}(y)$ elementul $x \in X$ pentru care $f(x) = y$; f^{-1} astfel definită aplică mulţimea Y în X şi se numeşte aplicaţia inversă lui f sau funcţie inversă.

Fie $A \subset X$ şi f o aplicaţie a lui X în Y; notăm

$$f(A) = \{y, y \in Y \mid (\exists)\, x \in A, \; y = f(x)\}.$$

Numim mulţimea $f(A)$, imaginea prin aplicaţia f a mulţimii A şi considerăm aplicaţia definită pe mulţimea $\mathfrak{P}(A)$ cu valori în $\mathfrak{P}(Y)$.

Proprietăţi:

1) $f(\emptyset) = \emptyset$
2) dacă $A \subset B \to f(A) \subset f(B)$
3) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$
4) $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$

În mod asemănător dacă $B \subset Y$ notăm mulţimea:

$$f^{-1}(B) = \{x, x \in X \mid f(x) \in B\}$$

şi o numim imaginea inversă a mulţimii $B \subset Y$ prin aplicaţia f.

Proprietăţi:

1') $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$
2') dacă $A \subset B \to f^{-1}(A) \subset f^{-1}(B)$
3') $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$
4') $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$
5') $f^{-1}(\complement A) = \complement f^{-1}(A)$.

Vom demonstra numai două din aceste proprietăţi celelalte rămîn ca exerciţii pentru cititori. Metoda de demonstrare se bazează pe definiţia egalităţii a 2 mulţimi.

Demonstrăm 3) şi 4'):

3) Fie $y \in f(A \cup B) \to$ există $x \in A \cup B$ cu $f(x) = y \to x \in A$ sau $x \in B \to$ $\to f(x) \in f(A)$ sau $f(x) \in f(B) \to y = f(x) \in f(A) \cup f(B)$. Invers fie $y \in f(A) \cup$

$\cup f(B) \Rightarrow y \in f(A)$ sau $y \in f(B) \Rightarrow$ există $x \in A$ sau $x \in B$ cu $f(x) = y \Rightarrow$ $\Rightarrow x \in A \cup B$ cu $f(x) = y \Rightarrow y \in f(A \cup B) \Rightarrow f(A) \cup f(B) \subset f(A \cup B)$, ceea ce arată egalitatea mulțimilor.

4') Fie $x \in f^{-1}(A \cap B) \Rightarrow f(x) \in A \cap B \Rightarrow f(x) \in A$ și $f(x) \in B \Rightarrow x \in f^{-1}(A)$ și $x \in f^{-1}(B) \Rightarrow x \in f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$. Invers, fie $x \in f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B) \Rightarrow x \in f^{-1}(A)$ și $x \in f^{-1}(B) \Rightarrow f(x) \in A$ și $f(x) \in B \Rightarrow f(x) \in A \cap B \Rightarrow x \in f^{-1}(A \cap B)$. Fie X, Y, Z mulțimi și $f: X \to Y$, $g: Y \to Z$.

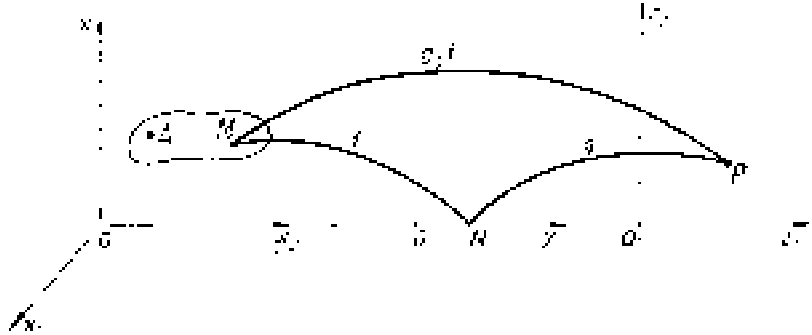

Fig. 4

Definiția 2.2. Numim compunere a aplicațiilor f și g și notăm $g \circ f$, aplicația definită în X cu valori în Z, după regula:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

Exemple:

1) Fie $f: A \subset \mathbf{R}^2 \to B \subset \mathbf{R}$ și $g: B \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}^2$.

O imagine a funcției compuse $g \circ f$ este reprezentată în figura 4 $g \circ f: A \subset \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$.

2) Fie $f: R \subset \mathbf{R} \to B \subset \mathbf{R}^2$ și $g: B \subset \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$.

Compunerea funcțiilor f și g este reprezentată în figura 5 $g \circ f: A \subset R \to \mathbf{R}$.

Compunerea funcțiilor este asociativă deci:

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$

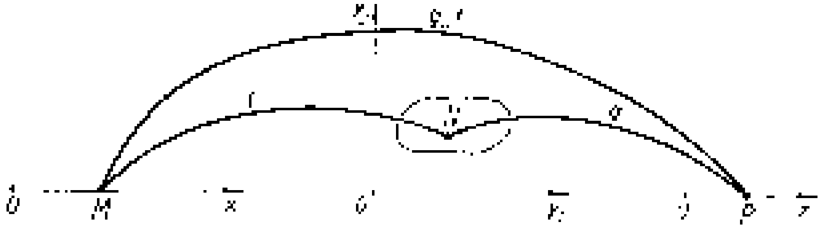

Fig. 5

Definiția 3.2. Dacă f este o bijecție a mulțimii X în Y, numim bijecție inversă și notăm f^{-1} funcția $f^{-1}: Y \to X$ astfel încât $f^{-1} \circ f = I_X$ unde I_X este aplicația identică corespunzătoare mulțimii X.

Exemplu: Funcţia $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ prin $f(x) = \operatorname{sh} x$ unde $\operatorname{sh} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$, este o bijecţie deoarece este:

- injectivă: $\left(\text{din } \dfrac{e^{x_1} - e^{-x_1}}{2} = \dfrac{e^{x_2} - e^{-x_2}}{2} \text{ rezultă } e^{x_1} = e^{x_2} \text{ deci } x_1 = x_2\right)$,
- surjectivă (ia toate valorile din $\mathbf{R}$).

Pentru a determina bijecţia inversă notăm $f(x) = y$ şi exprimăm pe x în funcţie de y:

$$2y = e^x - e^{-x} \Rightarrow e^{2x} - 2ye^x - 1 = 0 \Rightarrow e^x = y \pm \sqrt{y^2 + 1}.$$

Deoarece $e^x > 0$, rămîne $e^x = y + \sqrt{y^2 + 1}$, de unde $x = \ln (y + \sqrt{y^2 + 1})$ şi deci bijecţia inversă este $f^{-1}: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f^{-1}(x) = \ln (x + \sqrt{1 + x^2})$.

Transformări liniare

Definiţia 8.7. Aplicaţia λ a spaţiului vectorial $\mathbf{R}^n$ în spaţiul vectorial $\mathbf{R}^m$ se numeşte transformare liniară dacă

$$\lambda(x_1 + x_2) = \lambda(x_1) + \lambda(x_2)$$
$$\lambda(\alpha x) = \alpha\lambda(x)$$

oricare ar fi $x_1, x_2 \in \mathbf{R}^n$ şi $\alpha \in \mathbf{R}$.

Observaţii 1. Dacă λ este transformare liniară se mai notează λx în loc de $\lambda(x)$.

2. Dacă $m = n$ transformarea λ se numeşte operator.

Fie în $\mathbf{R}^n$ baza $e_1 = (1, 0, 0, \dots, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)$, ..., $e_n = (0, 0, \dots, 0, 1)$ pe care o vom numi bază standard.

Definiţia [illegible]. Prin matrice a transformării liniare $\lambda: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ relativă la bazele standard din $\mathbf{R}^n$ şi $\mathbf{R}^m$ înţelegem matricea $m \times n$ notată $A = (a_{ij})$ în care elementele coloanei j sînt componentele vectorului $\lambda(e_j)$

$$\lambda(e_j) = a_{1j}e_1 + a_{2j}e_2 + \dots + a_{mj}e_m.$$

Dacă x este un vector oarecare din $\mathbf{R}^n$, vectorul transformat $\lambda(x)$ este dat de:

$$\lambda(x) = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = Ax$$

Exemplu: Transformarea $\lambda: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ dată de matricea

$$A = \begin{pmatrix} \sin \theta & \cos \theta \\ \cos \theta & -\sin \theta \end{pmatrix}$$

$(\theta \in [0, \pi])$ are proprietatea că este liniară şi dacă $x = (x_1, x_2)$ şi $y = (y_1, y_2)$ sînt 2 vectori din $\mathbf{R}^2$ atunci $\sphericalangle \lambda(x), \lambda(y) = \sphericalangle x, y$

Transformarea este liniară deoarece

$$\lambda(x+y) = \begin{pmatrix} \sin\theta & \cos\theta \\ -\cos\theta & \sin\theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \end{pmatrix} = \lambda(x) + \lambda(y) \quad \text{şi}$$

$$\text{şi } \lambda(\alpha x) = \begin{pmatrix} \sin\theta & \cos\theta \\ -\cos\theta & \sin\theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha x_2 \end{pmatrix} = \alpha\lambda(x)$$

$\lambda(x)$ este vectorul dat de produsul matricii A cu vectorul coloană x. Avem

$$\lambda(x) = \begin{pmatrix} \sin\theta & \cos\theta \\ -\cos\theta & \sin\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \sin\theta + x_2 \cos\theta \\ -x_1 \cos\theta + x_2 \sin\theta \end{pmatrix}$$

$$\lambda(y) = \begin{pmatrix} \sin\theta & \cos\theta \\ -\cos\theta & \sin\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \sin\theta + y_2 \cos\theta \\ -y_1 \cos\theta + y_2 \sin\theta \end{pmatrix}$$

Produsul scalar:

$$\langle \lambda(x), \lambda(y) \rangle = (x_1 \sin\theta + x_2 \cos\theta)(y_1 \sin\theta + y_2 \cos\theta) +$$

$$+ (-x_1 \cos\theta + x_2 \sin\theta)(-y_1 \cos\theta + y_2 \sin\theta) = x_1 y_1 + x_2 y_2 = \langle x, y \rangle.$$

Propoziţie. Dacă $\lambda: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ este o transformare liniară există $M > 0$, astfel ca:

$$\|\lambda(x)\| \leq M \|x\|, \text{ pentru orice } x \in \mathbf{R}^n,$$

unde $\|\lambda(x)\|$ este lungimea vectorului transformat.

Demonstraţie:

Dacă $A = (a_{ij})$ este matricea transformării

$$\|\lambda(x)\| = \sqrt{\left(\sum_{j=1}^n a_{1j} x_j\right)^2 + \ldots + \left(\sum_{j=1}^n a_{mj} x_j\right)^2} \leq$$

$$\leq M_1 \sqrt{m\left(\sum_{j=1}^n x_j\right)^2} \leq \sqrt{m}\, M_1 \sqrt{n \sum_{j} x_j^2} = M_1 \sqrt{mn}\, \|x\|.$$

Am notat $M_1 = \max |a_{ij}|$, $M = M_1 \sqrt{mn}$, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$.

Definiţia 10.1. Dacă $\lambda: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$, λ liniară şi $\mu: \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^p$, μ liniară definim transformarea compusă sau transformarea produs prin $(\mu\lambda)x = \mu(\lambda(x))$.

Matricea transformării compuse este produsul matricilor celor două transformări.

§ 3. SPAȚII METRICE. SPAȚII TOPOLOGICE

Definiția 1.3. Fie E o mulțime oarecare. Se numește metrică sau distanță (se notează cu d) o aplicație a mulțimii $E\times E$ în mulțimea $\mathbf{R}^+=\{x,\ x\in\mathbf{R},\ x\geq 0\}$ astfel încît fiecărei perechi $(x, y)\in E\times E$ îi corespunde numărul $d(x, y)\in\mathbf{R}^+$ cu proprietățile:

1) $d(x, y)=d(y, x)$

2) $d(x, y)>0$ dacă $x\neq y$ și $d(x, x)=0$

3) $d(x, z)\leq d(x, y)+d(y, z)$.

Consecinți

3') $d(x_1, x_n)\leq d(x_2, x_2)+d(x_2, x_3)+\ldots+d(x_{n-1}, x_n)$

Exemple de metrici

a) Funcția $d(x, y)$: $\mathbf{R}\times\mathbf{R}\to\mathbf{R}^+$ prin $d(x, y)=|x-y|$

b) d: $\mathbf{R}^k\times\mathbf{R}^k\to\mathbf{R}^+$ prin $d(x, y)=\|x-y\|=\sqrt{\sum_{i=1}^{k}(x_i-y_i)^2}$

c) d: $\mathbf{R}^k\times\mathbf{R}^k\to\mathbf{R}^+$ prin $d(x, y)=\sum_{i=1}^{k}|x_i-y_i|$

d) d: $A\times A\to\mathbf{R}^+$, A mulțime oarecare prin:

$$d(x, y)=\begin{cases}1, & x\neq y\\ 0, & x=y\end{cases}$$

Definiția 2.3. Numim *spațiu metric* perechea (E, d) unde E este o mulțime oarecare iar d este o metrică definită pe $E\times E\to\mathbf{R}^+$.

În cele ce urmează vom lucra în mod obișnuit cu metricile

$d(x, y)=|x-y|$, $(x, y)\in\mathbf{R}\times\mathbf{R}$ în $\mathbf{R}$ și cu $d(x, y)=\|x-y\|$, $(x, y)\in\mathbf{R}^k\times\mathbf{R}^k$.

Spațiul $(\mathbf{R}^k, \|\cdot\|)$ îl vom numi spațiu metric normat.

Vom defini în cele ce urmează o structură de spațiu topologic pe un spațiu metric. Din necesitățile legate de dezvoltarea ulterioară a cursului, vom defini topologia în spațiul $(\mathbf{R}^k, \|\cdot\|)$.

Definiția 3.3. Fie $a\in\mathbf{R}^k$ și $r\in\mathbf{R}^+$. Mulțimea punctelor $x\in\mathbf{R}^k$ pentru care $\|x-a\|<r$ ($\|x-a\|\leq r$) se numește *sferă deschisă (închisă)* cu centrul în a și raza r. O vom nota prin $B_r(a)$.

Observații 1. În cazul cînd $a\in\mathbf{R}$ și $x\in\mathbf{R}$, sfera deschisă devine $|x-a|<r$ adică interval simetric $(a-r, a+r)$.

2. Dacă $a=(a_1, a_2)\in\mathbf{R}^2$ și $x=(x_1, x_2)\in\mathbf{R}^2$, sfera deschisă este $\sqrt{(x_1-a_1)^2+(x_2-a_2)^2}<r$ sau încă $(x_1-a_1)^2+(x_2-a_2)^2<r^2$ și are ca imagine discul cu centrul în (a_1, a_2) și de rază r.

3. Dacă $a=(a_1, a_2, a_3)\in\mathbf{R}^3$ și $x=(x_1, x_2, x_3)\in\mathbf{R}^3$ sfera deschisă este $\sqrt{(x_1-a_1)^2+(x_2-a_2)^2+(x_3-a_3)^2}<r$ și are ca imagine geometrică sfera de centru (a_1, a_2, a_3) din $\mathbf{R}^3$.

Definiţia 5.2. O mulţime $A \subset \mathbf{R}^k$ este mulţime mărginită dacă există o sferă $B_r(a)$ astfel încît $A \subset B_r(a)$.

Exemple:

1. Mulţimea $A = (-2, 1)$ este mărginită. În acest caz sfera deschisă este intervalul $(-2, 2)$.

2. Mulţimea $I^k = I_1 \times I_2 \times \ldots \times I_k$ este mărginită dacă $I_i = (a_i, b_i)$, $i = 1, 2, \ldots, k$.

Definiţia 5.3. Mulţimea O din spaţiul metric $\mathbf{R}^k$ în care am definit metrica $d(x, y) = \|x - y\|$ se numeşte *deschisă* în $\mathbf{R}$ dacă pentru fiecare din punctele ei există o sferă deschisă cu centrul în acest punct, conţinută în $\mathbf{R}^k$.

Proprietăţi ale mulţimilor deschise

a) Mulţimea totală şi mulţimea vidă sînt mulţimi deschise.

b) Intersecţia unui număr finit de mulţimi deschise este o mulţime deschisă.

Într-adevăr fie $\{O_i, i = 1, 2, \ldots, n\}$ un număr finit de mulţimi deschise şi $x \in \bigcap_{1}^{n} O_i \Rightarrow x \in O_i$ pentru orice $i = 1, 2, \ldots, n$. O_i este mulţime deschisă deci există $r_i > 0$ astfel încît

$$B_{r_i}(x) \subset O_i, \; i = 1, 2, \ldots, n. \text{ Luînd } r = \min\{r_1, r_2, \ldots, r_n\}, \; B_r(x) \subset \bigcap_{1}^{n} O_i$$

Observaţie. Intersecţia unui număr infinit de mulţimi deschise nu este întotdeauna o mulţime deschisă.

Astfel $\bigcap_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \{0\}$ nu este deschisă.

c) Reuniunea unui număr oarecare de mulţimi deschise este o mulţime deschisă.

Fie $x \in \bigcup_{\alpha \in I} O_\alpha \rightarrow$ există $\alpha_0 \in I$ astfel ca $x \in O_{\alpha_0} \rightarrow$ există $B_r(x) \subset O_{\alpha_0} \rightarrow$
$\rightarrow B_r(x) \subset \bigcup_{\alpha \in I} O_\alpha$.

Definiţia 5.4. O mulţime X pe care am definit o familie de mulţimi deschise cu proprietăţile a), b), c) formează *spaţiul topologic*.

Astfel spaţiul normat $\mathbf{R}^k$ în care am definit mulţimile deschise este un spaţiu topologic.

Observaţie. Noţiunea de *spaţiu topologic* este mai generală decît cea de *spaţiu metric*. În cazul discutat mai sus mulţimile deschise sînt definite cu ajutorul metricii.

Punctele unei mulţimi deschise le numim puncte interioare.

Exemple:

a) Intervalele $(a, b) \subset \mathbf{R}$ sînt mulţimi deschise în $\mathbf{R}$ (în $\mathbf{R}$ am considerat metrica $d(x, y) = |x - y|$).

b) Intervalele $I_k = \{x = (x_1, \ldots, x_k) \mid a_i < x_i < b_i, \ i = 1, 2, \ldots, k\}$ sînt mulţimi deschise în $(\mathbf{R}^k, d_k)$.

Definiţia 7.3. Numim interiorul mulţimii $\mathring{A}$, $A \subset \mathbf{R}^k$, cea mai mare mulţime deschisă conţinută în A. Notăm:

$$\mathring{A} = \bigcup_{i \in I} O_i, \ O_i \text{ mulţimi deschise, } O_i \subset A.$$

Definiţia 8.3. Numim vecinătate a punctului a, $a \in \mathbf{R}^k$ orice submulţime care conţine o mulţime deschisă care conţine pe a.

Notăm $\mathcal{V}_a$ mulţimea vecinătăţilor punctului „a".

Mulţimea vecinătăţilor punctului „a" are proprietăţile:

1) dacă $V \in \mathcal{V}_a \Rightarrow a \in V$

2) dacă $V \in \mathcal{V}_a$ şi $V_1 \subset V$ atunci $V_1 \in \mathcal{V}_a$

3) dacă $V_i \in \mathcal{V}_a$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, atunci $\bigcap_{i=1}^{n} V_i \in \mathcal{V}_a$

4) oricare ar fi $a \neq b$ există vecinătăţi ale punctelor a şi b care nu se intersectează. Aceste proprietăţi rezultă din proprietăţile mulţimilor deschise.

Definiţia 9.3. Punctul „a" este un ***punct limită*** *(punct de acumulare)* pentru mulţimea $A \subset \mathbf{R}^k$, dacă orice vecinătate a punctului „a" conţine cel puţin un punct x, $x \in A$, $x \neq a$.

Dacă $a \in A$ nu este punct limită pentru mulţimea A, spunem că „a" este un *punct izolat*.

Exemplu. Dacă $A = ((2, 3) \cup \{4\}) \times ((-1, 1) \cup \{2\})$ punctul $(3,1)$ este un punct limită iar $(4,2)$ este un punct izolat pentru mulţimea A.

Notăm cu A' mulţimea punctelor limită ale mulţimii A. Fie l şi L marginea inferioară respectiv marginea superioară a mulţimii A'. Numim l (L), limita inferioară (superioară) pentru mulţimea A.

$$l = \lim\inf A = \underline{\lim}\, A$$

şi

$$L = \lim\sup A = \overline{\lim}\, A$$

Exemplu. Mulţimea $A = \left\{ x_n,\ x_n = \frac{n-1}{n} \sin \frac{n\pi}{2} + \frac{(-1)^n}{n} \right\}$ admite ca puncte limită punctele -1, 0 şi 1, deoarece:

pentru $n = 2k$, $x_{2k} = \frac{2k-1}{2k} \sin k\pi + \frac{1}{2k}$

pentru $n = 2k + 1$, $x_{2k+1} = \frac{2k}{2k+1} \cdot (-1)^k - \frac{1}{2k+1}$

În acest caz $l = -1$ şi $L = 1$.

Teorema 1.3. Dacă „a" este un punct limită pentru mulțimea $A \subset \mathbf{R}^k$, orice vecinătate a punctului „a" conține o infinitate de puncte ale mulțimii A.

Demonstrație. Presupunem că există $V(a)$ care conține un număr finit de puncte ale mulțimii A. Fie $x_1, x_2, \ldots, x_n$ punctele mulțimii $V(a) \cap A$ care nu coincid cu a. Să punem

$$r = \min_{1 \le i \le n} \|a - x_i\|, \quad r > 0.$$

Sfera deschisă $B_r(a)$ nu conține nici un punct al mulțimii A astfel ca $x \neq a$ și deci a nu este punct limită pentru mulțimea A.

Definiția 10.3. Fie $(V_i)_{i \in I}$ vecinătăți ale punctului a, $a \in \mathbf{R}^k$. Spunem că familia $(V_i)_{i \in I}$ este un sistem fundamental de vecinătăți ale punctului „a" dacă orice vecinătate a punctului „a" conține una din vecinătățile V_i.

Definiția 11.3. Mulțimea F, $F \subset \mathbf{R}^k$ este o mulțime închisă dacă își conține toate punctele limită.

Următorul rezultat stabilește o legătură între mulțimile închise și cele deschise.

Teorema 2.3. Mulțimea O este deschisă dacă și numai dacă complementara ei este o mulțime închisă.

Demonstrație. Să presupunem că CO este închisă și fie $x \in O \to x \notin CO$ și deci x nu este punct limită pentru mulțimea CO. Există $V(x)$ astfel ca $CO \cap V = \emptyset$ ceea ce arată că $V \subset O$. Aceasta arată că x este punct interior pentru O și deci O este mulțime deschisă.

Invers dacă presupunem că O este deschisă. Fie x un punct limită pentru CO; din definiția punctului limită rezultă că orice vecinătate a punctului x conține un punct din CO astfel că x nu poate fi punct interior pentru O. Cum O este o mulțime deschisă rezultă că toate punctele ei sînt puncte interioare și deci $x \in CO$. Prin urmare CO este închisă.

Consecință. O mulțime F este închisă atunci și numai atunci cînd complementarea ei este mulțime deschisă. Din proprietățile mulțimilor deschise și *teorema 3* rezultă următoarele proprietăți pentru mulțimile închise:

a') Mulțimea totală și mulțimea vidă sînt mulțimi închise.

Acestea sînt singurele mulțimi care sînt și deschise și închise.

b') Reuniunea unui număr finit de mulțimi închise este o mulțime închisă. Proprietatea nu este adevărată pentru o reuniune infinită. Astfel $\bigcup_{n} a_n$, $a_n = \frac{1}{n}$ nu este o mulțime închisă.

c') Intersecția unui număr oarecare de mulțimi închise este o mulțime închisă.

Exemple:

1) Mulțimea $[a, b] \subset \mathbf{R}$ este o mulțime închisă.

2) Mulțimea $\{x, x \in \mathbf{R}^k, \|x - a\| \le r\}$ este o mulțime închisă.

Teorema 3.3. Fie F, $F \subset \mathbf{R}$ o mulţime închisă, mărginită superior. Atunci marginea superioară M a mulţimii F aparţine lui F.

Demonstraţie. Presupunem că $M \notin F$. Atunci pentru orice $\varepsilon > 0$ există $x \in F$ astfel încît: $M - \varepsilon < x \le M$. Astfel fiecare vecinătate a punctului M conţine un punct oarecare x din mulţimea F, $x \ne M$ şi M apare ca un punct limită pentru mulţimea F, $M \notin F$ ceea ce arată că F nu este închisă. Dar aceasta contrazice ipoteza deci $M \in F$.

Vom numi *închiderea* unei mulţimi A ca fiind cea mai mică mulţime închisă care conţine mulţimea A.

Notăm această mulţime cu $\bar{A}$ şi scriem că:

$$\bar{A} = \bigcap_{\alpha \in I} F_\alpha, \; F_\alpha \supset A, \; F_\alpha \text{ închise.}$$

§ 4. MULŢIMI COMPACTE

Definiţia 1.4. Numim acoperire deschisă a unei mulţimi $A \subset \mathbf{R}^k$, familia $\{O_\alpha\}$ de submulţimi deschise din $\mathbf{R}^k$ astfel ca $A \subset \bigcup_\alpha O_\alpha$.

Definiţia 2.4. Dacă orice acoperire deschisă a mulţimii $K \subset \mathbf{R}^k$ conţine o subacoperire finită spunem că mulţimea K este compactă.

Aceasta înseamnă că dacă $\{O_\alpha\}$ este o acoperire deschisă a mulţimii K, există un număr finit de indici $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ astfel ca:

$$K \subset O_{\alpha_1} \cup O_{\alpha_2} \cup \dots \cup O_{\alpha_n}.$$

Teorema 1.4. O submulţime închisă a unei mulţimi compacte este o mulţime compactă.

Demonstraţie. Fie $A \subset K \subset \mathbf{R}^k$, K mulţime compactă şi A mulţime închisă. Fie $\{V_\alpha\}_{\alpha \in I}$ o acoperire deschisă a mulţimii A. Să considerăm mulţimile $W_\alpha = CA \cup V_\alpha$.

Mulţimile W_α sînt deschise (deoarece CA este deschisă). Mulţimile $\{W_\alpha\}_{\alpha \in I}$ formează o acoperire deschisă a mulţimii K. Cum K este compactă există o subfamilie finită de mulţimi deschise care acoperă pe K şi deci şi pe A.

Teorema 2.4. Dacă $A \subset K \subset \mathbf{R}^k$, K compactă şi A infinită atunci, A are un punct limită care aparţine mulţimii K.

Demonstraţie. Dacă niciunul din punctele mulţimii K nu este punct limită pentru mulţimea A, atunci pentru orice punct $x \in K$ există o vecinătate V_x care nu conţine mai mult de un punct din A. Astfel nici o subfamilie finită de mulţimi $\{V_x\}$ nu poate acoperi mulţimea A (deoarece A este infinită) deci nici pe K, ceea ce contrazice faptul că K este compactă.

Vom demonstra că:

Teorema 3.4. Orice segment

$$I = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_k) \mid a_j \le x_j \le b_j, \; j = 1, \dots, k\}$$

este o mulţime compactă.

Demonstrație. Fie $d = \|a - b\|$, $a = (a_1, a_2, \ldots, a_k)$ și $b = (b_1, b_2, \ldots, b_k)$. Atunci $\|x - y\| \leq d$ pentru orice $x \in I$ și $y \in I$.

Vom presupune că mulțimea I nu este compactă. Există deci o acoperire deschisă $\{O_\alpha\}$ a mulțimii I_k care nu conține nici o subacoperire finită. Fie $c_j = \frac{a_j + b_j}{2}$. Segmentele $[a_j, c_j]$, $[c_j, b_j]$ definesc 2^k intervale k-dimensionale Q_i astfel ca $\cup Q_i = I$.

Cel puțin unul din aceste intervale Q_i nu poate fi acoperit cu un număr finit de mulțimi deschise. Fie aceasta I_1. Repetăm procedeul pentru I_1. Obținem astfel șirul $\{I_n\}_{n \in N}$ cu proprietățile:

a) $I \supset I_1 \supset I_2 \supset \ldots \supset I_n \supset \ldots$,

b) I_n nu poate fi acoperit cu nici-o familie finită de mulțimi din $\{O_\alpha\}$.

c) dacă $x \in I_n$, $y \in I_n$ atunci $\|x_n - y_n\| \leq \frac{d}{2^n}$. Conform axiomei numerelor reale există un punct $x_0 \in I_n$ pentru orice $n \in N$. Pentru $x = x_0$, $x_0 \in O_{x_0}$.
Deoarece O_x este deschisă, există $r > 0$ astfel ca din $\|y - x_0\| < r$ să rezulte $y \in O_{x_0}$. Pentru n convenabil ales, $\frac{d}{2^n} < r$ și deci c) rezultă că $I_n \subset O_{x_0}$ ceea ce contrazice ipoteza.

Teorema 1.4. Pentru o mulțime $A \subset R^k$ următoarele proprietăți sînt echivalente:

a) A este închisă și mărginită.

b) A este compactă.

c) orice submulțime infinită a mulțimii A are un punct limită ce aparține mulțimii A.

Demonstrație. a) $\to$ b). Dacă are loc a) atunci A este mărginită dacă există I astfel ca $A \subset I$, I compact iar A o submulțime închisă. Conform teoremei 1.4, A este compactă.

b) $\to$ c) rezultă din teorema 2.4.

c) $\to$ a) Să presupunem că A nu este mărginită. Există puncte x_n, $x_n \in A$ pentru care $\|x_n\| > n$, $n \in N$. Mulțimea acestor puncte este infinită și nu are puncte limită în R^k și deci nici în A. Rezultă că A este mărginită. Să arătăm că A este închisă. Dacă A nu este închisă, există un punct $x_0 \in R^k$ punct limită a lui A care nu aparține lui A. Există punctele $x_n \in A$ astfel ca $\|x_n - x_0\| < \frac{1}{n}$. Fie S mulțimea acestor puncte x_n. S este o mulțime infinită; x_0 este punct limită al mulțimii S și în R^k nu există alte puncte limită ale mulțimii S. Deci, dacă $y \in R^k$, $y \neq x_0$, atunci:

$$\|x_0 - y\| \leq \|x_n - y\| + \|x_n - x_0\| \leq \|x_n - y\| + \frac{1}{n}$$

și deci

$$\|x_n - y\| \geq \|x_0 - y\| - \|x_n - x_0\| \geq \frac{1}{2}\|x_0 - y\|,$$

pentru toți n, înafara unei mulțimi finite. Aceasta arată că y nu este punct limită al mulțimii S.

Teorema 4.7. (Weierstrass–Bolzano). Orice submulţime A, infinită şi mărginită în $\mathbf{R}^k$ admite un punct limită.

Demonstraţie. A este mărginită, deci există $I \subset \mathbf{R}^k$ astfel ca $A \subset I$. Mulţimea I este compactă şi deci are un punct limită.

§5. MULŢIMI CONEXE

Definiţia 5.5. Mulţimea $X \subset \mathbf{R}^k$ se numeşte conexă dacă nu există două mulţimi deschise O_1 şi O_2, $O_1 \subset \mathbf{R}^k$, $O_2 \subset \mathbf{R}^k$ astfel ca

$$O_1 \cap O_2 = \emptyset,\ O_1 \cap X \neq \emptyset,\ O_2 \cap X \neq \emptyset \text{ şi }$$
$$X \subset O_1 \cup O_2.$$

Teorema 5.5. Submulţimea $X \subset \mathbf{R}$ este conexă atunci şi numai atunci când X are proprietatea: dacă $x \in X$, $y \in X$ şi $x < z < y$, atunci $z \in X$.

Demonstraţie. Să presupunem că această condiţie nu are loc, adică $x \in X$, $y \in X$, $x < z < y$ dar $z \notin X$.

Dacă $O_1 = \{\alpha, \alpha < z\}$ şi $O_2 = \{\beta, \beta > z\}$ din definiţia dată rezultă că X nu este conexă.

Să presupunem că X nu este conexă. Există deci punctele $x \in X$, $y \in X$, $x < y$ şi mulţimile deschise care nu se intersectează în $\mathbf{R}$ astfel ca $x \in O_1$, $y \in O_2$ şi $X \subset O_1 \cup O_2$.

Fie $S = O_1 \cap [x, y]$ şi $z = \sup S$.

Deoarece $y \in O_2$ şi O_2 este deschisă avem $z < y$. În acest fel, dacă $z \in O_1$, O_1 deschisă rezultă că z nu este margine superioară a mulţimii S, deci $z \notin O_1$. Deoarece $x \in O_1$ şi O_1 este deschisă avem $x < z$. Astfel dacă $z \in O_2$ şi O_2 este deschisă rezultă că z nu este margine superioară pentru mulţimea S deci $z \notin O_2$.

Exerciţii propuse

1. Să se arate că pentru orice numere reale

$$|x + y| \le |x| + |y| \quad \text{şi} \quad ||x| - |y|| \le |x - y|$$

2. Să se arate că pentru $x = (x_1, \ldots, x_k) \in \mathbf{R}^k$,

$$\|x\| = \max_{1 \le i \le k} |x_i| \qquad \text{este o normă.}$$

3. Se consideră funcţiile:

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2},\ x \in \mathbf{R} \text{ şi } \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2},\ x \in \mathbf{R}$$

Să se arate că $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$.
Să se determine un interval pe care funcţia ch x este bijecţie şi pe acest interval să se determine bijecţia inversă. Acelaşi lucru pentru sh x.

R. Notăm $\mathrm{sh}^{-1}x$ și obținem $\mathrm{sh}^{-1}x = \ln(x + \sqrt{1 + x^2})$ și $\mathrm{ch}^{-1}x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$, $x \in [1, \infty)$, $\mathrm{ch}^{-1}x \in [0, \infty)$ și $\mathrm{ch}^{-1}x = \ln(x - \sqrt{x^2 - 1})$, $x \in [1, \infty)$, $\mathrm{ch}^{-1}x \in (-\infty, 0]$.

4. Să se arate că mulțimea $\mathbf{R}^n$ în care am definit aplicația

$$d(x, y) = \max_{1 \le i \le n} |x_i - y_i|$$

$x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n)$ este spațiu metric.

5. Să se determine imaginea geometrică a sferei deschise $B_d(0, 1)$ din $\mathbf{R}^2$ în care am definit metrica $d(x, y) = \sum_{i=1}^{2} |x_i - y_i|$ respectiv metrica $d(x, y) = \max_{1 \le i \le 2} |x_i - y_i|$.

6. Să se arate că dacă $A \subset B$ atunci $\mathring{A} \subset \mathring{B}$ unde prin $\mathring{A}$ am notat interiorul mulțimii A.

7. Să se arate că

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$$

dacă $x \in \mathbf{R}^n$, $y \in \mathbf{R}^n$.

CAPITOLUL II

FUNCŢII ÎN $\mathbf{R}^k$

§1. ŞIRURI DE NUMERE ÎN $\mathbf{R}^k$

Definiţia 1.1. Se numeşte şir de numere în $\mathbf{R}^k$, o aplicaţie a mulţimii $\mathbf{N}$ în $\mathbf{R}^k$.

Notăm valorile acestei aplicaţii prin $f(n) = a_n$, $n \in \mathbf{N}$.

Exemplu.

$$(a_n)_{n\in \mathbf{N}}, \quad a_n = \left(\sin \frac{n\pi}{2}, \quad \frac{(-1)^n}{n}\right)$$

$n \in \mathbf{N}$ este un şir de numere în $\mathbf{R}^2$.

Definiţia 2.1. Şirul $(a_n)_{n\in \mathbf{N}}$, $a_n \in \mathbf{R}^k$ se numeşte *convergent*, dacă există $a_0 \in \mathbf{R}^k$ astfel ca pentru orice $\varepsilon > 0$ să existe $N(\varepsilon)$ pentru care:

$$\|a_n - a_0\| < \varepsilon \text{ cînd } n > N(\varepsilon).$$

Scriem în acest caz $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a_0$.

Observaţie: 1. Pentru $k = 1$, $\|\ \| = |\ |$ şi definiţia convergenţei unui şir devine: şirul $(a_n)_{n\in \mathbf{N}}$, $a_n \in \mathbf{R}$ este convergent către $a_0 \in \mathbf{R}$ dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există $N(\varepsilon)$ astfel încît $|a_n - a_0| < \varepsilon$ pentru $n > N(\varepsilon)$.

2. Din expresia normei $\|a_n - a_0\|$, unde $a_n = (a_n^1, a_n^2, \ldots, a_n^k)$, $a_0 = (a_0^1, a_0^2, \ldots, a_0^k)$, rezultă

$$|a_n^i - a_0^i| \le \sqrt{\sum_{i=1}^{k} (a_n^i - a_0^i)^2} = \|a_n - a_0\| \le \sum_{i=1}^{k} |a_n^i - a_0^i|.$$

Din această dublă inegalitate se vede că un şir de numere în $\mathbf{R}^k$ este convergent dacă şi numai dacă şirurile componente $(a_n^i)_{n\in \mathbf{N}}$, $i = 1, 2, \ldots, k$ sînt convergente.

Mulţimea valorilor şirului $(a_n)_{n\in \mathbf{N}}$, $a_n \in \mathbf{R}^k$ este mulţimea $A = \{a_n, n \in \mathbf{N}\}$ care poate fi o mulţime mărginită sau nemărginită.

Definiţia 2.2. Şirul $(a_n)_{n\in \mathbf{N}}$, $a_n \in \mathbf{R}^k$ este divergent dacă este îndeplinită condiţia: oricare ar fi $A > 0$ există $N(A)$ astfel încît pentru $n > N(A)$,

$|a_n| \le A$. Legătura între şirurile mărginite şi şirurile convergente este dată de:

Teorema 1.1. Orice şir convergent este mărginit.

Demonstraţie. Fie $(a_n)_{n\in N}$, $a_n \in \mathbf{R}^k$ şi $\lim_{n\to\infty} a_n = a_0$. Atunci, pentru orice $\varepsilon > 0$ există $N(\varepsilon)$ astfel încît $\|a_n - a_0\| < \varepsilon$ pentru $n > N(\varepsilon)$. Să notăm $r = \max\{\varepsilon, \|a_1 - a_0\|, \|a_2 - a_0\|, \dots, \|a_N - a_0\|\}$. În acest caz $\|a_n - a_0\| \le r$, $n = 1, 2, \dots$ şi toţi termenii şirului se găsesc în sfera $B_r(a_0)$ ceea ce arată că şirul este mărginit.

Teorema 2.1. Şirul $(a_n)_{n\in N}$, $a_n \in \mathbf{R}^k$ converge către $a_0 \in \mathbf{R}^k$ dacă şi numai dacă orice vecinătate $V(a_0)$ a punctului a_0 conţine toţi termenii şirului înafara unui număr finit.

Demonstraţie: a) Fie $\lim_{n\to\infty} a_n = a_0$ şi fie $V(a_0)$ o vecinătate oarecare a punctului a_0.

Există $B_\varepsilon(a_0) \subset V(a_0)$ unde $B_\varepsilon(a_0) = \{x : \|x - a_0\| < \varepsilon\}$. Acestui $\varepsilon > 0$ îi corespunde $N(\varepsilon)$ astfel ca din $n > N(\varepsilon)$ rezultă $\|a_n - a_0\| < \varepsilon$ ceea ce înseamnă că $a_n \in V(a_0)$.

b) reciproc: Să presupunem că orice $V(a_0)$ conţine toţi termenii şirului înafara unui număr finit. Fie $\varepsilon > 0$ dat şi $\{x : \|x - a_0\| < \varepsilon\} \subset V$.

Prin definiţie există $N^*(\varepsilon)$ astfel că $a_n \in V$ pentru $n > N^*(\varepsilon)$. Astfel $\|a_n - a_0\| < \varepsilon$ pentru $n > N^*(\varepsilon)$ ceea ce arată că $\lim_{n\to\infty} a_n = a_0$. O definiţie echivalentă, pentru convergenţa unui şir din $\mathbf{R}$ este dată de

Teorema 3.1. Şirul $(a_n)_{n\in N}$, $a_n \in \mathbf{R}$ este convergent dacă şi numai dacă $l = L$.

Demonstraţie: a) Fie $l = L = a_0$. l fiind cel mai mic punct de acumulare, la stînga lui $l - \varepsilon$ se găseşte numai un număr finit de termeni din mulţimea $\{a_n, n = 1, 2, \dots\}$. La fel la dreapta lui $L + \varepsilon$ se găseşte un număr finit de termeni a_n, deci găsim un rang $n_0(\varepsilon)$ astfel încît pentru $n > n_0(\varepsilon)$, $l - \varepsilon < a_n < L + \varepsilon$ ceea ce arată că $|a_n - a_0| < \varepsilon$.

b) Reciproc, dacă $|a_n - a_0| < \varepsilon$ pentru $n > n_0(\varepsilon)$ atunci $a_0 - \varepsilon < a_n < a_0 + \varepsilon$, toţi termenii şirului înafara unui număr finit se găsesc în $(a_0 - \varepsilon, a_0 + \varepsilon)$. Dar l şi L sînt puncte limită şi avem:

$$a_0 - \varepsilon < l \le L < a_0 + \varepsilon$$

unde $L - l < 2\varepsilon$. Cum ε este arbitrar $l = L$.

Definiţia 4.1. Fie un şir $(a_n)_{n\in N}$, $a_n \in \mathbf{R}^k$. Să considerăm succesiunea $n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots$ de numere naturale. Şirul $(a_{n_k})_{k\in N}$ se numeşte subşir al şirului $(a_n)_{n\in N}$.

Am văzut că un şir convergent este mărginit. Reciproca nu este adevărată.

Are loc însă:

Teorema 4.1 (Cesaro). Orice şir mărginit în $\mathbf{R}^k$ conţine un subşir convergent.

Demonstraţie. Fie A mulţimea valorilor şirului mărginit $(a_n)_{n\in N}$, $a_n \subset \mathbf{R}^k$.

Dacă A este finită există un punct $x \in A$ şi un şir $(n_k)_{k\in N}$, $n_1 < n_2 < \ldots$ astfel ca $x_{n_1} = x_{n_2} = \ldots = x$.

Dacă mulţimea A este infinită, fiind mărginită, ea are un punct limită $x_0 \in \mathbf{R}^k$ (teorema lui Bolzano).

Alegem n_1 astfel ca $\|x_{n_1} - x_0\| < 1$ şi $n_2, \ldots, n_i$ astfel ca $\|x_{n_i} - x_0\| < \frac{1}{i}$. (Acest lucru este posibil deoarece vecinătatea oricărui punct limită conţine o infinitate de termeni.)

Exemplu. Şirul $(a_n)_{n\in N}$, $a_n = (-1)^n$. Mulţimea $A = \{-1, 1\}$. Subşirul $-1, -1, \ldots, -1$, converge către $a_0 = -1$.

Definiţia 5.5. Şirul $(x_n)_{n\in N}$, $x \in \mathbf{R}^k$ se numeşte şir Cauchy dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există $n_0(\varepsilon)$ astfel încît pentru $n > n_0(\varepsilon)$ şi $p \geq 1$,

$$\|x_{n+p} - x_n\| < \varepsilon.$$

Legătura între şirurile Cauchy şi şirurile convergente este dată de:

Teorema 5.7. Condiţia necesară şi suficientă ca un şir $(a_n)_{n\in N}$, $a_n \in \mathbf{R}^k$ să fie convergent este ca el să fie şir Cauchy.

Demonstraţie. 1) Şirul $(a_n)_{n\in N}$ este convergent deci pentru orice $\varepsilon > 0$, există $n_0(\varepsilon)$ astfel ca pentru $n > n_0(\varepsilon)$, $\|a_n - a_0\| < \varepsilon$ şi pentru $p \geq 1$, $\|a_{n+p} - a_0\| < \varepsilon$.

Dar $\|a_{n+p} - a_n\| \leq \|a_{n+p} - a_0\| + \|a_n - a_0\| < 2\varepsilon$ ceea ce arată că $(a_n)_{n\in N}$ este un şir Cauchy.

2. Reciproc, şirul $(a_n)_{n\in N}$ este şir Cauchy. Deci $\|a_{n+p} - a_n\| < \varepsilon$ pentru $n > n_0(\varepsilon)$. Trecînd la componente rezultă că

$$|a^i_{n+p} - a^i_n| < \varepsilon \quad \text{pentru} \quad n > n_0(\varepsilon) \text{ şi } i = 1, 2, \ldots, k.$$

Luînd $n = n_0(\varepsilon) + 1 > n_0(\varepsilon)$,

$$|a^i_{n_0+1+p} - a^i_{n_0+1}| < \varepsilon$$

deci în afara termenilor $a^i_1, a^i_2, \ldots, a^i_{n_0}$ toţi termenii se găsesc în intervalul

$$(a^i_{n_0+1} - \varepsilon,\ a^i_{n_0+1} + \varepsilon)$$

La fel $l, L \in [a^i_{n_0+1} - \varepsilon,\ a^i_{n_0+1} + \varepsilon]$ deci $0 \leq L - l \leq 2\varepsilon \Rightarrow l = L$ ceea ce arată că toate şirurile componente sînt convergente, deci şirul $(a_n)_{n\in N}$ este convergent.

Observaţie. În general într-un spaţiu liniar oarecare nu orice şir Cauchy este convergent. Un spaţiu metric oarecare (E, d) în care un şir Cauchy este convergent se numeşte *metric complet*. Astfel $(\mathbf{R}^k, \|\cdot\|)$ este un spaţiu complet. Mai general are loc

Definiţia 6.5. Un spaţiu normat complet se numeşte *spaţiu Banach*.

Definiţia 7.5. Un spaţiu Banach în care norma este dată de un produs scalar este un spaţiu Hilbert.

Din cele studiate în cap. I rezultă că $\mathbf{R}^n$ este un spațiu Hilbert (considerînd norma euclidiană).

Definiția 6.1. Un șir $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$, $a_n \in \mathbf{R}$ se numește șir crescător (descrescător) dacă $a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_n \ldots$ ($a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq a_n \geq \ldots$) și strict crescător (strict descrescător) dacă $a_1 < a_2 < \ldots < a_n < \ldots$ ($a_1 > a_2 > \ldots > a_n > \ldots$).

Teorema 6.1. Un șir $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$, $a_n \in \mathbf{R}$ monoton și mărginit este convergent.

Demonstrație. Șirul $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ fiind mărginit nu poate avea limite infinite. Arătam că are un singur punct limită.

Presupunem că ar avea 2 puncte limită, $l \neq L$ ($l < L$); să împărțim intervalul (l, L) în trei părți egale și fie $\varepsilon = \frac{L-l}{3}$. Fie n_1 un indice pentru care $a_{n_1} \in (l-\varepsilon, l+\varepsilon)$. Alegem $n_2 > n_1$ astfel ca $a_{n_2} \in (L-\varepsilon, L+\varepsilon)$. (Acest lucru se poate deoarece fiecare din intervalele $(l-\varepsilon, l+\varepsilon)$, $(L-\varepsilon, L+\varepsilon)$ conține o infinitate de termeni). Luăm apoi $n_3 > n_2$ astfel ca $a_{n_3} \in (l-\varepsilon, l+\varepsilon)$. Să presupunem că șirul este crescător. Am obținut pentru $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$, că $a_{n_1} < a_{n_2}$ și $a_{n_2} > a_{n_3}$ ceea ce contrazice ipoteza de monotonie (fig. 6).

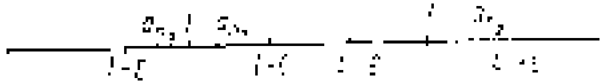

Fig. 6

În legătură cu șirurile nemărginite are loc:

Teorema 7.1. Un șir monoton și nemărginit de elemente din $\mathbf{R}$ este divergent.

Demonstrație. Fie șirul $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$, $a_n \in \mathbf{R}$ șir monoton crescător, nemărginit superior. Pentru orice $A > 0$, există n_0 astfel că $a_{n_0} > A$. Deoarece șirul este crescător urmează că pentru orice $n > n_0$, $a_n > a_{n_0} > A$ deci șirul are limita $+\infty$.

Exemple:

1. Șirul $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ este un șir monoton și mărginit.

Scriem:

$$a_n = 1 + C_n^1 \cdot \frac{1}{n} + C_n^2 \cdot \frac{1}{n^2} + \ldots + C_n^k \frac{1}{n^k} + \ldots + C_n^n \frac{1}{n^n} =$$

$$= 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \ldots + \frac{1}{k!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) \ldots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) + \ldots$$

$$\ldots + \frac{1}{n!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) \ldots \left(1 - \frac{n-1}{n}\right)$$

$$a_n < 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{k!} + \dots + \frac{1}{n!} < 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots$$

$$\dots + \frac{1}{2^{n-1}} = 1 + \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} = 1 + 2 - \frac{1}{2^{n-1}} < 3.$$

Din forma desfăşurată a lui a_n, rezultă $a_n < a_{n+1}$, deoarece $1 - \frac{1}{n} < 1 - \frac{1}{n+1}$.

De asemenea $a_n > 2$ deoarece $\left(1 - \frac{k}{n}\right) > 0$ cînd $k < n$.

Astfel şirul $(a_n)_{n \in N}$ este monoton crescător şi mărginit, deci convergent. Limita lui o notăm cu e.

2. Şirul $b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$ este monoton descrescător.

$$\frac{b_n}{b_{n-1}} = \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}}{\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^n} = \left(\frac{1 + \frac{1}{n}}{1 + \frac{1}{n-1}}\right)^n \cdot \frac{n+1}{n}$$

$$= \left(\frac{n^2 - 1}{n^2}\right)^n \cdot \frac{n+1}{n} = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n^2 - 1}\right)^n} \cdot \frac{n+1}{n}$$

Din inegalitatea lui Bernoulli:

$$\left(1 + \frac{1}{n^2 - 1}\right)^n > 1 + \frac{n}{n^2 - 1} > 1 + \frac{1}{n}, \text{ rezultă}$$

$$\frac{b_n}{b_{n-1}} < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-1} \cdot \frac{n+1}{n} = 1$$

Operaţii cu şiruri în R^k

Fie $(a_n)_{n \in N}$ şi $(b_n)_{n \in N}$ şiruri convergente în R^k, $a_n = (a_{n_1}, a_{n_2}, \dots, a_{n_k})$, $b_n = (b_{n_1}, b_{n_2}, \dots, b_{n_k})$ şi a_0, b_0 limitele lor.
Are loc

Teorema 8.1. Suma şirurilor $(a_n)_{n \in N}$ şi $(b_n)_{n \in N}$, $a_n \in R^k$, $b_n \in R^k$ are ca limită pe $a_0 + b_0$.

Demonstrație. Pentru orice $\varepsilon > 0$ există $n_1(\varepsilon)$ astfel ca $|a_n - a_0| < \varepsilon$ pentru $n > n_1(\varepsilon)$ și există $n_2(\varepsilon)$ astfel ca $|b_n - b_0| < \varepsilon$ pentru $n > n_2(\varepsilon)$. Alegem $n_\varepsilon = \max(n_1(\varepsilon), n_2(\varepsilon))$ și avem pentru $n > n_\varepsilon$,

$$|(a_n + b_n) - (a_0 + b_0)| \leq |a_n - a_0| + |b_n - b_0| < 2\varepsilon.$$

În cazul în care $(a_n)_{n \in N}$ și $(b_n)_{n \in N}$ sînt șiruri în $\mathbf{R}$ are loc

Teorema 9.7. a) Produsul șirurilor convergente $(a_n)_{n \in N}$ și $(b_n)_{n \in N}$ se definește ca fiind șirul $(a_n \cdot b_n)_{n \in N}$ care are ca limită pe $a_0 \cdot b_0$.

b) Cîtul șirurilor $(a_n)_{n \in N}$ și $(b_n)_{n \in N}$, $b_n \neq 0$ este prin definiție șirul $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)_{n \in N}$. Dacă $b_0 \neq 0$, șirul $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)_{n \in N}$ are ca limită pe $\frac{a_0}{b_0}$.

Demonstrație.

a) $|a_n b_n - a_0 b_0| = |a_n b_n - a_0 b_n + a_0 b_n - a_0 b_0| \leq |b_n| \, |a_n - a_0| + |a_0| \, |b_n - b_0|$. Dar $a_n \to a_0$ și $b_n \to b_0$ deci pentru orice $\varepsilon > 0$, există $n_0(\varepsilon)$ astfel încît pentru $n > n_0(\varepsilon)$, $|a_n - a_0| < \varepsilon$, $|b_n - b_0| < \varepsilon$. Șirul $(b_n)_{n \in N}$ este convergent deci este și mărginit și există M astfel ca $|b_n| \leq M$.

Rezultă $|a_n b_n - a_0 b_0| \leq (M + |a_0|)\varepsilon$ pentru $n > n_0(\varepsilon)$.

b) $$\left|\frac{a_n}{b_n} - \frac{a_0}{b_0}\right| = \frac{|a_n b_0 - a_0 b_n + a_0 b_0 - a_0 b_0|}{|b_n b_0|} = \frac{|b_0(a_n - a_0) - a_0(b_n - b_0)|}{|b_n b_0|} \leq$$
$$\leq \frac{|a_n - a_0|}{|b_n|} + \frac{|a_0|}{|b_n b_0|} \cdot |b_n - b_0|.$$

Șirurile $(a_n)_{n \in N}$ și $(b_n)_{n \in N}$ fiind convergente rezultă că pentru orice $\varepsilon > 0$ există $n_1(\varepsilon)$, $n_2(\varepsilon)$ astfel ca $|a_n - a_0| < \varepsilon$ pentru $n > n_1(\varepsilon)$ și $|b_n - b_0| < \varepsilon$ pentru $n > n_2(\varepsilon)$. Șirul $(\tilde{b}_n)_{n \in N}$ fiind convergent este și mărginit deci

$$\left|\frac{a_n}{b_n} - \frac{a_0}{b_0}\right| \leq M\left(1 + \left|\frac{a_0}{b_0}\right|\right)\varepsilon$$

ceea ce arată convergența șirului cît.

§2. SERII NUMERICE ÎN $\mathbf{R}^k$

Fie șirul $(a_n)_{n \in N}$ de elemente din $\mathbf{R}^k$ și $s_1 = a_1$, $s_2 = a_1 + a_2$, ..., $s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$, ...

Șirul $(s_n)_{n \in N}$ se numește șirul sumelor parțiale pentru seria $\sum_{1}^{\infty} a_n$.

Definiția 1.2. Seria $a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$ este convergentă (divergentă) după cum șirul $(s_n)_{n \in N}$ este convergent (divergent).

Mai mult chiar, vom spune că suma seriei este limita șirului sumelor parțiale.

Ne aşteptăm astfel ca o serie de rezultate cunoscute de la şiruri de numere să le folosim pentru studiul seriilor de numere.

Teorema 1.2. (Criteriul general al lui Cauchy). Seria $\sum_{1}^{\infty} a_n$, $a_n \in \mathbf{R}^k$ converge atunci şi numai atunci cînd pentru orice $\varepsilon > 0$ există $N(\varepsilon)$ astfel ca

$$\left\| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k \right\| < \varepsilon, \quad n > N(\varepsilon), \; p \geq 1.$$

Demonstraţia rezultă din Criteriul lui Cauchy pentru şirul $(s_n)_{n \in \mathbf{N}}$ deoarece $\|s_{n+p} - s_n\| = \|a_{n+1} + \ldots + a_{n+p}\| < \varepsilon$ cînd $n > N(\varepsilon)$, $p \geq 1$.

În cazul particular $p = 1$ se obţine

$$\|a_{n+1}\| < \varepsilon, \quad n > N(\varepsilon)$$

Are loc

Consecinţa. Dacă seria $\sum_{1}^{\infty} a_n$, $a_n \in \mathbf{R}^k$ este convergentă atunci $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$.

Aceasta reprezintă o condiţie necesară de convergenţă. Condiţia nu este şi suficientă.

Astfel seria $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\left(1 - \frac{1}{n} \right)^n, \frac{1}{n} \right)$ nu este convergentă deoarece

$$\lim_{n \to \infty} \left(\left(1 - \frac{1}{n} \right)^n, \frac{1}{n} \right) = \left(\frac{1}{e}, 0 \right) \text{ sau încă } \lim_{n \to \infty} \|a_n\| = \frac{1}{e} \neq 0.$$

Am văzut că studiul convergenţei unui şir de elemente din $\mathbf{R}^k$ se reduce la studiul convergenţei componentelor sale.

Criterii pentru serii cu termeni pozitivi

Vom prezenta în continuare criterii suficiente de convergenţă pentru seriile în $\mathbf{R}$.

O serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n \in \mathbf{R}$ este o serie cu termeni pozitivi dacă are o infinitate de termeni pozitivi şi numai un număr finit de termeni negativi.

Criteriul monotoniei. O serie cu termeni pozitivi este convergentă dacă şi numai dacă şirul sumelor parţiale este mărginit.

Demonstraţie. Şirul sumelor parţiale $(s_n)_{n \in \mathbf{N}}$, $s_n \in \mathbf{R}^+$ este monoton. Dacă este şi mărginit atunci este convergent.

Criteriul de comparaţie. Dacă $\sum_{1}^{\infty} a_n$, $a_n \in \mathbf{R}$ este o serie cu termeni pozitivi şi $a_n \leq b_n$, unde $\sum_{1}^{\infty} b_n$ este o serie convergentă atunci $\sum_{1}^{\infty} a_n$ este convergentă.

Dacă $b_n \geq a_n \geq 0$ şi seria $\sum_1^\infty a_n$ este divergentă atunci seria $\sum_1^\infty b_n$ este divergentă.

Demonstraţie. Din criteriul lui Cauchy rezultă că $b_{n+1} + \ldots + b_{n+p} < \varepsilon$ pentru $\varepsilon > 0$ şi $n > n_0(\varepsilon)$, dacă $\sum_1^\infty b_n$ este o serie cu termeni pozitivi. Dar $a_{n+1} + \ldots + a_{n+p} \leq b_{n+1} + \ldots + b_{n+p} < \varepsilon$.

Dacă seria $\sum_1^\infty a_n$ este divergentă criteriul lui Cauchy nu se aplică deci există $\varepsilon > 0$ şi $n > n_0(\varepsilon)$ astfel ca

$$a_{n+1} + \ldots + a_{n+p} > \varepsilon.$$

Deoarece $b_{n+1} + \ldots + b_{n+p} > a_{n+1} + \ldots + a_{n+p}$ rezultă că seria $\sum_1 b_n$ este divergentă.

Observaţie. O formă a criteriului comparaţiei folosită cu succes în practică este următoarea: Dacă $\sum_1^\infty a_n$ şi $\sum_1^\infty b_n$ sînt 2 serii de numere pozitive astfel ca

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lambda, \quad \lambda \neq 0, \infty$$

atunci seriile $\sum_1^\infty a_n$ şi $\sum_1^\infty b_n$ au aceeaşi natură.

Această afirmaţie rezultă din inegalitatea:

$$\left|\frac{a_n}{b_n} - \lambda\right| < \varepsilon \text{ sau } (\lambda - \varepsilon)\, b_n < a_n < (\lambda + \varepsilon)\, b_n$$

şi criteriul de comparaţie.

Exemplu. Seria $\sum_1^\infty 2^n \sin \dfrac{1}{3^n}$ are aceeaşi natură cu seria $\sum_1^\infty \left(\dfrac{2}{3}\right)^n$ care este convergentă.

Un alt criteriu de comparaţie este:

Criteriul de condensare al lui Cauchy.

Fie $a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq 0$ termenii unei serii $\sum_1^\infty a_n$. Seria $\sum_1^\infty a_n$ este convergentă sau divergentă în acelaşi timp cu seria $\sum_1^\infty 2^k a_{2^k}$.

Demonstraţie. Notăm $s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ şi $t_k = a_1 + 2a_2 + \ldots + 2^k a_{2^k}$.

Pentru $n < 2^k$, $s_n \leq a_1 + (a_2 + a_3) + \ldots + (a_{2^k} + \ldots + a_{2^{k+1}-1}) \leq a_1 + 2a_2 + \ldots + 2^k a_{2^k} = t_k$, şi deci $s_n \leq t_k$.
Pentru $n \geq 2^k$:

$$s_n \geq a_1 + a_2 + (a_3 + a_4) + \ldots + (a_{2^{k-1}+1} + \ldots + a_{2^k}) \geq$$

$$\geq \frac{a_1}{2} + a_2 + 2a_4 + \ldots + 2^{k-1} a_{2^k} = \frac{t_k}{2}$$

şi deci $s_n \geq \frac{t_k}{2}$.

Aceasta arată că cele 2 şiruri de sume parţiale sînt în acelaşi timp mărginite sau nemărginite.

Exemple 1) Seria lui Riemann $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ are aceeaşi natură cu seria $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k \frac{1}{(2^k)^\alpha} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2^{\alpha-1})^k}$. Această serie este o progresie geometrică convergentă pentru $\frac{1}{2^{\alpha-1}} < 1$ şi divergentă pentru $\frac{1}{2^{\alpha-1}} \geq 1$. De aici rezultă că seria lui Riemann este convergentă pentru $\alpha > 1$ şi divergentă pentru $\alpha \leq 1$.

2) Seria Bertrand $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln^\alpha n)}$ are aceeaşi natură cu seria $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{2^k(\ln 2^k)^\alpha} = \frac{1}{(\ln 2)^\alpha} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$. Aceasta este însă o serie Riemann convergentă pentru $\alpha > 1$ şi divergentă pentru $\alpha \leq 1$.

Criteriul lui D'Alembert. Dacă pentru o serie cu termeni pozitivi $a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$, $a_k \in \mathbb{R}$

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$$

seria este convergentă, iar dacă

$$\underline{\lim} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$$

seria este divergentă.

Demonstraţie. $\overline{\lim_{n \to \infty}} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1 \Rightarrow$ există N_0 astfel încît $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q < 1$, $n \geq N_0$.
Urmează că:

$$a_{N_0+1} \leq q a_{N_0},\ a_{N_0+2} \leq q a_{N_0+1} \leq q^2 a_{N_0}, \ldots, a_{N_0+p} \leq q^p a_{N_0}$$

Deci $a_{N+p+1} \leqslant q^p a_{N+1}$ şi deoarece seria $\sum_{p=1}^{\infty} q^p$ este convergentă pentru $q < 1$ rezultă că $\sum_{1}^{\infty} a_n$ este convergentă.

La fel dacă $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1 \rightarrow$ există N_0 astfel ca pentru $n > N_0$, $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geqslant$
$\geqslant q > 1$.
Deci

$$a_{N+2} \geqslant q a_{N+1}, \ldots, a_{N+p} \geqslant q a_{N+p-1}$$

şi în general

$$a_{N+p} \geqslant q^{p-1} a_{N+1}.$$

În baza criteriului comparaţiei şi, pentru $q > 1$ seria este convergentă deoarece $\sum_{1}^{\infty} q^{p-1}$ este divergentă.

Criteriul lui Cauchy. Dacă pentru seria cu termeni pozitivi $\sum_{1}^{\infty} a_n$, $a_n \in \mathbf{R}$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} < 1 \qquad \text{seria este convergentă}$$

şi dacă

$$\lim \sqrt[n]{a_n} > 1 \qquad \text{seria este divergentă.}$$

Demonstraţie. Dacă $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} < 1$ atunci există N_0 şi $0 < k < 1$ astfel ca $\sqrt[n]{a_n} \leqslant k$ pentru $n > N_0 \Rightarrow a_n \leqslant k^n$ şi deci $a_{N_0+1} \leqslant k^{N_0+1}, a_{N_0+p} \leqslant k^{N_0+p}$. Dar $\sum_{1}^{\infty} k^{N+p}$ este convergentă pentru $k < 1$. Astfel $\sum_{1}^{\infty} a_n$ este convergentă.
Dacă $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{a_n} > 1$ atunci există N_1 şi $k > 1$ astfel ca $\sqrt[n]{a_n} \geqslant k > 1$ pentru $n >$
$> N_1$ de unde rezultă $a_n \geqslant k^n$ pentru $n > N_1$.

Fie $n = N_1 + p$. Atunci $a_{N_1+p} \geqslant k^{N_1+p}$ şi cum seria $\sum_{1}^{\infty} k^{N_1+p}$ este divergentă rezultă că seria $\sum_{1}^{\infty} a_n$ este divergentă.

Exemplu. Seria $\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^5} + \ldots$ are $\overline{\lim} \sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{2}$ şi $\underline{\lim} \sqrt[n]{a_n} =$
$= \frac{1}{3}$ şi deci seria este convergentă.

Criteriul lui Raabe-Duhamel. Dacă pentru seria $\sum_{1}^{\infty} a_n$, $a_n \in \mathbf{R}^+$

a) $\lim\limits_{n\to\infty} n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) = \lambda > 1$

seria este convergentă şi dacă

b) $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = \alpha < 1$

seria este divergentă.

Demonstraţie. a) Din ipoteză rezultă că pentru orice $\varepsilon > 0$ există $n_0(\varepsilon)$ astfel ca pentru $n \geq n_0(\varepsilon)$,

$$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) > 1 + \rho - \varepsilon, \text{ unde } \lambda = 1 + \rho,\ \rho > 0$$

sau încă

$$a_{n+1}(\rho - \varepsilon) < n a_n - (n+1) a_{n+1},\ \rho > \varepsilon.$$

Rezultă $na_n - (n+1)a_{n+1} > 0$; deci şirul na_n este monoton descrescător şi mărginit inferior de zero.

Seria de termen general $(na_n - (n+1)a_{n+1})$, are şirul sumelor parţiale $s_n = a_1 - na_n$ cu $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = a_1 - l$, $l = \lim\limits_{n\to\infty} na_n$.

De asemenea,

$$a_{n+1} < \frac{1}{\rho - \varepsilon}\left[na_n - (n+1)a_{n+1}\right]$$

şi cum seria $\sum\limits_{1}^{\infty} (na_n - (n+1)a_{n+1})$ este convergentă rezultă că $\sum\limits_{1}^{\infty} a_n$ este convergentă.

Pentru divergenţă, demonstraţia este asemănătoare. O lăsăm ca un exerciţiu pentru cititor.

Exemplu. Seria $\sum\limits_{1}^{\infty} \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2}$ este o serie cu termeni pozitivi pentru care criteriul raportului dă:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+2)!\, 4^n (n!)^2}{4^{n+1}[(n+1)!]^2 (2n)!} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+1)(2n+2)}{4(n+1)^2} = 1;$$

deci criteriul nu se aplică.

Criteriul lui Raabe şi Duhamel conduce la

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{2(n+1)}{2n+1} - 1\right) = \frac{1}{2}$$

şi deci seria este divergentă.

Serii cu termeni oarecare

O serie $a_1 + a_2 + ... + a_n + ...$, $a_n \in \mathbb{R}$ este o serie cu termeni oarecare dacă are o infinitate de termeni pozitivi şi o infinitate de termeni negativi.

Considerăm seria $|a_1| + |a_2| + ... + |a_n| + ...$

Definiţia 2.2. Spunem că seria $\sum_1^\infty a_n$ este *absolut convergentă* dacă seria $\sum_1^\infty |a_n|$ este convergentă.

În caz contrar seria se numeşte simplu convergentă sau semiconvergentă.
Are loc

Teorema 2.2. Dacă o serie este absolut convergentă ea este şi semiconvergentă.

Demonstraţie. Folosim criteriul general al lui Cauchy. Dacă $\sum_1^\infty |a_n|$ este convergentă atunci pentru orice $\varepsilon > 0$ există $n_0(\varepsilon)$ astfel încât pentru $n > n_0(\varepsilon)$ şi $p > 1$,

$$|a_{n+1}| + |a_{n+2}| + ... + |a_{n+p}| < \varepsilon.$$

Dar:

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + ... + a_{n+p}| \le |a_{n+1}| + ... + |a_{n+p}|$$

ceea ce demonstrează că seria este şi semiconvergentă.

Pentru a studia convergenţa absolută se aplică criteriile de convergenţă de la serii cu termeni pozitivi.

Vom stabili în continuare criterii de convergenţă simplă.

Teorema 3.2. (Criteriul lui Abel). Fie seria cu termeni oarecare

$$u_1 + u_2 + ... + u_n + ...$$

pentru care şirul sumelor parţiale $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este mărginit. Dacă $a_1, a_2, ..., a_n, ...$ este un şir de numere pozitive monoton descrescător astfel ca $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ atunci seria

$$a_1u_1 + a_2u_2 + ... + a_nu_n + ...$$

este convergentă.

Demonstraţie. Fie $s_n = a_1u_1 + a_2u_2 + ... + a_nu_n$. Atunci

$$s_{n+p} - s_n = a_{n+1}u_{n+1} + ... + a_{n+p}u_{n+p} = a_{n+1}(t_{n+1} - t_n) + a_{n+2}(t_{n+2} -$$

$$- t_{n+1}) + ... + a_{n+p}(t_{n+p} - t_{n+p-1}),$$

deoarece $u_{n+k} = t_{n+k} - t_{n+k-1}$.

Putem scrie:

$$s_{n+p} - s_n = a_{n+p}t_{n+p} - a_{n+1}t_{n+1} + \sum_{k=1}^{p-1}(a_{n+k} - a_{n+k+1})t_{n+k}$$

Sumele t_n sînt mărginite; deci $|t_n| < M$. Şirul a_n fiind monoton descrescător,

$$a_{n+k} \geq a_{n+k+1}$$

avem:

$$|s_{n+p} - s_n| \leq M(a_{n+p} + a_{n+1}) + M(a_{n+1} - a_{n+p}) = 2a_{n+1}M$$

şi cum $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ rezultă că pentru orice $\varepsilon > 0$ există $N_0(\varepsilon)$ astfel ca $a_n < \varepsilon$ pentru $n > N_0(\varepsilon)$. Deci

$$|s_{n+p} - s_n| \leq 2\varepsilon M$$

şi conform criteriului lui Cauchy seria este convergentă.

Exemplu. Seria $\sum_1^\infty \frac{\sin\frac{n\pi}{4}}{n}$ este simplu convergentă conform criteriului lui Abel deoarece luînd $a_n = \frac{1}{n}$ şi $t_n = \sin\frac{n\pi}{4}$ avem şirul $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in N}$ convergent la zero şi sumele parţiale

$$\sum_1^n \sin\frac{k\pi}{4} = \frac{\sin\frac{(n+1)\pi}{8}\cdot\sin\frac{n\pi}{4}}{\sin\frac{\pi}{8}}$$

mărginite.

Seria nu este absolut convergentă deoarece $\left|\frac{\sin\frac{n\pi}{4}}{n}\right| \geq \frac{\sqrt{2}}{2n}$.

Serii alternate. O serie de forma

(1) $$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \dots + (-1)^{n-1}u_n + \dots$$

cu $u_k > 0$ se numeşte serie alternată.

Teorema 4.2. (Criteriul lui Leibniz). Dacă în seria alternată (1) şirul $(u_n)_{n\in N}$ este monoton descrescător şi are limita zero, seria este convergentă.

Demonstrație. Aplicăm criteriul lui Abel unde $a_n = |u_n|$ și $v_n = (-1)^n$. Seria $\sum_{1}^{\infty}(-1)^n$ are sumele parțiale mărginite iar $\lim_{n\to\infty}|u_n| = 0$.

Operații cu serii

Definiția 5.2. Fie 2 serii de numere: $\sum_{1}^{\infty} a_n$, $\sum_{1}^{\infty} b_n$, $a_n \in \mathbf{R}$, $b_n \in \mathbf{R}$

a) Seria $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$ se numește suma celor 2 serii.

b) Seria $a_1b_1 + (a_1b_2 + b_1a_2) + (a_1b_3 + a_2b_2 + a_3b_1) + \ldots$ se numește seria produs a celor 2 serii.
Are loc

Teorema 5.2. a) Dacă seriile $\sum_{1}^{\infty} a_n$ și $\sum_{1}^{\infty} b_n$ sînt convergente și au sumele S_1 și S_2 seria $\sum_{1}^{\infty}(a_n + b_n)$ este de asemenea convergentă și are suma $S_1 + S_2$.

b) Dacă cele 2 serii converg și cel puțin una dintre ele converge absolut, seria produs este convergentă și suma ei este $S_1 \cdot S_2$.

Demonstrație. a) Se aplică definiția convergenței unei serii.

b) $\sigma_n = \sum_{1}^{n} a_k$, $t_n = \sum_{1}^{n} b_k$, $c_n = \sum_{1}^{n} a_k b_{n-k+1}$ și $s_n = \sum_{1}^{n} c_k$.

Presupunem că seria $\sum_{1}^{\infty} b_n$ converge absolut. Fie

$$M = \sup|\sigma_n|,\ |\sigma_n - \sigma_m| \leqslant |\sigma_n| + |\sigma_m| \leqslant 2M.$$

Pentru $\varepsilon > 0$ dat, există N_0 astfel ca pentru $n > N_0$, $p > 0$

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k\right| \leqslant \varepsilon \text{ și } \sum_{k=N_0}^{\infty} |b_k| \leqslant \varepsilon.$$

Atunci pentru $n \geqslant N_0$,

$$|\sigma_n t_n - s_n| = |(a_2 + \ldots + a_n)\, b_n + (a_3 + \ldots + a_n)\, b_{n-1} + \ldots + a_n b_2| \leqslant$$

$$\leqslant |a_2 + \ldots + a_n| \cdot |b_n| + |a_3 + \ldots + a_n| \cdot |b_{n-1}| + \ldots + |a_n|\, |b_2| \leqslant$$

$$\leqslant 2M(|b_n| + \ldots + |b_{N+1}|) + \varepsilon(|b_2| + \ldots + |b_N|) \leqslant 2M\varepsilon + \varepsilon K,$$

de unde rezultă teorema.
Enunțăm fără demonstrație următoarele

Teorema 6.2. (Dirichlet). Dacă într-o serie absolut convergentă se schimbă ordinea termenilor seria rezultată este tot absolut convergentă.

Teorema 7.2. (Riemann). Într-o serie semiconvergentă se poate schimba ordinea termenilor astfel încît:

1) Seria obţinută să aibă ca sumă un număr dat.

2) Seria obţinută să fie divergentă.

Numărul e.

Prin definiţie $e=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}$. Seria este convergentă deoarece

$$s_n < 1+1+\frac{1}{1\cdot 2}+\dots+\frac{1}{1\cdot 2\dots n} < 1+1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{2^{n-1}} < 3.$$

Teorema 8.2. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e.$

Demonstraţie. Fie $s_n=\sum\limits_{0}^{n}\frac{1}{k!}$, $t_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

$$t_n = 1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\dots$$

$$\dots+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\dots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)$$

Deci $t_n \le s_n$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} t_n \le e$.

Dacă $n > m$,

$$t_n \ge 1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\dots+\frac{1}{m!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\dots\left(1-\frac{m-1}{n}\right).$$

Lăsăm pe m fix şi facem $n\to\infty$. Obţinem

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} t_n \ge 1+1+\frac{1}{2!}+\dots+\frac{1}{m!}$$

astfel:

$$s_m \le \underline{\lim}_{n\to\infty} t_n.$$

Cînd $m\to\infty$, $e \le \underline{\lim}_{n\to\infty} t_n$.

Însumarea seriilor

Calculul sumei seriilor este o problemă care conduce la un rezultat aproximativ.

I. Să considerăm seria $u_1+u_2+\dots+u_n+\dots$ cu termeni pozitivi pentru care presupunem că $\frac{u_{n+1}}{u_n}\le k < 1$ pentru $n \ge N$.

Avem

$$S - S_N = u_{N+1} + u_{N+2} + \ldots \leq u_{N+1}(1 + k + k^2 + \ldots) = \frac{u_{N+1}}{1-k}$$

deci

$$S - S_N \leq \frac{u_{N+1}}{1-k}.$$

Am arătat astfel că eroarea comisă este inferioară cantității din dreapta.

II. Să considerăm seria alternată convergentă

$$u_1 - u_2 + u_3 - \ldots + (-1)^{n-1}u_n + \ldots$$

Avem

$$s = u_1 - (u_2 - u_3) - (u_4 - u_5) - \ldots - (u_{2n} - u_{2n+1}) - \ldots$$

și

$$s = (u_1 - u_2) + (u_3 - u_4) + \ldots + (u_{2n-1} - u_{2n}) + \ldots$$

Deoarece $u_n > u_{n+1}$ obținem: $s < s_{2n+1}$; $s > s_{2n}$.
Dar

$$s_{2n+1} - s_{2n} = u_{2n+1} \text{ și } s_{2n+1} - s_{2n+2} = u_{2n+2}$$

din care obținem:

$$0 < s - s_{2n} < u_{2n+1}$$

$$0 < s_{2n+1} - s < u_{2n+2}$$

Deci

$$0 < (s - s_n)(-1)^n < u_{n+1},$$

ceea ce arată că dacă adunăm un număr finit de termeni într-o serie alternată convergentă eroarea pe care o comitem este inferioară primului termen neglijat.

Rapiditatea de convergență a unei serii

Definiția 4.2. Seria $\sum_{1}^{\infty} u_n$ este mai rapid convergentă decît seria $\sum_{1}^{\infty} v_n$ dacă $\lim_{n\to\infty} \frac{r_n}{R_n} = 0$ unde

$$r_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots \text{ și } R_n = v_{n+1} + v_{n+2} + \ldots$$

și se numesc resturile seriilor.

O condiţie suficientă ca seria $\sum_{1}^{\infty} v_n$ să fie mai rapid convergentă decît seria $\sum_{1}^{\infty} u_n$ este ca

$$\lim_{n\to\infty} \frac{v_n}{u_n} = 0.$$

Pentru demonstraţie a se vedea [24].

Transformarea Euler. Fie

$$u_1 - u_2 + u_3 - \dots + (-1)^{n-1} u_n + \dots$$

o serie convergentă unde u_n sînt strict pozitivi.
Seria

$$\frac{u_1}{2} - \frac{u_2 - u_1}{2} + \frac{u_3 - u_2}{2} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{u_n - u_{n-1}}{2} + \dots$$

este şi ea convergentă şi are aceeaşi sumă cu prima.

Într-adevăr observăm că: $S_n^* - S_n = (-1)^n \frac{u_n}{2} \to 0$ cînd $n \to \infty$.

Exemplu. Seria $\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n} + \dots$ este o serie slab convergentă. Pentru a calcula suma ei cu 3 zecimale exacte luăm în consideraţie 999 de termeni.

Aplicînd transformarea lui Euler se obţine o serie mai rapid convergentă,

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n-1}\right) + \dots$$

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \dots + (-1)^n \frac{1}{n(n-1)} + \dots$$

§ 3. LIMITE DE FUNCŢII ÎN $\mathbf{R}^k$

Fie f o aplicaţie a mulţimii $X \subset \mathbf{R}^k$ cu valori în $\mathbf{R}^m$ şi a_0 un punct de acumulare a mulţimii X.

Definiţia 3.1. Funcţia f are limita l în punctul a_0 dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\eta(\varepsilon, a_0)$ astfel încît:

$$\|f(x) - l\| < \varepsilon \quad \text{pentru } x \in X \text{ cu } \|x - a_0\| < \eta.$$

Notăm $\lim_{x \to a_0} f(x) = l$.

O definiţie echivalentă a limitei unei funcţii într-un punct este dată de

Teorema 1.8. Funcţia f are limita l în punctul a_0 dacă şi numai dacă pentru orice şir $(a_n)_{n\in N}$, $a_n \in X(a_n \neq a_0)$, $a_n \to a_0$ şirul $(f(a_n))_{n\in N}$ are limita l.

Demonstraţie. Presupunem că $\lim\limits_{x\to a_0} f(x) = l$ conform definiţiei.

Fie $(a_n)_{n\in N}$, $a_n \in X$ un şir oarecare pentru care $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a_0$.

Ştim că pentru $\varepsilon > 0$, există $\eta(\varepsilon, a_0)$ astfel încît $\|f(x) - l\| < \varepsilon$ dacă $x \in X$ şi $\|x - a_0\| < \eta$. Cum $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a_0$ rezultă existenţa lui N_1 astfel încît $\|a_n - a_0\| < \eta$, pentru $n > N_1$ şi din existenţa limitei $\|f(a_n) - l\| < \varepsilon$ pentru $n > N_1$ ceea ce arată că $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = l$.

Reciproc, presupunem că pentru orice şir $(a_n)_{n\in N}$ cu $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a_0$, şirul $(f(a_n))_{n\in N}$ are limita l. Vom proceda prin reducere la absurd: presupunem că $\lim\limits_{x\to a_0} f(x) \neq l$. În acest caz există $\varepsilon > 0$ astfel încît pentru orice $\eta > 0$, există $x \in X$ pentru care

$$\|f(x) - l\| > \varepsilon \text{ şi } \|x - a_0\| < \eta.$$

Alegînd pentru η valorile $\eta_n = \frac{1}{n}$, $n = 1, 2, \ldots$ găsim un şir care verifică condiţia $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a_0$ pentru care $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) \neq l$ ceea ce duce la contradicţie.

Exemplu. Funcţia $f(x, y) = \sin(x + y)^{-1}$, $x + y \neq 0$ nu are limită în punctul $(0, 0)$ deoarece pentru şirul $a_n = \left(\frac{1}{2n\pi}, \frac{1}{2n\pi}\right)$ convergent la $(0, 0)$, şirul $f(a_n)$ are limita 0, în timp ce pentru şirul $b_n = \left(\frac{1}{(2n+1)\pi}, \frac{1}{(2n+1)\pi}\right)$ care converge tot către $(0, 0)$, şirul $f(b_n) = \sin(2n + 1)\frac{\pi}{2} = (-1)^n \neq 0$.

Observaţie. Dacă punem $a_0 = (a_{10}, a_{20}, \ldots, a_{p0})$ şi $l = (l_1, l_2, \ldots, l_q)$, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_p)$, $f = (f_1, \ldots, f_q)$ definiţia dată este echivalentă cu

$$\begin{aligned}
\|f_1(x_1, x_2, \ldots, x_p) - l_1\| &< \varepsilon \\
\|f_2(x_1, x_2, \ldots, x_p) - l_2\| &< \varepsilon \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\|f_q(x_1, x_2, \ldots, x_p) - l_q\| &< \varepsilon
\end{aligned}$$

dacă $\|x - a_0\| < \eta(\varepsilon)$ ceea ce arată că o funcţie vectorială are limită într-un punct dacă şi numai dacă fiecare din componentele sale are limită în acel punct. Acest lucru rezultă din inegalitatea

$$\|f_i(x) - l_i\| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{q} (f_i(x) - l_i)^2} \leq \sum_{i=1}^{q} \|f_i(x) - l_i\|.$$

Exemplu. Studiem limita funcției

$$f(x, y) = \frac{2xy}{x^2 + y^2}, \quad (x, y) \in \mathbf{R}^2 - \{(0, 0)\},$$

în punctul $(0, 0)$.

Notăm $x = r \cos\theta$, $y = r \sin\theta$ și calculăm

$$\lim_{r \to 0} \frac{2r^2 \sin\theta \cos\theta}{r^2} = 2 \sin\theta \cos\theta$$

Deoarece valoarea limitei depinde de θ, funcția f nu are limită în punctul $(0, 0)$.

§ 4. CONTINUITATEA FUNCȚIILOR ÎN $\mathbf{R}^n$

Considerăm funcția $f: X \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ și spațiile $\mathbf{R}^n$ și $\mathbf{R}^m$ înzestrate cu metricele euclidiene. În legătură cu continuitatea funcției f avem

Definiția 4.1. Funcția f este continuă în punctul $a_0 \in X$ dacă pentru orice vecinătate V a lui $f(a_0)$ există o vecinătate U a lui a_0 astfel ca $f(U) \subset V$.

În cazul particular în care V este o sferă definiția continuității funcției f în a_0 capătă forma

f este continuă în $a_0 \in X$ dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\eta(\varepsilon, a_0)$ astfel încît $\|f(x) - f(a_0)\| < \varepsilon$ pentru $\|x - a_0\| < \eta$.

f este continuă pe X dacă este continuă în fiecare punct din X.

În legătură cu continuitatea funcțiilor are loc

Teorema 4.1. Funcția $f: X \to \mathbf{R}^m$ este continuă pe X dacă și numai dacă $f^{-1}(O)$ este mulțime deschisă în X oricare ar fi O mulțime deschisă în $f(X)$.

Demonstrație. Presupunem că f este continuă în X și O este deschisă în $f(X)$. Arătăm că $f^{-1}(O)$ este mulțime deschisă, deci că orice punct $p \in f^{-1}(O)$ este punct interior. Dacă $p \in f^{-1}(O)$, $f(p) \in O$ și cum O este deschisă există o sferă

$$B(f(p); \varepsilon) = \{y \mid y \in O, \|y - f(p)\| < \varepsilon\}, \quad B(f(p); \varepsilon) \subset O.$$

Deoarece f este continuă în p, există $\eta(\varepsilon, p)$ astfel încît $\|f(p) - y\| < \varepsilon$ dacă $\|p - x\| < \eta$. Am construit astfel o sferă $B(p, \eta) \subset f^{-1}(O)$ ceea ce arată că p este punct interior pentru mulțimea $f^{-1}(O)$.

Reciproc. Să presupunem că $f^{-1}(O)$ este deschisă în X oricare ar fi O deschisă în $f(X)$. Fie $x \in X$ și V o vecinătate a lui $f(x)$. Atunci $f^{-1}(V)$ este vecinătate a lui x și $f(f^{-1}(V)) \subset V$ ceea ce arată că f este continuă în x.

Dacă x_0 este un punct de acumulare pentru mulțimea X are loc

Teorema 4.2. Dacă $a_0 \in X$ este punct de acumulare pentru mulțimea X, f este continuă în a_0 dacă și numai dacă $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = f(a_0)$ pentru orice șir $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$, $x_n \in X$ cu $\lim_{n \to \infty} x_n = a_0$.

Demonstrație. Presupunem că $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_k) = f(a_0)$ oricare ar fi $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = a_0$. Demonstrăm că f este continuă în a_0 prin reducerea la absurd. Facem ipoteza că f nu este continuă în a_0. Atunci există V a lui $f(a_0)$ căreia nu-i corespunde nici o vecinătate U a lui a_0 pentru care $f(U) \subset V$.

Pentru fiecare $n \in N$ să alegem $x_n \in B\left(a_0; \frac{1}{n}\right)$ (sfera închisă cu centrul în a_0 și de rază $\frac{1}{n}$) astfel că $f(x_n) \notin V$. Atunci, am găsit un șir x_n pentru care $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a_0$ dar $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) \neq f(a_0)$. Această contradicție arată că f este continuă în a_0.

Reciproc, fie f continuă în a_0 și un șir $(x_k)_{k\in N}$ cu $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = a_0$. Fie V o vecinătate a lui $f(a_0)$. Există atunci o vecinătate U a lui a_0 astfel ca $f(U) \subset V$. Deoarece $\lim x_n = a_0$ există $n_0 \in N$ astfel ca pentru $n > n_0$, $x_n \in U$ și deci pentru $n > n_0$, $f(x_n) \in f(U)$, ceea ce arată că f este continuă în a_0.

Consecință: Fie $f = (f_1, f_2, \ldots, f_m)$, $X \subset \mathbf{R}^n$. Funcția $f: X \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ este continuă dacă și numai dacă fiecare din funcțiile reale $f_1, f_2, \ldots, f_m$ este continuă.

Aceasta rezultă din inegalitatea

$$|f_i(x) - f_i(a_0)| \leq \|f(x) - f(a_0)\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} (f_i(x) - f_i(a_0))^2} \leq$$

$$\leq \sum_{i=1}^{m} |f_i(x) - f_i(a_0)|.$$

Pentru a înțelege mai bine continuitatea unei funcții de variabilă vectorială vom defini și noțiunea de continuitate parțială.

Fie $f: X \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ și să considerăm mulțimea

$$X_i = \{x_i \mid x_i \in \mathbf{R};\ (a_1, a_2, \ldots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \ldots, a_n) \in X\}$$

și funcția

$$f_i(x_i) = f(a_1, a_2, \ldots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \ldots, a_n),\ x_i \in X_i.$$

Funcția f_i este o funcție de o variabilă.

Definiția 2.4. Dacă funcția f_i este continuă în punctul $a_i \in X_i$ spunem că f este continuă parțial în raport cu variabila x_i.

Continuitatea funcției f implică continuitatea parțială în raport cu fiecare variabilă. Reciproca nu este adevărată.

Exemplu. Funcția

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2 + y^4}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

este continuă parțial în raport cu variabilele x și y în origine, dar nu este continuă deoarece:

$$\lim_{r\to 0}\frac{r^3\cos\theta\sin^2\theta}{r^2(\cos^2\theta+r^2\sin^4\theta)} = \frac{\sin\theta}{1+\sin^2\theta}\neq 0$$

cînd $\cos\theta = r\sin^2\theta$ adică atunci cînd punctul (x, y) tinde la $(0, 0)$ pe parabola $x = y^2$.

În legătură cu compunerea funcțiilor continue avem:

Teorema 4.3. Fie $f: X\subset \mathbf{R}^p \to Y\subset \mathbf{R}^m$ continuă în $x_0\in X$, și $g: Y\subset\mathbf{R}^m \to Z\subset \mathbf{R}^k$, g continuă în $f(x_0)\in Y$. Funcția $g\circ f$ este continuă în x_0.

Demonstrație. Fie W o vecinătate a lui $g(f(x_0)) = (g\circ f)(x_0)$. Deoarece g este continuă există o vecinătate V a lui $f(x_0)$ astfel încît $g(V)\subset W$. Deoarece f este continuă în x_0, există U o vecinătate a lui x_0 astfel ca $f(U)\subset V$. Am găsit astfel o vecinătate U a lui x_0 pentru care $g\circ f(U) = g(f(U))\subset g(V)\subset W$.

Exemplu: Funcția $f:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^2$ prin

$$f(x, y) = (u, v) = (x^2+y^2, xy)$$

și $g: \mathbf{R}^2 - \{(0, 0)\}\to\mathbf{R}$, $g(u, v) = \frac{v}{u}$ sînt funcții continue pe mulțimile lor de definiție.

Funcția $g\circ f = \frac{xy}{x^2+y^2}$ definită pe $\mathbf{R}^2 - \{(0, 0)\}$ este continuă în orice punct din mulțimea de definiție.

Proprietăți ale funcțiilor continue.

Teorema 4.4. Fie f o funcție definită pe X cu valori în Y continuă și $A\subset X$ o mulțime conexă. În aceste condiții $f(A)$ este conexă.

Demonstrație. Presupunem că $f(A)$ nu este conexă. Există atunci mulțimile deschise O_1 și O_2 astfel încît $f(A)\subset O_1\cup O_2$ și $O_1\cap O_2 = \emptyset$. În acest caz $A\cap f^{-1}(O_1)$ și $A\cap f^{-1}(O_2)$ sînt mulțimi deschise nevide pentru care

$$A\subset (A\cap f^{-1}(O_1))\cup(A\cap f^{-1}(O_2))$$

și

$$(A\cap f^{-1}(O_1))\cap(A\cap f^{-1}(O_2)) = \emptyset.$$

De aici ar rezulta că A nu este conexă.

Teorema 4.5. Fie A conexă și f o funcție continuă definită pe A cu valori în $\mathbf{R}$. Fie $a, b\in f(A)$ cu $a<b$. În aceste condiții pentru orice c, $a<c<b$ există $x_0\in A$ cu $f(x_0) = c$.

Demonstrație. $f(A)$ este conexă și este o submulțime a lui $\mathbf{R}$, deci este un segment.

Această proprietate se numeşte *proprietatea lui Darboux* şi nu o au numai funcţiile continue.

Consecinţă. Fie $f: [a, b] \to \mathbf{R}$, $f(a) \cdot f(b) < 0$. Luînd $\gamma = 0$ rezultă că o funcţie continuă se anulează cînd trece de la valori pozitive la valori negative şi invers.

Teorema 6.4. Dacă $f: X \subseteq \mathbf{R}^n$ este continuă pe X şi X este compactă, atunci $f(X)$ este mulţime compactă.

Demonstraţie. Fie $O = \bigcup_{i \in I} O_i$ o acoperire deschisă a lui $f(X)$. Atunci, $\bigcup_{i \in I} f^{-1}(O_i)$, $O_i \in O$ este o acoperire deschisă a lui X şi cum X este compactă, există o acoperire finită $f^{-1}(O_1), f^{-1}(O_2), \dots, f^{-1}(O_n)$ astfel ca:

$$X = \bigcup_{i=1}^{n} f^{-1}(O_i) = f^{-1}\left(\bigcup_{i=1}^{n} O_i\right).$$

Deci

$$f(X) \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} O_i.$$

Consecinţă. Dacă $f: X \to \mathbf{R}$, X compactă şi f funcţie continuă atunci f este mărginită şi există 2 puncte a, b în X astfel ca

$$f(a) = \sup \{f(x),\ x \in X\}$$

$$f(b) = \inf \{f(x),\ x \in X\}.$$

Demonstraţie. $f(X)$ este o mulţime compactă din $\mathbf{R}$, deci $f(X)$ este închisă şi mărginită. Fie $\alpha = \sup f(X)$, $\beta = \inf f(X)$. Deoarece $f(X)$ este mărginită avem $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$. Din faptul că $f(X)$ este închisă avem $\alpha, \beta \in f(X)$ şi deci $a \in f^{-1}(\{\alpha\})$, $b \in f^{-1}(\{\beta\})$.

Teorema 7.4. Fie f o aplicaţie continuă biunivocă a mulţimii X compacte din $\mathbf{R}^n$ cu valori în $Y \subset \mathbf{R}^m$. Atunci aplicaţia inversă f^{-1} definită pe Y de egalitatea:

$$f^{-1}(f(x)) = x,\quad x \in X$$

este continuă.

Demonstraţie. Este suficient să arătăm că $f(O)$ este mulţime deschisă în Y pentru orice mulţime deschisă O în X.

Să fixăm o asemenea mulţime O, deschisă în X; CO este închisă şi deci este compactă. Urmează că $f(CO)$ este o submulţime compactă a mulţimii Y. Cum f este biunivocă mulţimea $f(O)$ este complementara mulţimii $f(CO)$ deci $f(O)$ este deschisă.

Continuitatea uniformă

Definiţia 8.4. Fie f o aplicaţie a mulţimii $X \subset \mathbf{R}^n$ în mulţimea $Y \subset \mathbf{R}^m$. Spunem că f este uniform continuă pe X dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\eta(\varepsilon) > 0$ astfel ca

$$\| f(x') - f(x'') \| < \varepsilon$$

pentru orice $x', x'' \in X$ pentru care $\| x' - x'' \| < \eta(\varepsilon)$.

Continuitatea uniformă spre deosebire de continuitatea punctuală este o proprietate a funcţiilor pe o mulţime. În continuitatea punctuală η depinde de ε dar şi de punct.

Are loc:

Teorema 8.1 (Heine). O funcţie continuă f definită pe o mulţime compactă $X \subseteq \mathbf{R}^k$ cu valori în $\mathbf{R}^m$ este uniform continuă pe X.

Demonstraţie. Presupunem că funcţia f nu este uniform continuă pe X. Există $\varepsilon > 0$ şi $x', x'' \in X$ astfel încît pentru orice η pentru care $\|x' - x''\| < \eta$ să avem $\|f(x') - f(x'')\| \geq \varepsilon$.

Să dăm lui η valorile succesive:

$\eta = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$ Pentru $\eta = \frac{1}{n}$ există deci punctele x'_n şi x''_n astfel

$$\|x'_n - x''_n\| < \frac{1}{n} \text{ şi } \|f(x'_n) - f(x''_n)\| \geq \varepsilon.$$

Deoarece X este o mulţime compactă se poate extrage din şirul x'_n un subşir $x'_{n_1}, x'_{n_2}, \ldots, x'_{n_k}, \ldots$ convergent către $x_0 \in X$.

Cum $\|x'_{n_k} - x''_{n_k}\| < \frac{1}{n_k}$ avem:

$$\|x''_{n_k} - x_0\| \leq \|x''_{n_k} - x'_{n_k}\| + \|x'_{n_k} - x_0\| \to 0$$

ceea ce arată că subşirul $(x''_{n_k})_{k \in N}$ este convergent către $x_0 \in X$.

Funcţia f este definită şi continuă pentru $x = x_0$ deci fiind $\varepsilon > 0$ dat putem determina $\eta_0 > 0$ astfel încît:

$$\|f(x) - f(x_0)\| < \frac{\varepsilon}{2}$$

cînd $\|x - x_0\| < \eta_0$. Deoarece x'_{n_k} converge la x_0 şi x''_{n_k} converge la x_0 avem:

$$\|x'_{n_k} - x_0\| < \eta_0, \quad \|x''_{n_k} - x_0\| < \eta_0$$

şi

$$\|f(x'_{n_k}) - f(x_0)\| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \|f(x''_{n_k}) - f(x_0)\| < \frac{\varepsilon}{2}$$

de unde

$$\|f(x'_{n_k}) - f(x''_{n_k})\| < \varepsilon$$

ceea ce contrazice ipoteza. Rezultă f uniform continuă.

Exemple. 1. Funcţia f definită prin

$$f(x) = [illegible], \quad x \in (0, 1]$$

nu este uniform continuă deoarece pentru $x'_n = [illegible]$, $x''_n = [illegible]$, avem pentru orice η:

$$\|x'_n - x''_n\| = [illegible] < \eta$$

pentru orice η dacă alegem n convenabil şi în acelaşi timp $\|f(x'_n) - f(x''_n)\| = [illegible]$.

Aceasta arată că $f(x)$ este uniform continuă în $(0, 1)$.

2) Fie $f(x, y) = $ [illegible], $(x, y) \in (1, 2) \times (1, 2)$.

Pentru a arăta că această funcție e uniform continuă scriem:

$$|f(x', y') - f(x'', y'')| = \sqrt{\left(\ldots - \frac{2}{x''+y''}\right)^2 + \left(\ldots - \frac{1}{y''}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\left[\frac{2(\ldots)}{(x'+y')(x''+y'')}\right]^2 + \left[\frac{x'y'' - y'x''}{y'y''}\right]^2}$$

[illegible]

$$\ldots < 2\sqrt{5}\sqrt{(x'' - x')^2 + (y'' - y')^2} < \varepsilon.$$

De aici rezultă $\sqrt{(x'' - x')^2 + (y'' - y')^2} < \frac{\varepsilon}{2\sqrt{5}}$;

deci $\delta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{2\sqrt{5}}$

ceea ce arată că f este uniform continuă pe $(1, 2) \times (1, 2) \subset R^2$.

§ 5. FUNCȚII CU VARIAȚIE MĂRGINITĂ.

Fie f o funcție reală $f: [a, b] \to R$. Diferența $|f(b) - f(a)|$ dă o imagine a modului în care se modifică valorile funcției pe $[a, b]$. Vom încerca să îmbunătățim această evaluare.

Fie $\Delta = (a = x_0 < x_1 < \ldots < x_i < x_{i+1} < \ldots < x_n = b)$ o diviziune a intervalului $[a, b]$ și

$$V_\Delta = \sum_{i=0}^{n-1} |f(x_{i+1}) - f(x_i)|.$$

Numărul V_Δ se numește variația funcției f relativă la diviziunea Δ.

Ce se întîmplă cînd se trece de la o diviziune Δ la alta diviziune Δ', mai fină? În acest sens enunțăm

Teorema 5.1. Dacă Δ' este mai fină decît Δ atunci $V_\Delta \leq V_{\Delta'}$.

Demonstrație. Fie un interval oarecare $[x_i, x_{i+1}]$ din diviziunea Δ. Să presupunem că diviziunea Δ' conține în intervalul $[x_i, x_{i+1}]$ un punct de diviziune x_i'.

Contribuţia lui $[x_i, x_{i+1}]$ în V_Δ este $|f(x_{i+1}) - f(x_i)|$ iar contribuţia lui $[x_i, x_{i+1}]$ în $V_{\Delta'}$ este

$$|f(x_{i+1}) - f(x')| + |f(x') - f(x_i)|.$$

Cum relaţia între ele este:

$$|f(x_{i+1}) - f(x_i)| \leq |f(x_{i+1}) - f(x')| + |f(x') - f(x_i)|$$

rezultă

$$V_\Delta \leq V_{\Delta'}.$$

Deci prin trecerea de la o diviziune la altă diviziune mai fină variaţia lui f creşte sau stă pe loc.

În legătură cu aceasta dăm

Definiţia 2.5. O funcţie reală f, definită pe intervalul compact $[a, b]$ este cu variaţie mărginită pe $[a, b]$ dacă există M real astfel încît pentru orice diviziune Δ a lui $[a, b]$, $V_\Delta < M$.

Marginea superioară a mulţimii $\{V_\Delta\}$ se numeşte variaţia totală a funcţiei pe $[a, b]$ şi se notează $\bigvee_a^b f$.

2 clase de funcţii cu variaţie mărginită sînt indicate de

Teorema 2.5. O funcţie f monotonă şi continuă pe $[a, b]$ este cu variaţie mărginită pe $[a, b]$.

Demonstraţie. Fie f crescătoare pe $[a, b]$ şi $\Delta = (a = x_0 < x_1 < \ldots < x_i < x_{i+1} < \ldots x_n = b)$. Deoarece f este crescătoare rezultă $f(x_i) \leq f(x_{i+1})$. Deci

$$V_\Delta = \sum_{i=0}^{n-1} |f(x_{i+1}) - f(x_i)| = \sum_{i=0}^{n-1} [f(x_{i+1}) - f(x_i)] = f(b) - f(a).$$

Aceasta arată că pentru orice Δ, $V_\Delta \leq M$; deci f este cu variaţie mărginită.

Teorema 2.6. O funcţie f lipschitziană pe $[a, b]$ (adică o funcţie pentru care $(\forall)\ x', x'' \in [a, b]$, $|f(x') - f(x'')| \leq k|x' - x''|$) este cu variaţie mărginită pe $[a, b]$.

Demonstraţie. Fie $\Delta = (a = x_0 < x_1 < \ldots < x_i < x_{i+1} < \ldots < x_n = b)$. Din ipoteză există k astfel că:

$$|f(x_{i+1}) - f(x_i)| \leq k|x_{i+1} - x_i|$$

pentru $i = 0, 1, \ldots, n - 1$; deci

$$V_\Delta = \sum_{i=0}^{n-1} |f(x_{i+1}) - f(x_i)| \leq k \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) = k(b - a)$$

şi f este cu variaţie mărginită pe $[a, b]$.

Funcţiile cu variaţie mărginită au următoarele 2 proprietăţi

Proprietatea 1. Dacă f şi g sînt cu variaţie mărginită pe $[a, b]$, iar α şi β sînt numere reale atunci funcţia $\alpha f + \beta g$ este cu variaţie mărginită pe $[a, b]$.

Demonstraţie. Putem scrie:

$$V_\Delta(\alpha f + \beta g) = \sum_{i=0}^{n-1} |\alpha f(x_{i+1}) + \beta g(x_{i+1}) - [\alpha f(x_i) + \beta g(x_i)]| =$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} |\alpha(f(x_{i+1}) - f(x_i)) + \beta(g(x_{i+1}) - g(x_i))| \le$$

$$\le |\alpha| \sum_{i=0}^{n-1} |f(x_{i+1}) - f(x_i)| + |\beta| \sum_{i=0}^{n-1} |g(x_{i+1}) - g(x_i)| =$$

$$= |\alpha| V_\Delta(f) + |\beta| V_\Delta(g)$$

Proprietatea 2. Dacă f este cu variaţie mărginită pe $[a, b]$ iar $[c, d] \subset [a, b]$ atunci f este cu variaţie mărginită pe $[c, d]$.

Demonstraţie. Fie $\Delta' = (c = x_k < x_{k+1} < \ldots < x_i < x_{i+1} < \ldots < x_{k+p} = d)$ o diviziune a intervalului $[c, d]$ şi fie

$$\Delta = (a = x_0 < x_1 < \ldots < x_k = c < \ldots < x_i < x_{i+1} < \ldots < x_{k+p} = d < \ldots < x_n = b)$$

o diviziune a lui $[a, b]$.
Se poate scrie

$$V_{\Delta'} = \sum_{i=k}^{k+p-1} |f(x_{i+1}) - f(x_i)| \le \sum_{i=0}^{n-1} |f(x_{i+1}) - f(x_i)| = V_\Delta$$

şi cum f este cu variaţie mărginită pe $[a, b]$ rezultă că există M număr real astfel încît $V_\Delta < M$, deci $V_{\Delta'} < M$.

Consecinţă. Dacă f este cu variaţie mărginită pe $[a, b]$ atunci funcţia

$$F(x) = \bigvee_a^x f,$$

este crescătoare pe $[a, b]$.
Are loc

4.5. *Teorema de structură a lui Jordan.* Fiind dată o funcţie reală f cu variaţie mărginită pe $[a, b]$ există 2 funcţii φ şi ψ crescătoare pe $[a, b]$ astfel încît $f = \varphi - \psi$.

Demonstraţie. Funcţia $\varphi(x) = \bigvee_a^x f$, φ este crescătoare pe $[a, b]$. Vom arăta că funcţia $\psi = \varphi - f$ este de asemenea crescătoare pe $[a, b]$. Putem scrie:

$$\psi(x + h) - \psi(x) = \left[\bigvee_a^{x+h} f - f(x + h)\right] - \left[\bigvee_a^x f - f(x)\right] =$$

$$= \left(\bigvee_a^{x+h} f - \bigvee_a^x f\right) - (f(x + h) - f(x)).$$

Dar

$$\bigvee_a^{x+h} f = \bigvee_a^{x} f + \bigvee_x^{x+h} f;$$

deci

$$\varphi(x+h) - \varphi(x) = \bigvee_x^{x+h} f - (f(x+h) - f(x)) \geq 0$$

Consecințe. 1) Dacă f și g sînt cu variație mărginite pe $[a, b]$ atunci $s = f + g$ este cu variație mărginită pe $[a, b]$. Aceasta se vede dacă scriem $f = u - v$ și $g = u^* - v^*$ unde u, v, u^*, v^* sînt funcții monotone pe $[a, b]$. Avem $f + g = (u + u^*) - (v + v^*)$.

2) O funcție cu variație mărginită pe $[a, b]$ este mărginită pe $[a, b]$. Aceasta rezultă din faptul că o funcție cu variație mărginită se scrie ca diferența a 2 funcții monotone pe $[a, b]$ și o funcție monotonă pe un compact este mărginită.

Exemple. 1) Funcția $f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ \ln x, & x \in (0, 1] \end{cases}$ nu este cu variație mărginită deoarece nu este mărginită.

2) Funcția $f(x) = \operatorname{arctg}(1 - x^3)$, $x \in [-1, 1]$ este cu variație mărginită deoarece

$$f'(x) = \frac{-3x^2}{1 + (1 - x^3)^2}$$

este mărginită deci lipschitziană.

§ 6. INTERPOLAREA FUNCȚIILOR

Problema aproximării unei funcții apare în aproape toate cercetările tehnice. Tehnicile de aproximare sînt dintre cele mai diverse; un loc deosebit îl ocupă însă tehnica interpolării funcțiilor. În ce constă această problemă a interpolării?

Să presupunem că se cunosc valorile unei funcții necunoscute în diverse puncte $x_1, x_2, \dots, x_n$. Se cer valorile funcției în alte puncte x, diferite de cele x_i. Să presupunem că funcția de aproximare va fi de forma:

$$g(x; a_1, a_2, \dots, a_n)$$

și că parametrii $a_1, a_2, \dots, a_n$ vor fi determinați din condițiile:

$$\begin{cases} g(x_1; a_1, a_2, \dots, a_n) = y_1 \\ \vdots \\ g(x_n; a_1, a_2, \dots, a_n) = y_n \end{cases}$$

Aceasta este o problemă de *interpolare*. Funcția g poate fi de diferite forme. O bună aproximare este dată de *funcția polinom*. Vom prezenta în continuare

Formula de interpolare a lui Lagrange

Să presupunem că se cunosc valorile $y_0, y_1, \dots, y_n$ ale unei funcţii f definită pe $[a, b] \subset \mathbb{R}$ în punctele $x_0, x_1, \dots, x_n \in [a, b]$.

Se cere să se construiască polinomul $L_n(x)$ de grad egal sau inferior lui n, polinom care să ia în punctele $x_0, \dots, x_n$ valorile $y_0, y_1, \dots, y_n$ adică:

$$L_n(x_i) = y_i, \quad i = 0, 1, \dots, n$$

Vom rezolva problema parţială: construim un polinom $p_i(x)$ astfel ca

$$p_i(x_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & j = i \\ 0, & j \neq i \end{cases}$$

Polinomul căutat se anulează în punctele $x_0, x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n$; deci este de forma:

$$p_i(x) = c_i(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})\dots(x - x_n), \quad i = 0, 1, \dots, n$$

unde c_i sînt constante.

Făcînd $x = x_i$ şi ţinînd seama că $p_i(x_i) = 1$ obţinem

$$c_i(x_i - x_0)(x_i - x_1)\dots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\dots(x_i - x_n) = 1,$$

de unde:

$$c_i = \frac{1}{\prod\limits_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n}(x_i - x_j)}$$

Cu aceste valori ale constantelor obţinem:

$$p_i(x) = \frac{\prod\limits_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n}(x - x_j)}{\prod\limits_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n}(x_i - x_j)}.$$

Căutăm polinomul de interpolare de forma:

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} p_i(x)\, y_i$$

$L_n(x)$ construit astfel verifică condiţiile:

gradul lui $L_n(x)$ este mai mic sau egal cu n.

$$L_n(x_j) = \sum_{i=0}^{n} p_i(x_j)\, y_i = p_j(x_j)\, y_j = y_j, \quad j = 0, 1, \dots, n$$

Dacă ținem seama de expresia polinoamelor $p_i(x)$ obținem

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\dots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\dots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\dots(x_i-x_n)}.$$

Polinomul astfel construit se numește polinomul lui *Lagrange* de interpolare.
Demonstrăm unicitatea polinomului lui Lagrange prin metoda reducerii la absurd.
Fie $L_n^*(x)$ un polinom $L_n(x)$ de grad egal sau inferior cu n și astfel ca

$$L_n^*(x_i) = y_i, \quad i = 0, 1, \dots, n.$$

În această situație polinomul

$$Q_n(x) = L_n(x) - L_n^*(x)$$

de grad egal (sau inferior) cu „n" se anulează în „$n+1$" puncte $x_0, x_1, \dots, x_n$ deci

$$Q_n(x) = 0,$$

de unde rezultă $L_n^*(x) = L_n(x)$.

Evaluarea erorii introdusă de polinomul lui Lagrange

Să notăm

$$\omega_n(x) = \prod_{j=0}^{n}(x-x_j).$$

Atunci:

$$\omega_n'(x) = \sum_{k=0}^{n}\left[\prod_{\substack{j=0\\ j\neq k}}^{n}(x-x_j)\right] \text{ și } \omega_n'(x_k) = \prod_{\substack{j=0\\ j\neq k}}^{n}(x_k-x_j).$$

Cu aceste notații polinomul lui Lagrange se scrie

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n}\frac{f(x_i)\,\omega_n(x)}{\omega_n'(x_i)(x-x_i)}.$$

Pentru a evalua eroarea dată de

$$R_n(x) = f(x) - L_n(x)$$

să presupunem că există $f^{(n+1)}(x)$ și că ea este continuă când $x \in [a, b]$.

Notăm

$$\varphi(x) = f(x) - L_n(x) - K\omega_n(x),$$

K fiind ales din condiția $\varphi(x) = 0$.
Avem

$$K = \frac{f(x) - L_n(x)}{\omega_n(x)}$$

Pentru un asemenea K, funcţia $\varphi(x)$ se anulează în punctele $x_0, x_1, \ldots, x_n$. Aplicând teorema lui Rolle funcţiei φ pe fiecare din aceste intervale obţinem că φ' se anulează în cel puţin n puncte. Continuând raţionamentul de n ori ajungem la concluzia că $\varphi^{(n)}(x)$ se anulează cel puţin într-un punct $\xi \in (\alpha, \beta)$, unde $\alpha = \min(x_0, x_1, \ldots, x_n, x)$ şi $\beta = \max(x_0, \ldots, x_n, x)$. Deoarece

$$\varphi^{(n)}(x) = f^{(n)}(x) - K n!$$

condiţia $\varphi^{(n)}(\xi) = 0$ atrage după sine

$$K = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}.$$

Relaţia $\varphi(x) = 0$ se scrie

$$R_n(x) = f(x) - L_n(x) = \frac{f^{(n)}(\xi)\,\omega_n(x)}{n!}, \quad \xi \in (\alpha, \beta).$$

Exemplu. Să se determine eroarea care se comite când se calculează $\sqrt[3]{67}$ cu ajutorul polinomului lui Lagrange alegând ca puncte de interpolare punctele $x_1 = 64 = 4^3$; $x_2 = 68,921 = 4,1^3$; $x_3 = 74,088 = 4,2^3$; $x_4 = 79,507 = 4,3^3$.

Se ştie că $f(x) - L_4(x) = \dfrac{f^{IV}(\xi) \prod_{i=1}^{4} (x - x_i)}{4!}$, $\quad x_1 < \xi < x_4$.

În acest caz $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$, $f^{IV}(x) = -\dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{5}{3} \cdot \dfrac{7}{3}\, x^{-\frac{11}{3}}$,

$$|f^{IV}(\xi)| = \frac{1 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 7}{3^4} \left| \frac{1}{\xi} \right|^{\frac{11}{3}} < \frac{1 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 7}{3^4} \cdot \frac{1}{4^{11}} < \frac{1}{10^5}.$$

Obţinem:

$$|f(x) - L_4(x)| < \frac{1}{10^5} \cdot \frac{1}{4!} \cdot |(67 - 64)(67 - 68,92)(67 - 74,088)\cdot$$

$$\cdot(67 - 79,507)| < \frac{3 \cdot 189}{4!\,10^5} < \frac{24}{10^5} < \frac{1}{10^4}.$$

Astfel, valoarea numerică a lui $\sqrt[3]{67}$ calculată cu polinomul de interpolare a lui Lagrange este:

$$L_4(67) = p_1(67)\, y_1 + p_2(67)\, y_2 + p_3(67)\, y_3 + p_4(67)\, y_4 =$$

$$= 4p_1(67) + 4,1p_2(67) + 4,2p_3(67) + 4,3p_4(67).$$

Polinomul lui Newton de interpolare

Vom prezenta în continuare o altă formă a polinomului lui Lagrange. Pentru aceasta vom introduce noţiunile de diferenţă finită şi putere generalizată.

Definiția 2.5. Fie $y = f(x)$ și $\Delta x = h$. Expresia

$$\Delta y = f(x + h) - f(x)$$

se numește prima diferență a funcției f.
La fel se definesc diferențele de ordin superior prin relația:

$$\Delta^n y = \Delta(\Delta^{n-1} y), \qquad n = 2, 3 \ldots$$

Astfel

$$\Delta^2 y = \Delta[f(x + \Delta x) - f(x)] = f(x + 2\Delta x) - 2f(x + \Delta x) + f(x).$$

Proprietăți ale operatorului Δ care asociază funcției $y = f(x)$, funcția $y = f(x + \Delta x) - f(x)$:

1) $\Delta(u + v) = \Delta u + \Delta v$

2) $\Delta(\alpha u) = \alpha \Delta u$, $\alpha \in \mathbf{R}$

3) $\Delta^m(\Delta^n u) = \Delta^{m+n} u$.

Definiția 2.6. Se numește putere generalizată „n" a lui x, produsul de n factori

$$x^{[n]} = x(x - h)(x - 2h) \ldots (x - (n - 1)h)$$

Punem $x^{[0]} = 1$.

Diferențele puterii generalizate sînt

$$\Delta x^{[n]} = (x + h)^{[n]} - x^{[n]} =$$

$$= (x + h)x \ldots (x - (n - 2)h) - x(x - h) \ldots (x - (n - 1)h) =$$

$$= x(x - h) \ldots (x - (n - 2)h)\, nh = nhx^{[n-1]},$$

de unde $\Delta x^{[n]} = nhx^{[n-1]}$.

Diferența de ordinul doi este

$$\Delta^2 x^{[n]} = nh\Delta x^{[n-1]} = n(n - 1)h^2 x^{[n-2]}$$

și, în general

$$\Delta^k x^{[n]} = n(n - 1) \ldots (n - k + 1) h^k x^{[n-k]}$$

unde $k = 1, 2, \ldots, n$.

Presupunem sistemul de valori ale funcției dat de:

$$y_i = y(x_i),\ i = 0, 1, \ldots, n \text{ cu } x_i = x_0 + ih.$$

Căutăm polinomul de interpolare de forma:

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + \ldots$$

$$\ldots + a_n(x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_{n-1}).$$

sau,

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0)^{[1]} + a_2(x - x_0)^{[2]} + \dots + a_n(x - x_0)^{[n]}.$$

Calculăm coeficienţii $a_0, a_1, \dots, a_n$ astfel ca $P_n(x_i) = y_i$, $i = 0, 1, \dots, n$. Pentru aceasta este suficient şi necesar ca:

$$\Delta^i P_n(x_0) = \Delta^i y_0, \quad i = 0, 1, \dots, n.$$

Avem:

$$P_n(x_0) = y_0 = a_0$$

$$\Delta P_n = a_1 \cdot 1 \cdot h + a_2 \cdot 2h(x - x_0)^{[1]} + \dots + a_n n h (x - x_0)^{[n-1]} \text{ şi}$$

$$\Delta P_n(x_0) = \Delta y_0 = a_1 h.$$

Deci $a_1 = \Delta y_0 / h$.
Pentru a 2-a diferenţă a lui $P_n(x)$,

$$\Delta^2 P_n(x) = a_2 2! h^2 + a_3 3 \cdot 2 h^2 (x - x_0)^{[1]} + \dots + a_n n(n-1) h^2 (x - x_0)^{[n-2]}.$$

Punînd $x = x_0$,

$$\Delta^2 P_n(x_0) = \Delta^2 y_0 = a_2 2! h^2$$

deci,

$$a_2 = \frac{\Delta^2 y_0}{2! h^2}.$$

În general se arată prin recurenţă că

$$a_i = \frac{\Delta^i y_0}{i! h^i}, \quad i = 0, 1, \dots, n.$$

Înlocuind în expresia lui $P_n(x)$ aceşti coeficienţi obţinem:

$$P_n(x) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{1! h}(x - x_0) + \frac{\Delta^2 y_0}{2! h^2}(x - x_0)(x - x_1) + \dots$$

$$\dots + \frac{\Delta^n y_0}{n! h^n}(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1}).$$

Polinomul $P_n(x)$ se numeşte *polinomul lui Newton*.
Pentru calculul diferenţelor avem relaţiile:

$$\Delta y_i = y_{i+1} - y_i, \quad i = 0, 1, \dots, n - 1,$$

$$\Delta^2 y_i = \Delta y_{i+1} - \Delta y_i, \quad i = 0, 1, \dots, n - 2,$$

. . . .

$$\Delta^k y_i = \Delta^{k-1} y_{i+1} - \Delta^{k-1} y_i, \quad i = 0, 1, \dots, n - k.$$

Exerciţii propuse

1. *Lema lui Stolz*. Dacă $(a_n)_{n\ge 1}$ este un şir de numere oarecare, dacă $(b_n)_{n\ge 1}$ este un şir de numere pozitive strict crescător şi divergent şi dacă

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} = l$$

atunci $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = l$.

Ind. se aplică definiţia limitei unui şir.

2. Să se calculeze

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(\ln 2)^2 + (\ln 3)^2 + \dots + (\ln n)^2}{n^a}, \quad a > 0$$

Ind: se aplică ex. 1.

3. Dacă $(a_n)_{n\ge 1}$ este un şir de numere pozitive şi dacă $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = l$. Să se calculeze folosind acest rezultat.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sqrt[n]{(n+1)(n+2)\dots(2n)}$$

Ind. Se aplică ex. 1 pentru şirul $(\ln a_n)$.

4. Să se arate că şirul de termen general $a_n = \frac{4 - a_{n-1}}{3 - a_{n-1}}$ cu $a_1 = 1$ este monoton şi mărginit. Să i se determine limita. *R*: $l = 2$

5. Să se studieze natura seriilor:

$$\sum_{1}^{\infty} n^2 \ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right), \quad \sum_{1}^{\infty}\left(\sqrt{n^2+1} - n - \frac{k}{n}\right)$$

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{1! + 2! + \dots + (n-2)!}{n!}, \quad \sum_{2}^{\infty}\left(\mathrm{ch}\,\frac{n+1}{n^2+1} - 1\right)$$

6. *Criteriul logaritmic*. Dacă $\sum\limits_{1}^{\infty} a_n$ este o serie cu termeni pozitivi pentru care

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln \frac{1}{a_n}}{\ln n} = l$$

atunci, seria este convergentă pentru $l > 1$ şi divergentă pentru $l < 1$.

Ind. Se aplică definiția limitei unui șir și criteriul comparației.

7. Natura seriei $\sum_{2}^{\infty} \ln n \cdot \ln\left(1 - \frac{2}{n}\right)$

Ind. se aplică ex. 6.

8. Să se studieze convergența simplă și absolută pentru seria

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sqrt{1+n^a}}{n+\sqrt[3]{n^2}}$$

R: Absolut convergentă pentru $a<0$ și simplu convergentă pentru $a<1$.

9. Să se studieze continuitatea funcțiilor

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x+y}{x^2+y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^2+y^2}{\ln(x^2+y^2)}, & x^2+y^2<1,\ (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

10. Să se studieze continuitatea uniformă a funcțiilor

$$f(x) = x^2 \cos\frac{1}{x}, \quad x \in (0, \infty)$$

$$f(x) = \operatorname{arctg}\frac{1+x}{1-x}, \quad x \in (1, \infty)$$

11. Să se stabilească care din următoarele funcții este cu variație mărginită.

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ \sin x \sin\frac{1}{x}, & x \in \left(0, \frac{2}{\pi}\right] \end{cases}$$

$$f(x) = \frac{x}{2} - \frac{x^3}{3}, \quad x \in [-1, 1]$$

CAPITOLUL III

CALCUL DIFERENȚIAL ÎN $\mathbb{R}^n$

§1. DERIVATE PENTRU FUNCȚII DEFINITE ÎN $\mathbb{R}$. FORMULA LUI TAYLOR

Fie $f: X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ și $x_0 \in \mathring{X}$, f continuă în x_0.

Definiția 1.1. Funcția f este derivabilă în punctul $x_0 \in \mathring{X}$ dacă

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \text{ există și este finită.}$$

Notăm limita cu $f'(x_0)$ sau $\dfrac{df(x_0)}{dx}$.

Funcția $f: X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ este derivabilă în $\mathring{X}$ dacă este derivabilă în orice punct din $\mathring{X}$.

Să presupunem că f este derivabilă în $\mathring{X}$ și fie f' derivata sa. Pentru f' se poate pune de asemenea problema derivării ei.

Definiția 2.1. Dacă funcția f' există într-o vecinătate $V(x_0)$ a punctului x_0 și dacă

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0}$$

există, atunci această limită se numește derivata de ordinul doi a funcției f în punctul x_0. O notăm cu $f''(x_0)$ sau $\dfrac{d^2f(x_0)}{dx^2}$.

Prin recurență obținem definiția derivatei de un ordin oarecare „n" a unei funcții.

Definiția 3.1. Dacă funcția f este derivabilă de „$n-1$" ori pe o vecinătate $V(x_0)$ a punctului x_0 și dacă $f^{(n-1)}$ este derivabilă în punctul x_0, atunci

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in V(x_0)}} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(x_0)}{x - x_0} = f^{(n)}(x_0).$$

Derivata de ordin „n" a funcției f se notează $f^{(n)}$ sau $\dfrac{d^nf}{dx^n}$.

Exemple. 1) Funcţia $f(x) = \sin x$, $x \in \mathbf{R}$ admite derivate de orice ordin şi

$$f^{(n)}(x) = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right), \quad n \in \mathbf{N}.$$

2) Dacă $u: X \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ şi $v: X \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ sînt funcţii derivabile de n ori pe X atunci

$$(uv)^{(n)} = u^{(n)}v + C_n^1 u^{(n-1)}v' + \ldots + C_n^k u^{(n-k)}v^{(k)} + \ldots + uv^{(n)}.$$

Această formulă rezultă prin recurenţă. Avem

$$(uv)' = u'v + uv'.$$

Presupunem că

$$(uv)^{(n-1)} = u^{(n-1)}v + C_{n-1}^1 u^{(n-2)}v' + \ldots + C_{n-1}^k u^{(n-k-1)}v^{(k)} +$$
$$+ \ldots + C_{n-1}^{n-1} uv^{(n-1)}$$

şi derivăm această relaţie:

$$(uv)^{(n)} = u^{(n)}v + u^{(n-1)}v' + C_{n-1}^1 u^{(n-1)}v' + C_{n-1}^1 u^{(n-2)}v'' +$$
$$+ \ldots + C_{n-1}^k u^{(n-k)}v^{(k)} + C_{n-1}^k u^{(n-k-1)}v^{(k+1)} + \ldots + C_{n-1}^{n-1} uv^{(n)} =$$
$$= u^{(n)}v + C_n^1 u^{(n-1)}v' + \ldots + \underbrace{(C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1})}_{C_n^k} u^{(n-k)}v^{(k)} + \ldots + uv^{(n)}.$$

Polinomul lui Taylor. Fie $f: (a, b) \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, f derivabilă de n ori în punctul $x_0 \in (a, b)$. Asociem funcţiei f polinomul

$$T_n(x) = f(x_0) + \frac{x - x_0}{1!} f'(x_0) + \ldots + \frac{(x - x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0)$$

numit *polinomul lui Taylor* corespunzător funcţiei f.

Să vedem în ce sens aproximează polinomul Taylor funcţia f.

Să notăm $R_n(x) = f(x) - T_n(x)$, restul polinomului Taylor. Obţinem

$$f(x) = T_n(x) + R_n(x)$$

sau

$$f(x) = f(x_0) + \frac{x - x_0}{1!} f'(x_0) + \ldots + \frac{(x - x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0) + R_n(x).$$

Aceasta se numeşte *formula lui Taylor*.

Ne rămîne să evaluăm restul $R_n(x)$.

Observăm că $\lim\limits_{x \to x_0} T_n(x) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ şi deci $\lim\limits_{x \to x_0} R_n(x) = 0$.

Vom arăta că dacă f are derivată de ordinul n

$$\lim_{x\to x_0} \frac{R_n(x)}{(x-x_0)^n} = 0.$$

Demonstrăm prin inducţie.

Pentru $n = 1$ obţinem $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{R_1(x)}{x-x_0} = \lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)-\dfrac{x-x_0}{1!}f'(x_0)}{x-x_0} =$
$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - f'(x_0) = 0.$

Presupunem că

$$\lim_{x\to x_0} \frac{R_{n-1}(x)}{(x-x_0)^{n-1}} = 0.$$

Calculăm

$$\lim_{x\to x_0} \frac{R_n(x)}{(x-x_0)^n} = \lim_{x\to x_0} \frac{R_n(x)-R_n(x_0)}{g(x)-g(x_0)}$$

unde am notat $g(x) = (x-x_0)^n$ şi am observat că $R_n(x_0) = 0$ şi $g(x_0) = 0$.
Aplicînd teorema lui Cauchy acestui raport există ξ, cu $|\xi - x_0| < |x - x_0|$ astfel ca

$$\lim_{x\to x_0} \frac{R_n(x)}{(x-x_0)^n} = \lim_{x\to x_0} \frac{R_n'(\xi)}{g'(\xi)} =$$

$$= \lim_{x\to x_0} \frac{f'(\xi) - f'(x_0) - \dfrac{\xi - x_0}{1!} f''(x_0) - \dots - \dfrac{(\xi - x_0)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n)}(x_0)}{n(\xi - x_0)^{n-1}} =$$

$$\lim_{x\to x_0} \frac{R^*_{n-1}(\xi)}{n(\xi - x_0)^{n-1}}.$$

Am notat $R^*_{n-1}(\xi)$ expresia de la numărător care observăm că reprezintă restul de ordinul $n-1$ în formula lui Taylor scrisă pentru funcţia f' în punctul ξ. Cînd $x \to x_0$, $\xi \to x_0$ şi, în baza ipotezei de inducţie $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{R^*_{n-1}(\xi)}{n(\xi - x_0)^{n-1}} = 0$.
Ţinînd seama de acest rezultat putem enunţa

Teorema 7.7. Dacă f este de n ori derivabilă în punctul $x_0 \in (a, b)$, există o funcţie φ definită în (a, b) astfel ca

$$\lim_{x\to x_0} \varphi(x) = \varphi(x_0) = 0$$

şi deci pentru orice $x \in X$

$$f(x) = f(x_0) + \frac{x - x_0}{1!} f'(x_0) + \dots + \frac{(x - x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0) + \frac{(x - x_0)^n}{n!} \varphi(x).$$

Demonstrație. Observăm că

$$R_n(x) = \frac{(x-x_0)^n}{n!}\varphi(x)$$

și deci, $\varphi(x) = n!\frac{R_n(x)}{(x-x_0)^n}$. Din cele arătate mai sus rezultă $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x) = 0$. Vom stabili alte forme ale restului în formula lui Taylor.

Presupunem că f este derivabilă de $n+1$ ori pe (a, b). Fie x_0 și x două puncte arbitrare fixate din (a, b) și p un număr natural oarecare.

Luăm restul $R_n(x)$ de forma:

$$R_n(x) = (x-x_0)^p K$$

și atunci formula lui Taylor devine:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{x-x_0}{1!}f'(x_0) + \dots + \frac{(x-x_0)^n}{n!}f^{(n)}(x_0) + (x-x_0)^p K.$$

Definim pe $[a, b]$ o funcție derivabilă astfel:

$$\varphi(t) = f(t) + \frac{x-t}{1!}f'(t) + \dots + \frac{(x-t)^n}{n!}f^{(n)}(t) + (x-t)^p K.$$

Observăm că $\varphi(x) = \varphi(x_0) = f(x)$ și, cum φ este derivabilă pe $(x_0, x) \subset (a, b)$ există, conform teoremei lui Rolle, cel puțin un punct c pentru care $\varphi'(c) = 0$. Dar,

$$\varphi'(t) = \frac{(x-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t) - p(x-t)^{p-1}K.$$

Facem $t = c$ și obținem:

$$K = \frac{(x-c)^{n-p+1}}{n!\,p}f^{(n+1)}(c), \quad c = x_0 + \theta(x - x_0).$$

Înlocuind această valoare în $R_n(x)$,

$$R_n(x) = \frac{(x-x_0)^p(x-c)^{n-p+1}}{n!\,p}f^{(n+1)}(c).$$

Luînd $p = 1$ se obține $R_n(x) = \frac{(x-x_0)(x-c)^n}{n!}f^{(n+1)}(c)$ numit restul în *forma lui Cauchy*.

Pentru $p = n + 1$ obținem

$$R_n(x) = \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c)$$

restul în *forma lui Lagrange*.

În particular, dacă $0 \in (\alpha, \beta)$, formula lui Taylor cu restul lui Lagrange se scrie:

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!} f'(0) + \dots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\theta),$$

unde $0 < \theta < x$ (θ depinde de x şi de n).

Exemplu. Să se calculeze $\sqrt{250}$ cu două zecimale exacte. Să se stabilească eroarea.

Considerăm funcţia $f(x) = \sqrt{x}$, $x > 0$ şi $x_0 = 225$.

$$f'(x) = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}}, \quad f''(x) = -\frac{1}{4} x^{-\frac{3}{2}}, \dots$$

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1}(2n-3)!!}{2^n} x^{-\frac{2n-1}{2}}$$

$$R_n(x) = \frac{(2n-1)!!}{2^{n+1}} \xi^{-\frac{2n+1}{2}} < \frac{(2n-1)!!}{2^{n+1} 15^{2n+1}} < \frac{1}{10^2}$$

deoarece $225 < \xi < 250$. Obţinem $n = 2$. Din formula lui Taylor,

$\sqrt{x} \approx \sqrt{225} + \frac{x-225}{1!} f'(225) + \frac{(x-225)^2}{2!} f''(225)$ şi pentru $x = 250$

$$\sqrt{250} \approx 15 + \frac{25}{2 \cdot 15} - \frac{25^2}{2! \cdot 4 \cdot 15^3} = 15{,}81.$$

Aplicaţii ale formulei lui Taylor

1. Convexitatea şi concavitatea unei curbe

Fie $f: [a, b] \to \mathbf{R}$. Semnul primei derivate ne indică dacă funcţia f este crescătoare sau descrescătoare.

Funcţia f poate creşte însă în moduri diferite.

Astfel: funcţia este crescătoare pe intervalul $[a, b]$ dar graficul ei rămâne sub tangenta la curbă dusă în fiecare punct al ei sau funcţia este descrescătoare pe $[a, b]$ şi graficul se păstrează deasupra tangentei la curbă. În primul caz spunem că f este concavă pe $[a, b]$ şi în al 2-lea caz f este convexă.

Definiţia 1.1. Un punct în care tangenta traversează graficul se numeşte punct de inflexiune.

Derivatele de ordin superior ne dau informaţii asupra acestei comportări a funcţiei.

Presupunem f derivabilă de $n + 1$ ori în (a, b), $x_0 \in (a, b)$ şi $y = f(x_0) + (x - x_0) f'(x_0)$ tangenta la grafic în punctul x_0.

Diferenţa

$$E = f(x_0 + h) - f(x_0) - h f'(x_0), \quad h = x - x_0$$

ne indică poziţia tangentei faţă de grafic (fig. 7 a, fig. 7 b).
Formula lui Taylor conduce la dezvoltarea:

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \frac{h}{1!} f'(x_0) + \ldots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x_0) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)$$

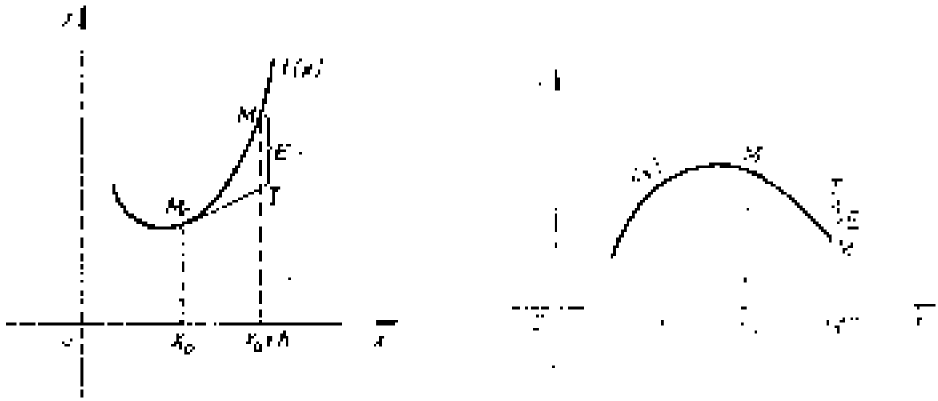

Fig. 7

şi cu aceasta E devine

$$E = \frac{h^2}{2!} f''(x_0) + \frac{h^3}{3!} f'''(x_0) + \ldots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x_0) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi).$$

Dacă $f''(x_0) = f'''(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$, $f^{(n)}(x_0) \neq 0$,

$$E = \frac{h^n}{n!} \left[f^{(n)}(x_0) + \frac{h}{n+1} f^{(n+1)}(\xi) \right].$$

Dacă $f^{(n)}(x_0) > 0$, $n = 2m$, $E > 0$ deci, în vecinătatea punctului x_0 curba este concavă.

Dacă $f^{(n)}(x_0) < 0$, $n = 2m$, $E < 0$ curba este convexă. Pentru $n = 2m + 1$, dacă $f^{(n)}(x_0) > 0$ atunci $E > 0$ pentru $h > 0$ şi $E < 0$ pentru $h < 0$.

Dacă $f^{(n)}(x_0) < 0$, $n = 2m + 1$ atunci $E < 0$ pentru $h > 0$ şi $E > 0$ pentru $h < 0$.

Punctul x_0 este în acest caz un punct de inflexiune. Din următoarea

Definiţia 8.1. Funcţia $f: [a, b] \to \mathbf{R}$ este convexă în $[a, b]$ dacă pentru orice două puncte $x^1, x^2 \in [a, b]$, $x^2 > x^1$ şi orice $t \in [0, 1]$,

$$f(tx^1 + (1 - t)x^2) \leq t f(x^1) + (1 - t) f(x^2)$$

proprietate care ilustrează geometric poziţia tangentei sub grafic.

2. condițiile suficiente de extrem

Se știe că punctele de extrem se găsesc printre soluțiile primei derivate. Care din aceste soluții conduc la puncte de extrem și ce fel de extreme sînt se stabilește folosind formula lui Taylor.

Să presupunem că $f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$ și $f^{(n)}(x_0) \neq 0$. Din formula lui Taylor,

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = \frac{h^n}{n!}\left[f^{(n)}(x_0) + \frac{h}{n+1} f^{(n+1)}(\xi)\right]$$

1) dacă $n = 2m$ și $f^{(n)}(x_0) > 0$ punctul x_0 este punct de minim.

2) dacă $n = 2m$, $f^{(n)}(x_0) < 0$, punctul x_0 este un punct de maxim.

3) dacă $n = 2m + 1$, $f^{(2m+1)}(x_0) \neq 0$, punctul x_0 este un punct de inflexiune.

Exemplu. Să se determine extremele funcției

$$f(x) = x^n e^x, \quad x \in \mathbf{R}, \quad n \in \mathbf{N}.$$

Calculăm

$$f'(x) = x^{n-1}(n + x)e^x$$

Din $f'(x) = 0$ rezultă $x_1 = 0$ (răd. multiplă), $x_2 = -n$.

Pentru a vedea dacă aceste puncte sînt puncte de extrem calculăm

$$f''(-n) = (-n)^{n-1} e^{-n} = (-1)^{n-1} n^{n-1} e^{-n}.$$

Deci pentru n par punctul $x_2 = -n$ este punct de maxim, pentru n impar $x_2 = -n$ este punct de minim.

Deoarece $x_1 = 0$ este rădăcină multiplă de ord. „$n - 1$" pentru $f'(x) = 0$, vom avea $f''(0) = \ldots = f^{(n-1)}(0) = 0$.
Calculăm

$$f^{(n)}(x) = n!\,e^x + C_n^1 n!\,x e^x + \ldots + x^n e^x$$

și $f^{(n)}(0) = n! > 0$ ceea ce arată că $x = 0$ este un punct de minim pentru n par.

§ 2. CALCULUL DIFERENȚIAL AL FUNCȚIILOR VECTORIALE DE VARIABILĂ VECTORIALĂ

Să ne reamintim că $f: A \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ este diferențiabilă în punctul $a \in A$ dacă există un număr real notat $f'(a)$ pentru care:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$$

sau încă

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a) - f'(a)(x-a)}{x-a} = 0$$

Observăm că $f'(a)(x-a)$ este o funcție liniară de x.

Vom considera pentru început $f: X \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$.

Dăm următoarea:

Definiția 1.2. Funcția f este diferențiabilă în punctul a, $a \in \mathring{X} \subset \mathbf{R}^n$ dacă există o funcție liniară $L: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ astfel încît

$$\lim_{h\to 0} \frac{|f(a+h) - f(a) - L(h)|}{\|h\|} = 0.$$

Am notat $h = (h_1, \ldots, h_n) \in \mathbf{R}^n$ astfel încît $(a+h) = (a_1+h_1, a_2+h_2, \ldots, a_n+h_n) \in \mathring{X}$.

Deoarece L este liniară rezultă $L(h) = D_1h_1 + \ldots + D_nh_n$. $L(h)$ se numește diferențiala funcției f în punctul a. Folosind o notație matricială putem scrie

$$L(h) = (D_1, \ldots, D_n)\begin{pmatrix}h_1\\ \vdots \\ h_n\end{pmatrix} = f'(a)\cdot h$$

unde cu $f'(a)$ am notat matricea $(D_1, \ldots, D_n)$.

Notăm $f'(a)\cdot h = df(a)$ și o numim diferențiala funcției f în punctul a.

Avem

$$df(a) = f'(a)\cdot h = D_1h_1 + \ldots + D_nh_n.$$

Definiția 2.2. O funcție este diferențiabilă într-o mulțime deschisă dacă este diferențiabilă în orice punct din mulțime.

Observație: S-ar părea că definiția 1 depinde de alegerea bazei în $\mathbf{R}^n$. Se știe însă că o funcție liniară rămîne liniară în raport cu orice bază.

Arătăm în continuare că funcția liniară L care apare în definiția 1 este unică.

Are loc:

Teorema 1.2. Dacă funcția $f: X \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ este diferențiabilă în punctul $a \in X$ atunci există o singură funcție liniară L astfel încît

$$f(a+h) = f(a) + D_1h_1 + \ldots + D_nh_n + \omega(h)$$

cu $\lim_{\|h\|\to 0} \frac{|\omega(h)|}{\|h\|} = 0$.

Demonstrație. Vom presupune existența a încă unei funcții liniare $L^* = D_1^*h_1 + D_2^*h_2 + \ldots + D_n^*h_n$ care verifică de asemenea condiția din definiția derivabilității:

$$(2)\quad f(a+h) - f(a) = D_1^*h_1 + \ldots + D_n^*h_n + \omega^*(h)$$

cu $\lim_{\|h\|\to 0} \frac{|\omega^*(h)|}{\|h\|} = 0$.

Pentru $d(h) = f(a + h) - f(a)$ obținem

$$\lim_{h\to 0} \frac{\left|\sum_{i=1}^{n} h_i(D_i^* - D_i)\right|}{\|h\|} = \lim_{h\to 0} \frac{\left|\sum h_i D_i - d(h) + d(h) - \sum h_i D_i^*\right|}{\|h\|} \leq$$

$$\leq \lim_{h\to 0} \frac{\left|\sum_{i=1}^{n} h_i D_i^* - d(h)\right|}{\|h\|} + \lim_{h\to 0} \frac{\left|\sum_{1}^{n} h_i D_i - d(h)\right|}{\|h\|} =$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{|\omega^*(h)|}{\|h\|} + \lim_{h\to 0} \frac{|\omega(h)|}{\|h\|} = 0$$

Rezultă

$$\sum_{1}^{n} D_i^* h_i = \sum_{1}^{n} D_i h_i \text{ sau } L^* = L$$

Să vedem care este semnificația constantelor D_i, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Fie $h = (0, 0, \ldots, 0, h_i, 0 \ldots 0) \in X \subset \mathbf{R}^n$ și f o funcție diferențiabilă în punctul $a \in X$. Pentru un asemenea vector h, putem scrie că

$$(1)\quad f(a_1, a_2, \ldots, a_i + h_i, a_{i+1}, \ldots, a_n) - f(a_1, \ldots, a_n) = D_i h_i + \omega(h_i)$$

$$\text{unde } \|h\| = |h_i| \text{ și } \lim_{h_i\to 0} \frac{|\omega(h_i)|}{|h_i|} = 0$$

(1) mai poate fi scris sub forma:

$$\lim_{h_i\to 0} \frac{f(a_1, a_2, \ldots, a_{i-1}, a_i + h_i, a_{i+1}, \ldots, a_n) - f(a_1, \ldots, a_n)}{h_i} = D_i$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n)$$

și astfel D_i este derivata funcției de variabilă x_i, $f(a_1, \ldots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \ldots, a_n)$, în punctul a_i.

Numim D_i *derivata parțială a funcției f* în raport cu variabila x_i. Vom folosi pentru D_i următoarele notații D_i, $f'_{x_i}(a)$, $\frac{\partial f(a)}{\partial x_i}$.

Observație: O funcție diferențiabilă admite derivate parțiale, în timp ce nu orice funcție care admite derivate parțiale este diferențiabilă.

Exemplu: Fie $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$

Arătăm că f admite derivate parțiale în punctul (0, 0), dar nu este diferențiabilă în acest punct.

$$\frac{\partial f(0,0)}{\partial x} = f'_x(0,0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x} = 0$$

$$\frac{\partial f(0,0)}{\partial y} = f'_y(0,0) = \lim_{y \to 0} \frac{f(0,y) - f(0,0)}{y} = 0.$$

Putem scrie:

$$f(h_1, h_2) - f(0,0) = \omega(h) \text{ de unde rezultă } \omega(h) = \frac{h_1 h_2}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}}$$

$$\frac{\omega(h)}{\|h\|} = \frac{h_1 h_2}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} = \frac{h_1 h_2}{h_1^2 + h_2^2}.$$

Se observă că:

$$\lim_{h \to 0} \frac{|\omega(h)|}{\|h\|} = \lim_{h \to 0} \frac{|h_1 h_2|}{h_1^2 + h_2^2} = \lim_{\rho \to 0} \frac{\rho^2 |\cos\theta| |\sin\theta|}{\rho^2} = |\sin\theta \cos\theta| \neq 0$$

ceea ce arată că f nu este diferențiabilă în (0, 0).

În cazul în care funcția f este diferențiabilă în mulțimea deschisă X din $\mathbf{R}^n$, ea definește un *câmp de vectori* în X astfel:

Asociem fiecărui punct (a) din X vectorul $(f'_1(a), f'_2(a), \ldots, f'_n(a))$, pe care-l notăm cu *grad f* și-l numim gradientul funcției f (sau câmpului scalar f).

Exemplu: Gradientul funcției scalare:

$$u(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \text{ este } \operatorname{grad} u = \frac{x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

În cazul particular

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_i, \quad 1 \leq i \leq n,$$

$$f(x + h) - f(x) = x_i + h_i - x_i = h_i$$

și deci cu notația introdusă, $h_i = dx_i$, $1 \leq i \leq n$.

Rezultă că diferențiala unei funcții diferențiabile se va scrie:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n$$

și ea aproximează diferența $f(x + h) - f(x)$ când $x \in X$ și $x + h \in X$.

Exemplu: Înlocuind creșterea funcției cu diferențiala să se calculeze aproximativ $\sqrt{1{,}02^3 + 1{,}97^3}$.

Pentru funcţia $f(x, y) = \sqrt{x^3 + y^3}$ scriem

$$f(x + h_1, y + h_2) - f(x, y) \cong \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} h_1 + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} h_2$$

unde $x = 1$; $y = 2$; $h_1 = 0{,}02$; $h_2 = -0{,}03$

$$\text{df}(1, 2) = \frac{3x^2}{2\sqrt{x^3 + y^3}}\bigg|_{(1,2)} \cdot 0{,}02 - \frac{3y^2}{2\sqrt{x^3 + y^3}}\bigg|_{(1,2)} \cdot 0{,}03 =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 0{,}02 - 2 \cdot 0{,}03 = -0{,}05$$

Avem:

$$f(1{,}02;\ 1{,}97) \approx f(1, 2) + \text{d}f(1, 2) = 3 - 0{,}05 = 2{,}95$$

Proprietăţi ale funcţiilor diferenţiabile

1. Dacă $f(x) = \text{const.}$ atunci $\text{d}f(x) = 0$ ceea ce rezultă din egalitatea

$$f(x + h) - f(x) = 0$$

2. Dacă $f(x)$ este o funcţie liniară $f: X \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ adică $f(x) = A_1 x_1 + A_2 x_2 + \ldots + A_n x_n$ atunci

$$f(x + h) - f(x) = A_1(x_1 + h_1) + A_2(x_2 + h_2) + \ldots + A_n(x_n + h_n) -$$

$$- A_1 x_1 - \ldots - A_n x_n = A_1 h_1 + A_2 h_2 + \ldots + A_n h_n + \omega(h).$$

De aici rezultă

$$f'(x) = (A_1, A_2, \ldots, A_n) \text{ şi } \omega(h) = 0.$$

3. Dacă $f: X \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$; $g: X \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ sînt diferenţiabile în punctul $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ atunci $\text{d}(f + g) = \text{d}f + \text{d}g$.

Aceasta rezultă din şirul de egalităţi:

$$f(a + h) - f(a) = \sum_{1}^{n} D_i h_i + \omega(h);\ \lim_{h \to 0} \frac{|\omega(h)|}{|h|} = 0$$

$$g(a + h) - g(a) = \sum_{1}^{n} D_i^* h_i + \omega^*(h);\ \lim_{|h| \to 0} \frac{|\omega^*(h)|}{|h|} = 0$$

şi

$$(f + g)(a + h) - (f + g)(a) = \sum_{1}^{n} (D_i + D_i^*) h_i + (\omega(h) + \omega^*(h)),$$

unde $0 \leq \lim\limits_{|h| \to 0} \frac{|\omega(h) + \omega^*(h)|}{|h|} \leq \lim\limits_{|h| \to 0} \frac{|\omega(h)|}{|h|} + \lim\limits_{h \to 0} \frac{|\omega^*(h)|}{|h|} = 0, \ldots$

4. Dacă $f: X \subseteq \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ este diferenţiabilă în $x = a$ atunci f este continuă în „a". Aceasta rezultă din relaţia

$$f(a + h) - f(a) = \sum_{1}^{n} D_i h_i + \omega(h)$$

în care facem $\|h\| \to 0$ şi ţinem seama că

$$|h_i| \leq \|h\| \text{ pentru } i = 1, 2, \ldots, n.$$

Derivata unei funcţii vectoriale

Considerăm o funcţie $f: X \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$, X mulţime deschisă.

Alegînd cîte o bază în fiecare din spaţiile $\mathbf{R}^n$ şi $\mathbf{R}^m$ putem scrie

$$f = (f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), f_2(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_m(x_1, \ldots x_n));$$

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in X \subset \mathbf{R}^n.$$

În legătură cu derivabilitatea funcţiilor vectoriale dăm următoarea:

Definiţia 3.2. Funcţia $f: X \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ este diferenţiabilă în punctul $a \in \mathring{X}$ dacă există o transformare liniară $\lambda: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ astfel încît pentru $a + h \in X$,

$$\lim_{h \to 0} \frac{\|f(a + h) - f(a) - \lambda(h)\|}{\|h\|} = 0.$$

Transformarea liniară λ se numeşte diferenţiala (diferenţiala Fréchet sau derivata tare) a funcţiei f în punctul a.

Legătura între diferenţiabilitatea unei funcţii vectoriale şi diferenţiabilitatea funcţiilor componente este dată de:

Teorema 2.2. Funcţia $f: X \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$, $f = (f_1, \ldots, f_m)$ este diferenţiabilă în punctul $a \in \mathring{X}$ dacă şi numai dacă fiecare din componentele ei este diferenţiabilă şi:

$$\lambda = (df_1(a), df_2(a), \ldots, df_m(a))$$

cu $df_i(a) = \sum_{j=1}^{n} D_j h_j$.

Demonstraţie

Putem scrie:

$$|f_i(a + h) - f_i(a) - df_i(a)| \leq \|f(a + h) - f(a) - \lambda(h)\| \leq$$

(5) $$\leq \sum_{1}^{m} |f_i(a + h) - f_i(a) - df_i(a)| \text{ pentru } i = 1, \ldots, m;$$

Din membru doi şi trei ai inegalităţii (5) rezultă că dacă componentele f_i ale funcţiei f sînt diferenţiabile atunci

$$\sum_{i=1}^{m} |f_i(a+h) - f_i(a) - df_i(a)| \le \sum_{i=1}^{m} |\omega_i(h)|$$

şi $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{|\omega_i(h)|}{\|h\|} = 0$, $i = 1, 2, \dots, m$.

Avem

$$\frac{\|f(a+h) - f(a) - \lambda(h)\|}{\|h\|} \le \frac{\sum\limits_{i=1}^{m} |\omega_i(h)|}{\|h\|} \to 0 \text{ cînd } \|h\| \to 0$$

ceea ce arată că f este diferenţiabilă în punctul a.

Din membrul I şi II al inegalităţii 5 rezultă că dacă f este diferenţiabilă atunci f_i este diferenţiabilă pentru orice i.

Observăm că transformarea liniară $\lambda(h)$ care apare în definiţia 3.2 este definită de matricea

(6)
$$f'(a) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1(a)}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1(a)}{\partial x_2} & \dots & \dfrac{\partial f_1(a)}{\partial x_n} \\ \dfrac{\partial f_2(a)}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2(a)}{\partial x_2} & \dots & \dfrac{\partial f_2(a)}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dfrac{\partial f_m(a)}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_m(a)}{\partial x_2} & \dots & \dfrac{\partial f_m(a)}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

pe care o numim matricea Jacobi a aplicaţiei $f(x)$ în punctul a.

Determinantul asociat matricei în cazul $m = n$ se numeşte determinantul jacobian al aplicaţiei $f(x)$ sau determinantul funcţional şi se notează

$$\frac{D(f_1, f_2, \dots, f_n)}{D(x_1, x_2, \dots, x_n)} \quad \text{sau} \quad \frac{\partial(f_1, \dots, f_n)}{\partial(x_1, \dots, x_n)}.$$

Exemple: Fie $\bar{F}(x, y, z) = F_1(x, y, z)e_1 + F_2(x, y, z)e_2 + F_3(x, y, z)e_3$ unde $e_1 = (1, 0, 0)$; $e_2 = (0, 1, 0)$; $e_3 = (0, 0, 1)$.

Numim *divergenţa funcţiei* F, funcţia scalară

(7)
$$\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} = \operatorname{div} \bar{F}.$$

Numim *rotorul funcţiei* (cîmpului) $\bar{F}$ funcţia vectorială (cîmpul vectorial)

(8)
$$\left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}\right)e_1 + \left(\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}\right)e_2 + \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right)e_3 = \operatorname{rot} \bar{F}$$

Derivate de funcţii compuse

Fie $f: X \subset \mathbf{R}^n \to Y \subset \mathbf{R}^m$ şi $g: Y \subset \mathbf{R}^m \to Z \subset \mathbf{R}^p$

Teorema: *3.2.* Dacă funcţia f este derivabilă în $x = a \in X$ şi funcţia g este derivabilă în $y = b = f(a) \in Y$ atunci funcţia compusă $h = g \circ f: X \subset \mathbf{R}^n \to Z \subset \mathbf{R}^p$ este derivabilă în $x = a$ şi $h'(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a)$.

Demonstraţie

Notăm: $\omega_1(x, a) = f(x) - f(a) - f'(a)(x - a)$

$$\omega_2(y, b) = g(y) - g(b) - g'(b)(y - b)$$

unde $\dfrac{\|\omega_1(x, a)\|}{\|x - a\|} \to 0$ când $\|x - a\| \to 0$ şi

$$\frac{\|\omega_2(y, b)\|}{\|y - b\|} \to 0 \text{ cînd } \|y - b\| \to 0$$

Eliminînd $y = f(x)$ şi $b = f(a)$ între cele două relaţii avem:

$$g(f(x)) - g(f(a)) = g'(f(a))(f(x) - f(a)) + \omega_2(f(x), f(a))$$

sau

$$h(x) - h(a) = g'(f(a))[f'(a)(x - a) + \omega_1(x, a)] + \omega_2(f(x), f(a)) =$$
$$= g'(f(a)) f'(a)(x - a) + g'(f(a))\, \omega_1(x, a) + \omega_2(f(x), f(a))$$

Arătăm că

$$\lim_{\|x-a\| \to 0} \frac{\|g'(f(a))\, \omega_1(x, a) + \omega_2(f(x), f(a))\|}{\|x - a\|} \leq$$
$$\leq \lim_{\|x-a\| \to 0} \frac{\|g'(f(a))\, \omega_1(x, a)\| + \|\omega_2(f(x), f(a))\|}{\|x - a\|} \leq$$
$$\leq \lim_{\|x-a\| \to 0} \frac{M\|\omega_1(x, a)\| + \|\omega_2(f(x), f(a))\|}{\|x - a\|} = 0$$

Existenţa lui M este asigurată de faptul că $g'(f(a))$ este liniară. Matricele Jacobi asociate derivatelor $h'(a)$, $g'(f(a))$, $f'(a)$ sînt:

$$h'(a) = \begin{Vmatrix} \dfrac{\partial h_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial h_1}{\partial x_2} & \dots & \dfrac{\partial h_1}{\partial x_n} \\ \dfrac{\partial h_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial h_2}{\partial x_2} & \dots & \dfrac{\partial h_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial h_p}{\partial x_1} & \dfrac{\partial h_p}{\partial x_2} & \dots & \dfrac{\partial h_p}{\partial x_n} \end{Vmatrix}$$

$$f'(a) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

$$g'(b) = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial y_1} & \frac{\partial g_1}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial y_m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial g_p}{\partial y_1} & \frac{\partial g_p}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial g_p}{\partial y_m} \end{bmatrix}$$

Din egalitatea $h'(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a)$ rezultă regula după care se calculează derivatele parţiale ale funcţiei compuse.

Exemplu 1. Fie $h(x) = g(u(x), v(x))$, $x \in X \subset \mathbf{R}$. În acest caz $h(x) = g \circ f(x)$ unde $f(x) = (u(x), v(x))$. Notăm $y_1 = u(x)$, $y_2 = v(x)$.

Matricele Jacobi asociate sînt:

$$h'(x) = [h'(x)], \quad g'(y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial g}{\partial y_1} & \frac{\partial g}{\partial y_2} \end{bmatrix}$$

$$f'(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial x} \end{bmatrix}.$$

Din înmulţirea acestora rezultă

$$[h'(x)] = \begin{bmatrix} \frac{\partial g}{\partial y_1} & \frac{\partial g}{\partial y_2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial x} \end{bmatrix}$$

sau

$$h'(x) = \frac{\partial g}{\partial y_1} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y_2} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}.$$

Exemplul 2. Fie $h(x, y) = g(f_1(x, y), f_2(x, y))$ unde h, f_1, f_2 sînt funcţii derivabile în $X \subset \mathbf{R}^2$ iar g este derivabilă în $\mathbf{R}^2$.

Notăm $f_1(x, y) = u_1$, $f_2(x, y) = u_2$.

În acest caz $h = g \circ f$ unde $f = (f_1, f_2)$.

Matricele Jacobi asociate acestor funcţii sînt:

$$h'(x, y) = \left(\frac{\partial h}{\partial x}, \frac{\partial h}{\partial y}\right); \quad g'(u_1, u_2) = \left(\frac{\partial g}{\partial u_1}, \frac{\partial g}{\partial u_2}\right)$$

$$f'(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix}.$$

Din înmulţirea lor rezultă

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial u_1} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial u_2} \cdot \frac{\partial f_2}{\partial x}$$

$$\frac{\partial h}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial u_1} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial u_2} \cdot \frac{\partial f_2}{\partial y}.$$

Exemplul **2.** Să se calculeze div $\vec{F}(x, y, z)$ dacă

$$\vec{F}(x, y, z) = \vec{r}\, f(r), \quad \vec{r} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}.$$

Ştim că $\operatorname{div} \vec{F}(x, y, z) = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}$, $\vec{F} = (F_1, F_2, F_3)$

$$\frac{\partial F_1}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(x f(r)) = f(r) + x \frac{df}{dr} \cdot \frac{\partial r}{\partial x} = f(r) + \frac{x^2}{r} \cdot \frac{df}{dr}$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(y f(r)) = f(r) + y \frac{df}{dr} \cdot \frac{\partial r}{\partial y} = f(r) + \frac{y^2}{r} \cdot \frac{df}{dr}$$

$$\frac{\partial F_3}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}(z f(r)) = f(r) + z \frac{df}{dr} \cdot \frac{\partial r}{\partial z} = f(r) + \frac{z^2}{r} \cdot \frac{df}{dr}$$

$$\operatorname{div} \vec{F} = 3f(r) + \frac{x^2 + y^2 + z^2}{r} \cdot \frac{df}{dr} = 3f(r) + r \frac{df}{dr}.$$

Derivate parţiale de ordin superior

Fie $f : X \subset R^n \to R$. Presupunem că f admite derivate parţiale de ordinul I în raport cu toate argumentele în X.

Să notăm $f_i(x_1, \ldots, x_n) = \frac{\partial f(x_1, \ldots, x_n)}{\partial x_i}$.

Definiția 4.2. Dacă funcția $f'_{x_i}(x_1, ..., x_n)$ admite derivate parțiale în raport cu x_j, $1 \le j \le n$ într-un punct $a = (a_1, ..., a_n) \in \mathring{X} \subset \mathbf{R}^n$ spunem că f admite derivată parțială de ordinul 2 în raport cu x_i și x_j și notăm

$$f''_{x_ix_j} = \frac{\partial^2 f(a)}{\partial x_i \partial x_j} = \lim_{x_j \to a_j} \frac{f'_{x_i}(a_1, ..., x_j, ..., a_n) - f'_{x_i}(a_1, ..., a_n)}{x_j - a_j}.$$

În mod asemănător se definesc derivate parțiale de ordin mai mare decît 2.

În legătură cu egalitatea derivatelor $f''_{x_ix_j}$ și $f''_{x_jx_i}$ are loc următorul criteriu:

Teorema 4.2. (A. Schwarz). Dacă $f: X \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ are derivate parțiale mixte de ordinul 2 într-o vecinătate V a punctului $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathring{X}$ și dacă $f''_{x_ix_j}$ este continuă atunci

$$f''_{x_ix_j} = f''_{x_jx_i}.$$

Demonstrație: Pentru ușurința scrierii vom considera o funcție de 2 variabile $f(x, y)$ și expresia

$$E = f(x + h, y + k) - f(x + h, y) - f(x, y + k) + f(x, y)$$

Fie $\varphi(x) = f(x, y + k) - f(x, y)$ unde presupunem y constant.
Obținem $E = \varphi(x + h) - \varphi(x)$.
Funcția $\varphi(x)$ este continuă și derivabilă, deci:

$$\varphi'(x) = f'_x(x, y + k) - f'_x(x, y).$$

Dacă aplicăm teorema creșterilor finite lui E putem scrie:

$$E = h\varphi'(\xi), \quad x < \xi < x + h$$

sau încă

$$E = h(f'_x(\xi, y + k) - f'_x(\xi, y)) = hkf''_{xy}(\xi, \eta),$$
$$\xi \in (x, x + h), \quad \eta \in (y, y + k).$$

Revenind la funcția φ,

$$\lim_{k \to 0} \frac{\varphi(x)}{k} = \lim_{k \to 0} \frac{f(x, y + k) - f(x, y)}{k} = f'_y(x, y)$$

deci,

$$\lim_{k \to 0} \frac{E}{k} = \lim_{k \to 0} \frac{\varphi(x + h) - \varphi(x)}{k} = f'_y(x + h, y) - f'_y(x, y)$$

și, ținînd seama de continuitatea lui f''_{xy} obținem:

$$\frac{E}{k} = hf''_{xy}(\xi, \eta) \text{ și } \lim_{k \to 0} \frac{E}{k} = hf''_{xy}(\xi, y).$$

Rezultă:

$$hf''_{xy}(\xi, y) = f'_y(x + h, y) - f'_y(x, y)$$

şi împărţind cu h:

$$f''_{xy}(\xi, y) = \frac{f'_y(x+h, y) - f'_y(x, y)}{h}.$$

Cînd $h \to 0$ obţinem:

$$f''_{xy}(x, y) = f''_{yx}(x, y).$$

În mod asemănător se definesc şi derivatele parţiale de ordin mai mare decît 2.

Exemplul 1. Să se determine derivata $\frac{\partial^{m+n} f}{\partial x^m \partial y^n}$ pentru funcţia $f(x, y) = x \cdot e^{2x+3y}$, $(x, y) \in \mathbf{R}^2$.

Derivind în raport cu y de n ori obţinem

$$\frac{\partial^n f}{\partial y^n} = x \cdot 3^n \cdot e^{2x+3y}.$$

Pentru a deriva această funcţie de m ori în raport cu x aplicăm regula lui Leibniz şi avem:

$$\frac{\partial^{m+n} f}{\partial x^m \partial y^n} = 3^n[2^m \cdot e^{2x+3y} \cdot x + C_m^1 \cdot 2^{m-1} \cdot e^{2x+3y}] = 3^n \cdot 2^{m-1} e^{2x+3y}(2x + m).$$

2. Fie $f(x) = F(u(x), v(x))$. Să se calculeze $f''(x)$.

$$f'_{(x)} = \frac{\partial F}{\partial u} \cdot u' + \frac{\partial F}{\partial v} \cdot v'$$

$$f''_{(x)} = \frac{\partial F}{\partial u} u'' + \frac{\partial F}{\partial v} v'' + u'\left(\frac{\partial^2 F}{\partial u^2} u' + \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} v'\right) + v'\left(\frac{\partial^2 F}{\partial v \partial u} u' + \frac{\partial^2 F}{\partial v^2} v'\right)$$

şi

$$f''_{(x)} = \frac{\partial F}{\partial u} u'' + \frac{\partial F}{\partial v} v'' + \frac{\partial^2 F}{\partial u^2} u'^2 + 2\frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} u'v' + \frac{\partial^2 F}{\partial v^2} v'^2$$

3. Fie $f(x, y) = F(u(x, y), v(x, y))$. Să se calculeze $\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}$.

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y}\right) = \frac{\partial F}{\partial u} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial F}{\partial v} \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} +$$

$$+ \frac{\partial u}{\partial y}\left[\frac{\partial^2 F}{\partial u^2} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}\right] + \frac{\partial v}{\partial y}\left[\frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 F}{\partial v^2} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}\right].$$

Diferențiale de ordin superior

Definiția 3.2. Fie $f(x, y) : X \subset \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ derivabilă parțial de 2 ori pe X cu toate derivatele parțiale de ordinul 2 continue.

Diferențiala de ordinul 2 se definește astfel:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}dx\,dy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy^2 = d^2 f.$$

Observație. $d^2 f = d(df)$ dacă ținem seama că $d(dx) = d(dy) = 0$.

Dacă introducem operatorul de diferențiere

$$d = \frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy$$

diferențiala df se poate scrie:

$$df = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)f, \quad d^2 f = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^{(2)} f$$

și în general: $d^n f = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^{(n)} f.$

În mod asemănător dacă considerăm $f(x_1, \ldots, x_n) : X \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ și presupunem că f are în X toate derivatele parțiale de ordinul „p" continue definim diferențiala de ordinul p ca fiind:

$$d^p f = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial}{\partial x_2}dx_2 + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_n}dx_n\right)^{(p)} f.$$

Exemple. 1) Să se calculeze diferențiala de ordinul „n" pentru funcția $f(x, y) = \sin(ax + by)$, $(x, y) \in \mathbf{R}^2$.

$$d^n f = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^{(n)} f = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \frac{\partial^n f}{\partial x^k \partial y^{n-k}} dx^k dy^{n-k} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k} \sin\left(ax + by + \frac{n\pi}{2}\right) dx^k dy^{n-k} =$$

$$= \sin\left(ax + by + \frac{n\pi}{2}\right)\cdot(a\,dx + b\,dy)^n.$$

2) Să se calculeze $d^2 f$ dacă

$$f(x) = F(u(x), v(x)), \quad x \in X \subset \mathbf{R}$$

Obținem:

$$d^2 f = f''(x)dx^2 = \frac{\partial F}{\partial u}d^2 u + \frac{\partial F}{\partial v}d^2 v + \frac{\partial^2 F}{\partial u^2}du^2 + 2\frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v}du\,dv + \frac{\partial^2 F}{\partial v^2}dv^2.$$

Vom spune că diferențiala de ordinul 2 a funcției f astfel definită nu este invariantă la compunerea funcțiilor.

Derivata după o direcţie

Fie Γ o curbă într-un domeniu $X \subset \mathbf{R}^3$,

$$\Gamma = \{x \in X,\ x = x(t),\ \alpha \leqslant t \leqslant \beta\};\ x(t) = (x_1(t),\ x_2(t),\ x_3(t)).$$

Presupunem că $x'(t)$ este continuă pentru $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$.

Vectorul $x'(t)$ este tangent la curba Γ în punctul $x(t)$.

Să considerăm o funcţie $y = y(x)$, $y: X \to Y \subset \mathbf{R}$ derivabilă într-o mulţime ce conţine punctele curbei Γ.

Fie $\varphi(t) = y(x(t))$, $t \in [\alpha, \beta] \to Y$.

Derivata acestei funcţii este

$$\varphi'(t) = y'(x) \cdot x'(t),\ t \in [\alpha, \beta]$$

şi se numeşte derivata *funcţiei* $y(x)$ *în direcţia curbei* Γ (sau a vectorului T tangent la curba Γ).

Cînd Γ este un segment se poate scrie

$$x = a + te,\ 0 \leqslant t \leqslant 1,\ x_i = a_i + te_i,\ i = 1, 2, 3$$

şi

$$\varphi'(t) = e_1 \frac{\partial y}{\partial x_1} + e_2 \frac{\partial y}{\partial x_2} + e_3 \frac{\partial y}{\partial x_3}.$$

Să reluăm definiţia dată mai sus pentru cazul particular al unei funcţii $z = f(x_1, x_2, x_3)$.

Vom numi derivata funcţiei f după direcţia unei drepte T: $\frac{x_1 - a}{\alpha} = \frac{x_2 - b}{\beta} = \frac{x_3 - c}{\gamma}$ ca fiind

$$\lim_{\substack{M \to M_0 \\ M \in T}} \frac{f(M) - f(M_0)}{|MM_0|} = \frac{df}{dT},\quad M(x_1, x_2, x_3),\ M_0(a, b, c).$$

Din ecuaţia dreptei T rezultă reprezentarea sa parametrică $x_1 = a + \alpha\rho$, $x_2 = b + \beta\rho$, $x_3 = c + \gamma\rho$.

Calculăm această limită.

$$\lim_{\substack{M \to M_0 \\ M \in T}} \frac{f(M) - f(M_0)}{|MM_0|} = \lim_{\rho \to 0} \frac{f(x_1, x_2, x_3) - f(a, b, c)}{\sqrt{(x_1 - a)^2 + (x_2 - b)^2 + (x_3 - c)^2}} =$$

$$= \lim_{\rho \to 0} \frac{f(a + \alpha\rho,\ b + \beta\rho,\ c + \gamma\rho) - f(a, b, c)}{\rho} =$$

$$= \left(\alpha \frac{\partial f}{\partial x_1} + \beta \frac{\partial f}{\partial x_2} + \gamma \frac{\partial f}{\partial x_3}\right)_{(a, b, c)}.$$

Exemplu: Să se calculeze derivata funcției $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ după direcția $D(1, 1, 1)$ în punctul $A(1, 1, 1)$.

În baza celor arătate

$$\frac{df}{dD} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\partial f}{\partial z}\right)_A = \frac{2}{\sqrt{3}}\cdot$$

Formula lui Taylor pentru funcții de mai multe variabile

Fie $f(x_1, \ldots, x_n) : X \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$, f derivabilă de „$m + 1$" ori în raport cu toate argumentele cu derivatele mixte în X și $a = (a_1, \ldots, a_n)$ un punct interior lui X.

Considerăm funcția

$$F(t) = f(a_1 + (x_1 - a_1)\,t,\ a_2 + (x_2 - a_2)\,t, \ldots, a_n + (x_n - a_n)\,t)$$

cu $t \in [0, 1]$, $F(0) = f(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, $F(1) = f(x_1, \ldots, x_n)$.

Aplicăm funcției $F(t)$ formula lui Mac-Laurin.

Avem:

$$F(1) = F(0) + \frac{1}{1!}\cdot F'(0) + \ldots + \frac{1}{m!}\cdot F^{(m)}(0) + R_m$$

cu $R_m = \frac{1}{(m+1)!}\cdot F^{(m+1)}(\theta)$, $0 < \theta < 1$.

Dar: $F(1) = f(x_1, \ldots, x_n)$, $F(0) = f(a_1, a_2, \ldots, a_n)$

$$F(t) = f(x_1(t), \ldots, x_n(t)),\ x_i(t) = a_i + (x_i - a_i)\,t$$

și

$$d^m F = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\,dx_1 + \frac{\partial}{\partial x_2}\,dx_2 + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_n}\,dx_n\right)^m f.$$

Dar: $dx_i = (x_i - a_i)\,dt$ și pentru $t = 0$.

$$\left.\frac{d^m F}{dt^m}\right|_{t=0} = \left((x_1 - a_1)\frac{\partial}{\partial x_1} + \ldots + (x_n - a_n)\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{(m)} f(a).$$

Cu aceasta formula lui Taylor pentru funcția $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ se scrie

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(a_1, a_2, \ldots, a_n) +$$

$$+ \frac{1}{1!}\left((x_1 - a_1)\frac{\partial}{\partial x_1} + \ldots + (x_n - a_n)\frac{\partial}{\partial x_n}\right) f(a) + \ldots +$$

$$+ \frac{1}{m!}\left((x_1 - a_1)\frac{\partial}{\partial x_1} + \ldots + (x_n - a_n)\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{m} f(a) + R_m$$

cu $R_m = \frac{1}{(m+1)!}\left((x_1 - a_1)\frac{\partial}{\partial x_1} + \ldots + (x_n - a_n)\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{(m+1)} f(a + \theta(x - a))$, $0 < \theta < 1$.

Se poate arăta că

$$\lim_{x \to a} \frac{R_m}{\|x - a\|^m} = 0.$$

Observație. Dacă în formula lui Taylor facem $m = 0$ obținem:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(a_1, a_2, \ldots, a_n) = (x_1 - a_1) f'_{x_1}(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) +$$

$$+ (x_2 - a_2) f'_{x_2}(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) + \ldots + (x_n - a_n) f'_{x_n}(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n),$$

$$\xi_1 \in (a_1, x_1), \ldots, \xi_n \in (a_n, x_n),$$

care este *formula creșterilor finite* pentru o funcție de mai multe variabile.

Extreme pentru funcții $F : X \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$.

Definiția 6.2. Punctul $a \in \mathring{X}$ este punct de minim local (maxim local) pentru funcția f dacă $f(x) \geq f(a)$ ($f(x) \leq f(a)$) într-o vecinătate a punctului a.

Un punct de maxim sau minim local „x" se numește punct de extrem local.

Acesta este punct de extrem local în raport cu toate direcțiile care trec prin el. Dacă funcția f este derivabilă rezultă că derivata ei în raport cu toate direcțiile este nulă și deci alegînd direcțiile: $e_1 = (1, 0, 0, \ldots, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0) \ldots, e_n = (0, 0, \ldots, 0, 1)$ obținem:

$$\frac{df}{de_1} = \frac{\partial f}{\partial x_1} = 0; \quad \frac{df}{de_2} = \frac{\partial f}{\partial x_2} = 0, \ldots, \frac{df}{de_n} = \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0$$

Definiția 7.2. Punctele care anulează sistemul $\frac{\partial f}{\partial x_1} = 0, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0$ se numesc puncte staționare ale funcției f.

Care dintre aceste puncte staționare sînt puncte de extrem și ce fel de puncte?

Pentru a răspunde la această problemă folosim formula lui Taylor.

Fie $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ un punct staționar al funcției $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Fiind punct staționar $\frac{\partial f}{\partial x_i} = 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Formula lui Taylor dă:

$$f(x_1, \ldots, x_n) - f(a_1, \ldots, a_n) = \frac{1}{2!}\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_i - a_i)(x_j - a_j) + R_2(x).$$

Semnul diferenței $f(x_1, \ldots, x_n) - f(a_1, \ldots, a_n)$ este dat de forma pătratică

$$d^2 f(a) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f(a)}{\partial x_i \partial x_j} dx_i \ldots dx_j \text{ unde am notat } x_i - a_i = dx_i$$

Dacă forma pătratică $d^2\Phi(a)$ este pozitivă atunci $f(x_1, ..., x_n) - f(a_1, ..., a_n) \geq 0$ într-o vecinătate a punctului $a = (a_1, ..., a_n)$ şi punctul a este punct de minim.

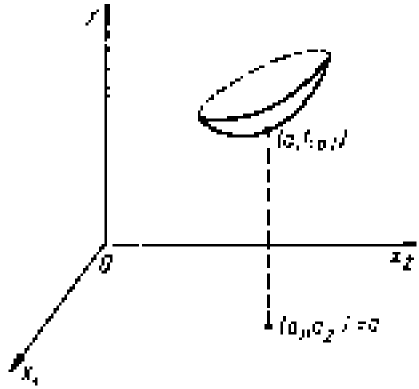

Fig. 8

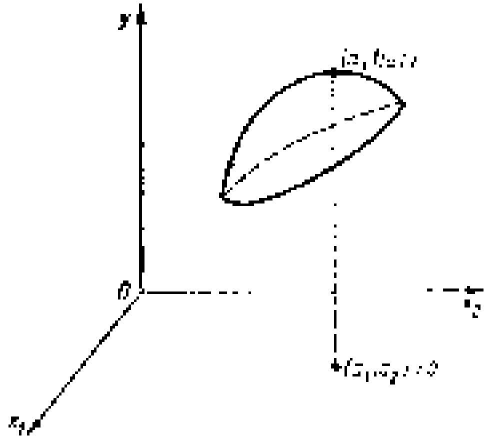

Fig. 9

Dacă forma pătratică $d^2\Phi(a)$ este negativă atunci $f(x_1, ..., x_n) - f(a_1, ..., a_n) \leq 0$ într-o vecinătate a punctului a şi punctul a este punct de maxim. Cele 2 situaţii se prezintă în fig. 8 şi fig. 9 pentru $n = 2$.

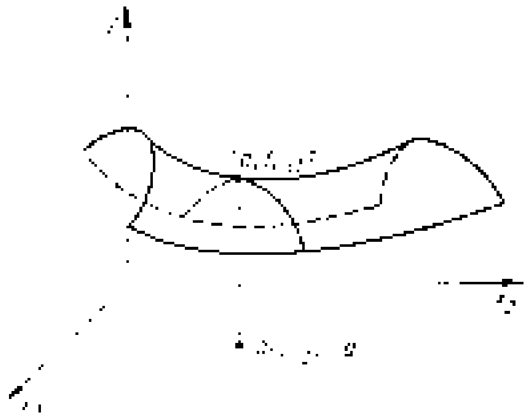

Fig. 10

Se poate întîmpla ca forma pătratică $d^2\Phi(a)$ să fie pozitivă pentru anumite valori ale lui h şi negative pentru altele. Spunem atunci că punctul „a" nu este punct de extrem este punct şa (fig. 10).

Dacă $d^2\Phi = 0$ se apelează la termeni de ordin superior în formula lui Taylor.

Pentru a stabili în ce caz $d^2\Phi$ este pozitiv definită sau negativ definită aplicăm teorema lui Sylvester referitor la forma pătratică (rezultat pe care-l presupunem cunoscut din algebră) şi anume dacă determinanţii:

$$\delta_1 = \frac{\partial^2 f(a)}{\partial x_1^2}, \qquad \delta_2 = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 f(a)}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 f(a)}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \dfrac{\partial^2 f(a)}{\partial x_2 \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 f(a)}{\partial x_2^2} \end{vmatrix}, \ \dots$$

$$\delta_n = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 f(a)}{\partial x_1^2} & \dots & \dfrac{\partial^2 f(a)}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial^2 f(a)}{\partial x_n \partial x_1} & \dots & \dfrac{\partial^2 f(a)}{\partial x_n^2} \end{vmatrix}$$

sînt toţi pozitivi atunci $d^2\Phi > 0$, iar dacă $\delta_1 < 0$, $\delta_2 > 0, \dots \delta_n(-1)^n > 0$ atunci $d^2\Phi < 0$.

Dacă determinanţii δ_k sînt nenuli dar semnele lor variază după o altă regulă atunci punctul a este de tip şa.

Dacă cel puţin unul din determinanţii δ_i se anulează se apelează la derivate de ordin superior din formula Taylor.

Exemplu: Condiţia suficientă de extrem pentru o funcţie $y = f(x_1, x_2)$ este $f''_{x_1^2}(a)\cdot f''_{x_2^2}(a) - f''^2_{x_1x_2}(a) > 0$.

Pentru $f''_{x_1^2}(a) > 0$ punctul „a" este punct de minim.

Pentru $f''_{x_1^2}(a) < 0$ punctul „a" este punct de maxim.

Într-adevăr dacă „a" este un punct staţionar atunci

$$\delta_1 = f''_{x_1^2}, \quad \delta_2 = f''_{x_1^2}f''_{x_2^2} - f''^2_{x_1x_2}$$

şi aplicăm rezultatul enunţat şi rezultatul din formula lui Sylvester.

Cunoscînd modul în care se determină extremele unei funcţii de mai multe variabile putem rezolva următoarea problemă de *ajustare* a *datelor*.

Să presupunem că în studiul unui fenomen se fac măsurători asupra a două caracteristici (presiune, temperatură) pentru care nu se cunoaşte dependenţa teoretică între ele.

Aşezăm aceste date în tabelul:

p_0	p_1	p_2	... p_n
t_0	t_1	t_2	... t_n

Ne interesează să stabilim forma dependenţei

$$p = f(t)$$

După ce se așază punctele de coordonate (t_i, p_i), $i = 1, \ldots, n$ într-un sistem ortogonal de axe se face o apreciere asupra formei funcției f (liniară, exponențială, logaritmică, polinom).

Să presupunem că repartiția punctelor se realizează aproximativ după parabola

$$p = at^2 + bt + c$$

ai cărei coeficienți a, b, c sînt nedeterminați.

Vom determina acești coeficienți astfel încît

$$\varepsilon = \sum_{i=1}^{n} (p(t_i) - p_i)^2$$

să fie minimă.

În acest caz funcția al cărui minim trebuie să-l determinăm este

$$\varepsilon(a, b, c) = \sum_{i=1}^{n} (at_i^2 + bt_i + c - p_i)^2$$

a, b, c se determină din sistemul

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} t_i^2(at_i^2 + bt_i + c - p_i) = 0 \\ \sum_{i=1}^{n} t_i(at_i^2 + bt_i + c - p_i) = 0 \\ \sum_{i=1}^{n} (at_i^2 + bt_i + c - p_i) = 0. \end{cases}$$

Această metodă de ajustare se numește *metoda celor mai mici pătrate* denumire justificată de forma lui ε (ε = eroare).

§ 3. FUNCȚII IMPLICITE

În aplicații se întîlnesc în mod curent situații în care variabila u funcție de argumentele $x, y, \ldots$ este dată de ecuația funcțională

$$F(u, x, y, \ldots) = 0. \tag{9}$$

În acest caz spunem că u este o funcție definită implicit de ecuația (9).

Exemplul 1. Ecuația $y^2 = x^2$ definește funcțiile

$$y(x) = \begin{cases} x, & x \in [\alpha, \beta] \\ -x, & x \in \mathbf{R} - [\alpha, \beta] \end{cases}$$

pe $\mathbf{R}$, pentru orice α și β reali (Fig. 11).

Oricare din aceste funcţii reprezintă o soluţie a ecuaţiei funcţionale $y^2 = x^2$.

Exemplul 2. Ecuaţia $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = z^2$ defineşte în $\mathbf{R}^n$ funcţiile:

$$z(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2} & (x_1, \dots, x_n) \in D \\ -\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2} & (x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n \setminus D \end{cases}$$

oricare ar fi compactul D în $\mathbf{R}^n$.

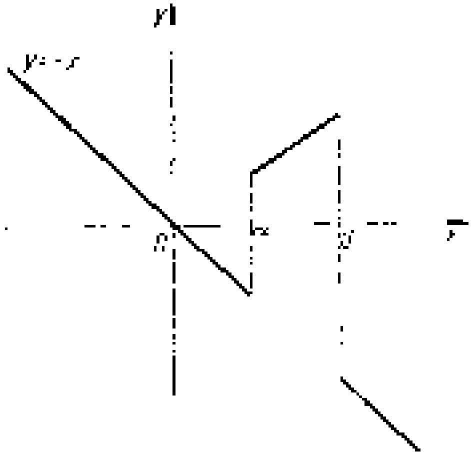

Fig. 12

Oricare din aceste funcţii reprezintă o soluţie a ecuaţiei funcţionale. Problema care se pune este în ce condiţii o asemenea ecuaţie funcţională defineşte o singură funcţie continuă şi derivabilă.

În legătură cu aceasta are loc:

Teorema 1.3. Fie funcţia $F: X \subset \mathbf{R}^{n+1} \to \mathbf{R}$, $(u, x) \in X$, $x = (x_1, \dots, x_n)$.

1) diferenţiabilă într-o vecinătate V a punctului $M_0(u_0, x_0)$,

2) cu derivata $\frac{\partial F}{\partial u}$ continuă în M_0 şi $\left.\frac{\partial F}{\partial u}\right|_{M_0} \neq 0$

3) cu $F(u_0, x_0) = 0$

Atunci pentru orice $\varepsilon > 0$ există o vecinătate V' a punctului $M_0'(x_0)$, $x_0 = (x_{10}, \dots, x_{n0})$ în care să fie definită o singură funcţie $u = \varphi(x_1, \dots, x_n)$ care îndeplineşte condiţia $|u - u_0| < \varepsilon$ şi este soluţie a ecuaţiei

$$F(u, x) = 0$$

Funcţia $u = \varphi(x_1, \dots, x_n)$ astfel determinată este continuă şi diferenţiabilă în V'.

Demonstraţie. Vom demonstra teorema în cazul $x = (x_1, x_2)$. Ecuaţia $F(u, x_1, x_2) = 0$ defineşte în spaţiul $\mathbf{R}^3$ o suprafaţă S şi deoarece $F(u_0, x_{10}, x_{20}) = 0$ punctul M_0 este situat pe suprafaţa S.

Deoarece $\left.\dfrac{\partial F}{\partial u}\right|_{M_0} \neq 0$ vom presupune că $\left.\dfrac{\partial F}{\partial u}\right|_{M_0} > 0$. Această vecinătate o alegem drept o sferă Ω cu raza suficient de mică cu centrul in M_0. Fixăm mai departe numărul pozitiv ε suficient de mic ca fiecare din punctele $M_1(u_0 - \varepsilon, x_{10}, x_{20})$ și $M_2(u_0 + \varepsilon, x_{10}, x_{20})$ să fie situate în sfera Ω.

Funcția $F(u, x_{10}, x_{20})$ ca funcție numai de variabila u pe segmentul $u_0 - \varepsilon \leq u \leq u_0 + \varepsilon$ (pe figură segmentul M_1M_2) este o funcție crescătoare (deoarece $\left.\dfrac{\partial F}{\partial u}\right|_{(x_{10}, x_{20})}$ este pozitivă). Dar $F(u_0, x_{10}, x_{20}) = 0$, deci $F(M_1) < 0$ și $F(M_2) > 0$.

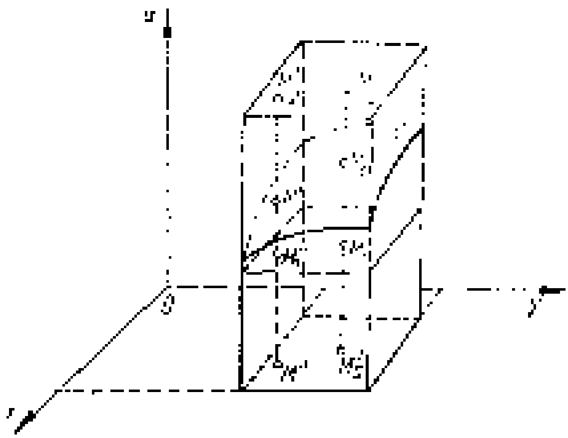

Fig. 12

Dacă avem în vedere funcțiile $F(u_0 - \varepsilon, x_1, x_2)$ și $F(u_0 + \varepsilon, x_1, x_2)$ ca funcții de (x_1, x_2) studiate în planele $u = u_0 - \varepsilon$, $u = u_0 + \varepsilon$ observăm că există 2 vecinătăți V_2' și V_2'' respectiv ale punctelor M_1 și M_2 în care F are același semn ca în punctele M_1 și M_2 (ne bazăm pe faptul că o funcție continuă pozitivă într-un punct păstrează semnul într-o vecinătate a punctului). Să alegem vecinătățile V_1' și V_2' ca fiind 2 pătrate cu centrele în punctele M_1 respectiv M_2 și cu latura 2δ situate în sfera Ω; putem scrie

$$F(u_0 - \varepsilon, x_1, x_2) < 0$$

$$F(u_0 + \varepsilon, x_1, x_2) > 0$$

pentru $|x_1 - x_{10}| < \delta$, $|x_2 - x_{20}| < \delta$. Pentru fiecare δ astfel ales orice punct a spațiului (u, x_1, x_2) a căror coordonate verifică inegalitățile:

$$|x_1 - x_{10}| < \delta, \ |x_2 - x_{20}| < \delta, \ |u - u_0| < \varepsilon$$

va fi situat în sfera Ω.

În acest paralelipiped cu centrul în M_0 derivata $\dfrac{\partial F}{\partial u} > 0$, $F(u_0 - \varepsilon, x_1, x_2) < 0$ și $F(u_0 + \varepsilon, x_1, x_2) > 0$.

Fie $M'(x_1, x_2)$ un punct din mulțimea $|x_1 - x_{10}| < \delta$, $|x_2 - x_{20}| < \delta$ și M_1' și M_2' puncte de intersecție ale dreptei ce trece prin M paralelă cu axa Ou cu bazele paralelipipedului.

Cum $\left.\dfrac{\partial F}{\partial u}\right|_{(u, x_1, x_2)} > 0$ pentru $u_0 - \varepsilon \leq u \leq u_0 + \varepsilon$ atunci $F(u, x_1, x_2)$ crește pe acest segment și din condiția $F(M_1') < 0$, $F(M_2') > 0$ rezultă că în segmentul $u_0 - \varepsilon < u \leq u_0 + \varepsilon$ se găsește un singur u astfel ca $F(u, x_1, x_2) = 0$.

Notăm cu $u = \varphi(x_1, x_2)$ regula care asociază fiecărui punct $M'(x_1, x_2)$ din $|x_1 - x_{10}| < \delta$, $|x_2 - x_{20}| < \delta$ un singur număr u din intervalul $|u_0 - \varepsilon < u < u_0 + \varepsilon$ pentru care $F(u, x_1, x_2) = 0$.

Să arătăm că funcţia $u = \varphi(x_1, x_2)$ este continuă în orice punct $M'(x_1, x_2)$ a vecinătăţii $|x_1 - x_{10}| < \delta$, $|x_2 - x_{20}| < \delta$. Cum orice punct $M'(x_1, x_2)$ din vecinătatea $|x_1 - x_{10}| < \delta$, $|x_2 - x_{20}| < \delta$ îndeplineşte aceleaşi condiţii ca punctul $M_0(x_{10}, x_{20})$ este suficient să arătăm continuitatea funcţiei $u = \varphi(x, y)$ în $M_0(x_{10}, x_{20})$. Dacă alegem ε ca fiind cel de la punctul 1 atunci existenţa lui δ este garantată de inegalităţile:

$$|x_1 - x_{10}| < \delta; \quad |x_2 - x_{20}| < \delta; \quad |u - u_0| < \varepsilon$$

(cu $u_0 = \varphi(x_{10}, x_{20})$) şi astfel continuitatea este stabilită.

Diferenţiabilitatea funcţiei $u = \varphi(x, y)$ în orice punct $M'(x_1, x_2)$ a vecinătăţii $|x_1 - x_{10}| < \delta$, $|x_2 - x_{20}| < \delta$. Este suficient să studiem diferenţiabilitatea în punctul $M_0(x_{10}, x_{20})$.

Pentru a face aceasta să calculăm creşterea totală a funcţiei u în punctul $M_0(x_{10}, x_{20})$ corespunzătoare creşterilor Δx_1, Δx_2 ale argumentelor.

Deoarece $F(u_0, x_{10}, x_{20}) = 0$, $F(u_0 + \Delta u, x_{10} + \Delta x_1, x_{20} + \Delta x_2) = 0$ creşterea funcţiei F în punctul $M_0(u_0, x_{10}, x_{20})$ este zero. Putem scrie:

$$0 = \frac{\partial F}{\partial u}\Big|_{M_0} du + \frac{\partial F}{\partial x_1}\Big|_{M_0} dx_1 + \frac{\partial F}{\partial x_2}\Big|_{M_0} dx_2$$

şi cum $\frac{\partial F}{\partial u}\Big|_{M_0} \neq 0$ rezultă

$$du|_{M_0} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x_1}\Big|_{M_0}}{\frac{\partial F}{\partial u}\Big|_{M_0}} dx_1 - \frac{\frac{\partial F}{\partial x_2}\Big|_{M_0}}{\frac{\partial F}{\partial u}\Big|_{M_0}} dx_2$$

ceea ce demonstrează diferenţiabilitatea funcţiei $u = \varphi(x_1, x_2)$.

Cu aceasta teorema este complet demonstrată.

Demonstraţia se face în acelaşi mod pentru orice n. În ipoteza că derivatele parţiale de ordin superior ale lui F sînt continue rezultă că funcţia $u = \varphi(x, y)$ are derivate parţiale de ordin superior.

Observaţia 2. Punctele în care se anulează toate derivatele parţiale de ordinul I ale funcţiei F se numesc puncte singulare. Astfel dacă $F = x^2 + y^2 - z^2$, $\frac{\partial F}{\partial x} = 2x$; $\frac{\partial F}{\partial y} = 2y$; $\frac{\partial F}{\partial z} = -2z$ punctul $(0, 0, 0)$ este punct singular. Într-un asemenea punct nu se poate aplica teorema de existenţă a funcţiilor implicite.

Funcţii implicite definite de un sistem de ecuaţii funcţionale.

Considerăm sistemul de ecuaţii funcţionale:

$$\begin{cases} F_1(u_1, u_2, \ldots, u_m, x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \\ F_2(u_1, u_2, \ldots, u_m, x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ F_m(u_1, u_2, \ldots, u_m, x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 \end{cases} \quad (10)$$

şi urmărim în ce condiţii funcţiile

$$u_1 = \varphi_1(x_1, \ldots, x_n),\ u_2 = \varphi_2(x_1, \ldots, x_n), \ldots, u_m = \varphi_m(x_1, \ldots, x_n)$$

sînt definite implicit de sistemul (10).

Fie determinantul

$$\frac{D(F_1, F_2, \ldots, F_m)}{D(u_1, u_2, \ldots, u_m)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial u_1} & \frac{\partial F_1}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial u_m} \\ \frac{\partial F_2}{\partial u_1} & \frac{\partial F_2}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial F_2}{\partial u_m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial u_1} & \frac{\partial F_m}{\partial u_2} & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial u_m} \end{vmatrix}$$

pe care îl numim determinantul lui Jacobi sau iacobian.
Are loc

Teorema 2.3. Fie funcţiile $F_i(u, x)$, $u = (u_1, u_2, \ldots, u_m)$ $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$; $i = 1, 2, \ldots, m$ diferenţiabile într-o vecinătate a punctului $M_0(u_0, x_0)$ unde $u_0 = (u_{10}, \ldots, u_{m0})$, $x_0 = (x_{10}, \ldots, x_{n0})$ cu derivatele parţiale de ordinul I, $\frac{\partial F_i}{\partial u_j}$ ($i = 1, \ldots, m$; $j = 1, \ldots, m$) continuă în M_0.

Dacă $F_i(u_0, x_0) = 0$, $i = 1, 2, \ldots, m$ şi $\left.\frac{D(F_1, F_2, \ldots, F_m)}{D(u_1, u_2, \ldots, u_m)}\right|_{M_0} \neq 0$ atunci pentru $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_m$ suficient de mici există o vecinătate a punctului $M_0'(x_{10}, \ldots, x_{n0})$ şi m funcţii: $u_1, u_2, \ldots, u_m$ definite în această vecinătate care verifică condiţiile: $|u_1 - u_{10}| < \varepsilon_1$, $|u_2 - u_{20}| < \varepsilon_2, \ldots, |u_m - u_{m0}| < \varepsilon_m$ şi sînt soluţii ale sistemului de ecuaţii funcţionale.

Această soluţie este continuă şi diferenţiabilă în această vecinătate a punctului M_0'.

Nu vom da demonstraţia acestei teoreme care se bazează pe cea dinainte.

Exemple. 1) Sistemul de ecuaţii funcţionale

$$\begin{cases} x^2 + xz + xyz = 1 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 2 \end{cases}$$

defineşte $z = z(x)$ şi $y = y(x)$ dacă

$$\frac{D(F_1, F_2)}{D(y, z)} = \begin{vmatrix} xz & x + yx \\ 2y & 2z \end{vmatrix} = 2x(z^2 - y - y^2) \neq 0.$$

2) În ce puncte din spaţiu ecuaţia $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^2xz$ defineşte $z = z(x, y)$? În aceste puncte să se calculeze $\frac{\partial z}{\partial x}$.

Vom nota $F(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)^2 - ax^2z$. Condițiile din teorema de existență aplicate funcției F conduc la $\frac{\partial F}{\partial z} = 4z(x^2 + y^2 + z^2) - ax^2 \neq 0$.

Deci, explicitatea are loc peste tot în $\mathbf{R}^2$ mai puțin punctele pentru care

$$x^2 + y^2 + z^2 = \frac{ax^2}{4z}.$$

Înlocuind aceste condiții în ecuația inițială obținem $z = \frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{ax^2}{2}}$ pentru care condiția $F'_z \neq 0$ se reduce la

$$x^2 + y^2 - \frac{3x}{8}\sqrt[3]{2a^2x} \neq 0$$

În punctele din $\mathbf{R}^2$ în care este îndeplinită această condiție, $z = z(x, y)$ și are loc identitatea:

$$(x^2 + y^2 + z^2(x, y))^2 = ax^2z(x, y).$$

Derivînd parțial în raport cu x și y obținem:

$$4(x^2 + y^2 + z^2)\left(x + z\frac{\partial z}{\partial x}\right) = 2axz + ax^2\frac{\partial z}{\partial x}$$

de unde:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{2x(2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - az)}{4z(x^2 + y^2 + z^2) - ax^2}, \ldots$$

§ 4 DEPENDENȚA FUNCȚIONALĂ

Fie sistemul de funcții

$$u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n), \quad f = (f_1, f_2, \ldots, f_m)$$

$u = (u_1, u_2, \ldots, u_m)$, $f_i : D \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$, D mulțimea deschisă.

Definiția 4.1. $u_k = f_k(x_1, \ldots, x_n)$ depinde de celelalte funcții în D dacă pentru toate punctele $(x_1, \ldots, x_n)$ ale domeniului D,

$$u_k = \Phi(u_1, u_2, \ldots, u_{k-1}, u_{k+1}, \ldots, u_m).$$

Dacă nu există o funcție Φ cu această proprietate spunem că $u_1, u_2, \ldots, u_m$ sînt independente în D.

Astfel funcțiile:

$$u_1 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$$
$$u_2 = x_1 + x_2 + x_3$$
$$u_3 = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$$

sînt dependente funcțional în $\mathbf{R}^3$. Legătura între ele este dată de:

$$u_2^2 = u_1 + 2u_3.$$

Teorema 3.2. Fie n funcții de n variabile reale

$$u_1 = \varphi_1(x_1, \ldots, x_k, x_{k+1}, \ldots, x_n)$$

$$u_2 = \varphi_2(x_1, \ldots, x_k, x_{k+1}, \ldots, x_n)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$u_n = \varphi_n(x_1, \ldots, x_k, x_{k+1}, \ldots, x_n)$$

$\varphi_i : D \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$, definite și diferențiabile în vecinătatea punctului $M_0(x_1^0, \ldots, x_n^0)$.
Dacă

$$\left.\frac{D(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)}\right|_{M_0} \neq 0$$

atunci funcțiile $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ sînt independente într-o vecinătate a punctului M_0.

Demonstrație. Demonstrăm prin reducere la absurd. Presupunem că $u_1, u_2, \ldots, u_n$ sînt dependente într-o vecinătate V a punctului M_0 adică una din aceste funcții

$$u_i = \Phi(u_1, u_2, \ldots, u_{i-1}, u_{i+1}, \ldots, u_n) \tag{11}$$

pentru orice $(x_1, \ldots, x_n) \in V$.
Derivînd parțial obținem

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_k} = \frac{\partial \Phi}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial x_k} + \ldots + \frac{\partial \Phi}{\partial u_{i-1}}\frac{\partial u_{i-1}}{\partial x_k} + \frac{\partial \Phi}{\partial u_{i+1}}\frac{\partial u_{i+1}}{\partial x_k} + \ldots + \frac{\partial \Phi}{\partial u_n}\frac{\partial u_n}{\partial x_k}, \quad \begin{array}{l} i = 1, 2, \ldots, n \\ k = 1, 2, \ldots, n \end{array} \tag{12}$$

relație adevărată pentru orice $(x_1, \ldots, x_n) \in V$.
Aceasta arată că coloana i a determinantului funcțional este o combinație a celorlalte coloane și deci $\frac{D(u_1, \ldots, u_n)}{D(x_1, \ldots, x_n)} = 0$ în V, ceea ce contrazice ipoteza făcută.
Vom determina acum o condiție ca m funcții să fie funcțional dependente.
Presupunem că $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m$ sînt definite și derivabile într-o vecinătate V oarecare a punctului $M_0(x_{10}, \ldots, x_{n0})$ unde toate derivatele parțiale de ordinul I sînt continue în punctul M_0.
Formăm matricea:

$$\mathfrak{M} = \begin{Vmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_n} \end{Vmatrix} \tag{13}$$

Are loc

Teorema 2.1. Să presupunem că un minor de ordinul r din această matrice este diferit de zero în punctul $M_0(x_{10}, \ldots, x_{n0})$ şi că toţi minorii de ordinul „$r+1$" sînt nuli într-o vecinătate a punctului M_0.

În aceste condiţii r funcţii ce apar în minorul de ordinul r sînt independente într-o vecinătate a punctului M_0; celelalte $n-r$ funcţii depind de aceste r funcţii.

Demonstraţie. Să presupunem că

$$D = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} & \ldots & \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x_r} \\ \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial x_2} & \ldots & \dfrac{\partial \varphi_2}{\partial x_r} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \dfrac{\partial \varphi_r}{\partial x_1} & \dfrac{\partial \varphi_r}{\partial x_2} & \ldots & \dfrac{\partial \varphi_r}{\partial x_r} \end{vmatrix}_{M_0} \neq 0.$$

Din teorema demonstrată anterior rezultă că $u_1, u_2, \ldots, u_r$ sînt independente într-o vecinătate a punctului M_0.

Vom arăta că fiecare din funcţiile rămase $u_{r+1}, u_{r+2}, \ldots, u_m$ depind de $u_1, \ldots, u_r$, într-o vecinătate a punctului M_0.

Notăm $u_{i0} = \varphi_i(x_{10}, \ldots, x_{n0})$; $i = 1, 2, \ldots, r$

Considerăm sistemul:

$$\begin{cases} \varphi_1(x_1, \ldots, x_n) - u_1 = 0 \\ \varphi_2(x_1, \ldots, x_n) - u_2 = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \varphi_r(x_1, \ldots, x_n) - u_r = 0 \end{cases} \tag{14}$$

În punctul de coordonate $(x_{10}, \ldots, x_{n0}, u_{10}, \ldots, u_{r0})$ aplicăm teorema de existenţă de la sisteme de funcţii implicite.

Deoarece:

$$\left.\frac{D(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_r)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_r)}\right|_{M_0} \neq 0$$

rezultă

$$\begin{cases} x_1 = \psi_1(x_{r+1}, \ldots, x_n, u_1, \ldots, u_r) \\ x_2 = \psi_2(x_{r+1}, \ldots, x_n, u_1, \ldots, u_r) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_r = \psi_r(x_{r+1}, \ldots, x_n, u_1, \ldots, u_r) \end{cases} \tag{15}$$

Derivînd aceste identități parțial în raport cu x_i, $i = r+1, \dots, m$ și observînd că $u_1, u_2, \dots, u_r$ nu depind de $x_{r+1}, \dots, x_m$ vom avea:

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}\dfrac{\partial \psi_1}{\partial x_i} + \dots + \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x_r}\dfrac{\partial \psi_r}{\partial x_i} + \dfrac{\partial \varphi_1}{\partial x_i} = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{\partial \varphi_r}{\partial x_1}\dfrac{\partial \psi_1}{\partial x_i} + \dots + \dfrac{\partial \varphi_r}{\partial x_r}\dfrac{\partial \psi_r}{\partial x_i} + \dfrac{\partial \varphi_r}{\partial x_i} = 0 \end{array}\right. \tag{16}$$

adevărate pentru orice valoare a variabilelor $x_1, \dots, x_r, x_{r+1}, \dots, x_m$ într-o vecinătate a punctului M_0.
Înlocuim în ecuația $u_{r+1} = \varphi_{r+1}(x_1, \dots, x_m)$ și obținem:

$$u_l = \varphi_l(\psi_1(x_{r+1}, \dots, x_m, u_1, \dots, u_r), \psi_2(x_{r+1}, \dots, u_1, \dots, u_r), \dots$$
$$\dots, \psi_r(x_{r+1}, \dots, x_m, u_1, \dots, u_r), x_{r+1}, \dots, x_m)$$

Deci

$$u_l = \Phi_l(x_{r+1}, \dots, x_m, u_1, \dots, u_r); \quad l = r+1, \dots, n$$

În același timp:

$$\left\{\begin{array}{l} u_1 = \varphi_1(\psi_1(x_{r+1}, \dots, x_m, u_1, \dots, u_r), \psi_2(x_{r+1}, \dots, u_r), \dots \\ \qquad\qquad \dots, \psi_r(x_{r+1}, \dots, u_r), x_{r+1}, \dots, x_m) \\ u_2 = \varphi_2(\psi_1(x_{r+1}, \dots, x_m, u_1, \dots, u_r), \psi_2(x_{r+1}, \dots, u_r), \dots \\ \qquad\qquad \dots, \psi_r(x_{r+1}, \dots, u_r), x_{r+1}, \dots, x_m) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ u_n = \varphi_n(\psi_1(x_{r+1}, \dots, x_m, u_1, \dots, u_r), \psi_2(x_{r+1}, \dots, u_r), \dots \\ \qquad\qquad \dots, \psi_r(x_{r+1}, \dots, u_r), x_{r+1}, \dots, x_m) \end{array}\right. \tag{17}$$

de unde derivînd avem:

$$\frac{\partial u_l}{\partial x_i} = \frac{\partial \varphi_l}{\partial x_1}\frac{\partial \psi_1}{\partial x_i} + \dots + \frac{\partial \varphi_l}{\partial x_r}\frac{\partial \psi_r}{\partial x_i} + \frac{\partial \varphi_l}{\partial x_i}$$
$$l = r+1, r+2, \dots, n, \quad i = r+1, \dots, m$$

Rămîne să arătăm că pentru toate valorile $x_1, \dots, x_r, x_{r+1}, \dots, x_m$ dintr-o vecinătate a punctului M_0, funcțiile Φ_l nu depind de $x_{r+1}, x_{r+2}, \dots, x_m$. Arătăm că

$$\frac{\partial \Phi_l}{\partial x_i} = 0 \quad (l, i = r+1, \dots, n)$$

pentru $(x_1, \dots, x_m)$ din vecinătatea lui M_0.

Obţinem:

$$\frac{\partial \Phi_i}{\partial x_j} = \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_j} + \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_2}\cdot\frac{\partial \varphi_2}{\partial x_j} + \dots + \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_r}\cdot\frac{\partial \varphi_r}{\partial x_j} - \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} \tag{18}$$

$$j = r+1,\ r+2, \dots, n.$$

Considerăm minorul de ordinul $r+1$:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_r} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_j} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial \varphi_r}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \varphi_r}{\partial x_r} & \frac{\partial \varphi_r}{\partial x_j} \\ \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_r} & \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} \end{vmatrix} \tag{19}$$

care este nul din ipoteză.

Înmulţind în (18) respectiv cu $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_r, \Delta$, fiind complemenţii algebrici ai elementelor ultimei linii din determinantul (19) şi apoi adunînd aceste relaţii, obţinem:

$$\Delta = \frac{\partial \Phi_i}{\partial x_j}\Delta_r$$

de unde rezultă că $\frac{\partial \Phi_i}{\partial x_j}$ este nulă într-o vecinătate a punctului M_0.

Aceasta arată că funcţiile Φ_i nu depind de x_j, $j = r+1, \dots, n$.

Consecinţă. În cazul particular în care sistemul de funcţii este:

$$\begin{aligned} u_1 &= f_1(x_1, \dots, x_n) \\ u_2 &= f_2(x_1, \dots, x_n) \\ &\dots\dots\dots\dots \\ u_n &= f_n(x_1, \dots, x_n) \end{aligned}$$

cu $(x_1, \dots, x_n) \in D \subset \mathbf{R}^n$ şi $(u_1, \dots, u_n) \in \mathbf{R}^n$, condiţia necesară şi suficientă ca cele n funcţii să fie în dependenţă funcţională în D este ca

$$\frac{D(f_1, f_2, \dots, f_n)}{D(x_1, x_2, \dots, x_n)} = 0.$$

Aceasta rezultă din teoremele 1.4 şi 2.4 în cazul $n = m$.

§ 5. EXTREME CONDIŢIONATE

În aplicaţii apar adeseori situaţii în care se caută extremele unei funcţii ale cărei argumente verifică anumite condiţii suplimentare. Extremele funcţiei în acest caz se numesc extreme legate sau condiţionate.

Să punem problema determinării extremelor funcţiei $u = f(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m)$ supuse condiţiilor:

$$F_i(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m) = 0; \quad i = 1, 2, \ldots, m \tag{20}$$

Definiţia 1.5. Funcţia $u = f(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m)$ supusă la legăturile (20) are un maxim (minim) legat în punctul $M_0(x_{10}, \ldots, x_{n0}, y_{10}, \ldots, y_{m0})$ care verifică relaţiile (20) dacă există o vecinătate V a punctului M_0 astfel că:

$$f(M) \leq f(M_0) \quad (f(M) \geq f(M_0))$$

pentru orice $M \in V$ cu $F_i(M) = 0$, $i = 1, 2, \ldots, m$.

Presupunem că: 1) funcţiile F_i sînt diferenţiabile într-o vecinătate U a punctului M_0.

2) $\dfrac{\partial F_i}{\partial y_j}$; $i = 1, 2, \ldots, m$, $j = 1, 2, \ldots, m$

sînt continue în U

3) $\dfrac{D(F_1, \ldots, F_m)}{D(y_1, \ldots, y_m)} \neq 0$

În aceste condiţii aplicăm teorema de existenţă de la sisteme de funcţii implicite, în baza căreia există o vecinătate W a punctului $M_0'(x_{10}, \ldots, x_{n0})$ a spaţiului $(x_1, \ldots, x_n)$ astfel ca în această vecinătate să fie definite ca funcţii

$$\begin{cases} y_1 = \varphi_1(x_1, \ldots, x_n) \\ y_2 = \varphi_2(x_1, \ldots, x_n) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_m = \varphi_m(x_1, \ldots, x_n) \end{cases} \tag{21}$$

soluţii ale sistemului de condiţii $F_i = 0$, $i = 1, \ldots, m$.

Înlocuind sistemul de funcţii (21) în funcţia $u = f(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m)$ obţinem:

$$u = f[x_1, \ldots, x_n, \varphi_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, \varphi_m(x_1, \ldots, x_n)] = \Phi(x_1, \ldots, x_n). \tag{22}$$

Pentru funcţia Φ astfel obţinută studiem extremele libere.

Vom stabili în continuare condiţiile necesare de extrem pentru funcţia $u = f(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m)$ supusă legăturilor (20) fără să rezolvăm sistemul (20) de ecuaţii funcţionale.

Să presupunem că M_0 este un punct de extrem pentru funcţia $u = f(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m)$ supusă la legăturile (20) sau M_0' este un punct de extrem liber pentru funcţia $u = \Phi(x_1, \ldots, x_n)$.

Condiţia necesară de extrem liber a unei funcţii de mai multe variabile este:

$$du = \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} dx_2 + \ldots + \frac{\partial \Phi}{\partial x_n} dx_n = 0 \tag{23}$$

identic în raport cu $dx_1, dx_2, \ldots, dx_n$.

Avînd în vedere invarianța primei diferențiale față de compunerea funcțiilor obținem:

$$du = \frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}dx_n + \frac{\partial f}{\partial y_1}dy_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial y_m}dy_m = 0 \qquad (24)$$

toate derivatele parțiale fiind luate în punctul M_0.

Relația (24) nu este o identitate în $dy_1, \dots, dy_m$ deoarece funcțiile $y_1, \dots, y_m$ sînt legate prin relațiile (20).

Diferențiem relațiile (20)

$$\begin{cases} \frac{\partial F_1}{\partial x_1}dx_1 + \dots + \frac{\partial F_1}{\partial x_n}dx_n + \frac{\partial F_1}{\partial y_1}dy_1 + \dots + \frac{\partial F_1}{\partial y_m}dy_m = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \frac{\partial F_m}{\partial x_1}dx_1 + \dots + \frac{\partial F_m}{\partial x_n}dx_n + \frac{\partial F_m}{\partial y_1}dy_1 + \dots + \frac{\partial F_m}{\partial y_m}dy_m = 0 \end{cases} \qquad (25)$$

Am presupus că

$$\left.\frac{D(F_1, \dots, F_m)}{D(y_1, \dots, y_m)}\right|_{M_0} \neq 0$$

deci, din sistemul (25) rezultă $dy_1, \dots, dy_m$ în funcție de $dx_1, \dots, dx_n$. Înlocuind în (24) obținem o relație de forma

$$A_1 dx_1 + \dots + A_n dx_n = 0$$

care este o identitate în $dx_1, \dots, dx_n$. Rezultă

$$A_1 = 0,\ A_2 = 0,\ \dots,\ A_n = 0 \qquad (26)$$

relații la care dacă adăugăm relațiile de legătură (20) obținem condițiile necesare de extrem legat

$$A_1 = 0,\ A_2 = 0,\ \dots,\ A_n = 0,\ F_1 = 0,\ \dots,\ F_m = 0. \qquad (27)$$

Metoda multiplicatorilor lui Lagrange

Metoda multiplicatorilor lui Lagrange se bazează pe ideea simetrizării rolului variabilelor din problema extremului legat (variabilele $x_1, \dots, x_n$ sînt independente iar $y_1, \dots, y_m$ sînt legate prin relațiile (20)).

Înmulțim egalitățile (25) respectiv prin constantele $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$, nedeterminate și după înmulțire adunăm cu (24); obținem relația:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_1}dx_1 + \dots + \frac{\partial \Phi}{\partial x_n}dx_n + \frac{\partial \Phi}{\partial y_1}dy_1 + \dots + \frac{\partial \Phi}{\partial y_m}dy_m = 0 \qquad (28)$$

unde

$$\Phi(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) = f + \lambda_1 F_1 + \dots + \lambda_m F_m.$$

Această funcție este *funcția lui Lagrange* iar $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ se numesc *multiplicatorii lui Lagrange*.

Alegem $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ astfel încît să fie îndeplinite egalitățile:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y_1} = 0, \; \frac{\partial \Phi}{\partial y_2} = 0, \ldots, \frac{\partial \Phi}{\partial y_m} = 0 \tag{29}$$

Aceasta o putem face deoarece (29) este echivalent cu sistemul

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial y_1} + \lambda_1 \dfrac{\partial F_1}{\partial y_1} + \ldots + \lambda_m \dfrac{\partial F_m}{\partial y_1} = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{\partial f}{\partial y_m} + \lambda_1 \dfrac{\partial F_1}{\partial y_m} + \ldots + \lambda_m \dfrac{\partial F_m}{\partial y_m} = 0 \end{cases} \tag{30}$$

a cărui determinant este diferit de zero.

Din egalitățile (29), egalitatea (28) capătă forma:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} dx_2 + \ldots + \frac{\partial \Phi}{\partial x_n} dx_n = 0 \tag{31}$$

Deoarece variabilele $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sînt independente, din (31) rezultă

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_1} = 0, \; \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} = 0, \ldots, \frac{\partial \Phi}{\partial x_n} = 0. \tag{32}$$

(32) împreună cu (29) și cu condițiile de legătură (20) conduc la un sistem de $n + 2m$ ecuații:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \Phi}{\partial x_1} = 0, \; \dfrac{\partial \Phi}{\partial x_2} = 0, \ldots, \dfrac{\partial \Phi}{\partial x_n} = 0, \; \dfrac{\partial \Phi}{\partial y_1} = 0, \ldots, \dfrac{\partial \Phi}{\partial y_m} = 0 \\ F_1 = 0, \ldots, F_m = 0 \end{cases} \tag{33}$$

sistem care determină coordonatele punctului staționar și constantele $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$.

Această metodă reduce calculul punctelor staționare legate la calculul punctelor staționare libere pentru funcția lui Lagrange Φ.

Condiții suficiente de extrem legat

Presupunem că M_0 este un punct staționar legat adică un punct în care sînt îndeplinite condițiile necesare de extrem legat. Vom presupune în plus că funcțiile f și F_i, $i = 1, 2, \ldots, m$ admit derivate parțiale de ord. 2 continue în punctul M_0. Observăm că

$$f(M) - f(M_0) = \Phi(M) - \Phi(M_0)$$

deoarece $F_i(M_0) = 0$ și $F_i(M) = 0$, $i = 1, \ldots, m$ și de aici rezultă că determinarea condițiilor suficiente de extrem legat pentru funcția f cu legăturile $F_i = 0$, $i = 1, 2, \ldots, m$ se reduce la determinarea condițiilor suficiente de extrem pentru funcția Φ ceea ce revine la studiul lui $d^2\Phi|_{M_0}$.

Folosind rezultatele de la condițiile suficiente de extrem liber dacă $d^2\Phi|_{M_0} > 0$, punctul M_0 este punct de minim iar dacă $d^2\Phi|_{M_0} < 0$ punctul M_0 este punct de maxim.

Diferențiala de ordinul II a funcției Φ o calculăm ca și cînd funcția Φ depinde de variabilele independente $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m$; în realitate $y_1, y_2, \ldots, y_m$ nu sînt independente ci depind de $x_1, \ldots, x_n$; deci pentru stabilirea semnului lui $d^2\Phi$ vom înlocui $dy_1, \ldots, dy_m$ prin $dx_1, \ldots, dx_n$ din relațiile (25).

Problemele de determinare a extremelor unei funcții atunci cînd variabilele sînt supuse unor legături, constituie de fapt obiectul unei ramuri de matematică modernă în plină dezvoltare: Programarea matematică.

Problema generală a „Programării matematice" poate fi formulată astfel.

Să se determine valorile variabilelor $x_1, x_2, \ldots, x_n$ supuse condițiilor:

$$g_i(x_1, \ldots, x_n) \geq 0, \qquad i = 1, \ldots, k$$

$$h_j(x_1, \ldots, x_n) \leq 0, \qquad j = 1, \ldots, l$$

$$u_s(x_1, \ldots, x_n) = 0, \qquad s = 1, \ldots, p$$

și care maximizează sau minimizează o funcție $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ (F se numește funcție obiectiv).

Numeroase probleme economice și tehnice conduc la asemenea modele: de exemplu: determinarea planului optim a unei întreprinderi care trebuie să se supună unor condiții de forma: consumul de metal să fie limitat superior, consumul de energie electrică limitat superior, valoarea producției la un anumit produs să fie limitată inferior.

În cazul în care funcția F și restricțiile sînt funcții liniare problema enunțată devine o problemă de programare liniară (problema mai exactă generală a programării liniare a fost dată de Dantzig în 1947).

Dacă F este o funcție neliniară se obține o problemă de programare neliniară.

Dacă coeficienții ce apar în funcția F sau în restricții nu sînt constanți ci variază după o anumită lege determinată, problema de programare este parametrică. Dacă coeficienții din F sau din restricții variază aleator atunci problema este de programare stochastică.

Dacă soluțiile care ne interesează sînt numere întregi problema este de programare discretă.

Pentru fiecare din aceste tipuri de probleme există metode specifice ce conduc la algoritmi cu ajutorul cărora se poate folosi calculatorul.

Exemplu. Determinăm extremele funcției

$$u = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$$

cu legătura $x_3 = x_1^2 + x_2^2 - 3$, $x_i > 0$, $i = 1, 2, 3$. Formăm funcția lui Lagrange și căutăm punctele staționare libere ale acesteia.

$$\Phi(x_1, x_2, x_3, \lambda) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \lambda(x_1^2 + x_2^2 - x_3 - 3).$$

Obţinem sistemul

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \Phi}{\partial x_1} = 3x_1^2 + 2\lambda x_1 = 0 \\[2mm] \dfrac{\partial \Phi}{\partial x_2} = 3x_2^2 + 2\lambda x_2 = 0 \\[2mm] \dfrac{\partial \Phi}{\partial x_3} = 3x_3^2 + 2\lambda x_3 = 0 \\[2mm] \dfrac{\partial \Phi}{\partial \lambda} = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 3 = 0 \end{cases}$$

care are soluţia ce îndeplineşte condiţia $x_i > 0$, $i = 1, 2, 3$ dată de:

$$\lambda = -\frac{3}{2}, \quad x_1 = x_2 = x_3 = 1.$$

Pentru a stabili dacă acesta este punct de extrem calculăm semnul lui $d^2\Phi$. Avem

$$d^2\Phi = (6x_1 + 2\lambda)\,dx_1^2 + (6x_2 + 2\lambda)\,dx_2^2 + (6x_3 + 2\lambda)\,dx_3^2.$$

În punctul staţionar obţinem:

$$d^2\Phi_{M_0} = 3(dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2).$$

Ţinînd seama de legătură avem

$$dx_1 + dx_2 + dx_3 = 0$$

deci

$$dx_3 = -(dx_1 + dx_2) \text{ de unde rezultă}$$

$$d^2\Phi_{M_0} = 3[dx_1^2 + dx_2^2 + (dx_1 + dx_2)^2] > 0$$

deci punctul M_0 este punct de minim.

§ 6. TRANSFORMĂRI PUNCTUALE ÎN $\mathbf{R}^n$

Fie $y = f(x)$, $f: X \subset \mathbf{R}^n \to Y \subset \mathbf{R}^m$. Spunem că Y este imaginea sau transformata mulţimii X prin f.

Exemple: 1) Funcţia vectorială:

$$y = (r \sin\theta \cos\varphi,\ r \sin\theta \sin\varphi,\ r\cos\theta)$$

transformă mulţimea $0 \leq r \leq a$, $0 \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ din $\mathbf{R}^3$ în sferă închisă de rază $r = a$ din $\mathbf{R}^3$ (Fig. 13, *a*).

Semnificaţiile lui r, θ, φ sînt date în figura 13, *b*.

Coordonatele (r, θ, φ) se numesc coordonatele sferice ale punctului $M(y_1, y_2, y_3)$.

2) Funcţia vectorială

$$y = (\rho\cos\theta,\ \rho\sin\theta,\ \lambda)$$

transformă mulţimea: $0 \leqslant \rho \leqslant a$, $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$, $0 \leqslant \lambda \leqslant b$ în cilindrul drept de ecuaţie $x^2 + y^2 = a^2$, $0 \leqslant z \leqslant b$. Transformarea este reprezentată în figura 13, c.

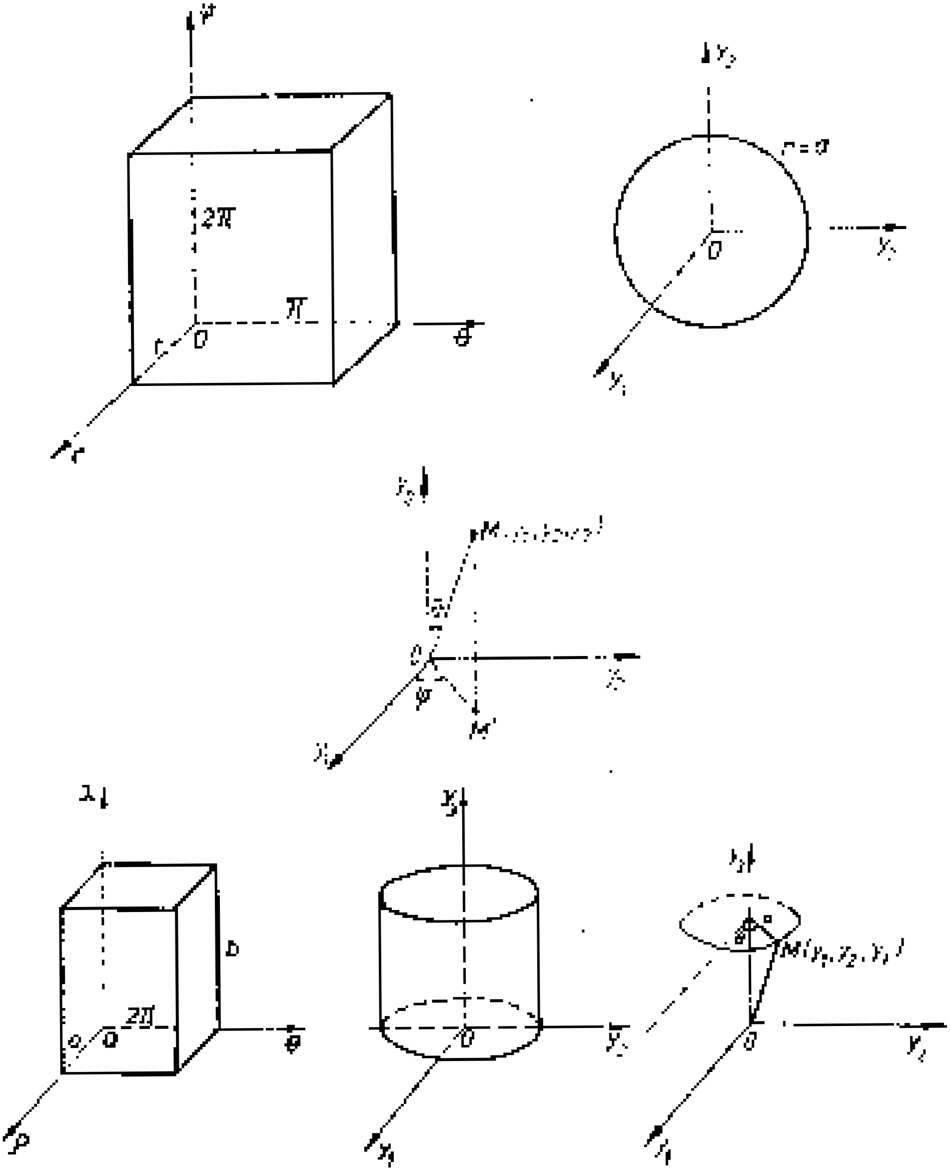

Fig. 13, a, b, c, d.

Legătura între ρ, θ, λ şi y_1, y_2, y_3 este ilustrată în figura 13, d.

Coordonatele (ρ, θ, λ) se numesc coordonate cilindrice ale punctului $M(y_1, y_2, y_3)$.

Definiția 1.6. Fie $y = \mathbf{f}(x)$, $x \in X \subset \mathbf{R}^n \to y \in Y \subset \mathbf{R}^n$ și $x_0 \in \mathring{X}$.

Transformarea $y = \mathbf{f}(x)$, $x \in X$ este regulată în punctul x_0 dacă

1) funcția $\mathbf{f} = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$ are derivate parțiale continue într-o vecinătate V a punctului x_0.

2) determinantul asociat matricei Jacobi este:

$$\left(\frac{D(f_1, f_2, \ldots, f_n)}{D(x_1, \ldots, x_n)}\right)_{x_0} \neq 0$$

O transformare regulată în fiecare punct dintr-un domeniu D se numește regulată în D.
Are loc

Teorema 1.6. Compunerea a 2 transformări regulate este o transformare regulată.

Demonstrație. Fie $y = \mathbf{f}(x)$, $\mathbf{f}: X \subset \mathbf{R}^n \to Y \subset \mathbf{R}^n$ o transformare regulată în punctul x_0 și $u = g(y)$, $g: Y \subset \mathbf{R}^n \to U \subset \mathbf{R}^n$ o altă transformare regulată în $y_0 = \mathbf{f}(x_0)$ $(\mathbf{f} = (f_1, \ldots, f_n)$, $g = (g_1, \ldots, g_n))$.

Compunerea funcțiilor $\mathbf{f}$ și g ne conduce la a considera transformarea

$$u = g(\mathbf{f}(x)),\ x \in X \subset \mathbf{R}^n \to u \in U \subset \mathbf{R}^n.$$

Arătăm că $u = g(\mathbf{f}(x))$ este o transformare regulată în $x_0 \in X$ $(u = (u_1, u_2, \ldots, u_n))$.

Din regula de derivare a funcțiilor compuse obținem că matricea Jacobi a derivatei lui $u(x)$ este:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial u_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial u_2}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial u_n}{\partial x_1} & \frac{\partial u_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial u_n}{\partial x_n} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial y_1} & \frac{\partial g_1}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial y_n} \\ \frac{\partial g_2}{\partial y_1} & \frac{\partial g_2}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial g_2}{\partial y_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial g_n}{\partial y_1} & \frac{\partial g_n}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial g_n}{\partial y_n} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_2}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial y_n}{\partial x_1} & \frac{\partial y_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

de unde rezultă că $\frac{\partial x_i}{\partial x_k} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial x_i}{\partial y_j}\frac{\partial y_j}{\partial x_k}$ şi deci derivatele parţiale $\frac{\partial x_i}{\partial y_k}$ sînt continue.

De asemenea, luînd în egalitatea matricelor anterioare determinanţii obţinem:

$$1 = \frac{D(x_1, x_2, \dots, x_n)}{D(x_1, x_2, \dots, x_n)} = \frac{D(x_1, \dots, x_n)}{D(y_1, \dots, y_n)} \cdot \frac{D(y_1, \dots, y_n)}{D(x_1, \dots, x_n)}.$$

În legătură cu posibilitatea existenţei inversei unei funcţii vectoriale de variabilă vectorială are loc:

Teorema 2.6. Dacă $y = f(x)$, $x \in X \subset \mathbf{R}^n \to y \in Y \subset \mathbf{R}^n$ este o transformare regulată în $x_0 \in X$ atunci există o transformare $x = \varphi(y)$, definită într-o vecinătate $V(y_0)$, $y_0 = f(x_0)$ astfel încît:

1) $x = \varphi(y)$ este o transformare regulată în y_0;

$$2)\ \left(\frac{D(\varphi_1, \dots, \varphi_n)}{D(y_1, \dots, y_n)}\right)_{y_0} = \frac{1}{\left(\frac{D(f_1, \dots, f_n)}{D(x_1, \dots, x_n)}\right)_{x_0}}.$$

Transformarea $x = \varphi(y)$ se numeşte *transformare inversă*.

Demonstraţie. Sistemului de funcţii $F(x) = f(x) - y$, $x \in X$ îi aplicăm teorema de existenţă a funcţiilor implicite.

Condiţiile sînt îndeplinite deoarece:

a) $F(x_0) = f(x_0) - y_0 = 0$ unde $y_0 = (f_1(x_0), \dots, f_n(x_0))$;

b) $F(x)$ are derivate parţiale continue în raport cu x într-o vecinătate a punctului x_0 deoarece f are derivate parţiale continue;

$$c)\ \left(\frac{D(F_1, F_2, \dots, F_n)}{D(x_1, x_2, \dots, x_n)}\right)_{x_0} = \left(\frac{D(f_1, \dots, f_n)}{D(x_1, \dots, x_n)}\right)_{x_0} \neq 0.$$

În baza teoremei de la sisteme de funcţii implicite există o funcţie $x = \varphi(y)$, $y \in V(y_0)$ astfel încît $y = f(\varphi(y))$, $\forall y \in V(y_0)$ ($\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)$, $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)$).

Derivînd în sistemul $y = f(\varphi(y))$ în raport cu y şi folosind regula de derivare a funcţiilor compuse obţinem pentru $x \in V(x_0)$:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_1} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_n} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial y_1} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial \varphi_2}{\partial y_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial \varphi_n}{\partial y_1} & \frac{\partial \varphi_n}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial \varphi_n}{\partial y_n} \end{vmatrix}$$

de unde rezultă luând determinanții că

$$1 = \frac{D(f_1, \dots, f_n)}{D(y_1, \dots, y_n)} \cdot \frac{D(\varphi_1, \dots, \varphi_n)}{D(x_1, \dots, x_n)}.$$

Schimbări de variabile

Schimbarea variabilelor independente la funcțiile de o variabilă.

Fie $y = f(x)$, $x \in X \subset \mathbb{R} \to y \in Y \subset \mathbb{R}$ și funcția $x = \varphi(t)$, $t \in T$, f, φ ...
Funcția compusă

$$y = f[\varphi(t)], \quad t \in T$$

realizează o aplicație a mulțimii X în mulțimea Y.

Aplicând regula de derivare a unei funcții compuse obținem:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{df}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}$$

de unde rezultă

$$\frac{df}{dx} = \frac{dy}{dt} : \frac{d\varphi}{dt} \quad (\varphi(t) = x)$$

relație care exprimă derivata $\frac{df}{dx}$ prin derivata $\frac{dy}{dt}$.

Regula cu care se calculează derivatele de ordin superior este dată de:

$$\frac{d}{dx} = \frac{1}{\varphi'(t)} \cdot \frac{d}{dt}.$$

Deci

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{\varphi'(t)} \cdot \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\varphi'(t)} \cdot \frac{dy}{dt}\right) = \frac{1}{\varphi'(t)}\left(-\frac{\varphi''}{\varphi'^2} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{1}{\varphi'} \cdot \frac{d^2y}{dt^2}\right).$$

Exemplu. În ecuația $(1 - x^2)y'' - xy' = 0$ să se facă schimbarea de variabilă $x = \cos t$, $t \in (0, \pi)$.

Avem: $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx}$, $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\sin t} \cdot \frac{dy}{dt}$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{\sin t} \cdot \frac{d}{dt}\left(-\frac{1}{\sin t} \cdot \frac{dy}{dt}\right) =$$

$$= -\frac{1}{\sin t}\left(-\frac{1}{\sin t} \cdot \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{\cos t}{\sin^2 t} \cdot \frac{dy}{dt}\right) = \frac{1}{\sin^2 t} \cdot \frac{d^2y}{dt^2} - \frac{\cos t}{\sin^3 t} \cdot \frac{dy}{dt}.$$

Înlocuind în ecuaţie obţinem:

$$\frac{d^2y}{dt^2} - 2\,\mathrm{ctg}\,t\,\frac{dy}{dt} = 0$$

Schimbarea variabilelor independente la funcţiile de două variabile

Fie funcţia $z = f(x, y)$; $f: X \subset \mathbf{R}^2 \to Z \subset \mathbf{R}$ şi funcţiile $x = \varphi(u, v)$, $y = \psi(u, v)$ definite pe $V \subset \mathbf{R}^2$, $(x, y) \in X$, $f, \varphi, \psi \in C^{(2)}$.

Din compunerea funcţiilor f, φ şi ψ rezultă $Z(u, v) = f(\varphi(u, v), \psi(u, v))$.

Aplicînd regula de derivare a unei funcţii compuse avem:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial u} = \dfrac{\partial f}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial \varphi}{\partial u} + \dfrac{\partial f}{\partial y}\cdot\dfrac{\partial \psi}{\partial u} \\[2ex] \dfrac{\partial z}{\partial v} = \dfrac{\partial f}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial \varphi}{\partial v} + \dfrac{\partial f}{\partial y}\cdot\dfrac{\partial \psi}{\partial v} \end{cases}$$

de unde:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\begin{vmatrix} \dfrac{\partial z}{\partial u} & \dfrac{\partial \psi}{\partial u} \\[2ex] \dfrac{\partial z}{\partial v} & \dfrac{\partial \psi}{\partial v} \end{vmatrix}}{\dfrac{D(\varphi, \psi)}{D(u, v)}} = \frac{\dfrac{\partial \psi}{\partial v}}{D}\cdot\frac{\partial z}{\partial u} - \frac{\dfrac{\partial \psi}{\partial u}}{D}\cdot\frac{\partial z}{\partial v}$$

şi la fel

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\dfrac{\partial \varphi}{\partial u}}{D}\cdot\frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\dfrac{\partial \varphi}{\partial v}}{D}\cdot\frac{\partial z}{\partial u}.$$

Pentru calculul derivatelor de ordinul 2 se folosesc operatorii

$$\frac{\partial \cdot}{\partial x} = \frac{\dfrac{\partial \psi}{\partial v}}{D}\cdot\frac{\partial \cdot}{\partial u} - \frac{\dfrac{\partial \psi}{\partial u}}{D}\cdot\frac{\partial \cdot}{\partial v}$$

$$\frac{\partial \cdot}{\partial y} = \frac{\dfrac{\partial \varphi}{\partial u}}{D}\cdot\frac{\partial \cdot}{\partial v} - \frac{\dfrac{\partial \varphi}{\partial v}}{D}\cdot\frac{\partial \cdot}{\partial u}.$$

Exemplu. Să se calculeze $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, dacă se face schimbarea de variabile $x = u^2 + v^2$, $y = uv$, $z \in C^{(2)}$.
Avem:

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot 2u + v \frac{\partial z}{\partial y},$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot 2v + u \frac{\partial z}{\partial y},$$

şi cum

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{u}{2(u^2 - v^2)} \frac{\partial z}{\partial u} - \frac{v}{2(u^2 - v^2)} \frac{\partial z}{\partial v},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{u}{u^2 - v^2} \frac{\partial z}{\partial v} - \frac{v}{u^2 - v^2} \frac{\partial z}{\partial u}$$

urmează că

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{u}{2(u^2 - v^2)} \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{u}{u^2 - v^2} \frac{\partial z}{\partial v} - \frac{v}{u^2 - v^2} \frac{\partial z}{\partial u}\right) -$$

$$- \frac{v}{2(u^2 - v^2)} \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{u}{u^2 - v^2} \frac{\partial z}{\partial v} - \frac{v}{u^2 - v^2} \frac{\partial z}{\partial u}\right) =$$

$$= -\frac{uv}{2(u^2 - v^2)^2}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\right) + \frac{u^2 + v^2}{2(u^2 - v^2)^2} \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} +$$

$$+ \frac{v(3u^2 + v^2)}{2(u^2 - v^2)^3} \frac{\partial z}{\partial u} - \frac{u(3v^2 + u^2)}{2(u^2 - v^2)^3} \frac{\partial z}{\partial v}.$$

Transformarea punctuală a curbelor plane

Fie $u = f(x, y)$, $v = g(x, y)$ o transformare a curbei $C: y = \varphi(x) \to$ $\to \Gamma: v = \psi(u)$.

Diferenţiind obţinem:

$$du = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$$

$$dv = \frac{\partial g}{\partial x} dx + \frac{\partial g}{\partial y} dy$$

de unde

$$\frac{dv}{du} = \frac{\dfrac{\partial g}{\partial x} + \dfrac{\partial g}{\partial y}\, y'}{\dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial y}\, y'},$$

relație din care scoatem valoarea lui y' în funcție de u, v și $v'(u)$.

Exemplu: Să se transforme relația

$$y'' + xy'^3 = 0$$

prin schimbarea $x = \rho \cos t$, $y = \rho \sin t$; $\rho = \rho(t)$.
Ținînd seama că

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\rho' \sin t + \rho \cos t}{\rho' \cos t - \rho \sin t}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{\rho' \sin t + \rho \cos t}{\rho' \cos t - \rho \sin t}\right) = \frac{1}{\rho' \cos t - \rho \sin t}\cdot$$

$$\cdot \frac{d}{dt}\left(\frac{\rho' \sin t + \rho \cos t}{\rho' \cos t - \rho \sin t}\right) = \frac{2\rho'^2 - \rho\rho'' + \rho^2}{(\rho' \cos t - \rho \sin t)^3},$$

ecuația dată devine:

$$2\rho'^2 - \rho\rho'' + \rho^2 + \rho \cos t (\rho' \sin t + \rho \cos t)^3 = 0$$

Transformarea punctuală a suprafețelor

O transformare punctuală

$$u = f(x, y, z),\ v = g(x, y, z),\ w = h(x, y, z)$$

cu f, g, h definite pe $X \subset \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$, $f, g, h \in C^1$ transformă relația $z = \varphi(x, y)$ în relația $w = \psi(u, v)$.

Diferențiind relațiile de mai sus obținem

$$du = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz$$

$$dv = \frac{\partial g}{\partial x} dx + \frac{\partial g}{\partial y} dy + \frac{\partial g}{\partial z} dz$$

$$dw = \frac{\partial h}{\partial x} dx + \frac{\partial h}{\partial y} dy + \frac{\partial h}{\partial z} dz$$

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$$

$$dw = \frac{\partial w}{\partial u} du + \frac{\partial w}{\partial v} dv.$$

Eliminînd du, dv între aceste relaţii obţinem:

$$\frac{\partial w}{\partial u}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\,dx+\frac{\partial f}{\partial y}\,dy+\frac{\partial f}{\partial z}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\,dx+\frac{\partial z}{\partial y}\,dy\right)\right)+$$

$$+\frac{\partial w}{\partial v}\left(\frac{\partial g}{\partial x}\,dx+\frac{\partial g}{\partial y}\,dy+\frac{\partial g}{\partial z}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\,dx+\frac{\partial z}{\partial y}\,dy\right)\right)=$$

$$=\frac{\partial h}{\partial x}\,dx+\frac{\partial h}{\partial y}\,dy+\frac{\partial h}{\partial z}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\,dx+\frac{\partial z}{\partial y}\,dy\right)$$

de unde egalînd coeficienţii lui dx şi dy rezultă expresiile lui $\frac{\partial z}{\partial x}$ şi $\frac{\partial z}{\partial y}$ în funcţie de u, v, w şi $\frac{\partial w}{\partial u}$, $\frac{\partial w}{\partial v}$.

Exemplu: Să se transforme relaţia

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=z,\quad z=z(x,y)$$

dacă se face schimbarea: $x+z=u$, $y+z=v$, $x+y=w$, $w=w(u,v)$. Avem:

$$dx+\frac{\partial z}{\partial x}\,dx+\frac{\partial z}{\partial y}\,dy=du$$

$$dy+\frac{\partial z}{\partial x}\,dx+\frac{\partial z}{\partial y}\,dy=dv$$

$$dx+dy=\frac{\partial w}{\partial u}\,du+\frac{\partial w}{\partial v}\,dv$$

Eliminînd pe du şi dv obţinem:

$$dx+dy=\frac{\partial w}{\partial u}\left(dx+\frac{\partial z}{\partial x}\,dx+\frac{\partial z}{\partial y}\,dy\right)+$$

$$+\frac{\partial w}{\partial v}\left(dy+\frac{\partial z}{\partial x}\,dx+\frac{\partial z}{\partial y}\,dy\right)$$

de unde:

$$1=\frac{\partial w}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial x}\left(\frac{\partial w}{\partial u}+\frac{\partial w}{\partial v}\right)$$

$$1=\frac{\partial w}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial y}\left(\frac{\partial w}{\partial u}+\frac{\partial w}{\partial v}\right)$$

sau

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1 - \dfrac{\partial w}{\partial u}}{\dfrac{\partial w}{\partial u} + \dfrac{\partial w}{\partial v}},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1 - \dfrac{\partial w}{\partial v}}{\dfrac{\partial w}{\partial u} + \dfrac{\partial w}{\partial v}}.$$

Înlocuind în ecuație aceasta devine:

$$(u + w - v)\frac{\partial w}{\partial u} + (w + v - u)\frac{\partial w}{\partial v} = 3w - u - v.$$

Exerciții propuse

1. Să se calculeze dz pentru funcția $z(x, y) = f\left(\dfrac{x}{y}, xy\right)$ unde $f: D \subset \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, f derivabilă în D.

2. Folosind formula lui Taylor să se calculeze cu aproximație $\sqrt[3]{1,02^2 + 0,05^2}$.

Ind. Se consideră funcția $f(x, y) = \sqrt[3]{x^2 - y^2}$ care se dezvoltă în jurul punctului $(1, 0)$.

3. Să se calculeze $E = \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ dacă $z(x, y) = \ln(u^2(x, y) + v^2(x, y))$, $u(x, y) = xy$ și $v(x, y) = x^2 - y^2$.

4. Să se calculeze derivata funcției

$$u(x, y, z) = \arcsin \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

după direcția vectorului $\overline{AB}$, $A(1, 1, 1)$, $B(2, 3, -2)$.

5. Să se determine extremele funcțiilor

$$z(x, y) = (x^2 + y^2)\, e^{-(x^2 + y^2)}$$

R: $z_{min} = 0$

$$z(x, y) = \sqrt{(a - x)(a - y)(x + y - a)}$$

R: $z_{max} = \dfrac{a\sqrt{3a}}{9}$.

6) Să se determine extremele funcţiilor de mai mult de 2 variabile

$$u(x, y, z) = \frac{1}{x} + \frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{z} + \frac{z^2}{4}\ ;\ x > 0,\ y > 0,\ z > 0$$

$$R:\ u_{min} = \frac{15}{4} \cdot \sqrt[5]{\frac{1}{4}}$$

$$w(x_1, x_2, x_3) = x_1 \cdot x_2^2 \cdot x_3^3 (1 - x_1 - 2x_2 - 3x_3)$$

$$R:\ w_{max} = \left(\frac{1}{7}\right)^7$$

7) Ecuaţia $\ln \operatorname{tg} \frac{y}{x} - \frac{y}{x} = 1$ defineşte în anumite condiţii $y = y(x)$. Care sînt aceste condiţii ? Să se calculeze în acest caz y'.

$$R:\ y' = \frac{y}{x}$$

8) În ce condiţii ecuaţia $z = x + \operatorname{arctg} \frac{y}{z - x}$ defineşte $z = z(x, y)$? Să se determine în aceste condiţii $\frac{\partial z}{\partial x}$.

$$R:\ \frac{\partial z}{\partial x} = 1$$

9) Sistemul de ecuaţii funcţionale:

$$\begin{cases} x^2 + yz + z^2 = xy \\ xz + yz^2 = 2 \end{cases}$$

defineşte $y = y(x)$ şi $z = z(x)$. Să se calculeze dz şi dy.

10) Să se studieze extremele funcţiei: $z = z(x, y)$ definită de ecuaţia funcţională

$$x^2 + y^2 + z^2 - xz - yz + 2x + 2y + 2z - 2 = 0$$

11) Să se determine extremele funcţiei

$$z(x, y) = x^2 + y^2 \text{ în discul } (x - \sqrt{2})^2 + (y - \sqrt{2})^2 \leq 9$$

Ind. Se studiază extremele libere ale funcţiei z şi se aleg acele puncte de extrem situate în disc. Apoi se studiază extremele funcţiei z supusă la legătura $(x - \sqrt{2})^2 + (y - \sqrt{2})^2 = 9$.

12) Extremele funcţiei $u(x, y, z) = xyz$ dacă

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ x + y + z = 0.$$

R: 3 puncte de minim şi 3 puncte de maxim

$$u_{min} = -\frac{1}{3\sqrt{6}},\quad u_{max} = \frac{1}{3\sqrt{6}}.$$

13. Să se determine distanța între dreptele

$$D_1: \frac{x - x_1}{l_1} = \frac{y - y_1}{m_1} = \frac{z - z_1}{n_1}$$

$$D_2: \frac{x - x_2}{l_2} = \frac{y - y_2}{m_2} = \frac{z - z_2}{n_2}.$$

14. Să se inscrie într-un con circular drept dat un paralelipiped dreptunghic de volum maxim.

15. Să se transforme expresia:

$$E = y\sqrt{1 + y'^2} \ [illegible]$$

cînd se face transformarea:

$$u = \frac{y}{x^2 + y^2}, \ [illegible] \ \frac{x^2 + y^2}{x} \ [illegible]$$

16. Să se transforme ecuația [illegible] prin schimbarea: [illegible]

17. Să se transforme ecuația [illegible] $\frac{2}{y}$ [illegible] $= 0$ prin schimbarea [illegible]

18. Să se transforme expresia:

$$\Delta z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

dacă $x = \rho \cos \theta$, $y = \rho \sin \theta$, $z = f(\rho, \theta)$.

CAPITOLUL IV

ȘIRURI ȘI SERII DE FUNCȚII

Folosirea șirurilor de funcții și, în special a seriilor de puteri apare necesară adesea în rezolvarea unor probleme tehnice. Studiul lor se face pe baza cunoștințelor de la serii de numere.

§ 1. ȘIRURI DE FUNCȚII

Definiția 1.1. Numim șir de funcții $f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots$ o aplicație a mulțimii $\mathbf{N}$, a numerelor naturale în mulțimea funcțiilor definite în $X \subset \mathbf{R}^m$ cu valori în $\mathbf{R}^p$.

Vom nota un șir de funcții prin $(f_n)_{n \in N}$. Dacă fixăm pe $x = x_0 \in X \subset R^m$, șirul obținut este un șir de numere:

$$f_1(x_0), f_2(x_0), \ldots, f_n(x_0), \ldots$$

care poate fi convergent sau nu, în sensul definiției date la șirurile numerice.

Vom da următoarea:

Definiția 1.2. Punctul $x_0 \in X$ este punct de convergență al șirului $(f_n)_{n \in N}$ dacă șirul valorilor $(f_n(x_0))_{n \in N}$ este un șir din $\mathbf{R}^p$ convergent.

Mulțimea A a elementelor $x \in X$ pentru care șirurile $(f_n(x))_{n \in N}$ sînt convergente se numește *mulțime de convergență* a șirului de funcții.

Exemplul 1. Șirul de funcții $(f_n)_{n \in N}$ cu

$$f_n(x) = \sqrt{\frac{n}{2\pi}}\, e^{-\frac{nx^2}{2}}, \quad x \in \mathbf{R}$$

este convergent pentru orice $x \neq 0$ deoarece

$$\lim_{\substack{n \to \infty \\ x \neq 0}} f_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{n \to \infty} \frac{\sqrt{n}}{e^{\frac{nx^2}{2}}} = 0.$$

Cînd $x = 0$, $f_n(0) = \sqrt{\frac{n}{2\pi}}$ și $\lim\limits_{n \to \infty} f_n(0) = \infty$.

Deci mulțimea de convergență $A = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$. Aceste funcții apar în fizică, în teoria ondulatorie a luminii.

2. Şirul $(f_n)_{n\in N}$ cu $f_n(x) = x^n$, $x\in[0,1]$ converge în $[0,1]$ către funcţia f definită prin

$$f(x)=\begin{cases}0, & x<1\\ 1, & x=1\end{cases}$$

Avînd în vedere aceste observaţii dăm următoarea:

Definiţia 3.1. Şirul $(f_n)_{n\in N}$ cu $f_n: X\subset \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^k$ este convergent către f în X dacă pentru orice $\varepsilon>0$, există $n_0(\varepsilon, x)\in N$ astfel încît pentru $n>n_0$,

$$\| f_n - f \| < \varepsilon.$$

Observaţie. Definiţia 3 exprimă faptul că şirurile obţinute pentru diferitele valori ale lui $x\in X$ sînt convergente.

Dacă cerem ca în definiţia 3, n_0 să depindă numai de ε obţinem noţiunea de convergenţă uniformă. Dăm:

Definiţia 4.1. Şirul $(f_n)_{n\in N}$, $f_n: X\subset \mathbf{R}^n\to \mathbf{R}^1$ converge uniform pe X către f dacă pentru orice $\varepsilon>0$, există $n_0(\varepsilon)$ astfel încît pentru orice $x\in X$,

$$\| f_n(x) - f(x) \| < \varepsilon$$

dacă $n\geq n_0(\varepsilon)$.

1. Şirul $(f_n)_{n\in N}$, $f_n: \mathbf{R}\to \mathbf{R}$ definit prin $f_n(x) = x^n$, $x\in[0,1]$ nu este uniform convergent deoarece pentru $x_n = 1-\frac{1}{n}\in[0,1]$, şirul $(f_n(x_n))_{n\in N}$ cu $f_n(x_n) = \left(1-\frac{1}{n}\right)^n$ converge către $\frac{1}{e}$ şi $\left|\left(1-\frac{1}{n}\right)^n - f\left(1-\frac{1}{n}\right)\right|$ nu poate fi făcut oricît de mic deoarece converge la $\frac{1}{e}$ (fig. 14).

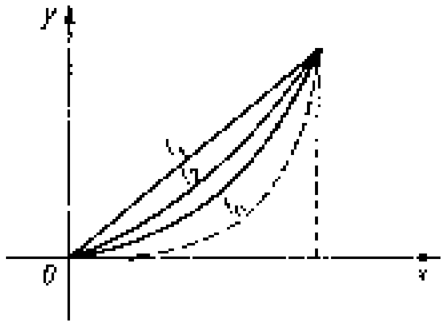

Fig. 14

2. Şirul $(f_n)_{n\in N}$ cu $f_n(x) = \frac{x^4}{x^4+n^4}$, $x\in(-1,\infty)$, nu este uniform convergent către funcţia $f(x)=0$ deoarece pentru $x_n = n\in(-1,\infty)$,

$$|f_n(n) - f(n)| = \frac{1}{2}$$

şi deci această diferenţă nu poate fi făcută oricît de mică (fig. 15).

Observaţie. Un şir de funcţii uniform convergent este şi simplu convergent. Reciproca nu este adevărată.

Vom prezenta în continuare criterii de convergenţă uniformă care ne permit să decidem dacă un şir este uniform convergent fără să-i cunoaştem limita.

Are loc

Teorema 1.1. (Criteriul de convergență uniformă a lui Cauchy.) Condiția necesară și suficientă ca șirul $\mathbf{f}_n$ cu $\mathbf{f}_n(x): X \subset \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^k$ să fie uniform convergent în X este ca pentru orice $\varepsilon > 0$, să existe $n_0(\varepsilon)$ astfel încît pentru $n > n_0(\varepsilon)$ și $p \geq 1$,

$$\| \mathbf{f}_{n+p}(x) - \mathbf{f}_n(x) \| < \varepsilon.$$

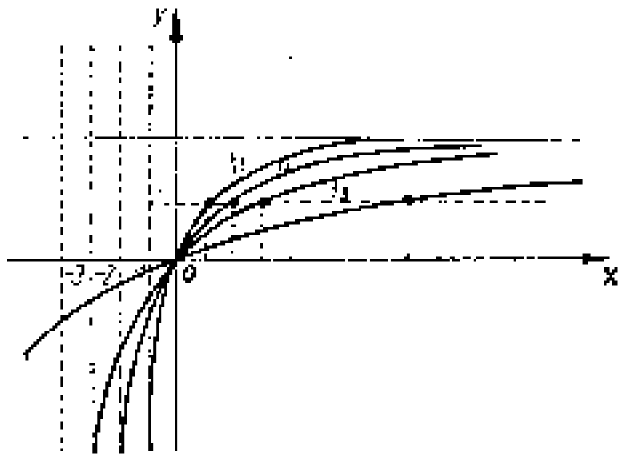

Fig. 15

Demonstrație. Presupunem $\mathbf{f}_n \xrightarrow{u.c.} \mathbf{f}$, $x \in X$ deci pentru orice $\varepsilon > 0$, există $n_0(\varepsilon)$, astfel încît

$$\| \mathbf{f}_n(x) - \mathbf{f}(x) \| < \varepsilon \text{ pentru } n > n_0(\varepsilon).$$

La fel $\qquad \| \mathbf{f}_{n+p}(x) - \mathbf{f}(x) \| < \varepsilon$ pentru $p \geq 1$.

Rezultă

$$\| \mathbf{f}_{n+p}(x) - \mathbf{f}_n(x) \| \leq \| \mathbf{f}_{n+p}(x) - \mathbf{f}(x) \| + \| \mathbf{f}(x) - \mathbf{f}_n(x) \| < 2\varepsilon.$$

Invers, să presupunem că este îndeplinită condiția lui Cauchy. Putem spune că un șir de vectori,

$$\mathbf{f}_1(x_0),\ \mathbf{f}_2(x_0),\ \dots\ \mathbf{f}_n(x_0),\ \dots,\ x_0 \in X$$

verifică criteriul lui Cauchy. Un asemenea șir este convergent către un vector $\mathbf{f}(x_0)$.

Pentru diferitele valori $x_0 \in X$, obținem o funcție $\mathbf{f}(x)$, $x \in X$. Arătăm că $\mathbf{f}_n(x)$ converge uniform către $\mathbf{f}(x)$.

Considerăm $\| \mathbf{f}_{n+p}(x) - \mathbf{f}_n(x) \| < \varepsilon$ pentru $n > n_0(\varepsilon)$, $p \geq 1$. Trecînd la limită cînd $p \to \infty$, obținem $\| \mathbf{f}(x) - \mathbf{f}_n(x) \| < \varepsilon$ ceea ce arată că șirul este uniform convergent.

Exemplu. Șirul $(f_n)_{n\in N}$, cu $f_n(x) = x \operatorname{arctg} nx$, $x \in [0, \infty)$ este uniform convergent conform criteriului lui Cauchy deoarece:

$$|x \operatorname{arctg}(n+p)x - x \operatorname{arctg} nx| = x \cdot \left(\operatorname{arctg} \frac{px}{1+(n+p)nx^2}\right) <$$

$$< x \cdot \operatorname{arctg} \frac{px}{(n+p)nx^2} < x \cdot \frac{p}{(n+p)nx} =$$

$$= \frac{p}{(n+p)n} < \frac{1}{n} < \varepsilon \text{ pentru } n > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Un criteriu suficient de convergență uniformă este dat de

Teorema 2.1. Fie $(f_n)_{n\in N}$, $f_n : X \subset \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^k$, și f o funcție definită în X. Dacă există un șir de vectori $(a_n)_{n\in N}$ convergent către zero, astfel ca:

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \|a_n\|, \text{ pentru } n > n_0$$

atunci, șirul $(f_n)_{n\in N}$ este uniform convergent pe mulțimea X către funcția f.

Demonstrație. Șirul $(a_n)_{n\in N}$ converge la zero, deci pentru orice $\varepsilon > 0$ există $n_0(\varepsilon)$ astfel încît oricare ar fi $n > n_0(\varepsilon)$, $\|a_n\| < \varepsilon$ și deci $|f_n(x) - f(x)| <$ $< \varepsilon$ ceea ce demonstrează teorema.

Exemplu. Șirul $(f_n)_{n\in N}$ cu $f_n(x) = \dfrac{\sin nx}{n^2}$ este uniform convergent pe $\mathbf{R}$ către f = 0 deoarece:

$$\left|\frac{\sin nx}{n^2}\right| \leq \frac{1}{n^2} \to 0.$$

Proprietăți ale șirului de funcții uniform convergente în $\mathbf{R}$.

Teorema 3.1. Fie $(f_n)_{n\in N}$ un șir de funcții continue, uniform convergent către funcția f în $X \subset \mathbf{R}^m$.
Atunci funcția limită f este continuă în X.

Demonstrație. $(f_n)_{n\in N}$ este uniform convergent către f deci, pentru orice $\varepsilon > 0$ există $n_0(\varepsilon)$ astfel încît

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \text{ dacă } n > n_0(\varepsilon).$$

Funcția $f_n(x)$ este continuă în orice punct din X deci, pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\eta(\varepsilon, x_0)$ astfel încît

$$|f_n(x) - f_n(x_0)| < \varepsilon$$

pentru $\|x - x_0\| < \eta(\varepsilon, x_0)$.
Putem scrie

$$|f(x) - f(x_0)| \leq |f_n(x) - f(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| +$$

$$+ |f_n(x_0) - f(x_0)| < 3\varepsilon \quad \text{pentru } n > n_0(\varepsilon)$$

și

$$\|x - x_0\| < \eta(\varepsilon, x_0),$$

ceea ce exprimă continuitatea funcției f în punctul x_0.

O altă proprietate a şirurilor de funcţii uniform convergente în **R** este dată în:

Teorema 4.7. Fie $(f_n)_{n\in N}$ un şir de funcţii definite şi derivabile pe $X \subset \mathbf{R}$ convergent către f pe X. Dacă şirul $(f_n')_{n\in N}$ este uniform convergent către g pe X atunci f este derivabilă pe X şi $f' = g$.

Demonstraţie. Fie $x_0 \in (a, b)$, şirul $(f_n')_{n\in N}$ este uniform convergent către g pe (a, b) deci pentru orice $\varepsilon > 0$ există $n_0(\varepsilon)$ astfel încît

$$|f_n'(x) - g(x)| < \varepsilon, \text{ pentru } n > n_0(\varepsilon) \text{ şi } x \in (a, b).$$

Funcţia f_n este derivabilă deci există $V(x_0)$ astfel încît pentru orice $\varepsilon > 0$,

$$\left|\frac{f_n(x) - f_n(x_0)}{x - x_0} - f_n'(x_0)\right| < \varepsilon, \quad x \in V(x_0).$$

Considerăm egalitatea:

$$\frac{f_n(x) - f_n(x_0)}{x - x_0} - \frac{f_{n+p}(x) - f_{n+p}(x_0)}{x - x_0} =$$

$$= \frac{[f_n(x) - f_{n+p}(x)] + [f_{n+p}(x_0) - f_n(x_0)]}{x - x_0} =$$

$$= f_n'(c) - f_{n+p}'(c), \quad c \in (x_0, x).$$

Deoarece şirul $(f_n')_{n\in N}$ este uniform convergent rezultă $|f_n'(c) - f_{n+p}'(c)| < \varepsilon$, pentru $n > n_1(\varepsilon)$.

Putem scrie:

$$\left|\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - g(x_0)\right| \le \left|\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - \frac{f_n(x) - f_n(x_0)}{x - x_0}\right| +$$

$$+ \left|\frac{f_n(x) - f_n(x_0)}{x - x_0} - f_n'(x_0)\right| + |f_n'(x_0) - g(x_0)| < 2\varepsilon$$

pentru $x \in V$ şi $n > \max(n_0(\varepsilon), n_1(\varepsilon))$ şi $x \in V$.

Exemplu. Şirul $(f_n)_{n\in N}$, cu $f_n(x) = \frac{1}{n}\operatorname{arctg} x^n$, $n \in N$ este uniform convergent în $(-2, 2)$ către funcţia $f(x) \equiv 0$.
Şirul derivatelor este

$$f_n'(x) = \frac{x^{n-1}}{1 + x^{2n}} \quad \text{şi} \quad \lim_{n\to\infty} f_n'(x) = \begin{cases} 0, & x \ne 1 \\ \frac{1}{2}, & x = 1 \end{cases}$$

deci el nu converge către $f'(x)$.

(Observăm că şirul derivatelor nu este uniform convergent.)

Vom enunţa un rezultat mai puternic a cărei demonstraţie o vom schiţa numai.

Teorema 5.1. (Stone Weierstrass). Dacă f este o funcţie continuă pe $[a, b] \subset \mathbf{R}$ există un şir de polinoame $P_n(x)$ astfel ca

$$\lim_{n \to \infty} P_n(x) = f(x)$$

convergenţa fiind uniformă în $[a, b]$.

Etapele demonstraţiei. Presupunem $[a, b] = [0, 1]$, $f(0) = f(1) = 0$ şi $f(x)$ nulă înafara lui $[a, b]$.

Aceasta nu restrînge generalitatea deoarece pentru $f(x)$ oarecare putem pune:

$$g(x) = f(x) - f(0) - x(f(1) - f(0)), \quad x \in [0, 1]$$

rezultă că $g(0) = g(1) = 0$.

Definim polinoamele $Q_n(x) = C_n(1 - x^2)^n$, $n = 1, 2, \ldots$ pentru care alegem coeficienţii C_n astfel ca

$$\int_{-1}^{1} Q_n(x) = 1$$

Se demonstrează că polinoamele $Q_n(x)$ converg uniform în $[\delta, 1]$, $\delta > 0$.

Dacă luăm

$$P_n(x) = \int_{-1}^{1} f(x + t)\, Q_n(t)\, dt, \quad x \in [0, 1]$$

arătăm că $P_n(x)$ este un polinom de grad n. Observăm că $-1 \leq x + t \leq 2$, dar f este nulă înafara intervalului $[0, 1]$ deci rămîne de studiat integrala pentru $0 \leq x + t \leq 1$ adică $-x \leq t \leq 1 - x$.

Fie deci pentru $x + t = u$

$$P_n(x) = \int_{-x}^{1-x} f(x + t)\, Q_n(t)\, dt = \int_{0}^{1} f(u)\, Q_n(u - x)\, du$$

deci $P_n(x)$ este un polinom de grad „n" în x.

Exemplu. Să se determine şirul de polinoame $P_n(x)$ care converge uniform pe $[0, 1]$ către funcţia $f(x) = \dfrac{1}{2 - x}$.

Determinăm

$$I_n = \int_{0}^{1} (1 - x^2)^n\, dx = I_{n-1} - \int_{0}^{1} x^2(1 - x^2)^{n-1}\, dx$$

$$I_n = \frac{2n}{2n+1} I_{n-1}, \quad I_n = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$$

$$C_n = \frac{1}{\int_{-1}^{1} (1 - x^2)^n\, dx} = \frac{(2n+1)!!}{2 \cdot (2n)!!}$$

$$Q_n(x) = \frac{(2n+1)!!}{2 \cdot (2n)!!}(1 - x^2)^n$$

$$P_n(x) = \int_{-1}^{1} \frac{(1 - t^2)^n}{2 - x - t}\, dt$$

§ 2. SERII DE FUNCȚII. SERII DE PUTERI

Dacă $f_1, f_n: D \subset \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^p$, $n = 1, 2, \ldots$ sînt funcții, considerăm șirul sumelor parțiale

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} f_i, \quad n = 1, 2, \ldots$$

ale seriei

$$\sum_{1}^{\infty} f_n$$

și dăm următoarea

Definiția 1.2. Seria $\sum_{1}^{\infty} f_n$ se numește **convergentă** în $X \subset \mathbf{R}^m$ dacă șirul sumelor parțiale $(s_n)_{n \in N}$ este convergent în X. Funcția $s = \lim_n s_n$ se numește suma seriei $\sum_{1}^{\infty} f_n$.

Definiția 2.2. Seria $\sum_{1}^{\infty} f_n$ converge simplu sau punctual către s dacă șirul de funcții s_n converge simplu în X.

Mulțimea A a valorilor $x \in X$ pentru care seria $\sum_{1}^{\infty} f_n$ este convergentă se numește mulțimea de convergență. Are loc următorul criteriu de convergență uniformă.

Teorema 1.2. **(Criteriul lui Cauchy).** Condiția necesară și suficientă ca seria de funcții $\sum_{1}^{\infty} f_n$ să fie uniform convergentă în X este ca pentru orice $\varepsilon > 0$, există $n_0(\varepsilon)$ astfel încît pentru $n \geq n_0(\varepsilon)$, $p \geq 1$ să avem:

$$\| f_{n+1} + f_{n+2} + \ldots + f_{n+p} \| < \varepsilon.$$

Demonstrația rezultă din Criteriul lui Cauchy aplicat șirului sumelor parțiale.

Un criteriu suficient de convergență uniformă este dat de

Teorema 2.2. **(Weierstrass).** Dacă seria de funcții $\sum_{1}^{\infty} f_n$, $f_n \in X$ este majorată de o serie de numere $\sum_{1}^{\infty} a_n$, $a_n \geq 0$ (adică $\| f_n \| \leq a_n$) convergentă, atunci seria dată converge uniform în X.

Demonstrație. Seria $\sum_{1}^{\infty} a_n$ fiind convergentă există $n_0(\varepsilon)$ astfel încît să avem:

$$a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{n+p} < \varepsilon$$

pentru $n \geq n_0(\varepsilon)$ și orice $p \geq 1$, $p \in \mathbf{N}$.

Cu notațiile de mai sus avem:

$$\|s_{n+p}(x) - s_n(x)\| = \|f_{n+1}(x) + f_{n+2}(x) + \dots + f_{n+p}(x)\| \le$$

$$\le a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+p} < \varepsilon$$

pentru $n \ge n(\varepsilon)$ și oricare ar fi p natural.

Rezultă de aici că seria este uniform convergentă conform criteriului lui Cauchy.

Transpunînd rezultatele privind proprietățile șirurilor uniforme, pentru șirul sumelor parțiale obținem:

Teorema 4.1. Fie $\sum_{1}^{\infty} f_n$ o serie de funcții, $f_n : X \subset \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^k$. Dacă seria de funcții $f_1 + f_2 + \dots + f_n + \dots$ este uniform convergentă către funcția f pe mulțimea X și dacă funcțiile f_n sînt continue pe X, atunci funcția sumă $s: X \to \mathbf{R}^k$ este continuă pe X.

Demonstrația rezultă din teorema corespunzătoare aplicată șirului sumelor parțiale.

Teorema 4.2. Dacă seria de funcții $f_1 + f_2 + \dots + f_n + \dots$, $f_n : X \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ este o serie de funcții derivabile, convergentă către f pe X, dacă seria de funcții $f_1' + f_2' + \dots + f_n' + \dots$ este o serie de funcții uniform convergentă către g pe X atunci, f este derivabilă și $f' = g$.

Demonstrația rezultă din aplicarea teoremei privind derivarea termen cu termen pentru șirul sumelor parțiale.

Exemplu. Seria de funcții $\sum_{1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^2}{(1+x^2)^n}$ este uniform convergentă în $\mathbf{R}$ conform criteriului lui Cauchy deoarece

$$|f_{n+1} + f_{n+2} + \dots + f_{n+p}| = \left|\frac{x^2}{(1+x^2)^{n+1}} - \frac{x^2}{(1+x^2)^{n+2}} + \dots \pm \frac{x^2}{(1+x^2)^{n+p}}\right| =$$

$$= \frac{x^2}{(1+x^2)^{n+1}}\left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right) + \frac{x^2}{(1+x^2)^{n+3}}\left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right) + \dots$$

$$\dots + \frac{x^2}{(1+x^2)^{n+p-1}}\left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right) \le$$

$$\le x^4\left[\frac{1}{(1+x^2)^{n+2}} + \frac{1}{(1+x^2)^{n+4}} + \dots + \frac{1}{(1+x^2)^{n+p}}\right] \le$$

$$\le \frac{x^4}{(1+x^2)^{n+2}}\left(1 - \frac{1}{(1+x^2)^2}\right)^{-1} \frac{1}{x^2} \le$$

$$\le \frac{x^2}{(1+x^2)^{n+1}} \le \frac{x^2}{1+(n+1)x^2} \le \frac{x^2}{(n+1)x^2} = \frac{1}{n+1} < \varepsilon,$$

Serii de puteri

Definiţia 4.2. O serie de funcţii de forma

$$a_0 + \sum_{1}^{\infty} a_n x^n, \quad a_n \in \mathbf{R}$$

se numeşte serie de puteri.

Funcţia sumă a unei serii de puteri se numeşte funcţie analitică.

Mulţimea de convergenţă a unei serii de puteri este totdeauna un interval. Acest lucru se demonstrează în

Teorema 4.2. (Abel) Pentru orice serie $\sum_{0}^{\infty} a_n x^n$ există un număr $R \geq 0$ astfel încît:

1°. Seria este absolut convergentă în $(-R, R)$;

2°. Seria este divergentă pentru $|x| > R$.

Demonstraţie. Observăm că seria este convergentă în $x = 0$. Dacă nu are nici alt punct de convergenţă luăm $R = 0$ şi teorema este demonstrată.

Să presupunem că mulţimea de convergenţă mai conţine şi alte puncte. Fie un punct de convergenţă, punctul x_0.

Deoarece seria de numere:

$$a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \ldots + a_n x_0^n + \ldots$$

este convergentă rezultă că $|a_n x_0^n| \to 0$ cînd $n \to \infty$ şi deci, există $M > 0$ astfel ca $|a_n x_0^n| < M$. Dacă x verifică condiţia $|x| < |x_0|$ putem scrie:

$$|a_n x^n| = |a_n x_0^n| \left|\frac{x}{x_0}\right|^n < M \left|\frac{x}{x_0}\right|^n.$$

Însă $\left|\frac{x}{x_0}\right| < 1$ deci, conform criteriului comparaţiei $\sum_{0}^{\infty} |a_n x^n|$ este convergentă pentru $x \in (-|x_0|, |x_0|)$.

Notăm cu R marginea superioară a mulţimii valorilor lui x pentru care seria $\sum a_n x^n$ este convergentă. În baza celor de mai sus rezultă că seria este convergentă pentru $x \in (-R, R)$.

Dacă x_1 este un punct de divergenţă a seriei atunci pentru orice x cu $|x| > |x_1|$ seria este divergentă. Dacă ar exista un punct x_2 pentru care seria este convergentă cu $|x_2| > |x_1|$ ar urma ca seria $\sum a_n x_1^n$ este convergentă ceea ce nu este adevărat.

Definiţia 4.3. Numărul R se numeşte raza de convergenţă a seriei de puteri.

Pentru determinarea razei de convergenţă considerăm pe x fixat şi aplicăm unul din criteriile de la serii cu termeni pozitivi seriei

$$|a_0| + |a_1 x| + |a_2 x^2| + \ldots + |a_n x^n| + \ldots$$

Aplicînd criteriul raportului obținem

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_nx^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| |x| < 1,$$

deci

$$|x| < \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|}.$$

În acest caz $R = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$.

Aplicînd criteriul rădăcinii aceleiași serii obținem

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_nx^n|} < 1$$

$$\text{sau } |x| < \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}} \quad \text{deci } R = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}.$$

Exemplu: Să determinăm mulțimea de convergență pentru seria

$$\sum_{2}^{\infty}(-1)^n\frac{\sqrt{n^2+1}}{n\ln^\alpha n}x^n, \qquad \alpha\in\mathbf{R}$$

În acest caz $|a_n| = \frac{\sqrt{n^2+1}}{n\ln^\alpha n}$ și

$$R = \lim_{n\to\infty}\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+1}}{\sqrt{(n+1)^2+1}}\cdot\frac{(n+1)}{n}\cdot\frac{\ln^\alpha(n+1)}{\ln^\alpha n} = 1$$

Pentru $x = 1$ obținem seria de numere

$$\sum_{2}^{\infty}(-1)^n\frac{\sqrt{n^2+1}}{n\ln^\alpha n}$$

alternată care este convergentă conform criteriului lui Leibniz pentru $\alpha > 0$.

Pentru $x = -1$ obținem seria de numere

$$\sum_{2}^{\infty}\frac{\sqrt{n^2+1}}{n\ln^\alpha n}$$

convergentă pentru $\alpha > 1$ (serie Bertrand).

Mulțimea de convergență este $[-1, 1]$ pentru $\alpha > 1$.

În intervalul de convergență seriile de puteri au proprietatea dată de următoarea:

Teorema 6.2. Dacă seria $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n + \ldots$ este convergentă pentru $|x| < R$ atunci seria este uniform convergentă pe $[-R + \varepsilon, R - \varepsilon]$, $0 < \varepsilon < R$.

Demonstrație: Dacă $|x| \leq R - \varepsilon$ atunci

$$|a_n x^n| \leq |a_n (R - \varepsilon)^n|$$

și cum seria $\Sigma a_n (R - \varepsilon)^n$ converge absolut, seria $\Sigma |a_n x^n|$ converge uniform pe $[-R + \varepsilon, R - \varepsilon]$.

Consecință. Din proprietățile seriilor de funcții uniform convergente rezultă că într-un interval $[-R + \varepsilon, R - \varepsilon]$, seria de puteri are ca sumă o funcție continuă și de asemenea poate fi derivată termen cu termen.

Observație. Dacă seria $\sum_{0}^{\infty} a_n x^n$ are raza de convergența R, seria derivatelor

$$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

are aceeași rază de convergență deoarece:

$$\lim_{n \to \infty} \left| \frac{n a_n}{(n+1)\, a_{n+1}} \right| = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = R.$$

Seria Taylor.

Fie f o funcție definită pe $[a, b]$ indefinit derivabilă în punctul $\alpha \in (a, b)$. Formula lui Taylor conduce la dezvoltarea

$$f(x) = f(\alpha) + \frac{x - \alpha}{1!} f'(\alpha) + \frac{(x - \alpha)^2}{2!} f''(\alpha) + \ldots$$

$$\ldots + \frac{(x - \alpha)^n}{n!} f^{(n)}(\alpha) + R_n(x).$$

Cînd $R_n(x) \to 0$ pentru $n \to \infty$ se obține seria Taylor a funcției f în punctul α, serie convergentă către $f(x)$

$$f(x) = f(\alpha) + \frac{x - \alpha}{1!} f'(\alpha) + \ldots + \frac{(x - \alpha)^n}{n!} f^{(n)}(\alpha) + \ldots$$

O condiție suficientă pentru ca formula lui Taylor să se transforme în seria Taylor este dată de

Teorema 7.2. Seria Taylor a funcției f în jurul punctului „α" este convergentă într-o vecinătate V a punctului „α" dacă derivatele de orice ordin sînt egal mărginite în V adică

$$|f^{(n)}(x)| < M, \; M > 0$$

pentru orice $x \in V$ și orice n natural.

Demonstrație. Restul R_n sub forma lui Lagrange, este:

$$R_n(x) = \frac{(x-\alpha)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi),\ \xi \in (\alpha, x) \subset I$$

$$|R_n(x)| \le \frac{|x-\alpha|^{n+1}}{(n+1)!} M.$$

Seria de termen general $u_n(x) = \frac{|x-\alpha|^{n+1}}{(n+1)!}$ este convergentă pentru orice $x \in \mathbf{R}$ deoarece

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{|x-\alpha|}{n+2} = 0,$$

şi obţinem de aici că

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0.$$

Cînd $\alpha = 0$ se obţine seria Mac-Laurin.

Exemple:

1. Fie $f(x) = e^x$, $x \in \mathbf{R}$, $f^{(n)}(x) = e^x$.

Pentru orice $x \in [-A, A]$, $e^{-A} \le e^x \le e^A$ deci $|f^{(n)}(x)| \le M$ şi

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$$

2. Dacă $f(x) = \sin x$, $x \in \mathbf{R}$

$$f^{(n)}(x) = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) \text{ şi } |f^{(n)}(x)| \le 1 \text{ pentru } x \in \mathbf{R}.$$

Obţinem

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots$$

3. Pentru $f(x) = \cos x$, $x \in \mathbf{R}$

$$f^{(n)}(x) = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) \text{ şi } |f^{(n)}(x)| \le 1$$

deci

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots,\ x \in \mathbf{R}.$$

4. Fie $f(x) = (1+x)^{\lambda}$, $x \in \mathbf{R}$, λ constantă reală. Căutăm o serie MacLaurin pentru funcţia $f(x)$.

Avem:

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!} f'(0) + \dots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + R_n(x)$$

$$\text{cu } R_n(x) = \frac{x^{n+1}(1-\theta)^{n+1-p}}{n!\, p} f^{(n+1)}(\theta x),\quad 0 < \theta < 1.$$

$$f^{(k)}(x) = \lambda(\lambda-1)\dots(\lambda-k+1)(1+x)^{\lambda-k}$$

deci

$$f^{(k)}(0) = \lambda(\lambda-1)\dots(\lambda-k+1)$$

şi

$$f(x) = 1 + \frac{\lambda}{1!}x + \frac{\lambda(\lambda-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{\lambda(\lambda-1)\dots(\lambda-n+1)}{n!}x^n + R_n(x),$$

$$\text{cu } R_n(x) = \frac{(1-\theta)^{n+1-p}}{p \cdot n!}\lambda(\lambda-1)\dots(\lambda-n)\, x^{n+1}(1+\theta x)^{\lambda-n-1}.$$

Luăm $p = 1$ şi obţinem:

$$R_n(x) = u_n(1-\theta)^n (1+\theta x)^{\lambda-n-1}$$

$$u_n = \frac{\lambda(\lambda-1)\dots(\lambda-n)}{n!}\, x^{n+1}.$$

Seria cu termenul general u_n este absolut convergentă pentru $|x| < 1$ deoarece

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{\lambda-n-1}{n+1}\right| \cdot |x| = |x| < 1.$$

Deci $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$.

Factorul $v_n = (1-\theta)^n (1+\theta x)^{\lambda-n-1} = \left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^n (1+\theta x)^{\lambda-1}$

tinde la zero în valoare absolută deoarece

$$\left|\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right| < 1 \quad \text{pentru } |x| < 1.$$

Astfel

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0 \text{ pentru orice } \lambda \in \mathbf{R} \text{ şi } |x| < 1.$$

Am obţinut deci dezvoltarea numită *seria binomului generalizat*.

$$(1+x)^{\lambda} = 1 + \frac{\lambda}{1!}x + \frac{\lambda(\lambda-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{\lambda(\lambda-1)\dots(\lambda-n+1)}{n!}x^n + \dots$$

5. Să considerăm dezvoltările în serie:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots, \quad x \in \mathbf{R}$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots, \quad x \in \mathbf{R}$$

și $i = \sqrt{-1}$. Putem scrie

$$\cos x + i \sin x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots$$

$$\dots + i\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots\right),$$

$$\cos x - i \sin x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots$$

$$\dots - i\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \dots\right).$$

Formal avem:

$$\cos x + i \sin x = e^{ix}$$

$$\cos x - i \sin x = e^{-ix}$$

de unde

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i};$$

numite *formulele lui Euler*.

Operații cu serii de puteri.

1. Dacă $\sum_0^\infty a_n x^n$ și $\sum_0^\infty b_n x^n$ sînt 2 serii de puteri cu razele de convergență R_1 respectiv R_2 atunci seria de puteri $\sum_0^\infty (a_n + b_n) x^n$ numită suma celor două serii are raza de convergență $R = \min(R_1, R_2)$.

2. Dacă $\sum_0^\infty a_n x^n$ și $\sum_0^\infty b_n x^n$ au razele de convergență R_1, respectiv R_2 numim seria produs, seria $a_0 b_0 + x(a_1 b_0 + a_0 b_1) + \dots + x^n(a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \dots$ $\dots + a_n b_0) + \dots$

Ea are raza de convergență $R = \min(R_1, R_2)$.

3. Dacă $\sum_0^\infty a_n x^n$ şi $\sum_0^\infty b_n x^n$ au razele de convergenţă R_1 respectiv R_2 şi suma seriei $\sum_0^\infty b_n x^n$ nu se anulează în (a, b) numim *serie cît* a celor două serii de puteri, o serie de forma:

$$c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots + c_n x^n + \ldots$$

ai cărei coeficienţi se determină din condiţia ca

$$\sum_{k=0}^n c_k x^k \sum_{s=0}^n b_s x^s = \sum_{p=0}^n a_p x^p.$$

Mulţimea de convergenţă a seriei cît este $(-R, R) \cap (a, b)$ cu $R = \min(R_1, R_2)$.

Exemple

1. Să se determine o dezvoltare în serie Mac Laurin pentru funcţia $f(x) = \frac{1}{\cos x}$, $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Ştim că $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots$ dezvoltare valabilă pentru $x \in \mathbf{R}$.

Căutăm pentru $f(x) = \frac{1}{\cos x}$ o dezvoltare în serie de puteri de forma:

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots$$

astfel încît

$$(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots)\left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots\right) \equiv 1$$

Obţinem prin identificare sistemul infinit:

$$a_0 = 1, \quad a_1 = 0, \quad -\frac{a_0}{2!} + a_2 = 0,$$

$$-\frac{a_1}{2!} + a_3 = 0, \quad \frac{a_0}{4!} - \frac{a_2}{2!} + a_4 = 0, \ldots$$

de unde rezultă $a_{2k+1} = 0$ pentru orice k şi

$$a_2 = \frac{1}{2!}, \quad a_4 = \frac{1}{2^2} - \frac{1}{4 \cdot 6} = \frac{5}{24}.$$

Astfel seria de puteri este

$$1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{5}{24} x^4 + \ldots$$

şi are mulţimea de convergenţă $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \cap (-1, 1) = (-1, 1)$.

2. Să se determine o dezvoltare în serie de puteri pentru funcţia $f(x) = \ln(x+1)$, $x+1>0$.

Considerăm funcţia

$$f'(x) = \frac{1}{x+1}, \quad x+1>0$$

pe care o dezvoltăm în serie de puteri după seria binomului generalizat $f'(x) = 1 - x + x^2 - \ldots + (-1)^n x^n + \ldots$, $|x| < 1$.

Observăm că

$$f(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \ldots, \quad |x| < 1.$$

Îmbunătăţirea convergenţei seriilor de puteri prin metoda Euler-Abel

Să presupunem că o serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ este convergentă către funcţia $f(x)$ pentru $x \in (-R, R)$. Metoda Euler-Abel constă în a construi pornind de la aceasta o altă serie de puteri care să conveargă către aceeaşi funcţie însă convergenţa să fie mai rapidă.

Prezentăm în continuare metoda Euler-Abel.

Fie seria convergentă $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ şi $f(x)$ suma seriei pentru $|x| < R$. Presupunem $R = 1$. Putem scrie seria de puteri sub forma:

$$f(x) = a_0 + x\varphi(x)$$

unde $\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} x^n$.

Deci

$$(1 - x)\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} x^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} x^{n+1}.$$

Dar

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} x^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n \text{ etc.}$$

$$(1 - x)\varphi(x) = a_1 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_{n+1} - a_n) x^n = a_1 + \sum_{n=1}^{\infty} \Delta a_n x^n$$

unde $\Delta a_n = a_{n+1} - a_n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$

Rezultă:

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} x^n = \frac{a_1}{1-x} + \frac{1}{1-x} \sum_{n=1}^{\infty} \Delta a_n x^n$$

și deci

$$f(x) = \frac{a_0}{1-x} + \frac{1}{1-x}\sum_{1}^{\infty} \Delta a_{n-1} x^n = \frac{a_0}{1-x} + \frac{x}{1-x}\sum_{0}^{\infty} \Delta a_n x^n$$

sau

$$\sum_{0}^{\infty} a_n x^n = \frac{a_0}{1-x} + \frac{x}{1-x}\sum_{0}^{\infty} \Delta a_n x^n.$$

Această transformare se numește transformarea Euler-Abel.

Aplicînd seriei $\sum_{0}^{\infty} \Delta a_n x^n$ o transformare asemănătoare obținem:

$$\sum_{0}^{\infty} \Delta a_n x^n = \frac{\Delta a_0}{1-x} + \frac{x}{1-x}\sum_{0}^{\infty} \Delta^2 a_n x^n$$

unde $\Delta^2 a_n = \Delta(\Delta a_n) = \Delta a_{n+1} - \Delta a_n$ sînt diferențele de ordinul doi ai coeficienților a_n.

Ținînd seama de aceasta avem:

$$\sum_{0}^{\infty} a_n x^n = \frac{a_0}{1-x} + \frac{x\,\Delta a_0}{(1-x)^2} + \left(\frac{x}{1-x}\right)^2 \sum \Delta^2 a_n x^n.$$

Aplicînd transformarea Euler-Abel de „p" ori obținem:

$$\sum_{0}^{\infty} a_n x^n = \frac{a_0}{1-x} + \frac{x\,\Delta a_0}{(1-x)^2} + \ldots + \frac{x^{p-1}\Delta^{p-1} a_0}{(1-x)^p} + \left(\frac{x}{1-x}\right)^p \sum_{0} \Delta^p a_n x^n,$$

unde

$$\Delta^p a_n = \Delta^{p-1} a_{n+1} - \Delta^{p-1} a_n,\quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

sînt diferențele de ordin „p" ai coeficienților a_n. Deci:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{p-1} \Delta^k a_0 \frac{x^k}{(1-x)^{k+1}} + \left(\frac{x}{1-x}\right)^p \sum \Delta^p a_n x^n.$$

Transformarea este utilă atunci cînd ordinul de descreștere a diferențelor finite $\Delta^p a_n$ cînd $n \to \infty$ este mai mare decît a coeficienților a_n.

Dacă $a_n = p_k(n)$ (un polinom de grad „k") atunci

$$(*)\ \sum_{0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{p=0}^{k} \Delta^p a_0 \frac{x^p}{(1-x)^{p+1}},\quad |x| < 1.$$

Exemplu

Să se determine suma seriei folosind (*)

$$\sum_{0}^{\infty} (n^2 + n + 2)\, x^n.$$

În acest caz $a_n = n^2 + n + 2$. Formăm tabloul diferențelor

n	a_n	Δa_n	$\Delta^2 a_n$
0	2	2	2
1	4	4	
2	8		

Din (*) deducem

$$S(x) = \frac{2}{1-x} + \frac{2x}{(1-x)^2} + \frac{2x^2}{(1-x)^3}.$$

Exerciții propuse

1) Să se studieze convergența simplă și uniformă pentru următoarele șiruri de funcții:

$$f_n(x) = \operatorname{arctg} nx,\ x \in [0, \infty)$$

$$f_n(x) = \frac{2nx}{1 + n^2x^2},\ x \in [0, \infty)$$

$$f_n(x) = x^2 + \frac{1}{n}\sin nx,\ x \in (-\infty, \infty).$$

2) Să se studieze convergența simplă și uniformă pentru seriile de funcții:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n + 3^{2n}}{2^n} x^n(1 - x)^n,\ x \in \mathbf{R}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} (\operatorname{tg} x)^n,\ x \in \mathbf{R}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(1 + x)(1 + x^2)\ldots(1 + x^n)},\ |x| \neq 1.$$

Indicație. În primele două cazuri se notează $x(1 - x) = y$ și respectiv $\operatorname{tg} x = y$ și se reduc la serii de puteri. În al 3-lea caz se consideră seria modulelor și se aplică unul din criteriile de la serii cu termeni pozitivi.

3) Să se dezvolte în serie de puteri ale lui x, funcția $f(x) = \arcsin x$ și să se obțină din această dezvoltare numărul π cu 3 zecimale exacte.

Indicație: Se derivează funcția $f(x)$.

4) Să se dezvolte în serie de puteri ale lui x funcțiile

$$f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2(x - 2)},\ x \neq 0,\ x \neq 2.$$

$$f(x) = \ln(x + \sqrt{1 + x^2}),\ f(x) = \operatorname{tg} x.$$

5. Folosind dezvoltarea în serie de puteri pentru funcţia $f(x) = \arcsin x$ să se calculeze suma seriei

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{1^2 \cdot 3^2 \ldots (2n-1)^2}{(2n+2)!\, 2^{2n+2}}$$

(problemă dată la Concursul Traian Lalescu 1975).

6. Să se reprezinte funcţia:

$$f(x) = \left(\frac{\arcsin x}{x}\right)^2$$

printr-o serie de puteri după puterile lui x.

7. Folosind dezvoltările în serii de puteri să se calculeze

$$\lim_{x \to 0}\left(\frac{x}{\sin x} - e^x\right)\frac{1}{x}.$$

CAPITOLUL V

INTEGRALE RIEMANN-STIELTJES

§ 1. DEFINIȚIA INTEGRALEI RIEMANN-STIELTJES

Definiția 1.1. Fie $[a, b] \subset \mathbf{R}$. Numim o diviziune a intervalului $[a, b]$ orice mulțime finită și ordonată de forma:

$$\Delta = \{a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b\}.$$

Mulțimea tuturor diviziunilor lui $[a, b]$ o notăm prin $\mathscr{D}([a, b])$.

Fie $[a, b] \subset \mathbf{R}$, g o funcție reală nedescrescătoare pe $[a, b]$ și f o funcție reală mărginită pe $[a, b]$.

Pentru fiecare

$$\Delta = \{a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b\} \in \mathscr{D}([a, b])$$

definim

$$s(f, g; \Delta) = \sum_{j=1}^{n} m_j(g(t_j) - g(t_{j-1}))$$

unde $m_j = \inf\limits_{x \in [t_{j-1}, t_j]} f(x)$

și

$$S(f, g; \Delta) = \sum_{j=1}^{n} M_j(g(t_j) - g(t_{j-1}))$$

cu $M_j = \sup\limits_{x \in [t_{j-1}, t_j]} f(x)$

și le numim sumele Darboux inferioară și superioară.

Dăm următoarea definiție a integrabilității:

Definiția 2.1. Dacă pentru orice $\varepsilon > 0$, există $\Delta \in \mathscr{D}([a, b])$ astfel încît

$$S(f, g; \Delta) - s(f, g; \Delta) < \varepsilon$$

spunem că f este integrabilă Riemann-Stieltjes în raport cu g pe $[a, b]$.

Definiția 3.1. O diviziune Δ^*, $\Delta \subset \Delta^* \in \mathscr{D}([a, b])$ este mai fină decît diviziunea Δ dacă toate punctele diviziunii Δ sînt puncte de diviziune și pentru Δ^*.

Definiția 4.1. Pentru orice diviziune Δ punem

$$\mu(\Delta) = \max (x_i - x_{i-1}),\ 1 \leq i \leq n$$

și numim $\mu(\Delta)$ diametrul diviziunii Δ.

Comportarea sumelor $s(f, g; \Delta)$ și $S(f, g; \Delta)$ cînd se trece de la o diviziune Δ la o diviziune mai fină este dată de

Propoziția 1.1. Dacă $\Delta \subset \Delta^*$ avem:

$$s(f, g; \Delta) \leq s(f, g; \Delta^*) \leq S(f, g; \Delta^*) \leq S(f, g; \Delta).$$

Demonstrație. Să arătăm că

$$s(f, g; \Delta) \leq s(f, g; \Delta^*).$$

Vom presupune că Δ^* conține un singur punct mai mult decît Δ; astfel dacă

$$\Delta^* = \{a = t_0 < t_1 < \ldots < t_{k-1} < u < t_k < \ldots < t_n = b\}$$

pentru un anumit k putem scrie:

$$s(f, g; \Delta^*) - s(f, g; \Delta) =$$

$$= \inf \{f(x),\ x \in [t_{k-1}, u]\} \cdot (g(u) - g(t_{k-1})) + \inf \{f(x),\ x \in [u, t_k]\} \cdot (g(t_k) -$$

$$- g(u)) - \inf \{f(x),\ x \in [t_{k-1}, t_k]\} (g(t_k) - g(t_{k-1})) =$$

$$= (\inf \{f(x),\ x \in [t_{k-1}, u]\} - \inf \{f(x),\ x \in [t_{k-1}, t_k]\}) (g(u) - g(t_{k-1})) +$$

$$+ (\inf \{f(x),\ x \in [u, t_k]\} - \inf \{f(x),\ x \in [t_{k-1}, t_k]\}) (g(t_k) - g(u)) \geq 0$$

deci

$$s(f, g, \Delta^*) \geq s(f, g, \Delta).$$

La fel se procedează pentru sumele S.

Propoziția 2.1. Dacă Δ și Δ^* sînt 2 diviziuni din $\mathscr{D}([a, b])$ atunci $s(f, g, \Delta) \leq S(f, g, \Delta^*)$.

Demonstrație. Putem scrie că

$$s(f, g, \Delta) \leq s(f, g, \Delta \cup \Delta^*) \leq S(f, g, \Delta^*).$$

Teorema 1.1. Fie f integrabilă Riemann-Stieltjes în raport cu g pe $[a, b]$. Atunci există un singur număr real γ astfel ca:

$$s(f, g, \Delta) \leq \gamma \leq S(f, g, \Delta)$$

pentru orice $\Delta \in \mathscr{D}([a, b])$ adică

$$\gamma = \sup \{s(f, g; \Delta),\ \Delta \in \mathscr{D}([a, b])\} =$$

$$= \inf \{S(f, g; \Delta),\ \Delta \in \mathscr{D}([a, b])\}.$$

Acest număr γ se numește integrala Riemann-Stieltjes a funcției f în raport cu g pe $[a, b]$.

Notăm acest număr γ cu $\int_a^b f(x)\,dg(x)$.

În cazul $g(x) = x$, $x \in [a, b]$ numărul γ se numește integrala Riemann a lui f pe $[a, b]$.

Demonstrație. Fie $\gamma = \sup \{s(f, g, \Delta), \Delta \in \mathcal{D}([a, b])\}$ și $\delta = \inf \{S(f, g, \Delta), \Delta \in \mathcal{D}([a, b])\}$.
Din cele demonstrate mai sus rezultă

$$\gamma \leq \delta$$

Mai trebuie arătat că $\gamma = \delta$. Să presupunem că $\gamma < \delta$. Deoarece $\delta - \gamma > 0$, definiția integrabilității arată că pentru $\varepsilon = (\delta - \gamma)/2$ există $\Delta \in \mathcal{D}([a, b])$ astfel ca

$$S(f, g, \Delta) - s(f, g, \Delta) < \frac{\delta - \gamma}{2}.$$

Atunci

$$\delta \leq S(f, g, \Delta) = (S(f, g, \Delta) - s(f, g, \Delta)) +$$

$$+ s(f, g, \Delta) < \frac{\delta - \gamma}{2} + \gamma = \frac{\delta + \gamma}{2}, \text{ de unde } \delta < \gamma$$

ceea ce arată o contradicție; deci $\gamma = \delta$.

Vom arăta că integrala Riemann-Stieltjes poate fi definită și cu ajutorul limitei unui șir de sume în care în locul lui M_i și m_i apar valori ale funcției f.

Pentru aceasta fie $\Delta \in \mathcal{D}([a, b])$. Alegem punctele $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ arbitrare, $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ și formăm sumele

$$\sigma(f, g, \Delta) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,(g(x_i) - g(x_{i-1})).$$

Observăm că $s(f, g, \Delta) \leq \sigma(f, g, \Delta) \leq S(f, g, \Delta)$ deoarece

$$m_i \leq f(\xi_i) \leq M_i$$

și

$$s(f, g, \Delta) = \min_{\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]} \sigma(f, g, \Delta), \quad S(f, g, \Delta) = \max_{\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]} \sigma(f, g, \Delta).$$

Are loc

Teorema 2.1. Dacă $\lim\limits_{\nu(\Delta) \to 0} \sigma(f, g, \Delta)$ există, atunci f este integrabilă în raport cu g pe $[a, b]$ și

$$\lim_{\nu(\Delta) \to 0} \sigma(f, g, \Delta) = \int_a^b f\,dg = \gamma.$$

Demonstrație. Să presupunem că

$$\lim_{\nu(\Delta) \to 0} \sigma(f, g, \Delta) = A.$$

De aici rezultă că pentru $\varepsilon > 0$ $(\exists)$ $\delta(\varepsilon)$ astfel încît pentru $\mu(\Delta) < \delta$ avem:

$$A - \frac{\varepsilon}{2} < \sigma(f, g, \Delta) < A + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Dacă luăm în această inegalitate marginea inferioară şi marginea superioară în raport cu toate valorile $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$ obţinem:

$$A - \frac{\varepsilon}{2} \leq s(f, g, \Delta) \leq S(f, g, \Delta) \leq A + \frac{\varepsilon}{2}.$$

De aici rezultă că

$$S(f, g, \Delta) - s(f, g, \Delta) < \varepsilon$$

deci f este integrabilă în raport cu g pe $[a, b]$ şi cum

$$s(f, g, \Delta) < \sigma(f, g, \Delta) < S(f, g, \Delta) \text{ şi } s(f, g, \Delta) < \gamma < S(f, g, \Delta)$$

rezultă că pentru orice $\varepsilon > 0$ şi orice Δ,

$$|\sigma(f, g, \Delta) - \gamma| < S(f, g, \Delta) - s(f, g, \Delta) < \varepsilon.$$

Luînd în această egalitate limită în raport cu toate diviziunile Δ cu $\mu(\Delta) \to 0$ avem

$$|A - \gamma| < \varepsilon$$

ceea ce arată că $A = \gamma$.

Teorema 3.3. Dacă f este continuă pe $[a, b]$ şi g este crescătoare pe $[a, b]$ atunci f este Riemann-Stieltjes integrabilă în raport cu g pe $[a, b]$.

Demonstraţie. Deoarece $[a, b]$ este un compact funcţia f este uniform continuă pe $[a, b]$.
Deci pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta > 0$ astfel ca

$$|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{g(b) - g(a) + 1}, \quad x, y \in [a, b]$$

şi $|x - y| < \delta(\varepsilon)$.
Alegem $\Delta = \{a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b\}$ astfel ca

$$t_j - t_{j-1} < \delta \text{ pentru } j = 1, 2, \ldots, n.$$

Alegem $x_j, y_j \in [t_{j-1}, t_j]$ astfel ca:

$$0 \leq |f(x_j) - f(y_j)| \leq \frac{\varepsilon}{g(b) - g(a) + 1}.$$

Avem de asemenea:

$$S(f, g, \Delta) - s(f, g, \Delta) = \sum_{j=1}^{n} (f(x_j) - f(y_j))(g(t_j) - g(t_{j-1})) <$$

$$< \sum_{j=1}^{n} \frac{\varepsilon}{g(b) - g(a) + 1}(g(t_j) - g(t_{j-1})) = \frac{\varepsilon(g(b) - g(a))}{g(b) - g(a) + 1}.$$

Observaţie. Deoarece $g(x) = x$ este o funcţie crescătoare rezultă că o funcţie continuă este întotdeauna integrabilă Riemann

Proprietăţi ale integralei Riemann-Stieltjes

Teorema 4.7. Dacă f_1 şi f_2 sînt Riemann-Stieltjes integrabile în raport cu g pe $[a, b]$ atunci de asemenea $f_1 + f_2$ este integrabilă şi

$$\int_a^b (f_1 + f_2)\, dg = \int_a^b f_1\, dg + \int_a^b f_2\, dg.$$

Demonstraţie. Fie $\varepsilon > 0$ dat. Alegem Δ_j astfel ca

$$S(f_j, g, \Delta_j) - s(f_j, g, \Delta_j) < \frac{\varepsilon}{2}$$

pentru $j = 1, 2$ şi fie $\Delta = \Delta_1 \cup \Delta_2$.
Ţinînd seama că

$$\inf (f_1 + f_2) \geqslant \inf f_1 + \inf f_2$$

şi

$$\sup (f_1 + f_2) \leqslant \sup f_1 + \sup f_2$$

putem scrie:

$$\begin{aligned} s(f_1, g, \Delta_1) + s(f_2, g, \Delta_2) &\leqslant s(f_1, g, \Delta) + s(f_2, g, \Delta) \leqslant \\ &\leqslant s(f_1 + f_2, g, \Delta) \leqslant S(f_1 + f_2, g, \Delta) \leqslant \\ &\leqslant S(f_1, g, \Delta_1) + S(f_2, g, \Delta_2) < s(f_1, g, \Delta_1) + \\ &+ s(f_2, g, \Delta_2) + \varepsilon. \end{aligned}$$

Urmează că

$$S(f_1 + f_2, g, \Delta) - s(f_1 + f_2, g, \Delta) < \varepsilon$$

şi deci $f_1 + f_2$ este integrabilă.

Fie $\int_a^b f_j\, dg = \gamma_j$ şi Δ_j^* astfel ca:

$$|s(f_j, g, \Delta_j^*) - \gamma_j| < \frac{\varepsilon}{6}$$

$$|S(f_j, g, \Delta_j^*) - \gamma_j| < \frac{\varepsilon}{6}.$$

Rezultă că $0 \leqslant S(f_j, g, \Delta_j^*) - s(f_j, g, \Delta_j^*) < \frac{\varepsilon}{3}$ pentru $j = 1, 2$.

Punînd $\Delta^* = \Delta_1^* \cup \Delta_2^*$ avem:

$$\begin{aligned} s(f_1, g, \Delta_1^*) + s(f_2, g, \Delta_2^*) &\leqslant \\ \leqslant s(f_1, g, \Delta^*) + s(f_2, g, \Delta^*) &\leqslant \\ \leqslant s(f_1 + f_2, g, \Delta^*) \leqslant S(f_1 + f_2, g, \Delta^*) &\leqslant \\ \leqslant S(f_1, g, \Delta_1^*) + S(f_2, g, \Delta_2^*) &< \\ < s(f_1, g, \Delta_1^*) + s(f_2, g, \Delta_2^*) &+ \frac{2\varepsilon}{3} \end{aligned}$$

de unde

$$s(f_1 + f_2, g, \Delta^*) - s(f_1, g, \Delta_1') - s(f_2, g, \Delta_2') < \frac{2\varepsilon}{3}$$

şi

$$S(f_1, g, \Delta_1') + S(f_2, g, \Delta_2') - S(f_1 + f_2, g, \Delta^*) < \frac{2\varepsilon}{3}.$$

Din relaţiile de mai sus rezultă:

$$|s(f_1 + f_2, g, \Delta^*) - (\gamma_1 + \gamma_2)| < \varepsilon$$

şi

$$|S(f_1 + f_2, g, \Delta^*) - (\gamma_1 + \gamma_2)| < \varepsilon.$$

Teorema 5.1. Dacă f este Riemann-Stieltjes integrabilă în raport cu g pe $[a, b]$ şi $c \in \mathbf{R}$ atunci cf este integrabilă şi

$$\int_a^b cf\,dg = c\int_a^b f\,dg.$$

Teorema 6.1. Dacă f este Riemann-Stieltjes integrabilă în raport cu g pe $[a, b]$ şi $f \geq 0$ atunci

$$\int_a^b f\,dg \geq 0.$$

Teorema 7.1. Fie f Riemann-Stieltjes integrabilă în raport cu g pe $[a, b]$ şi fie $a < c < b$.

Atunci f este Riemann-Stieltjes integrabilă în raport cu g pe $[a, c]$ şi $[c, b]$ şi

$$\int_a^b f\,dg = \int_a^c f\,dg + \int_c^b f\,dg.$$

Demonstraţie. Fie $\varepsilon > 0$ dat. Să alegem $\Delta \in \mathscr{D}([a, b])$ astfel încît

$$S(f, g, \Delta) - s(f, g, \Delta) < \varepsilon.$$

Să presupunem că $c \in \Delta$ şi

$$\Delta = \{a = t_0 < t_1 < \ldots < t_k = c < t_{k+1} < \ldots < t_n = b\}.$$

Fie $\Delta_1 = \{a = t_0 < t_1 < \ldots < t_k = c\} \in \mathscr{D}([a, c])$

$$\Delta_2 = \{c = t_k < \ldots < t_n = b\} \in \mathscr{D}([c, b]).$$

Atunci

$$(S(f, g, \Delta_1) - s(f, g, \Delta_1)) + (S(f, g, \Delta_2) - s(f, g, \Delta_2)) =$$
$$S(f, g, \Delta) - s(f, g, \Delta) < \varepsilon.$$

Rezultă că f este integrabilă pe $[a, c]$ şi $[c, b]$.

Fie $$\int_a^c f\,dg = \gamma_1 \text{ şi } \int_c^b f\,dg = \gamma_2,$$

Putem scrie ţinînd seama de definiţia lui γ_1 şi γ_2 că:

$$0 \leq S(f, g, \Delta_1) - \gamma_1 < \varepsilon$$

şi

$$0 \leq S(f, g, \Delta_2) - \gamma_2 < \varepsilon.$$

Adunînd obţinem:

$$0 \leq S(f, g, \Delta) - (\gamma_1 + \gamma_2) < 2\varepsilon.$$

Pentru s putem stabili o inegalitate asemănătoare deci

$$\int_a^c f\,dg = \gamma_1 + \gamma_2.$$

A 2-a proprietate de linearitate a integralei Riemann-Stieltjes este dată în

Teorema 8.1. Dacă f este integrabilă pe $[a, b]$ în raport cu g_1, g_2 atunci f este integrabilă pe $[a, b]$ în raport cu funcţia $g = \alpha g_1 + \beta g_2$ şi

$$\int_a^b f\,dg = \alpha\int_a^b f\,dg_1 + \beta\int_a^b f\,dg_2.$$

Demonstraţie. Cum f este integrabilă în raport cu g_1 pe $[a, b]$ pentru o diviziune oarecare avem:

$$S_1(f, g_1, \Delta) - s_1(f, g_1, \Delta) =$$

$$= \sum_1^n M_k(g_1(t_k) - g_1(t_{k-1})) - \sum_1^n m_k(g_1(t_k) - g_1(t_{k-1})) < \varepsilon$$

(cu $m_k = \min f(t)$, şi $M_k = \max f(t)$, $t \in [t_k, t_{k-1}]$)

şi la fel

$$S_2(f, g_2, \Delta) - s_2(f, g_2, \Delta) =$$

$$= \sum_1^n M_k(g_2(t_k) - g_2(t_{k-1})) - \sum_1^n m_k(g_2(t_k) - g_2(t_{k-1})) < \varepsilon.$$

Dar:

$$S(f, \alpha g_1 + \beta g_2, \Delta) - s(f, \alpha g_1 + \beta g_2, \Delta) =$$

$$= \sum_{k=1}^n (M_k - m_k)\,[\alpha g_1(t_k) + \beta g_2(t_k) - \alpha g_1(t_k) - \beta g_2(t_k)] =$$

$$= \alpha\sum_{k=1}^n (M_k - m_k)\,(g_1(t_k) - g_1(t_{k-1})) +$$

$$+ \beta\sum_{k=1}^n (M_k - m_k)\,(g_2(t_k) - g_2(t_{k-1})) < 2\varepsilon.$$

Consecinţă. O funcţie f continuă pe $[a, b]$ este integrabilă în raport cu o funcţie cu variaţie mărginită.

Demonstraţie. O funcţie g cu variaţie mărginită se scrie conform teoremei de descompunere a lui Jordan ca diferenţă a 2 funcţii monotone adică $g = g_1 - g_2$, g_1 şi g_2 monotone.
Formula de integrare prin părţi pentru integrala Stieltjes este dată de

Teorema 9.1. Dacă f este integrabilă în raport cu g pe $[a, b]$, atunci g este integrabilă în raport cu f pe $[a, b]$ şi

$$\int_a^b f\,dg = f(b)\,g(b) - f(a)\,g(a) - \int_a^b g\,df.$$

Demonstraţie. Fie $a = x_0 = \xi_0 \leqslant x_1 \leqslant \xi_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_{i-1} \leqslant \xi_{i-1} \leqslant x_i \leqslant \xi_i \leqslant$ $\leqslant x_{i+1} \leqslant \xi_{i+1} \leqslant x_{i+2} \leqslant \ldots \leqslant \xi_{n-1} = x_n = b$.

Presupunem că: $x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_i < x_{i+1} < \ldots < x_n$

şi $$\xi_0 < \xi_1 < \xi_2 < \ldots < \xi_i < \xi_{i+1} < \ldots < \xi_{n-1}.$$

Fie $\Delta = (a = x_0 < x_1 < \ldots < x_i < x_{i+1} < \ldots < x_n = b)$ şi

$$\Delta' = (a = \xi_0 < \xi_1 < \ldots < \xi_i < \xi_{i+1} < \ldots < \xi_{n-1} = b).$$

Observăm că atunci cînd $\nu(\Delta) \to 0$ avem $\nu(\Delta') \to 0$ şi reciproc.
Avem:

$$\sigma_\Delta(\xi_i, f, g) = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\,[g(x_{i+1}) - g(x_i)] =$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\,g(x_{i+1}) - \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\,g(x_i) =$$

$$= f(b)\,g(b) - f(a)\,g(a) + \sum_{i=0}^{n-2} f(\xi_i)\,g(x_{i+1}) -$$

$$- \sum_{i=1}^{n-1} f(\xi_i)\,g(x_i) = f(b)\,g(b) - g(a)\,f(a) -$$

$$\sum_{i=1}^{n-1} g(x_i)\,[f(\xi_i) - f(\xi_{i-1})] = f(b)\,g(b) - f(a)\,g(a) -$$

$$- \sum_{i=1}^{n-1} g(x_i)\,[f(\xi_i) - f(\xi_{i-1})],$$

de unde rezultă luînd un şir de diviziuni cu $\nu(\Delta) \to 0$ relaţia cerută.

Observaţie. Din această teoremă şi din teorema 3 rezultă că o funcţie crescătoare este integrabilă Riemann-Stieltjes în raport cu o funcţie continuă pe $[a, b]$.

Teorema 10.1. Fie f integrabilă în raport cu g pe $[a, b]$, $m \leqslant f \leqslant M$, φ continuă pe $[m, M]$ şi $h(x) = \varphi(f(x))$ pe $[a, b]$. Atunci h este integrabilă Riemann-Stieltjes în raport cu g pe $[a, b]$.

Demonstrație. Deoarece φ este continuă pe $[m, M]$ rezultă că ea este și uniform continuă deci $(\forall)\ \varepsilon > 0\ (\exists)\ \delta < \varepsilon$ astfel încît pentru orice $y_1, y_2 \in [m, M]$ cu $|y_1 - y_2| < \delta$,

$$|\varphi(y_1) - \varphi(y_2)| < \varepsilon.$$

Cum f este integrabilă în raport cu g pe $[a, b]$ rezultă pentru $\varepsilon = \delta^2$ o diviziune $\Delta = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ a segmentului $[a, b]$ astfel ca:

$$S(f, g, \Delta) - s(f, g, \Delta) < \delta^2.$$

Fie M_i^* și m_i^* marginile superioară și inferioară ale funcției h cînd $x \in [x_i, x_{i+1}]$.

Împărțim numerele $1, 2, \ldots, n$ în 2 clase: $i \in A$ dacă $M_i - m_i < \delta$ și $i \in B$ dacă $M_i - m_i \geq \delta$.

Pentru $i \in A$, $M_i^* - m_i^* = \varphi(\xi_i) - \varphi(\eta_i) < \varepsilon\ \forall\ |\xi_i - \eta_i| < \delta(\varepsilon)$

Pentru $i \in B$, $M_i^* - m_i^* \leq 2K$ unde

$$K = \sup |\varphi(y)|,\ y \in [m, M].$$

Putem scrie deci că:

$$\delta \sum_{i \in B} (g(x_{i+1}) - g(x_i)) \leq \sum_{i \in B} (M_i - m_i)\,(g(x_{i+1}) - g(x_i)) < \delta^2$$

astfel că:

$$\sum_{i \in B} (g(x_{i+1}) - g(x_i)) < \delta$$

Deci

$$S^*(f, g, \Delta) - s^*(f, g, \Delta) = \sum_{i \in A} (M_i^* - m_i^*)\,(g(x_{i+1}) - g(x_i)) +$$

$$+ \sum_{i \in B} (M_i^* - m_i^*)\,(g(x_{i+1}) - g(x_i)) < \varepsilon(g(b) - g(a)) + 2K\varepsilon =$$

$$= \varepsilon(g(b) - g(a) + 2K).$$

Observație. Din această teoremă rezultă următoarele clase de funcții integrabile Riemann

1) Dacă f este continuă pe $[a, b]$ există $\int_a^b f\,dx$.

2) Dacă f este monotonă și mărginită pe $[a, b]$ există $\int_a^b f\,dx$. Justificăm aceasta astfel:

1) Luînd în teorema 10.1, $\varphi = f$ continuă și $f = x$, $x \in [a, b]$, $g = x$, $x \in [a, b]$, rezultă că f este integrabilă în raport cu x adică există $\int_a^b f\,dx$.

2) Luînd x continuă și f monotonă atunci din observația teoremei 9.7. rezultă că $\int_a^b f\,dx$ există.

Alte proprietăţi ale integralei Riemann-Stieltjes sînt date în:

Teorema 11.7. Dacă f_1 şi f_2 sînt funcţii integrabile în raport cu g pe $[a, b]$, atunci

1) $f_1 \cdot f_2$ este integrabilă în raport cu g pe $[a, b]$.

2) $|f|$ este integrabilă în raport cu g şi

$$\left|\int_a^b f\,dg\right| \leqslant \int_a^b |f|\,dg.$$

Demonstraţie. Punînd $\varphi(t) = t^2$ şi aplicînd teorema precedentă rezultă că f^2 este integrabilă în raport cu g dacă f este integrabilă în raport cu g şi din relaţia

$$4f_1 \cdot f_2 = (f_1 + f_2)^2 - (f_1 - f_2)^2$$

rezultă afirmaţia 1).

Pentru 2) luăm $\varphi(t) = |t|$ şi aplicăm teorema precedentă; rezultă că $|f|$ este integrabilă în raport cu g dacă f este integrabilă în raport cu g.

Alegem $\varepsilon = \pm 1$ astfel încît $\varepsilon \int_a^b f\,dg \geqslant 0$.

Putem scrie

$$\left|\int_a^b f\,dg\right| = \varepsilon \int_a^b f\,dg = \int_a^b \varepsilon f\,dg \leqslant \int_a^b |f|\,dg$$

deoarece $\varepsilon f \leqslant |f|$.

Funcţii primitive

Fie $f(x)$ o funcţie definită pe intervalul $[a, b]$.

Punem problema determinării unei funcţii F în $[a, b]$ care să aibă proprietatea că

$$\frac{dF}{dx} = f(x), \quad x \in [a, b].$$

Funcţia F se numeşte funcţia primitivă a lui $f(x)$ în $[a, b]$.

Problema pusă trebuie să aibă în vedere existenţa unei asemenea funcţii şi unicitatea ei.

In legătură cu unicitatea primitivei observăm că dacă F_1 şi F_2 sînt 2 primitive,

$$\frac{dF_1}{dx} = f(x), \quad \frac{dF_2}{dx} = f(x),$$

$$\frac{d(F_1 - F_2)}{dx} = 0 \quad \text{şi deci } F_1 - F_2 = C,$$

C constantă numerică.

Fie f o funcție integrabilă în $[a, b]$. Funcția

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt, \quad x \in [a, b]$$

se numește integrala nedefinită a funcției f în $[a, b]$.

În cele ce urmează ne vom ocupa de integrala Riemann nedefinită și vom justifica faptul că integrarea și diferențierea sînt operații inverse una alteia.

Are loc

Teorema 12.1. Fie f integrabilă Riemann pe $[a, b]$. Pentru $a \leq x \leq b$ punem

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

atunci

1) Funcția F este continuă pe $[a, b]$.

2) Dacă funcția f este continuă în punctul $x_0 \in [a, b]$, atunci F este diferențiabilă în punctul x_0 și

$$F'(x_0) = f(x_0).$$

Demonstrație. 1) Funcția f este mărginită deoarece este integrabilă pe $[a, b]$ deci $(\exists)$ $M > 0$ astfel ca

$$|f(t)| < M, \quad t \in [a, b].$$

Pentru $a \leq x \leq y \leq b$ scriem:

$$|F(y) - F(x)| = \left|\int_x^y f(t)\,dt\right| \leq M(y - x).$$

Dar: $M|y - x| < \varepsilon$ cînd $|y - x| < \dfrac{\varepsilon}{M}$

și atunci $|F(y) - F(x)| < \varepsilon$ ceea ce arată că F este continuă în punctul x.

2) f este continuă în x_0 deci $(\forall)$ $\varepsilon > 0$ $(\exists)$ $\delta(\varepsilon) > 0$ astfel încît

$$|f(t) - f(x_0)| < \varepsilon$$

dacă $|t - x_0| < \delta$ și $a \leq t \leq b$; atunci

$$\left|\frac{F(t) - F(x_0)}{t - x_0} - f(x_0)\right| = \left|\frac{1}{t - x_0}\int_{x_0}^t [f(u) - f(x_0)]\,du\right| < \varepsilon$$

ceea ce arată că: $F'(x_0) = f(x_0)$.

De aici rezultă și

Teorema 12.2. Dacă f este integrabilă Riemann pe $[a, b]$ și există F pe $[a, b]$ astfel încît $F' = f$ atunci

$$\int_a^b f\,dx = F(b) - F(a),$$

(formula lui Leibniz-Newton).

Demonstrație. Pentru o diviziune Δ a segmentului $[a, b]$ alegem ξ_i, $(i = 1, \ldots, n)$ astfel încît $x_{i-1} \leqslant \xi_i \leqslant x_i$ şi

$$F(x_i) - F(x_{i-1}) = (x_i - x_{i-1})\, f(\xi_i).$$

(Aceasta rezultă din aplicarea teoremei creşterilor finite)
Atunci

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^{n} [F(x_i) - F(x_{i-1})] = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,(x_{i+1} - x_i)$$

şi această sumă tinde la $\int_a^b f\, dx$ cînd $\nu(\Delta) \to 0$.

Formula lui Leibniz-Newton este utilă în aplicaţii deoarece reduce calculul unei integrale definite la determinarea unei primitive pentru funcţia de sub integrală.

Exemple:

1) $$\int_0^{\pi} \sin^4 x\, dx = \int_0^{\pi} \left(\frac{1 - \cos 2x}{2}\right)^2 dx = \int_0^{\pi} \frac{3 - 4\cos 2x + \cos 4x}{8}\, dx =$$

$$= \frac{1}{8}\left(3x - 2\sin 2x + \frac{1}{4}\sin 4x\right)\Big|_0^{\pi} = \frac{3\pi}{8}.$$

2) Dacă $f(x)$ este un polinom de gradul 3,

$$f(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta,$$

$$\int_a^b f(x)\, dx = \alpha \frac{x^4}{4}\Big|_a^b + \frac{\beta}{3} x^3\Big|_a^b + \frac{\gamma}{2} x^2\Big|_a^b + \delta(b - a) =$$

$$= \frac{1}{12}[3\alpha(b^4 - a^4) + 4\beta(b^3 - a^3) + 6\gamma(b^2 - a^2) - 12\delta(b - a)] =$$

$$= \frac{b - a}{12}[3\alpha(b^3 + b^2 a + ba^2 + a^3) + 4\beta(b^2 + ab + a^2) +$$

$$+ 6\gamma(b + a) + 12\delta] = \frac{b - a}{6}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a + b}{2}\right) + f(b)\right]$$

care se numeşte formula celor 3 nivele.
Posibilitatea reducerii unei integrale Riemann-Stieltjes la o integrală Riemann este dată în

Teorema 11.1. Dacă f este integrabilă Riemann în raport cu g pe $[a, b]$, g' este integrabilă Riemann pe $[a, b]$ atunci f este integrabilă Riemann în raport cu g pe $[a, b]$ şi

$$\int_a^b f\, dg = \int_a^b f g'\, dx.$$

Demonstrație. Observăm că fg' este integrabilă Riemann (teorema 11.1). Cum fg' și g' sînt integrabile Riemann rezultă că pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta_1(\varepsilon)$, $\delta_2(\varepsilon)$ astfel incît:

$$\left|\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\, g'(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) - \int_a^b fg'\,dx\right| < \varepsilon$$

cînd $\nu(\Delta) < \delta_1$ și

$$\left|\sum_{i=0}^{n-1} g'(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) - \int_a^b g'\,dx\right| < \varepsilon$$

cînd $\nu(\Delta) < \delta_2$ și $x_{i-1} \leqslant \xi_i \leqslant x_i$.

Alegem Δ astfel ca $\nu(\Delta) < \delta_1$, $\nu(\Delta) < \delta_2$ și $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$.
Putem scrie

$$\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)(g(x_i) - g(x_{i-1})) = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\, g'(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) +$$

$$+ \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)(g'(\xi_i^*) - g'(\xi_i))(x_i - x_{i-1}).$$

ξ_i^* au fost introduse prin aplicarea formulei creşterilor finite funcției g pe $[x_{i-1}, x_i]$ și $\xi_i^* \in (x_{i-1}, x_i)$.

Dar,

$$\left|\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)(g'(\xi_i^*) - g'(\xi_i))(x_i - x_{i-1})\right| \leqslant M \sum_{i=0}^{n-1} |g'(\xi_i^*) - g'(\xi_i)| \times$$

$$\times (x_i - x_{i-1}) \leqslant M\left(\left|\sum_{i=0}^{n-1} g'(\xi_i^*)(x_i - x_{i-1}) - \int_a^b g'\,dx\right| +\right.$$

$$\left. + \left|\sum_{i=0}^{n-1} g'(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) - \int_a^b g'\,dx\right|\right) \leqslant 2M\varepsilon.$$

Rezultă că sumele

$$\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)(g(x_i) - g(x_{i-1})) \text{ și } \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\, g'(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$$

converg către aceeaşi limită.

Exemplu: Să se calculeze $\int_0^1 f\,dg$ dacă

$$g = \begin{cases} x, & x \in \left[0, \dfrac{1}{2}\right], \\ 1 - x, & x \in \left(\dfrac{1}{2}, 1\right], \end{cases} \quad f = x^2,\ x \in [0, 1].$$

Observăm că g este cu variaţie mărginită deoarece $g = g_1 + g_2$, g_1 monotonă pe $\left[0, \frac{1}{2}\right]$, g_2 monotonă pe $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ iar f este continuă

$$g_1 = \begin{cases} x, & x \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ 0, & x \in \left(\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases}; \quad g_2 = \begin{cases} 0, & x \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ 1 - x, & x \in \left(\frac{1}{2}, 1\right]. \end{cases}$$

g nu este derivabilă pe $[0, 1]$ dar f este derivabilă, şi pentru a calcula integrala aplicăm formula de integrare prin părţi

$$\int_0^1 f dg = fg\Big|_0^1 - \int_0^1 g df = -\int_0^1 g f' dx =$$

$$= 2\int_0^1 g x\, dx = 2\left[\int_0^{\frac{1}{2}} x^2 dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 (1 - x) x\, dx\right] = \frac{1}{4}.$$

Din teorema 9.1 obţinem:

Formula de integrare prin părţi pentru o integrală Riemann. Pentru aceasta vom lua

$$F(x) = \int_a^x f(t)\, dt,\ G(x) = \int_a^x g(t)\, dt.$$

Din teorema 9.1 rezultă formula

$$\int_a^b F(x)\, dG(x) = F(x)\, G(x)\Big|_a^b - \int_a^b G(x)\, dF(x)$$

cu $F'(x) = f(x)$, $G'(x) = g(x)$ care se mai poate scrie sub forma:

$$\int_a^b F(x)\, G'(x)\, dx = F(x)\, G(x)\Big|_a^b - \int_a^b G(x)\, F'(x)\, dx.$$

În legătură cu posibilitatea schimbării variabilei în integrala Riemann are loc

Teorema 15.1. Fie f şi φ continue pe $[a, b]$, φ strict crescătoare pe $[a, b]$ şi ψ funcţia inversă a lui φ. Atunci

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(\psi(y))\, d\psi(y).$$

Demonstraţie. Pentru o diviziune Δ oarecare

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$$

punem $y_i = \varphi(x_i)$, $i = 0, 1, \ldots, n$ şi considerăm diviziunea

$$\Delta' : \varphi(a) = y_0 \leqslant y_1 \leqslant \ldots \leqslant y_{n-1} \leqslant y_n = \varphi(b).$$

Punînd $g(y) = f(\psi(y))$ obţinem

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} g(y_i)[\psi(y_i) - \psi(y_{i-1})].$$

Deoarece φ este continuă pe $[a, b]$, φ este şi uniform continuă pe $[a, b]$ şi deci dacă $\mu(\Delta) \to 0$ atunci şi $\mu(\Delta') \to 0$ şi pentru $\mu(\Delta) \to 0$ obţinem egalitatea din enunţ.

Formule de medie pentru integrala Riemann-Stieltjes sînt date de

Teorema 16.1. (*Prima formulă de medie*). Dacă f este continuă pe $[a, b]$ iar g este monoton crescătoare pe $[a, b]$ atunci există ξ astfel ca $a \leqslant \xi \leqslant b$ şi

$$\int_a^b f\,dg = f(\xi)\,[g(b) - g(a)].$$

Demonstraţie: Să punem

$$M = \sup f(t), \quad m = \inf f(t), \quad a \leqslant t \leqslant b.$$

Atunci:

$$m[g(b) - g(a)] \leqslant \int_a^b f\,dg \leqslant M[g(b) - g(a)].$$

Din teorema lui Darboux pentru funcţii continue există $a \leqslant \xi \leqslant b$ astfel încît

$$\int_a^b f\,dg = \lambda\,[g(b) - g(a)] = f(\xi)[g(b) - g(a)].$$

Teorema 17.1. (*a 2-a formulă de medie*). Dacă f este monotonă şi g este cu variaţie mărginită şi continuă pe $[a, b]$ există un punct $\xi \in [a, b]$ astfel încît

$$\int_a^b f\,dg = f(a)\,[g(\xi) - g(a)] + f(b)\,[g(b) - g(\xi)].$$

Demonstraţie: Din formula de integrare prin părţi şi prima formulă de medie obţinem

$$\int_a^b f\,dg = f(b)\,g(b) - f(a)\,g(a) - \int_a^b g\,df =$$

$$= f(b)\,g(b) - f(a)\,g(a) - g(\xi)\,(f(b) - f(a))$$

pentru $\xi \in [a, b]$.

Exemple. Fie $f(x) = \int_x^{x+1} \sin t^2\,dt$. Să se arate că

$$|f(x)| < 1/2x, \quad x > 0.$$

Facem schimbarea de variabilă $t^2 = u$, $t = \sqrt{u}$,

$$dt = \frac{1}{2\sqrt{u}}\,du \text{ şi obţinem}$$

$$f(x) = \frac{1}{2}\int_{x}^{x+1}\frac{\sin u}{\sqrt{u}}\,du.$$

Dacă notăm $\alpha(u) = \frac{1}{\sqrt{u}}$ şi $\beta(u) = \sin u$ observăm că $\alpha(u)$ este o funcţie monotonă iar $\beta(u)$ este o funcţie cu variaţie mărginită continuă, deci putem aplica a 2-a formulă de medie

$$|f(x)| = \left|\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x}}(\sin\xi - \sin\sqrt{x}) + \frac{1}{\sqrt{x+1}}(\sin\sqrt{x+1} - \sin\xi)\right| \le$$

$$\le \frac{1}{2}\left|\frac{\sin\xi - \sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}} + \frac{\sin\sqrt{x+1} - \sin\xi}{\sqrt{x+1}}\right| \le$$

$$\le \frac{1}{2\sqrt{x}}\left(|\sin\xi - \sin\sqrt{x}| + |\sin\sqrt{x+1} - \sin\xi|\right)$$

unde $\sqrt{x} < \xi < \sqrt{x+1}$.

Mai departe

$$|f(x)| \le \frac{1}{\sqrt{x}}\left(\left|\sin\frac{\xi - \sqrt{x}}{2}\cos\frac{\xi + \sqrt{x}}{2}\right| + \left|\sin\frac{\sqrt{x+1} - \xi}{2}\cos\frac{\sqrt{x+1} + \xi}{2}\right|\right) \le$$

$$\le \frac{1}{\sqrt{x}}\left(\left|\sin\frac{\xi - \sqrt{x}}{2}\right| + \left|\sin\frac{\sqrt{x+1} - \xi}{2}\right|\right)$$

$$\le \frac{1}{\sqrt{x}}\left(\sin\frac{\xi - \sqrt{x}}{2} + \sin\frac{\sqrt{x+1} - \xi}{2}\right) \le$$

$$\le \frac{1}{\sqrt{x}}\left(\frac{\xi - \sqrt{x}}{2} + \frac{\sqrt{x+1} - \xi}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} < \frac{1}{2x}.$$

Metode de calcul pentru integrala Riemann

Integrala funcţiilor raţionale. Pentru a discuta integrarea funcţiilor raţionale de forma

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

unde $P(x)$ şi $Q(x)$ sînt polinoame în **R** trebuie să ne ocupăm de posibilitatea descompunerii în elemente simple a funcţiilor raţionale.

Vom considera grad $P(x) <$ grad $Q(x)$.

(În cazul în care nu este îndeplinită această condiție facem împărțirea celor două polinoame).

Definiția 5.1. Numim elemente simple funcțiile raționale $\frac{A}{(x-a)^n}$ și $\frac{Ax+B}{[(x-\alpha)^2+(x-\beta)^2]^n}$ cînd rădăcinile numitorului sînt numerele complexe $\alpha+i\beta$, $\alpha-i\beta$.

Vom demonstra că funcția $\frac{P(x)}{Q(x)}$ cu grad $P(x) <$ grad $Q(x)$ admite o descompunere în elemente simple unică.

Caz. *I*, ecuația $Q(x)=0$ are rădăcina reală $x=a$ de ordin de multiplicitate m.

Vom scrie $Q(x)=(x-a)^m Q_1(x)$ cu $Q_1(a)\neq 0$.

Pentru orice A_1, A_1 real putem scrie

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A_1}{(x-a)^m}+\frac{P(x)-A_1Q_1(x)}{(x-a)^m Q_1(x)}.$$

Vom determina pe A_1 astfel încît polinomul $P(x)-A_1Q_1(x)$ este divizibil cu $x-a$ adică

$$P(a)-A_1Q_1(a)=0$$

de unde $A_1=\frac{P(a)}{Q_1(a)}$.

Pentru această valoare a lui A_1 se poate scrie:

$$P(x)-A_1Q_1(x)=(x-a)P_1(x)$$

și deci:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A_1}{(x-a)^m}+\frac{P_1(x)}{(x-a)^{m-1}Q_1(x)}.$$

Urmărind același procedeu pentru fracția $\frac{P_1(x)}{(x-a)^{m-1}Q_1(x)}$ obținem

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A_1}{(x-a)^m}+\frac{A_2}{(x-a)^{m-1}}+\frac{P_2(x)}{(x-a)^{m-2}Q_1(x)}$$

și în cele din urmă

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A_1}{(x-a)^m}+\frac{A_2}{(x-a)^{m-1}}+\ldots+\frac{A_m}{x-a}+\frac{P^*(x)}{Q_1(x)}.$$

Calculul coeficienților A_k se face prin identificare sau prin următoarea metodă.

Dacă $Q(x)$ are toate rădăcinile simple și reale $a_1, a_2, \ldots, a_n$ avem:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\sum_{k=1}^{n}\frac{A_k}{x-a_k}$$

şi, înmulţind cu $x - a_k$ obţinem

$$A_k = \lim_{x \to a_k} \frac{(x - a_k)\,P(x)}{Q(x)} = \lim_{x \to a_k} \frac{(x - a_k)\,P'(x) + P(x)}{Q'(x)} = \frac{P(a_k)}{Q'(a_k)}$$

şi, înlocuind în dezvoltarea lui $\frac{P(x)}{Q(x)}$ obţinem

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{P(a_k)}{Q'(a_k)} \cdot \frac{Q(x)}{x - a_k}$$

relaţie care se numeşte *formula de interpolare a lui Lagrange.*

În cazul în care polinomul $Q(x)$ are rădăcini multiple reale putem scrie

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_m}{(x-a)^m} + \frac{A_{m-1}}{(x-a)^{m-1}} + \ldots + \frac{A_1}{x-a} + \frac{P^*(x)}{Q_1(x)}.$$

Coeficienţii A_i se calculează prin identificare sau astfel:

Înmulţim identitatea cu $(x - a)^m$ şi facem $x = a$ pentru calculul lui A_m. Avem:

$$A_m = \lim_{x \to a} \frac{(x-a)^m P(x)}{Q(x)}.$$

Pentru a calcula A_{m-k} înmulţim cu $(x - a)^m$ derivăm apoi în raport cu x de k ori ($k \le m - 1$) şi facem $x = a$; rezultă

$$A_{m-k} = \lim_{x \to a} \frac{1}{k!} \left[\frac{P(x)\,(x-a)^m}{Q(x)}\right]^{(k)}.$$

Exemplu: Funcţia $f(x) = \frac{1}{(x-1)^2 (x+1)}$, $x \in \mathbf{R} \setminus \{-1, 1\}$ admite o descompunere de forma

$$f(x) = \frac{A_1}{x - 1} + \frac{A_2}{(x-1)^2} + \frac{A_3}{x + 1}.$$

Calculăm

$$A_1 = \lim_{x \to -1} (x + 1) \cdot f(x) = \lim_{x \to -1} \frac{1}{(x-1)^2} = \frac{1}{4}$$

$$A_2 = \lim_{x \to 1} (x - 1)^2 f(x) = \lim_{x \to 1} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{2}$$

$$A_3 = \lim_{x \to 1} [(x - 1)^2 f(x)]' = \lim_{x \to 1}\left(-\frac{1}{(x+1)^2}\right) = -\frac{1}{4}.$$

Caz II. Ecuaţia $Q(x) = 0$ are rădăcina $x = a + ib$ de ordin de multiplicitate m.

Polinomul $Q(x)$ va avea şi pe $x = a - ib$ rădăcină de acelaşi ordin de multiplicitate deci,

$$Q(x) = [(x - a)^2 + b^2]^m \, Q_1(x).$$

Pornim de la identitatea:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{Ax+B}{[(x-a)^2+b^2]^n} + \frac{P(x)-(Ax+B)Q_1(x)}{[(x-a)^2+b^2]^n Q_1(x)}$$

adevărată oricare ar fi A şi B pe care le determinăm astfel ca polinomul

$$P(x) - (Ax+B)Q_1(x)$$

să fie divizibil cu $(x-\alpha)$, $\alpha = a + bi$.
Cu A şi B astfel determinaţi se poate scrie:

$$P(x) - (Ax+B)Q_1(x) = [(x-a)^2+b^2]P_1(x)$$

unde $P_1(x)$ este real.

Mai departe vom scrie:

$$\frac{P_1(x)}{[(x-a)^2+b^2]^{n-1}Q_1(x)} = \frac{Cx+D}{[(x-a)^2+b^2]^{n-1}} + \frac{P_2(x)}{[(x-a)^2+b^2]^{n-2}Q_1(x)}$$

şi în general

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_n+xB_n}{[(x-a)^2+b^2]^n} + \frac{A_{n-1}+xB_{n-1}}{[(x-a)^2+b^2]^{n-1}} + \dots$$

$$\dots + \frac{A_1+xB_1}{(x-a)^2+b^2} + \frac{P^*(x)}{Q_1(x)}$$

Coeficienţii A_k, B_k se determină prin identificare.

Exemple: 1. $I_n = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n}$ se calculează stabilind o relaţie de recurenţă între I_n şi I_{n+1}.
Aplicînd formula de integrare prin părţi cu

$$u(x) = (x^2+a^2)^{-n} \text{ şi } dv = dx$$

$$u'(x) = -2nx(x^2+a^2)^{-n-1}, \quad v = x$$

obţinem:

$$I_n = \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2n\int \frac{x^2\,dx}{(x^2+a^2)^{n+1}}$$

sau

$$I_n = \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2n(I_n - a^2 I_{n+1})$$

sau încă

$$I_{n+1} = \frac{2n-1}{2n}a^{-2} I_n + \frac{x}{2na^2(x^2+a^2)^n}$$

Dînd lui n valorile $1, 2, 3, \dots, n$:

$$\frac{(2n-1)\dots 5\cdot 3}{2n\dots 4}\,a^{-2(n-1)} \qquad I_2 = \frac{1}{2}\,a^{-2} I_1 + \frac{x}{2a^2(x^2+a^2)}$$

$$\frac{(2n-1)\dots 5}{2n\dots 6}\,a^{-2(n-2)} \qquad I_3 = \frac{3}{4}\,a^{-2} I_2 + \frac{x}{4a^2(x^2+a^2)^2}$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\frac{2n-1}{2n}\,a^{-2} \qquad I_n = \frac{2n-3}{2n-2}\,a^{-2} I_{n-1} + \frac{x}{2(n-1)a^2(x^2+a^2)^{n-1}}$$

$$1 \qquad I_{n+1} = \frac{2n-1}{2n}\,a^{-2} I_n + \frac{x}{2na^2(x^2+a^2)^n}$$

$$I_{n+1} = \frac{x}{2a^2}\left[\frac{(2n-1)!!\,a^{-2n+2}}{(2n)!!\,2(x^2+a^2)} + \frac{(2n-1)\dots 5}{2n\dots 6}\cdot\frac{a^{-2n+4}}{(x^2+a^2)^2} + \dots\right.$$

$$\left.\dots + \frac{1}{n(x^2+a^2)^n}\right] + \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\,a^{-2n-1}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C.$$

2. La fel se calculează $\int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}\,dx = B(m, n)$ pentru $m, n \in \mathbf{N}$. Avem:

$$B(m, n) = \frac{x^m}{m}(1-x)^{n-1}\Big|_0^1 + \frac{n-1}{m}\int_0^1 x^m(1-x)^{n-2}\,dx$$

sau

$$B(m, n) = \frac{n-1}{m}\,B(m+1, n-1)$$

$$B(m+1, n-1) = \frac{n-2}{m+1}\,B(m+2, n-2)$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$B(m+n-2, 2) = \frac{1}{m+n-2}\,B(m+n-1, 1)$$

Înmulțind membru cu membru aceste relații,

$$B(m, n) = \frac{(n-1)!}{m(m+1)\dots(m+n-2)}\,B(m+n-1, 1) =$$

$$= \frac{(n-1)!}{m(m+1)\dots(m+n-1)} = \frac{(n-1)!\,(m-1)!}{(m+n-1)!}$$

Tipuri de integrale reductibile la integrale din funcţii raţionale

I. Integralele de forma $\int R(\sin x, \cos x)\,dx$ se pot reduce la integrale raţionale astfel:

1) dacă $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$ se face schimbarea $\sin x = t$.

2) dacă $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$ se face schimbarea $\cos x = t$.

3) dacă $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$ se face schimbarea $\operatorname{tg} x = t$.

4) în celelalte cazuri se face schimbarea $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$.

Exemplu: Să se calculeze $\int_0^{2\pi} \frac{\sin x\,dx}{\sin x + \cos x - 5}$.

Vom face schimbarea

$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$, dar deoarece când $x \in [0, 2\pi]$, $\frac{x}{2} \in [0, \pi]$ şi tangenta este discontinuă în $\frac{\pi}{2}$ vom scrie

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{\sin x\,dx}{\sin x + \cos x - 5} = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin x\,dx}{\sin x - \cos x - 5},$$

relaţie adevărată deoarece $f(x + 2\pi) = f(x)$.

$$f(x) = \frac{\sin x}{\sin x + \cos x - 5} \quad \text{şi} \quad \int_a^{a+2\pi} f(t)\,dt = \int_0^{2\pi} f(t)\,dt$$

oricare ar fi a.

$$I = -2\int_{-\infty}^{\infty} \frac{t\,dt}{(1+t^2)(3t^2 - t + 2)} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{t+1}{t^2+1}\,dt -$$

$$-\int_{-\infty}^{\infty} \frac{3t+2}{3t^2 - t + 2}\,dt = 2\operatorname{arctg} t \Big|_{0}^{\infty} -$$

$$-\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{6t - 1 + 5}{3t^2 - t + 2}\,dt = \pi - \frac{1}{2}\ln(3t^2 - t + 2)\Big|_{-\infty}^{\infty} -$$

$$-\frac{5}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{\left(t\sqrt{3} - \frac{1}{2\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{23}{12}}\right)^2} = \pi - \frac{5}{2\sqrt{3}} \cdot \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{23}}\pi =$$

$$= \pi\left(1 - \frac{5}{\sqrt{23}}\right).$$

II. Integralele de forma $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\,dx$ se reduc la integrale din funcţii raţionale în următoarele cazuri.

1) dacă $a > 0$, $\sqrt{ax^2+bx+c} = x\sqrt{a} + t$

2) dacă $c > 0$; $\sqrt{ax^2+bx+c} = xt \pm \sqrt{c}$

3) dacă $b^2 - 4ac > 0$ fie x_0 o rădăcină reală a ecuaţiei $ax^2+bx+c = 0$; schimbarea de variabilă care se face este dată de

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = t(x - x_0).$$

Să arătăm de exemplu valabilitatea schimbării de variabilă 2).

Ridicînd la pătrat $ax^2 + bx + c = x^2t^2 + c \pm 2xt\sqrt{c}$ de unde:

$$x = \frac{b \mp 2t\sqrt{c}}{t^2 - a}, \quad dx = \frac{2(\pm\sqrt{c}\,a - bt \pm t^2\sqrt{c})}{(t^2-a)^2}\,dt$$

şi astfel

$$\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\,dx =$$

$$= 2\int R\left(\frac{b \mp 2t\sqrt{c}}{t^2-a}, \frac{t^2\sqrt{c} \mp a\sqrt{c} - bt}{t^2-a}\right)\cdot\frac{\pm\sqrt{c}\,a - bt \pm t^2\sqrt{c}}{(t^2-a)^2}\,dt$$

iar integrala obţinută este o integrală dintr-o funcţie raţională.

În acelaşi mod se stabileşte şi valabilitatea celorlalte transformări.

Exemplu. Să se calculeze $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{-x^2+x+6}}$.

Sîntem în cazul 3) şi facem schimbarea de variabilă

$$\sqrt{-x^2+x+6} = t(x+2)$$

de unde

$$\sqrt{\frac{3-x}{x+2}} = t, \quad \frac{3-x}{x+2} = t^2$$

$$x = \frac{3-2t^2}{t^2+1}, \quad dx = \frac{-10t\,dt}{(t^2+1)^2},$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{-x^2+x+6}} = -2\int_{\sqrt{\frac{3}{2}}}^{\sqrt{\frac{2}{3}}} \frac{dt}{t^2+1} = 2\operatorname{arctg} t\,\Big|_{\sqrt{\frac{2}{3}}}^{\sqrt{\frac{3}{2}}} =$$

$$= 2\left(\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{3}{2}} - \operatorname{arctg}\sqrt{\frac{2}{3}}\right) = 2\operatorname{arctg}\frac{1}{2\sqrt{6}}.$$

III. 1) Integrala de forma $\int R(x, \sqrt{x^2 - a^2})\,dx$ se transformă prin schimbarea $x = a\,\mathrm{ch}\, t$.

Obținem

$$\int R(x, \sqrt{x^2 - a^2})\,dx = a\int R(a\,\mathrm{ch}\,t, a\,\mathrm{sh}\,t)\,\mathrm{sh}\,t\,dt.$$

2) Integrala de forma $\int R(x, \sqrt{a^2 - x^2})\,dx$ se transformă prin schimbarea $x = a\sin t$, $dx = a\cos t\,dt$.

Obținem

$$\int R(x, \sqrt{a^2 - x^2})\,dx = a\int R(a\sin t, a\cos t)\cos t\,dt$$

3) Integralele de forma $\int R(x, \sqrt{a^2 + x^2})\,dx$ se pot transforma prin schimbarea

$$x = a\,\mathrm{sh}\,t,\quad dx = a\,\mathrm{ch}\,t\,dt.$$

Obținem

$$\int R(x, \sqrt{a^2 + x^2})\,dx = a\int R(a\,\mathrm{sh}\,t, a\,\mathrm{ch}\,t)\,\mathrm{ch}\,t\,dt.$$

IV. Integralele de forma:

$$\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_1}{n_1}}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_2}{n_2}}, \dots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_p}{n_p}} dx\right)$$

se transformă prin substituția:

$$\frac{ax+b}{cx+d} = t^r$$

unde r este cel mai mic multiplu comun al numerelor întregi $n_1, n_2, \dots, n_p$.

Deci această transformare obținem:

$$x = \frac{t^r d - b}{a - ct^r},\quad dx = \frac{r(ad - bc)\,t^{r-1}}{(a - ct^r)^2}\,dt$$

și integrala devine:

$$\int R\left(\frac{dt^r - b}{a - ct^r}, t^{r_1}, \dots, t^{r_p}\right)\frac{r(ad - bc)}{(a - ct^r)^2}\,t^{r-1}\,dt$$

V. Integralele binome de forma

$$\int x^{\alpha}(ax^{\beta} + b)^{\gamma}\,dx,\quad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Q}$$

se transformă în integrale de funcţii raţionale în următoarele cazuri:

1) dacă $\frac{\alpha+1}{\beta} = n$, n întreg

se face schimbarea: $ax^{\beta} + b = t^{r}$, unde $\gamma = \frac{p}{r}$, ... $\frac{1}{\ldots}$

Obţinem $x = (t^{r} - b)^{\frac{1}{\beta}} a^{-\frac{1}{\beta}}$,

$$dx = \frac{r a^{-\frac{1}{\beta}}}{\beta} t^{r-1}(t^{r} - b)^{\frac{1}{\beta}-1}\, dt$$

şi integrala se transformă în:

$$\frac{r}{\beta} a^{-\frac{\alpha+1}{\beta}} \int t^{p+r-1}(t^{r} - b)^{\frac{\alpha+1}{\beta}-1}\, dt$$

2) dacă $\frac{\alpha+1}{\beta} + \gamma = n$, n întreg se face schimbarea $ax^{\beta} + b = t^{r}x^{\beta}$, ... $\frac{1}{\ldots}$

Obţinem:

$$x = b^{\frac{1}{\beta}}(t^{r} - a)^{-\frac{1}{\beta}}, \quad dx = -\frac{b^{\frac{1}{\beta}}}{\beta} r t^{r-1}(t^{r} - a)^{-\frac{1}{\beta}-1}\, dt$$

şi deci:

$$-\frac{b^{\frac{\alpha+1}{\beta}+\gamma} r}{\beta} \int t^{p+r-1}(t^{r} - a)^{-\frac{\alpha+1}{\beta}-\gamma-1}\, dt$$

Exemplu

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{x}\, dx}{\sqrt{1+\sqrt[3]{x}}} = \int_0^1 x^{\frac{1}{2}}(1 + x^{\frac{1}{3}})^{-\frac{1}{2}}\, dx.$$

Aici este cazul

$$\frac{\alpha+1}{\beta} + \gamma = 4 \in N$$

şi deci schimbarea care se face este:

$$1 + x^{\frac{1}{3}} = t^{2}x^{\frac{1}{3}};\ x = (t^{2} - 1)^{-3},\ t \in [1, \sqrt{2}],$$
$$dx = -6t(t^{2} - 1)^{-4}\, dt.$$

Obţinem integrala

$$-6\int_1^{\sqrt{2}} (t^{2} - 1)^{-5}\, dt = 6\int_1^{\sqrt{2}} \frac{dt}{(1 - t^{2})^{5}}$$

Integrale eliptice

În cazul în care polinomul $P(x)$ este de grad $n > 2$, integrala

$$\int R(x, \sqrt{P(x)})\, dx$$

nu se exprimă în general prin funcții elementare.

Integralele de acest tip se pun sub una din următoarele forme:

$$F(k, \theta) = \int_0^{\theta} \frac{dt}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 t}}$$

sau

$$E(k, \theta) = \int_0^{\theta} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 t}\, dt, \quad 0 \leq k \leq 1.$$

Pentru $k = 0$, $E(0, \theta) = F(0, \theta) = \theta$. Pentru $k = 1$, cele 2 integrale se exprimă prin funcții elementare:

$$F(1, \theta) = \int_0^{\sin \theta} \frac{dt}{1 - t^2} = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \sin \theta}{1 - \sin \theta}$$

$$E(1, \theta) = \int_0^{\sin \theta} dt = \sin \theta.$$

Funcțiile F și E se numesc *funcții eliptice* și ele se găsesc calculate în tabele pentru diferitele valori ale lui k și θ. Mai sînt unele integrale care nu se pot exprima prin funcții elementare. Acestea sînt:

$$\int \frac{\sin x}{x}\, dx \text{ (sinus integral)}; \quad \int \frac{\cos x}{x}\, dx \text{ (cosinus integral)}.$$

$$\int \frac{e^x}{x}\, dx \text{ (exponențial integral)}$$

$$\int \frac{dx}{\ln x} \text{ (logaritm integral)}$$

Integrarea termen cu termen a unui șir de funcții

În capitolul IV am studiat proprietăți privind continuitatea și derivabilitatea unui șir de funcții. Continuăm cu studiul posibilității de integrare a unui șir de funcții.

Teorema 18.1. Fie $(f_n)_{n \in N}$ un șir de funcții continue definite pe $[a, b]$. Dacă șirul $(f_n)_{n \in N}$ este uniform convergent pe $[a, b]$ către funcția f,

$$\lim_{n \to \infty} \int_a^b f_n(x)\, dx = \int_a^b \lim_{n \to \infty} f_n(x)\, dx = \int_a^b f(x)\, dx.$$

Demonstrație. $f_n \xrightarrow{u} f$ pe $[a, b]$; deci pentru orice $\varepsilon > 0$ există $n_0(\varepsilon)$ astfel încît $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ pentru $n > n_0(\varepsilon)$.

Funcțiile f_n și f sînt continue și deci integrabile. Putem scrie

$$\left|\int_a^b f_n\,dx - \int_a^b f\,dx\right| \leq \int_a^b |f_n - f|\,dx < \varepsilon(b - a) \quad \text{pentru } n > n_0(\varepsilon).$$

Exemplu. Șirul $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ cu $f_n(x) = nx\,e^{-nx^2}$, $n \in \mathbf{N}$ este convergent pentru $x \in [0, 1]$ către funcția $f(x) \equiv 0$. Convergența nu este însă uniformă. Teorema nu se aplică.

$$\int_0^1 f_n(x)\,dx = n\int_0^1 x e^{-nx^2}\,dx = -\frac{e^{-nx^2}}{2}\Bigg|_0^1 = \frac{1}{2}(1 - e^{-n})$$

$$\lim_{n \to \infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx = \frac{1}{2} \neq 0.$$

Dacă aplicăm această teoremă pentru șirul sumelor parțiale asociat unei serii de funcții $f_1 + f_2 + \ldots + f_n + \ldots$ cu

$$f_n(x): [a, b] \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R} \text{ obținem}$$

Teorema 19.7. Dacă seria de funcții $f_1 + f_2 + \ldots + f_n + \ldots$ este uniform convergentă către funcția f pe $[a, b]$ și dacă funcțiile f_n sînt continue pe $[a, b]$ atunci

$$\int_a^b f_1\,dx + \int_a^b f_2\,dx + \ldots + \int_a^b f_n\,dx + \ldots = \int_a^b f\,dx.$$

În cazul particular în care seria de funcții este o serie de puteri

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots$$

are loc

Teorema 20.1. O serie de puteri poate fi integrată termen cu termen în intervalul de convergență.

Exemple.

1. Pentru a calcula $\displaystyle\int_2^3 \frac{dx}{\sqrt{1 + x^4}}$ considerăm funcția $f(x) = (1 + x^4)^{-\frac{1}{2}}$, pe care o dezvoltăm în serie de puteri pentru $|x| > 1$.

Avem

$$(1 + x^4)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{x^2}\left(1 + \frac{1}{x^4}\right)^{-\frac{1}{2}} =$$

$$= \frac{1}{x^2}\left(1 - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^4} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 2}\cdot\frac{1}{2!}\cdot\frac{1}{x^8} + \ldots + (-1)^n \frac{1\cdot 3 \ldots (2n - 1)}{2^n \cdot n!}\cdot\frac{1}{x^{4n}} + \ldots\right)$$

Integrăm această serie de puteri ale lui $\frac{1}{x}$ termen cu termen și obținem

$$\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{1 + x^4}} = \int_1^2 \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^6} + \ldots + (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{1}{x^{4n+2}} + \ldots \right) dx =$$

$$= \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!\,(4n+1)} \left(1 - \frac{1}{2^{4n+1}}\right).$$

2. La fel pentru calculul integralei

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - 0,2 \sin^2 x}\, dx$$

dezvoltăm în serie de puteri ale lui $\sin x$, funcția $f(x) = \sqrt{1 - 0,2 \sin^2 x}$ dezvoltare valabilă pentru $|\sin x| < \sqrt{5}$.

Avem

$$\sqrt{1 - 0,2 \sin^2 x} = (1 - 0,2 \sin^2 x)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= 1 - \frac{1}{10} \sin^2 x - \frac{0,2^2 \sin^4 x}{4 \cdot 2!} - \ldots - \frac{(2n-3)!!\, 0,2^n}{2^n n!} \sin^{2n} x - \ldots$$

și integrînd

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - 0,2 \sin^2 x}\, dx = \frac{\pi}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-3)!!}{10^n n!} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x\, dx =$$

$$= \frac{\pi}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-3)!!\,(2n-1)!!}{10^n \cdot n!\,(2n)!!} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} \left(1 - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^2 \frac{1}{5^n \cdot (2n-1)}\right)$$

§2. APLICAȚII GEOMETRICE ȘI MECANICE ALE INTEGRALEI

Integrala Riemann are aplicații în calculul ariilor domeniilor plane. Pentru început să vedem ce înțelegem prin aria unei mulțimi plane. Pentru a lămuri aceasta vom pleca de la aria poligoanelor. Aria unui poligon are proprietățile următoare bine cunoscute:

1. Dacă $P = P_1 \cup P_2 \cup \ldots \cup P_n$ unde P_i sînt poligoane disjuncte două cîte două atunci

$$\text{aria } P = \text{aria } P_1 + \text{aria } P_2 + \ldots + \text{aria } P_n.$$

2. Dacă $P = P_2 - P_1$, $P_1 \subset P_2$ atunci

$$\text{aria } P = \text{aria } P_2 - \text{aria } P_1$$

Prin definiție aria unui punct, a unui segment de dreaptă și a unei linii poligonale este nulă.

Vom folosi aceste cunoștințe pentru a extinde aria poligoanelor la o clasă mai largă de mulțimi pe care le vom numi mulțimi măsurabile Jordan.

Fie A o mulțime plană mărginită. Vom considera toate poligoanele P interioare mulțimii A și toate poligoanele Q exterioare mulțimii A. Deoarece $P \subset A \subset Q$ notăm

$$a_i(A) = \sup_{P \subset A} (\text{aria } P)$$

și

$$a_e(A) = \inf_{Q \supset A} (\text{aria } Q).$$

Numerele $a_i(A)$ și $a_e(A)$ se numesc *aria interioară* și respectiv *aria exterioară* (în sensul lui Jordan) a mulțimii A.

Definiția 1.2. Mulțimea mărginită A are arie (sau este măsurabilă în sensul lui Jordan) dacă $a_i(A) = a_e(A)$.

Notăm $a(A) = a_i(A) = a_e(A)$.

Vom da următorul criteriu de măsurabilitate.

Teorema 1.2. O mulțime A este măsurabilă dacă și numai dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există un poligon interior $P_\varepsilon \subset A$ și un poligon exterior $Q_\varepsilon \supset A$ astfel ca

$$\text{aria } a(Q_\varepsilon) - \text{aria } a(P_\varepsilon) < \varepsilon.$$

Demonstrație. Presupunem A măsurabilă; deci

$$\text{aria } A = \sup_{P \subset A} (\text{aria } P) = \inf_{Q \supset A} (\text{aria } Q)$$

Fie $\varepsilon > 0$. Există două poligoane $P_\varepsilon \subset A$ și $Q_\varepsilon \supset A$ astfel încît:

$$\text{aria } A < \text{aria } (P_\varepsilon) + \varepsilon$$

$$\text{aria } (Q_\varepsilon) < \text{aria } A + \varepsilon.$$

Din acestea rezultă aria Q_ε − aria $P_\varepsilon < 2\varepsilon$. Reciproc, să presupunem că pentru orice $\varepsilon > 0$ există două poligoane P_ε și Q_ε astfel încît $P_\varepsilon \subset A \subset Q_\varepsilon$ și aria Q_ε − aria $P_\varepsilon < \varepsilon$ și arătăm că A este măsurabilă.

Din inegalitățile:

$$\text{aria } (P_\varepsilon) \leq a_i(A) \leq a_e(A) \leq \text{aria } (Q_\varepsilon)$$

rezultă

$$a_e(A) - a_i(A) \leq \text{aria } (Q_\varepsilon) - \text{aria } (P_\varepsilon) < \varepsilon,$$

și, cum ε este arbitrar, $a_e(A) = a_i(A)$, deci A este măsurabilă.

Calculul ariei unui domeniu plan

Fie $y = f(x)$, $x \in [a, b]$ şi domeniul D mărginit de graficul funcţiei, de axa Ox şi de paralele prin a şi b la axa Oy (fig. 16). Pentru a determina aria acestui domeniu plan, considerăm o diviziune:

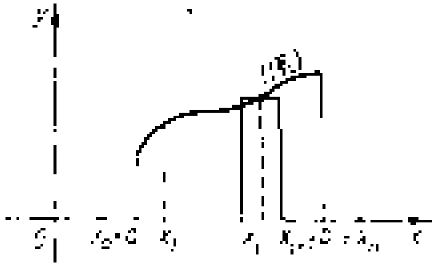

Fig. 16

$$\Delta: a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$$

şi punctele arbitrare $M_i(\xi_i)$, $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$.

Aria corespunzătoare intervalului $[x_i, x_{i+1}]$ o aproximăm prin aria dreptunghiului,

$$(x_{i+1} - x_i) \cdot f(\xi_i).$$

Însumînd, obţinem:

$$A = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \cdot (x_{i+1} - x_i).$$

Aceasta este o sumă Riemann care pentru un şir de diviziuni $(\Delta_n)_{n \in N}$ cu $\nu(\Delta_n)$ — tinzînd la zero, va tinde către

$$A = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Observaţie. Dacă $f(x) \leq 0$, $x \in [a, b]$ atunci $\int_a^b f(x)\,dx$ reprezintă aria domeniului considerat mai sus, cu semnul minus în faţă.

Putem spune deci că dacă $f(x)$ schimbă semnul pe $[a, b]$ aria domeniului mărginit de graficul lui f, de $[a, b]$ şi de dreptele $x = a$, $x = b$ este dată de:

$$A = \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

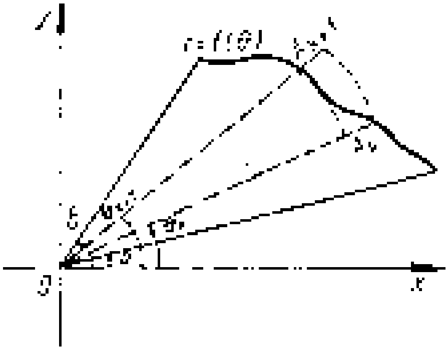

Fig. 17

Aria unui domeniu plan mărginit de o curbă dată în coordonate polare

Fie $r = f(\theta)$, $\theta \in [\alpha, \beta]$ ecuaţia în coordonate polare a unui arc de curbă. Vrem să calculăm aria domeniului plan din figura 17.

Fie Δ o diviziune a intervalului $[\alpha, \beta]$,

$$\alpha = \theta_0 < \theta_1 < \ldots < \theta_{n-1} < \theta_n = \beta,$$

$$m_i = \inf_{\theta \in [\theta_i, \theta_{i+1}]} f(\theta) \text{ şi } M_i = \sup_{\theta \in [\theta_i, \theta_{i+1}]} f(\theta).$$

Considerăm sumele Darboux:

$$s_\Delta = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1} m_k^2(\theta_{k+1} - \theta_k) \text{ şi } S_\Delta = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1} M_k^2(\theta_{k+1} - \theta_k).$$

Din figura 17 se vede că aria căutată $\mathcal{A}$ îndeplinește inegalitățile:

$$s_\Delta \le \mathcal{A} \le S_\Delta .$$

Dacă $(\Delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ este un șir de diviziuni cu $\nu(\Delta_n)\to 0$ și $f^2(\theta)$ este integrabilă atunci șirurile (s_{Δ_n}) și (S_{Δ_n}) au o limită comună care este tocmai valoarea ariei căutate

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta f^2(\theta)\, d\theta .$$

Aria unei suprafețe de rotație

Fie $y = f(x)$, f continuă cu f' continuă pe $[a, b]$. Presupunem de asemenea că $f \ge 0$ pe $[a, b]$.

Ne interesează să determinăm aria $\mathcal{A}$ a suprafeței generată prin rotația arcului AB în jurul axei Ox (figura 18).

Fie Δ o diviziune a intervalului $[a, b]$,

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b .$$

Aproximăm aria suprafeței obținută de rotația arcului $\overset{\frown}{M_kM_{k+1}}$ în jurul axei Ox prin aria laterală a trunchiului de con obținut prin rotația segmentului M_kM_{k+1} în jurul axei Ox.

Acest trunchi de con are aria laterală:

$$\omega_k = 2\pi\frac{y_k + y_{k+1}}{2}\sqrt{(x_{k+1}-x_k)^2 + (y_{k+1}-y_k)^2} .$$

Cum

$$y_{k+1} - y_k = f(x_{k+1}) - f(x_k) = (x_{k+1}-x_k)\, f'(\xi_k),\ \xi_k \in (x_k, x_{k+1}),$$

urmează că:

$$\omega_k = 2\pi\frac{f(x_k) + f(x_{k+1})}{2}\times$$

$$\times\sqrt{1 + f'^2(\xi_k)}\,(x_{k+1}-x_k)$$

și aria $\mathcal{A}$ este

$$\mathcal{A}_\Delta = \sum_{k=0}^{n-1} 2\pi\frac{f(x_k) + f(x_{k+1})}{2}\times$$

$$\times\sqrt{1 + f'^2(\xi_k)}\,(x_{k+1}-x_k).$$

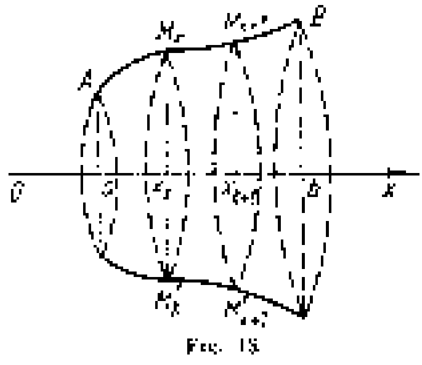

Fig. 18

Arătăm că $\mathcal{A}_\Delta$ și S_Δ, unde

$$S_\Delta = \sum_{k=0}^{n-1} 2\pi f(\xi_k)\sqrt{1 + f'^2(\xi_k)}\,(x_{k+1}-x_k)$$

converg către aceeași limită pentru un șir de diviziuni $(\Delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ cu $\nu(\Delta_n) \to 0$.

Avem $|A_\Delta - S_\Delta| \le 2\pi \sum_{k=0}^{n-1} \left| \frac{f(x_k) - f(\xi_k) + f(x_{k+1}) - f(\xi_k)}{2} \right| \cdot$

$$\cdot \sqrt{1 + f'^2(\xi_k)}\,(x_{k+1} - x_k) \le$$

$$\le 2\pi \sum_{k=0}^{n-1} \frac{|f(x_k) - f(\xi_k)| + |f(x_{k+1}) - f(\xi_k)|}{2} \sqrt{1 + f'^2(\xi_k)} \cdot (x_{k+1} - x_k).$$

Funcția $f(x)$ fiind continuă este și uniform continuă și deci pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\eta(\varepsilon)$ astfel încît

$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon \text{ cînd } |x' - x''| < \eta(\varepsilon).$$

Dacă alegem $\nu(\Delta)$ astfel încît $\nu(\Delta) < \eta(\varepsilon)$,

$$|x_k - \xi_k| < \eta(\varepsilon) \text{ și } |x_{k+1} - \xi_k| < \eta(\varepsilon)$$

putem scrie $|A_{\Delta} - S_{\Delta_n}| \le 2\pi\varepsilon \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{1 + f'^2(\xi_k)}\,(x_{k+1} - x_k)$. Deoarece f' este continuă rezultă că există $M > 0$ astfel ca $\sqrt{1 + f'^2(\xi_k)} < M$ și

$$|A_{\Delta_n} - S_{\Delta_n}| \le 2\pi\varepsilon M(b - a),$$

ceea ce arată că

$$\lim_{\nu(\Delta_n)\to 0} A_{\Delta_n} = \lim_{\nu(\Delta_n)\to 0} S_{\Delta_n} = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + f'^2(x)}\, dx.$$

Volumul corpurilor cu secțiuni cunoscute

Fie un corp K în spațiu raportat la un sistem de axe ortogonale. Presupunem că corpul K este cuprins între planele $z = a$ și $z = b$ și că secțiunea printr-un plan z are aria cunoscută $S(z)$ (fig. 19).

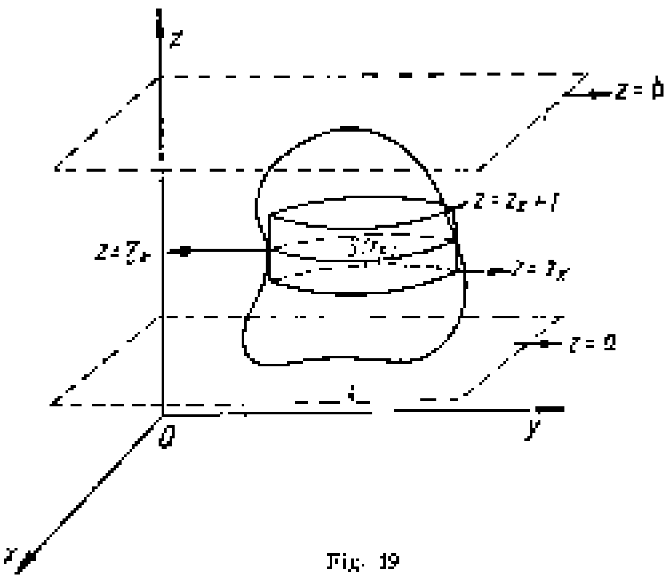

Fig. 19

Considerăm o diviziune Δ a intervalului $[a, b]$,

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b,$$

şi fie

$$\xi_i \in [x_i, x_{i+1}].$$

Aproximăm volumul corpului K cu suma volumelor cilindrilor cu aria secţiunii bazei $S(\xi_i)$ şi înălţimea $(x_{i+1} - x_i)$. Obţinem:

$$\sigma_\Delta = \sum_{i=0}^{n-1} S(\xi_i)(x_{i+1} - x_i)$$

care este o sumă Riemann şi care converge pentru un şir (Δ_n) de diviziuni către:

$$\int_a^b S(x)\,dx.$$

Aplicaţii mecanice ale integralelor Riemann Stieltjes. Momente statice şi centre de greutate ale plăcilor plane

Să considerăm o placă plană a cărei model matematic îl constituie domeniul D din figura 26, mărginit de graficul funcţiei $y = f(x)$.

Vom presupune că placa este omogenă şi deci densitatea ei de masă este ρ = const.

Fie

$$\Delta: a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$$

o diviziune a intervalului $[a, b]$ şi fie $[x_i, x_{i+1}] \times [0, f(\xi_i)]$ acest dreptunghiul construit pe $[x_i, x_{i+1}]$ ca bază şi de înălţime $f(\xi_i)$, $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$.

Vom presupune că întreaga masă a plăcii dreptunghiulare este concentrată în centrul ei (care este şi centrul de greutate).

Momentele statice ale dreptunghiului $[x_i, x_{i+1}] \times [0, f(\xi_i)]$ sînt date de:

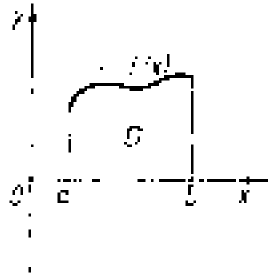

Fig. 26

$$K_{ix} = \frac{f(\xi_i)}{2}\,\rho f(\xi_i)(x_{i+1} - x_i) \text{ şi}$$

$$K_{iy} = \left(x_i + \frac{x_{i+1} - x_i}{2}\right)\rho f(\xi_i)(x_{i+1} - x_i) \approx$$

$$\approx x_i \rho f(\xi_i)(x_{i+1} - x_i).$$

(S-a neglijat termenul $(x_{i+1} - x_i)^2$)

şi însumînd obţinem:

$$K_x = \frac{1}{2}\rho\int_a^b y^2\,dx;\quad K_y = \rho\int_a^b xy\,dx$$

unde $y = f(x)$.

Se știe de asemenea că dacă $\mathcal{M}$ este masa plăcii și (x_G, y_G) coordonatele centrului de greutate,

$$\mathcal{M}\cdot x_G = \rho\int_a^b x y\,dx,\quad \mathcal{M}\cdot y_G = \frac{1}{2}\rho\int_a^b y^2\,dx$$

Dar, $\mathcal{M}_\Delta = \sum_{i=0}^{n-1} \rho f(\xi_i)(x_{i+1} - x_i)$ și aceasta este o sumă

Riemann care tinde la limită către

$$\mathcal{M} = \rho\int_a^b y\,dx$$

Rezultă

$$x_G = \frac{\int_a^b x y\,dx}{\int_a^b y\,dx},\qquad y_G = \frac{\int_a^b y^2\,dx}{2\int_a^b y\,dx}.$$

Lucrul mecanic efectuat de o forță variabilă ce se deplasează pe segmentul AB

Fie F o forță variabilă, care se deplasează pe segmentul AB (figura 21). Raportat la originea O, punctul A are abscisa a iar B, abscisa b.

Forța $\overline{F}$ este de forma: $\overline{F} = F(x)$.

Pentru a determina lucrul mecanic efectuat de forța F vom considera o diviziune

$$\Delta: a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$$

a intervalului $[a, b]$ și vom presupune că forța F este constantă cînd punctul M parcurge intervalul $[x_i, x_{i+1}]$ și valoarea ei este $F(\xi_i)$, $\xi_i \in (x_i, x_{i+1})$. Lucrul mecanic efectuat pe acest segment este:

$$F(\xi_i)(x_{i+1} - x_i).$$

Însumînd, obținem cu aproximație lucrul mecanic efectuat de forța F pe segmentul $[a, b]$.

Avem:

$$\sigma_\Delta = \sum_{i=0}^{n-1} F(\xi_i)(x_{i+1} - x_i).$$

Fig. 21

Suma obținută este o sumă Riemann pentru funcția F corespunzătoare diviziunii Δ. La limită, pentru un șir de diviziuni de diametru tinzînd la zero,

$$\mathcal{L} = \int_a^b F(x)\,dx.$$

Momentul de inerție a unei bare materiale rectilinii în mișcarea de rotație

Fie o bară materială rectilinie care se rotește în jurul unei axe perpendiculare pe ea (fig. 22).

Notăm densitatea de masă de-a lungul barei prin $\mu(x)$. Fie $\Delta = a_0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$ o diviziune a intervalului $[a, b]$. Dacă presupunem că întreaga masă a barei $[x_i, x_{i+1}]$ este concentrată într-un punct $M_i(\xi_i) \in [x_i, x_{i+1}]$, momentul de inerție al porțiunii $[x_i, x_{i+1}]$ este egal cu momentul de inerție al punctului de abscisă ξ_i și de masă $\mu(x_{i+1}) - \mu(x_i)$. Astfel, suma momentelor de inerție a tuturor porțiunilor, deci momentul de inerție al întregii bare va fi

Fig. 22

$$I_\Delta = \sum_{i=0}^{n-1} \xi_i^2 (\mu(x_{i+1}) - \mu(x_i))$$

Însă sumele I_Δ converg pentru un șir de diviziuni de diametru tinzînd la zero către integrala Riemann-Stieltjes

$$\int_a^b x^2 \, d\mu.$$

§ 3. METODE NUMERICE DE INTEGRARE

În multe cazuri determinarea primitivei unei funcții este o problemă ce nu se poate rezolva prin metode elementare.

Atunci se pot folosi sumele Riemann care reprezintă cu un grad oarecare de aproximație valoarea integralei $\int_a^b f \, dx$. Metoda însă nu este des folosită din cauză că sumele Riemann converg slab către funcția $f(x)$.

O altă categorie de metode aproximative pentru calculul integralelor de forma $\int_a^b f \, dx$ se obțin înlocuind funcția de sub integrală cu o funcție de interpolare. Vom prezenta cîteva din aceste metode.

Formula lui Newton-Côtes

Această formulă aproximativă se bazează pe înlocuirea funcției de sub integrală $f(x)$ cu polinomul de interpolare a lui Lagrange.

Presupunem că punctele de interpolare sînt repartizate astfel:

$$a, a + h, a + 2h, \ldots, a + nh.$$

Se pot întîmpla 2 cazuri: limitele de integrare sînt şi ele puncte de interpolare şi în acest caz formula se numeşte de tip „închis" sau limitele de integrare nu sînt puncte de interpolare şi atunci formula este de tip „deschis".

Ne propunem să calculăm $\int_a^b f\,dx$ şi introducem pasul

$$h = \frac{b-a}{n}.$$

Obţinem astfel punctele de interpolare

$$x_0 = a,\ x_1 = a + h,\ x_2 = 2h + a,\ \dots,\ x_n = a + nh = b$$

cu valorile $y_i = f(x_i)$.

Polinomul de interpolare a lui Lagrange asociat funcţiei $f(x)$ cu punctele de interpolare $x_i = a + ih$, $i = 0, 1, \dots, n$ este

$$L_n(x) = \sum_0^n \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\dots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\dots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\dots(x_i-x_n)}\, y_i$$

şi punînd $q = \frac{x-x_0}{h}$, $q^{[n+1]} = q(q-1)\dots(q-n)$

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^n \frac{(-1)^{n-i}\, q^{[n+1]}}{i!\,(n-i)!\,(q-i)}\, y_i.$$

Cu aceasta integrala capătă forma:

$$\int_a^b f\,dx = \sum_{i=0}^n y_i \int_a^b \frac{(-1)^{n-i}\, q^{[n+1]}}{i!\,(n-i)!\,(q-i)}\,dx + R_n(f).$$

Trecînd la variabila q în această integrală obţinem $dq = \frac{dx}{h}$

şi

$$\int_a^b f\,dx = h \sum_0^n y_i \int_0^n \frac{(-1)^{n-i}\, q^{[n+1]}}{i!\,(n-i)!\,(q-i)}\,dq + R_n(f)$$

sau încă notînd

$$H_i = \frac{1}{n}\,\frac{(-1)^{n-i}}{i!\,(n-i)!}\int_0^n \frac{q^{[n+1]}}{q-i}\,dq$$

putem scrie

$$\int_a^b f\,dx = (b-a)\sum_0^n H_i y_i + R_n(f)$$

unde H_i se numesc coeficienţii lui Côtes. Formula obţinută este de tip închis deoarece am considerat că a şi b sînt puncte de interpolare.

Evaluarea restului în formula Newton-Côtes. Pentru aceasta vom porni de la eroarea comisă prin înlocuirea unei funcţii f(x) cu polinomul de interpolare a lui Lagrange şi stabilită la paragraful privitor la interpolarea funcţiilor.

Am stabilit atunci că

$$f(x) - L_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} P_{n+1}(x)$$

unde ξ depinde de x şi este situat între a şi x.

De aici obţinem că

$$|R_n(x)| = |f(x) - L_n(x)| \leqslant \frac{M}{(n+1)!} |P_{n+1}(x)|$$

şi deci:

$$|R_n(f)| = \left|\int_a^b (f(x) - L_n(x))\,dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x) - L_n(x)|\,dx \leqslant$$

$$\leqslant \frac{M}{(n+1)!}\int_a^b |P_{n+1}(x)|\,dx = \frac{M}{(n+1)!}\int_a^b |(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_n)|\,dx.$$

Obţinem astfel o majorare a erorii comise. O expresie exactă a restului $R_n(f)$ este dată pentru formula de tip închis de:

$$R_n(f) = \frac{h^{2m+1} f^{(2m)}(\xi)}{(2m)!}\int_0^{2m-1} \varphi(y)\,dy$$

când $h = \frac{b-a}{2m-1}$ şi $n = 2m - 1$

şi

$$R_n(f) = \frac{h^{2m+1} f^{(2m+1)}(\xi)}{2(m)!}\left[\int_{2m-1}^{2m} y(y-1)\ldots(y-2m)\,dy -\right.$$

$$\left.\int_0^{2m-1} \varphi(y)\,dy\right] \text{ când } h = \frac{b-a}{2m-1} \text{ şi } n = 2m$$

şi

$$\varphi(y) = \int_0^y y(y-1)\ldots(y-2m+1)\,dy.$$

Nu vom da demonstraţia acestei evaluări fiind foarte laborioasă. Ea se găseşte în „Metodî vîcislenia" Berezin şi Jidkov din 1962.

Exemplu. Să se determine valoarea integralei $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$ şi aproximaţia pe care o facem când luăm ca puncte de interpolare pentru f(x) punctele

$$x_0 = 0,\ x_1 = \frac{1}{4},\ x_2 = \frac{3}{4},\ x_3 = 1.$$

În acest caz $y_0 = 0$, $y_1 = \frac{1}{\sqrt{17}}$, $y_2 = \frac{2}{\sqrt{5}}$,

$$y_3 = \frac{4}{5};\ y_4 = \frac{1}{\sqrt{2}};\ n = 4,\ h = \frac{1}{4};\ a = 0,\ b = 1.$$

Formula lui Newton-Côtes conduce la:

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = H_0y_0 + H_1y_1 + H_2y_2 + H_3y_3 + H_4y_4 + R_4(f)$$

cu

$$H_0 = \frac{(-1)^4}{4 \cdot 4!}\int_0^4 (q-1)(q-2)(q-3)(q-4)\,dq$$

$$H_1 = \frac{(-1)^3}{4 \cdot 1!\,3!}\int_0^4 q(q-2)(q-3)(q-4)\,dq$$

$$H_2 = \frac{(-1)^2}{4 \cdot 2!\,2!}\int_0^4 q(q-1)(q-3)(q-4)\,dq$$

$$H_3 = \frac{(-1)}{4 \cdot 3!\,1!}\int_0^4 q(q-1)(q-2)(q-4)\,dq$$

$$H_4 = \frac{1}{4 \cdot 4!}\int_0^4 q(q-1)(q-2)(q-3)\,dq.$$

Prezentăm rezultatele în tabloul următor

i	x_i	y_i	H_i	H_iy_i
0	0	0	—	0
1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{\sqrt{17}}$	$\frac{16}{45}$	0,350
2	$\frac{2}{4}$	$\frac{2}{\sqrt{5}}$	$\frac{2}{15}$	0,119
3	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{16}{45}$	0,284
4	$\frac{4}{4}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{7}{90}$	0,055
Σ				0,808

Valoarea exactă a integralei este

$$\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\Big|_0^1 = \ln(1+\sqrt{2}) = \ln(1+1{,}4142) = 0{,}8620$$

Cazuri particulare importante ale formulei lui Côtes conduc la alte metode de calcul aproximativ al integralei definite.

Metoda trapezelor

Aplicînd formula lui Côtes pentru $n = 1$ obținem

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx \simeq (y_0H_0 + y_1H_1)\,h$$

unde

$$H_0 = -\int_0^1 (q-1)\,dq = \frac{1}{2}$$

$$H_1 = \int_0^1 q\,dq = \frac{1}{2}$$

sau încă:

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx \simeq \frac{1}{2}(y_0 + y_1)\,h.$$

Aproximația constă în înlocuirea curbei $y = f(x)$, $x \in [x_0, x_1]$, cu coarda ce unește punctele $A_0(x_0, y_0)$ și $A_1(x_1, y_1)$.

Eroarea este dată de

$$R(h) = \int_{x_0}^{x_1} y\,dx - \frac{h}{2}(y_0 + y_1) = \int_{x_0}^{x_0+h} y\,dx - \frac{h}{2}\left(y(x_0) + y(x_0+h)\right).$$

Derivînd această formulă în raport cu h de două ori obținem

$$R'(h) = y(x_0+h) - \frac{1}{2}\left(y(x_0) + y(x_0+h)\right) -$$

$$-\frac{h}{2}y'(x_0+h) = \frac{1}{2}\left[y(x_0+h) - y(x_0)\right] - \frac{h}{2}y'(x_0+h).$$

$$R''(h) = \frac{1}{2}y'(x_0+h) - \frac{1}{2}y'(x_0+h) - \frac{h}{2}y''(x_0+h) =$$

$$= -\frac{h}{2}y''(x_0+h).$$

De asemenea

$$R(0) = 0,\ R'(0) = 0.$$

Integrînd în raport cu h şi aplicînd formula de medie obţinem:

$$R'(h) = R'(0) + \int_0^h R''(t)\,dt = -\frac{1}{2}\int_0^h t\,y''(x_0 + t)\,dt =$$

$$= -\frac{1}{2}\,y''(\xi_1)\int_0^h t\,dt = -\frac{h^2}{4}\,y''(\xi_1)$$

$$\xi_1 \in (x_0, x_0 + h).$$

De asemenea

$$R(h) = R(0) + \int_0^h R'(t)\,dt = -\frac{1}{2}\int_0^h t^2 y''(\xi_1)\,dt =$$

$$= -\frac{1}{4}\,y''(\xi)\int_0^h t^2\,dt = -\frac{h^3}{12}\,y''(\xi),\ \xi \in (x_0, x_0 + h).$$

În final rezultă:

$$R = -\frac{h^3}{12}\,y''(\xi), \qquad \xi \in (x_0, x_1).$$

Pentru a obţine o formulă mai precisă de aproximare considerăm intervalul $[a, b]$ de integrare împărţit în n părţi egale

$$[x_0, x_1], [x_1, x_2], \ldots, [x_{n-1}, x_n]$$

şi aplicăm formula obţinută pentru $n = 1$ fiecărora din aceste intervale. Însumînd obţinem:

$$\int_a^b f(x)\,dx \simeq \frac{h}{2}(y_0 + y_1) + \frac{h}{2}(y_1 + y_2) + \ldots + \frac{h}{2}(y_{n-1} + y_n)$$

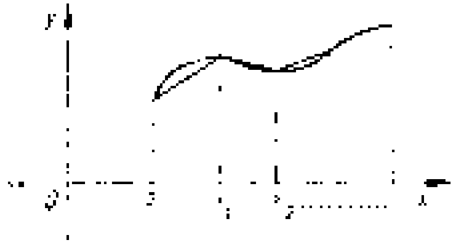

Fig. 23

sau încă

$$\int_a^b f\,dx \simeq h\left(\frac{y_0}{2} + y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1} + \frac{y_n}{2}\right).$$

Aproximarea pe care o facem este ilustrată în figura 23.

Restul este dat în acest caz de:

$$R = \int_{x_0}^{x_n} y\,dx - \frac{h}{2}\sum_{1}^{n}(y_{i-1}+y_i) =$$

$$= \int_{x_{i-1}}^{x_i} y\,dx - \frac{h}{2}\sum_{1}^{n}(y_{i-1}+y_i) = -\frac{h^3}{12}\sum_{1}^{n} y''(\xi_i),$$

$$\xi_i \in (x_{i-1}, x_i).$$

Luînd media aritmetică

$$\mu = \frac{1}{n}\sum_{1}^{n} y''(\xi_i)$$

cum f este considerată continuă, are proprietatea lui Darboux deci există ξ astfel ca

$$y''(\xi) = \mu$$

şi deci

$$R = -\frac{h^3 n}{12} y''(\xi)$$

Formula lui Simpson

Luînd în formula lui Côtes pentru calculul integralei

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)\,dx,\ n = 2 \text{ obţinem}$$

$$\int_{x_0}^{x_2} y\,dx = (x_2 - x_0)(y_0H_0 + y_1H_1 + y_2H_2)$$

unde

$$H_0 = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\int_0^2 (q-1)(q-2)\,dq = \frac{1}{6}$$

$$H_1 = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1}\int_0^2 q(q-2)\,dq = \frac{2}{3}$$

$$H_2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\int_0^2 q(q-1)\,dq = \frac{1}{6}$$

şi deci:

$$\int_{x_0}^{x_2} y\,dx = \frac{2h}{6}(y_0 + 4y_1 + y_2).$$

Din punct de vedere geometric calculul integralei cu această aproximaţie revine la a înlocui curba $y = f(x)$ prin arcul de parabolă $y = f(x)$ care trece prin punctele $M_0(x_0, y_0)$, $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$.

Restul este dat de

$$R(h) = \int_{x_1-h}^{x_1+h} y\,dx - \frac{h}{3}[y(x_1-h) + 4y(x_1) + y(x_1+h)].$$

Derivînd de trei ori funcția $R(h)$ obținem:

$$R'(h) = [y(x_1+h) + y(x_1-h)] - \frac{1}{3}[y(x_1-h) + 4y(x_1) +$$

$$+ y(x_1+h)] - \frac{h}{3}[-y'(x_1-h) + y'(x_1+h)] =$$

$$= \frac{2}{3}[y(x_1-h) + y(x_1+h)] - \frac{4}{3}y(x_1) -$$

$$- \frac{h}{3}[-y'(x_1-h) + y'(x_1+h)],$$

$$R''(h) = \frac{2}{3}[-y'(x_1-h) + y'(x_1+h)] -$$

$$- \frac{1}{3}[-y'(x_1-h) + y'(x_1+h)] -$$

$$- \frac{h}{3}[y''(x_1-h) + y''(x_1+h)] =$$

$$= \frac{1}{3}[-y'(x_1-h) + y'(x_1+h)] - \frac{h}{3}[y''(x_1-h) + y''(x_1+h)],$$

$$R'''(h) = \frac{1}{3}[y''(x_1-h) + y''(x_1+h)] -$$

$$- \frac{1}{3}[y''(x_1-h) + y''(x_1+h)] - \frac{h}{3}[-y'''(x_1-h) + y'''(x_1+h)] =$$

$$= -\frac{h}{3}[y'''(x_1+h) - y'''(x_1-h)] = -\frac{2h^2}{3}y^{IV}(\xi_3).$$

De asemenea $R(0) = R'(0) = R''(0) = 0$.

Integrînd $R'''(h)$ și aplicînd teorema de medie obținem:

$$R''(h) = R''(0) + \int_0^h R'''(t)\,dt = -\frac{2}{3}\int_0^h t^2 y^{IV}(\xi_3)\,dt =$$

$$= -\frac{2}{3}y^{IV}(\xi_2)\int_0^h t^2\,dt = -\frac{2}{9}h^3 y^{IV}(\xi_2),$$

$$\xi_2 \in (x_1-h, x_1+h).$$

$$R'(h) = R'(0) + \int_0^h R''(t)\,dt = -\frac{2}{9}\int_0^h t^3 y^{IV}(\xi_2)\,dt =$$

$$= -\frac{2}{9}\, y^{IV}(\xi_1)\int_0^h t^3\,dt = -\frac{1}{18}\, h^4 y^{IV}(\xi_1)$$

$$\xi_1 \in (x_1 - h,\ x_1 + h).$$

$$R(h) = R(0) + \int_0^h R'(t)\,dt = -\frac{1}{18}\int_0^h t^4 y^{IV}(\xi_1)\,dt =$$

$$= -\frac{1}{18}\, y^{IV}(\xi)\int_0^h t^4\,dt = -\frac{h^5}{90}\, y^{IV}(\xi)$$

$$\xi \in (x_1 - h,\ x_1 + h).$$

Pentru a calcula integrala

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

împărţim intervalul $[a, b]$ în $2k$ părţi şi notăm

$$h = \frac{b-a}{2k}.$$

Aplicînd pentru fiecare interval $[x_{2i}, x_{2i+2}]$ formula lui Simpson obţinem:

$$\int_a^b f\,dx \approx \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2) + \frac{h}{3}(y_2 + 4y_3 + y_4) + \ldots +$$

$$+ \frac{h}{3}(y_{2m-2} + 4y_{2m-1} + y_{2m})$$

care se numeşte formula lui Simpson.

Eroarea este dată de

$$R = -\frac{h^5}{90}\sum_{k=1}^{m} y^{IV}(\xi_k) = -\frac{mh^5}{90}\, y^{IV}(\xi).$$

Formula de cuadratură a lui Gauss

Ideea formulei de cuadratură a lui Gauss este de a înlocui integrala $\int_{-1}^{1} f(t)\,dt$ cu $\sum_1^n A_i f(t_i)$, unde $f(t)$ este o funcţie definită pe $[-1, 1]$ iar punctele $t_1, t_2, \ldots, t_n$ şi coeficienţii $A_1, A_2, \ldots, A_n$ se aleg astfel ca formula

$$\int_{-1}^{1} f(t)\,dt = \sum_1^n A_i f(t_i) \tag{1}$$

să fie exactă pentru toate polinoamele $f(t)$ de grad N cel mai mare posibil. Deoarece t_i şi A_i sînt în număr de $2n$, gradul lui $f(t)$ maxim este $2n-1$.

Pentru aceasta este necesar şi suficient ca egalitatea (1) să fie verificată pentru

$$f(t) = 1, \quad f(t) = t, \quad f(t) = t^2, \ldots, f(t) = t^{2n-1}.$$

Punînd

$$\int_{-1}^{1} t^k \, dt = \sum_{i=1}^{n} A_i t_i^k \qquad (k = 0, 1, \ldots, 2n-1)$$

şi

$$f(t) = \sum_{k=0}^{2n-1} C_k t^k.$$

Vom avea:

$$\int_{-1}^{1} f(t) \, dt = \sum_{k=0}^{2n-1} C_k \int_{-1}^{1} t^k \, dt = \sum_{k=0}^{2n-1} C_k \sum_{i=1}^{n} A_i t_i^k$$

$$= \sum_{i=1}^{n} A_i \sum_{k=0}^{2n-1} C_k t_i^k = \sum_{i=1}^{n} A_i f(t_i).$$

Dar

$$\int_{-1}^{1} t^k \, dt = \frac{1-(-1)^{k+1}}{k+1} = \begin{cases} \dfrac{2}{k+1}, & k \text{ par} \\ 0, & k \text{ impar} \end{cases}$$

şi deci este suficient să se determine t_i şi A_i plecînd de la sistemul de n ecuaţii

$$\sum_{i=1}^{n} A_i = 2, \quad \sum_{i=1}^{n} A_i t_i = 0, \ldots, \quad \sum_{i=1}^{n} A_i t_i^{2n-2} = \frac{2}{2n-1}, \quad \sum_{i=1}^{n} A_i t_i^{2n-1} = 0. \qquad (2)$$

Rezolvarea unui asemenea sistem este o problemă dificilă. Se poate aplica însă următorul artificiu:

Se consideră polinoamele:

$$f(t) = t^k P_n(t), \qquad k = 0, 1, \ldots, n-1$$

unde $P_n(t)$ sînt polinoamele lui Legendre.

$$P_n(t) = \frac{1}{2^n \cdot n!} \frac{d^n}{dt^n} [(t^2 - 1)^n], \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

Trebuie ca

$$\int_{-1}^{1} t^k P_n(t) \, dt = \sum_{i=1}^{n} A_i t_i^k P_n(t_i), \qquad k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Polinoamele lui Legendre au următoarele proprietăţi:

1) $P_n(1) = 1$, $P_n(-1) = (-1)^n$, $n = 0, 1, \ldots$

2) $P_n(x)$ are toate rădăcinile reale între -1 şi $+1$ ceea ce se poate stabili dacă aplicăm teorema lui Rolle funcţiei

$$f(x) = (x^2 - 1)^n, \text{ de } n \text{ ori}$$

3) $\int_{-1}^{1} P_n(t)\, t^k\, dt = 0, \qquad (k < n)$

ceea ce se arată astfel:

$$\int_{-1}^{1} P_n(t)\, t^k\, dt = [(t^2-1)^n]^{(n-1)}\, t^k \Big|_{-1}^{1} - k\int_{-1}^{1} t^{k-1}[(t^2-1)^n]^{(n-1)}\, dt$$

Dar $[(t^2-1)^n]^{(n-1)} \Big|_{-1}^{1} = 0$ deoarece $t = 1$ şi $t = -1$ sînt rădăcini de ordin „n" de multiplicitate pentru funcţia $(t^2-1)^n$ ceea ce arată că anulează şi derivata şi de ordin $(n-1)$.

Obţinem deci:

$$\int_{-1}^{1} P_n(t)\, t^k\, dt = -k\int_{-1}^{1} t^{k-1}[(t^2-1)^n]^{(n-1)}\, dt =$$

$$= -k\, t^{k-1}[(t^2-1)^n]^{(n-2)} \Big|_{-1}^{1} + k(k-1)\int_{-1}^{1} t^{k-2}[(t^2-1)^n]^{(n-2)}\, dt =$$

$$= k(k-1)\int_{-1}^{1} t^{k-2}[(t^2-1)^n]^{(n-2)}\, dt = \ldots =$$

$$= (-1)^k\, k(k-1)\ldots 1\int_{-1}^{1} [(t^2-1)^n]^{(n-k)}\, dt =$$

$$= (-1)^k\, k!\, [(t^2-1)^n]^{(n-k-1)} \Big|_{-1}^{1} = 0$$

Aplicînd această a 3-a proprietate a polinoamelor Legendre rezultă că

$$\int_{-1}^{1} t^k P_n(t)\, dt = 0 \qquad \text{pentru } k < n$$

deci:

$$\sum_{1}^{n} A_i t_i^k P_n(t_i) = 0, \qquad (k = 0, 1, \ldots, n-1).$$

Dacă punem $P_n(t_i) = 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$ au loc egalităţile

$$\sum_{1}^{n} A_i t_i^k P_n(t_i) = 0.$$

Dar rădăcinile polinomului Legendre sînt toate în $(-1, +1)$. Deci luînd t_i ca fiind rădăcinile polinomului Legendre, obţinem A_i din sistemul $\sum_{i=1}^{n} A_i t_i^k P_n(t_i) = 0$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$.

Determinantul sistemului este un determinant Vandermonde deci

$$D = \prod_{i>j}(t_i - t_j) \neq 0 \text{ deoarece } t_i \neq t_j.$$

Formula

$$\int_{-1}^{1} f(t)\,dt = \sum_{i=1}^{n} A_i f(t_i)$$

unde t_i sînt rădăcinile polinomului lui Legendre iar A_i se determină din sistemul liniar considerat se numește formula de cuadratură a lui Gauss.

În general pentru a aplica formula lui Gauss integralei $\int_a^b f(x)\,dx$ se face schimbarea de variabilă

$$x = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2}t \text{ care aduce integrala la forma}$$

$$\frac{b-a}{2}\int_{-1}^{1} f\left(\frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2}t\right)dt$$

pentru care se poate aplica formula lui Gauss.

Se obține astfel:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{2}\sum_{i=1}^{n} A_i f(x_i)$$

$$\text{cu } x_i = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2}t_i,\ i = 1, 2, \dots, n.$$

t_i fiind zerourile polinomului lui Legendre $P_n(t)$.

Se arată că eroarea în formula lui Gauss este

$$R_n = \frac{(b-a)^{2n+1}(n!)^4 f^{(2n)}(\xi)}{[(2n)!]^3(2n+1)}$$

Pentru stabilirea erorii recomandăm lucrarea I. Berezin, N. Jidkov „Metode de calcul" (Fizmatghiz, 1959, în lb. rusă, vol. I).

Exemplu. Să se calculeze $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$ folosind formula lui Gauss cu $n = 3$.

Aici $a = 0$, $b = 1$, $t_1 = -0,7746$, $t_2 = 0$, $t_3 = 0,7746$ deoarece polinomul lui Legendre pentru $n = 3$ este:

$$P_3(t) = \frac{1}{2^3 \cdot 3!}[(t^2-1)^3]^{(3)} = \frac{5t^3 - 3t}{2}$$

Urmărim calculul integralei în tabelul:

i	x_i	$f(x_i)$	A_i	$A_i\, f(x_i)$
1	0,1127	0,9035	0,2778	0,2509
2	0,5000	0,7071	0,4444	0,3142
3	0,8873	0,6003	0,2778	0,1668
Σ				0,7319

$$x_i = \frac{1}{2} + \frac{t_i}{2}, \qquad i = 1, 2, 3$$

Observaţie. Folosirea formulei lui Gauss este greoaie datorită faptului că t_i sînt numere iraţionale.

§ 4. INTEGRALA LEBESGUE

Pentru a înţelege ideea de la care plecăm pentru a defini integrala Lebesgue să ne amintim că integrala Riemann este limita sumelor de forma

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\cdot l(E_i), \qquad f : [a, b] \to \mathbf{R}$$

unde $l(E_i) = t_i - t_{i-1}$ şi reprezintă lungimea intervalului (t_{i-1}, t_i).

Integrala Lebesgue are în vedere o clasă mai generală de mulţimi E_i, aşa-numitele mulţimi măsurabile iar clasa funcţiilor f este clasa funcţiilor măsurabile.

Să lămurim aceste 2 noţiuni necesare pentru definirea integralei Lebesgue.

Vom avea în vedere permanent analogia între noţiunile de spaţiu topologic, mulţimea deschisă, funcţie continuă pe de o parte şi pe de altă parte spaţiu măsurabil, mulţime măsurabilă şi funcţia măsurabilă.

Definiţia 1.40. O familie $\mathcal{M}$ de submulţimi ale mulţimii X se numeşte σ-algebră în X dacă $\mathcal{M}$ are proprietăţile:

1) $X \in \mathcal{M}$.

2) Dacă $A \in \mathcal{M}$ atunci $CA \in \mathcal{M}$.

3) Dacă $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$, $A_i \in \mathcal{M}$ atunci $A \in \mathcal{M}$.

Exemplu. Pentru orice mulţime X, familia $\mathcal{M} = \mathcal{P}(X)$ (mulţimea părţilor din X) este o σ-algebră.

Dacă $\mathcal{M}$ este o σ-algebră în X atunci X se numeşte *spaţiu măsurabil* şi elementele lui $\mathcal{M}$ se numesc *mulţimi măsurabile* în X.

Dacă X este un spaţiu măsurabil, Y este un spaţiu topologic iar $f : X \to Y$, f se numeşte *funcţie măsurabilă* dacă $f^{-1}(V)$ este o mulţime măsurabilă în X pentru orice mulţime deschisă în Y.

Vom nota spaţiul măsurabil cu $(X, \mathfrak{M})$.

Teorema 1.4. Fie Y şi Z spaţii topologice şi $g : Y \to Z$, g continuă.

Dacă $(X, \mathfrak{M})$ este un spaţiu măsurabil şi $f : X \to Y$ este măsurabilă şi $h = g \circ f$ atunci $h: X \to Z$ este măsurabilă.

Demonstraţie. Deoarece $f : X \to Y$ şi f este măsurabilă prin definiţie,

$$f^{-1}(V)$$

este mulţimea măsurabilă în X, $(\forall)$ V mulţime deschisă în Y.

Fie $U \subset Z$, U mulţime deschisă.

Trebuie arătat că $h^{-1}(U)$ este mulţime măsurabilă în X.

Dar $h^{-1}(U) = f^{-1}(g^{-1}(U))$.

Deoarece g este continuă, $g^{-1}(U)$ este o mulţime deschisă în Y şi $f^{-1}(g^{-1}(U))$ este o mulţime măsurabilă în X deoarece f este măsurabilă. Rezultă că h este măsurabilă.

Rezultatul se păstrează dacă considerăm o funcţie compusă de tipul $h(x) = \Phi(u(x), v(x))$. Astfel are loc

Teorema 2.4. Fie u, v funcţii reale măsurabile pe un spaţiu măsurabil $(X, \mathfrak{M})$; fie Φ o aplicaţie continuă a lui $\mathbf{R}^2$ în Y, atunci în compunerea

$$h(x) = \Phi(u(x), v(x)), \qquad x \in X$$

funcţia $h : X \to Y$ este măsurabilă.

Exemplu

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1, & x \in E \\ 0, & x \notin E \end{cases}$$

χ_E este o funcţie măsurabilă dacă E este măsurabilă.

Funcţia χ_E se numeşte funcţia caracteristică a mulţimii E.

În legătură cu existenţa unei σ-algebre are loc

Teorema 3.4. Dacă $\mathcal{F}$ este o familie oarecare de submulţimi ale lui X, există o cea mai mică σ-algebră $\mathfrak{M}^*$ în X astfel ca $\mathcal{F} \subset \mathfrak{M}^*$. $\mathfrak{M}^*$ se numeşte σ-algebra generată de $\mathcal{F}$.

Demonstraţie. Fie Ω familia tuturor σ-algebrelor $\mathfrak{M}$ din X care conţin pe $\mathcal{F}$ (există sigur o σ-algebră anume $\mathfrak{P}(X)$).

Fie $\mathfrak{M}^* = \bigcap_{\mathfrak{M} \in \Omega} \mathfrak{M}$.

Observăm că $\mathcal{F} \subset \mathfrak{M}^*$ deoarece $\mathcal{F} \subset \mathfrak{M}$ $(\forall)$ $\mathfrak{M} \in \Omega$. $\mathfrak{M}^*$ de asemenea este o σ-algebră deoarece:

1) Dacă $A_n \in \mathfrak{M}^* \Rightarrow A_n \in \mathfrak{M}$, $(\forall)$ $\mathfrak{M} \in \Omega$ şi $\bigcup_1^\infty A_n \in \mathfrak{M} \Rightarrow \bigcup_1^\infty A_n \in \mathfrak{M}^*$

2) $X \in \mathfrak{M}$, $(\forall)$ $\mathfrak{M} \in \Omega$ deci $X \in \mathfrak{M}^*$.

3) Dacă $A \in \mathfrak{M}^* \Rightarrow A \in \mathfrak{M}$, $(\forall)$ $\mathfrak{M} \in \Omega \Rightarrow \complement A \in \mathfrak{M} \Rightarrow \complement A \in \mathfrak{M}^*$.

Exemplu. Dacă X este un spaţiu topologic şi considerăm $\mathcal{F}$ familia mulţimilor deschise în X atunci conform teoremei precedente există o cea mai mică σ-algebră $\mathcal{B}$ astfel ca $\mathcal{F} \subset \mathcal{B}$ (ceea ce arată că orice mulţime deschisă este în $\mathcal{B}$). Mulţimile din $\mathcal{B}$ se numesc mulţimi *boreliene*.

Teorema 1.4. Fie $\mathfrak{M}$ o σ-algebră în X şi Y un spaţiu topologic. Fie $f: X \to Y$.

a) Dacă Ω este familia mulţimilor $E \subset Y$ pentru care $f^{-1}(E) \in \mathfrak{M}$ atunci Ω este o σ-algebră în Y.

b) Dacă f este măsurabilă şi E este o mulţime Borel în Y atunci $f^{-1}(E) \in \mathfrak{M}$.

c) Dacă $Y = [-\infty, \infty]$ şi $f^{-1}((\alpha, \infty]) \in \mathfrak{M}$ $(\forall)$ $\alpha \in \mathbf{R}$, atunci f este măsurabilă.

Demonstraţie: a) se demonstrează din relaţiile

$$f^{-1}(Y) = X, \qquad f^{-1}(Y - A) = X - f^{-1}(A)$$

$$f^{-1}(A_1 \cup A_2 \cup \ldots) = f^{-1}(A_1) \cup f^{-1}(A_2) \cup \ldots$$

b) Fie Ω ca în a); măsurabilitatea lui f implică că Ω conţine toate mulţimile deschise în Y şi cum Ω este o σ-algebră $\to$ Ω conţine toate mulţimile Borel în Y.

c) fie Ω familia tuturor mulţimilor $E \subset [-\infty, +\infty]$ astfel că $f^{-1}(E) \in \mathfrak{M}$. Deoarece Ω este o σ-algebră în $[-\infty, +\infty]$ şi $(\alpha, \infty] \in \Omega$, $(\forall)$ α real acest lucru este adevărat şi pentru mulţimile:

$$[-\infty, \alpha) = \bigcup_{1}^{\infty}\left[-\infty, \alpha - \frac{1}{n}\right] = \bigcup_{1}^{\infty} C\left(\alpha - \frac{1}{n}, \infty\right]$$

şi $(\alpha, \beta) = [-\infty, \beta) \cap (\alpha, \infty]$.

Deoarece orice mulţime deschisă în $(-\infty, +\infty)$ este o reuniune numărabilă de segmente, Ω conţine orice mulţime deschisă, astfel f este măsurabilă.

Funcţii simple

Definiţia 2.1. O funcţie s măsurabilă în X care ia numai un număr finit de valori în $[0, \infty)$ se numeşte funcţie simplă.

Dacă $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ sînt valorile distincte ale unei funcţii simple s şi dacă $A_i = \{x;\ s(x) = \alpha_i\}$, se poate scrie:

$$s = \sum_{1}^{n} \alpha_i \chi_{A_i}$$

unde χ_{A_i} este funcţia caracteristică a lui A_i. Legătura între o funcţie măsurabilă oarecare şi funcţiile simple este dată de

Teorema 5.1. Fie $f : X \to [0, \infty]$ măsurabilă. Există funcţiile simple s_n pe X astfel ca:

$$0 \leq s_1 \leq s_2 \leq \ldots \leq f$$

$$s_n(x) \to f(x) \quad \text{cînd } n \to \infty, \ (\forall)\ x \in X.$$

Demonstraţie. Pentru $n = 1, 2, 3, \ldots$ şi pentru $1 \leqslant i \leqslant n2^n$ definim:

$$E_{n,i} = f^{-1}\left(\left[\frac{i-1}{2^n}, \frac{i}{2^n}\right)\right) \text{ şi } F_n = f^{-1}([n, \infty])$$

şi fie

$$s_n = \sum_{i}^{n2^n} \frac{i-1}{2^n} \chi_{E_{n,i}} + n\chi_{F_n}.$$

Conform teoremei precedente $E_{n,i}$ şi F_n sînt mulţimi măsurabile.
Se vede că $s_{n+1} \leqslant s_n$.
Dacă x este astfel ca $f(x) < \infty$, atunci
$s_n(x) \geqslant f(x) - 2^{-n}$, dacă $f(x) = \infty$ atunci
$s_n(x) = n$ şi aceasta arată că

$$s_n(x) \to f(x).$$

Vom defini în cele ce urmează noţiunea de măsură.

Definiţia 3.3. O măsură pozitivă este o funcţie μ definită pe o σ-algebră $\mathfrak{M}$ cu valori în $[0, \infty)$ funcţie numărabilă aditivă. Aceasta înseamnă că dacă $\{A_i\}$ este o familie numărabilă de mulţimi disjuncte din $\mathfrak{M}$ atunci:

$$\mu\left(\bigcup_{1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{1}^{\infty} \mu(A_i).$$

Exemple. 1) Fie $x_0 \in X$ şi $\mu(E) = \begin{cases} 1, & x_0 \in E \\ 0, & x_0 \notin E \end{cases}$

pentru orice $E \subset X$, μ astfel definit este o măsură.

2) Fie $X = \mathbf{R}^2$ şi să considerăm mulţimea dreptunghiurilor

$$D_{a,b} = [a_1, b_1) \times [a_2, b_2).$$

Asociem fiecărui dreptunghi un număr

$$m(D_{a,b}) = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2)$$

numit aria lui $D_{a,b}$. Observăm că funcţia m astfel definită este o măsură în sensul definiţiei de mai sus unde $\mathfrak{M}$ este mulţimea dreptunghiurilor disjuncte din $\mathbf{R}^2$.

Definiţia 4.4. Un spaţiu măsură este un spaţiu măsurabil care are o măsură pozitivă definită pe σ-algebra mulţimilor lui măsurabile.

Il vom nota $(X, \mathfrak{M}, \mu)$.

Vom defini mai departe integrala Lebesgue a funcţiilor simple.

Fie $\mathfrak{M}$ σ-algebră într-o mulţime X şi μ o măsură pozitivă pe $\mathfrak{M}$.

Definiţia 5.4. Dacă s este o funcţie simplă măsurabilă pe X de forma:

$$s = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{A_i}$$

şi $E \in \mathfrak{M}$ definim

$$\int_E s\,d\mu = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(A_i \cap E)$$

(facem convenţia ca $0 \cdot \infty = 0$).

Dacă f este o funcţie măsurabilă $f : X \to [0, \infty]$ şi $E \in \mathfrak{M}$ definim

$$\int_E f\,d\mu = \sup \int_E s\,d\mu$$

marginea superioară fiind luată în raport cu toate funcţiile simple măsurabile astfel ca $0 \leq s \leq f$.

Numărul $\int_E f\,d\mu$ astfel definit se numeşte integrala Lebesgue a lui f pe E în raport cu măsura μ.

Proprietăţi ale integralei Lebesgue

1) dacă $0 \leq f \leq g$ atunci $\int_E f\,d\mu \leq \int_E g\,d\mu$.

2) dacă $A \subset B$ şi $f \geq 0$ atunci $\int_A f\,d\mu \leq \int_B f\,d\mu$.

3) dacă $f \geq 0$ şi c este constant, $0 \leq c \leq \infty$ atunci $\int_E c f\,d\mu = c \int_E f\,d\mu$.

4) dacă $f(x) = 0$ $(\forall)$ $x \in E$, $\int_E f\,d\mu = 0$.

5) dacă $\mu(E) = 0$, atunci $\int_E f\,d\mu = 0$ chiar dacă $f(x) = \infty$ în $x_0 \in E$.

6) dacă $f \geq 0$, atunci $\int_E f\,d\mu = \int_X \chi_E f\,d\mu$.

O altă proprietate a integralei este dată în

Teorema 6.4. Fie s_1 şi s_2 funcţii simple măsurabile pe X. Pentru $E \in \mathfrak{M}$ definim

$$\varphi(E) = \int_E s_1\,d\mu.$$

Atunci φ este o măsură pe $\mathfrak{M}$ şi

$$\int_X (s_1 + s_2)\,d\mu = \int_X s_1\,d\mu + \int_X s_2\,d\mu.$$

Demonstraţie. Fie $E = E_1 \cup E_2 \cup \ldots$ unde $E_i \cap E_j = \emptyset$ cînd $i \neq j$, atunci

$$\varphi(E) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(A_i \cap E) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_i \cap E_j) =$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(A_i \cap E_j) = \sum_{j=1}^{\infty} \varphi(E_j)$$

unde $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ sînt valorile luate de s.

Fie $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m$ valorile luate de s_2 şi $B_j = \{x, s_2(x) = \beta_j\}$. Dacă $E_{ij} = A_i \cap B_j$ atunci

$$\int_{E_{ij}} (s_1 + s_2)\, d\mu = (\alpha_i + \beta_j)\, \mu(E_{ij})$$

şi

$$\int_{E_{ij}} s_1\, d\mu + \int_{E_{ij}} s_2\, d\mu = \alpha_i \mu(E_{ij}) + \beta_j \mu(E_{ij})$$

şi cum $X = \bigcup_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le m}} E_{ij}$ teorema este demonstrată.

Dacă f este o funcţie care ia valori în $[-\infty, +\infty]$ definim

$$\int_E f\, d\mu = \int_E f^+\, d\mu - \int_E f^-\, d\mu$$

în ipoteza că cel puţin una din integralele din membrul 2 este finită.

Am notat $f^+ = \max\{f, 0\}$ şi $f^- = -\min\{f, 0\}$ şi le numim partea pozitivă respectivă partea negativă a lui f.

O teoremă deosebit de importantă referitoare la integrarea Lebesgue a unui şir de funcţii măsurabile este dată de:

7.4. Teorema de convergenţă a lui Lebesgue

Fie $(f_n)_{n \in N}$ un şir de funcţii măsurabile pe X şi să presupunem că

a) $0 \le f_1(x) \le f_2(x) \le \ldots \le \infty$, $(\forall)$ $x \in X$

b) $f_n(x) \to f(x)$ cînd $n \to \infty$, $(\forall)$ $x \in X$.

Atunci f este măsurabilă şi

$$\int_X f_n\, d\mu \to \int_X f\, d\mu, \text{ cînd } n \to \infty.$$

Nu vom da demonstraţia acestei teoreme.

Vom stabili în continuare cîteva inegalităţi mai des folosite în analiză. Reamintim definiţia unei funcţii convexe $\varphi : (a, b) \to \mathbf{R}$.

φ este convexă dacă are loc inegalitatea

$$\varphi((1 - \lambda)\, x + \lambda y) \le (1 - \lambda)\, \varphi(x) + \lambda \varphi(y)$$

$$(\forall) \quad a < x < b, \quad a < y < b \text{ şi } 0 \le \lambda \le 1.$$

Această condiţie din definiţie poate fi înlocuită prin următoarea condiţie echivalentă

$$\frac{\varphi(t)-\varphi(s)}{t-s} \le \frac{\varphi(u)-\varphi(t)}{u-t}$$

oricare ar fi $a < s < t < u < b$.

Inegalitatea lui Jensen. Fie μ o măsură pozitivă pe o σ-algebră $\mathcal{M}$ din Ω astfel ca $\mu(\Omega) = 1$. Dacă f este o funcţie reală cu $|f|$ integrabilă în raport cu μ şi dacă $a < f < b$ $(\forall)$ $x \in \Omega$ iar φ este convexă pe (a, b) atunci

$$\varphi\left(\int_\Omega f\,d\mu\right) \le \int_\Omega \varphi\circ f\,d\mu.$$

Demonstraţie. Fie $t = \int_\Omega f\,d\mu$. Atunci $a < t < b$. Dacă β este marginea superioară a rapoartelor

$$\frac{\varphi(t)-\varphi(s)}{t-s} \text{ cu } a < s < t$$

atunci β este majorat de oricare raport de forma

$$\frac{\varphi(u)-\varphi(t)}{u-t}\ (\forall)\ t < u < b.$$

Rezultă deci că

$$\varphi(s) \ge \varphi(t) + \beta(s-t), \quad (a < s < b).$$

Deci

$$\varphi(f(x)) - \varphi(t) - \beta(f(x) - t) \ge 0$$

$(\forall)$ $x \in \Omega$. Deoarece φ este continuă $\varphi\circ f$ este măsurabilă şi integrînd în ambii membri în raport cu μ rezultă

$$\int_\Omega \varphi(f(x))\,d\mu - \varphi(t)\,\mu(\Omega) - \beta\int_\Omega f\,d\mu + \beta t\,\mu(\Omega) \ge 0$$

dar $\mu(\Omega) = 1$ şi $t = \int_\Omega f\,d\mu$ deci,

$$\int_\Omega \varphi(f)\,d\mu \ge \varphi\left(\int_\Omega f\,d\mu\right).$$

Dacă $\Omega = \{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$ şi $\mu(\{p_i\}) = \frac{1}{n}$, $f(p_i) = x_i$, obţinem

$$\exp\left\{\frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)\right\} \le \frac{1}{n}(e^{x_1} + \ldots + e^{x_n})$$

de unde rezultă că $\sqrt[n]{y_1 \ldots y_n} \le \frac{1}{n}(y_1 + \ldots + y_n)$, $y_i = e^{x_i}$.

Dacă $\mu(\{p_i\}) = \alpha_i > 0$ cu $\Sigma\alpha_i = 1$ obținem inegalitatea

$$y_1^{\alpha_1} \ldots y_n^{\alpha_n} \leqslant \alpha_1 y_1 + \ldots + \alpha_n y_n$$

Înlocuind în inegalitatea lui Jensen, $f = \ln g$ rezultă

$$\exp\left\{\int_\Omega \ln g \, d\mu\right\} \leqslant \int_\Omega g \, d\mu.$$

Inegalitățile lui Hölder și Minkovski

Fie $p, q > 0$ astfel ca $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Fie X un spațiu măsură cu măsura μ, f și g funcții măsurabile pe X cu valori în $[0, \infty]$. Atunci

$$\int_X fg \, d\mu \leqslant \left(\int_X f^p \, d\mu\right)^{1/p} \left(\int_X g^q \, d\mu\right)^{1/q} \tag{1}$$

(inegalitatea lui Hölder),
și

$$\left(\int_X (f + g)^p \, d\mu\right)^{1/p} \leqslant \left(\int_X f^p \, d\mu\right)^{1/p} + \left(\int_X g^p \, d\mu\right)^{1/p} \tag{2}$$

(inegalitatea lui Minkovski).

Demonstrație. Vom considera numai cazul

$$A = \left(\int_X f^p \, d\mu\right)^{1/p} > 0, \quad B = \left(\int_X g^q \, d\mu\right)^{1/q} > 0$$

și A și B finit.

Fie $F = \frac{f}{A}$ și $G = \frac{g}{B}$.

Atunci

$$\int_X F^p \, d\mu = \int_X G^q \, d\mu = 1.$$

Dacă $x \in X$ este astfel ca $0 < F(x) < \infty$ și $0 < G(x) < \infty$ există numerele reale s și t astfel ca: $F(x) = e^{s/p}$, $G(x) = e^{t/q}$.

Deoarece $1/p + 1/q = 1$ din convexitatea funcției exponențiale rezultă

$$e^{\frac{s}{p} + \frac{t}{q}} \leqslant \frac{e^s}{p} + \frac{e^t}{q}$$

și dacă

$$F(x) \cdot G(x) \leqslant p^{-1}(F(x))^p + q^{-1}(G(x))^q$$

pentru orice $x \in X$.

Integrînd în inegalitatea de mai sus obținem:

$$\int_X F\cdot G\,\mathrm{d}\mu \le \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Înlocuind F și G cu expresiile lor obținem inegalitatea lui Hölder.

Pentru a arăta (2) scriem

$$(f+g)^p = f(f+g)^{p-1} + g(f+g)^{p-1}$$

și aplicînd inegalitatea lui Hölder

$$\int_X f(f+g)^{p-1}\,\mathrm{d}\mu \le \left(\int_X f^p\,\mathrm{d}\mu\right)^{1/p}\left(\int_X (f+g)^{(p-1)q}\,\mathrm{d}\mu\right)^{1/q}$$

și la fel

$$\int_X g(f+g)^{p-1}\,\mathrm{d}\mu \le \left(\int_X g^p\,\mathrm{d}\mu\right)^{1/p}\left(\int_X (f+g)^{(p-1)q}\,\mathrm{d}\mu\right)^{1/q}$$

Adunînd membru cu membru aceste inegalități și ținînd seama că $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ rezultă

$$\int_X (f+g)^p\,\mathrm{d}\mu \le \left(\int_X (f+g)^p\,\mathrm{d}\mu\right)^{1/q}\left[\left(\int_X f^p\,\mathrm{d}\mu\right)^{1/p} + \left(\int_X g^p\,\mathrm{d}\mu\right)^{1/p}\right]$$

ceea ce arată (2).

Pentru $p = q = \frac{1}{2}$ inegalitatea lui Hölder capătă forma:

$$\int_X fg\,\mathrm{d}\mu \le \sqrt{\int_X f^2\,\mathrm{d}\mu \int_X g^2\,\mathrm{d}\mu}$$

și se numește inegalitatea lui Schwarz.

5. MĂSURA LEBESGUE

Vom da un exemplu de măsură cu care ne întîlnim mai des: măsura Lebesgue. Vom indica în continuare modul de construcție a acestei măsuri.

Definiția 1.5. Mulțimea $I = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \ldots \times [a_n, b_n] \subset \mathbf{R}^n$ cu $a_i, b_i \in \mathbf{R}$ o vom numi dreptunghi în $\mathbf{R}^n$.

Facem convenția ca să fie posibil $a_i = b_i$ pentru un i eventual.

O mulțime $A \subset \mathbf{R}^n$ care se poate scrie ca reuniunea unui număr finit de dreptunghiuri se numește *mulțime elementară*.

Notăm

$$m(I) = \prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i)$$

şi $m(A) = m(I_1) + m(I_2) + \ldots + m(I_p)$,
dacă $A = I_1 \cup I_2 \cup \ldots \cup I_p$ şi $I_k \cap I_j = \Phi$, $k \neq j$.

Spunem că m este finit aditivă. Observăm că $m(A) \geq 0$.

Fie $\mathcal{E}$ mulţimea tuturor mulţimilor elementare A care se scriu ca reuniune de dreptunghiuri disjuncte 2 cîte 2.

În cazul particular $n = 1, 2, 3$, m reprezintă lungimea, aria, volumul.

Definiţia 2.5. Spunem că o funcţie de mulţime definită pe $\mathcal{E}$ nenegativă aditivă este *regulată* dacă există, pentru orice $A \in \mathcal{E}$ şi orice $\varepsilon > 0$, o mulţime închisă F şi o mulţime deschisă O astfel ca:

$$\varphi(O) - \varepsilon \leq \varphi(A) \leq \varphi(F) + \varepsilon.$$

În sensul acestei definiţii funcţia m definită mai sus este o funcţie de mulţime regulată.

Într-adevăr pentru orice dreptunghi n-dimensional se aplică definiţia funcţiei regulate.

Definiţia 2.6. Fie μ o funcţie aditivă, regulată, nenegativă şi finită pe $\mathcal{E}$ şi $E \subset \mathbf{R}^n$ o mulţime oarecare pentru care:

$$E \subset \bigcup_{1}^{\infty} A_n$$

(A_n mulţimi elementare deschise). Numim măsură interioară a mulţimii E, numărul $\mu^*(E)$ definit astfel:

$$\mu^*(E) = \inf \sum_{1}^{\infty} \mu(A_n)$$

unde $\mu^*(E)$ este măsura *interioară* a *mulţimii* E corespunzătoare funcţiei.

Observăm că $\mu^*(E) \geq 0$, $(\forall)\, E \subset \mathbf{R}^n$ şi

$$\mu^*(E_1) \leq \mu^*(E_2) \text{ pentru } E_1 \subset E_2.$$

Are loc

Teorema 2.6. $(\forall)\, A \in \mathcal{E} \Rightarrow \mu^*(A) = \mu(A)$ şi dacă $E = \bigcup_{1}^{\infty} E_n$ atunci

$$\mu^*(E) \leq \sum_{1}^{\infty} \mu^*(E_n) \qquad \text{(semiaditivitate)}$$

Observăm că μ^* este o prelungire a lui μ la toate submulţimile din $\mathbf{R}^n$.

Demonstraţie. Fie $A \in \mathcal{E}$ şi $\varepsilon > 0$. μ este regulată deci $(\exists)\, O$, mulţime deschisă, astfel ca:

$$\mu(O) \leq \mu(A) + \varepsilon.$$

Dar $\mu^*(A) \leq \mu(O)$ şi cum ε este arbitrar

$$\mu^*(A) \leq \mu(A).$$

Din definiţia lui μ^* există un şir $\{A_n\}$ de mulţimi elementare deschise a căror reuniune să conţină mulţimea A, astfel ca

$$\sum_{1}^{\infty} \mu(A_n) \leq \mu^*(A) + \varepsilon.$$

La fel există mulţimea închisă F astfel ca

$$\mu(F) \geq \mu(A) - \varepsilon$$

şi cum mulţimea F este compactă

$$F \subset A_1 \cup \ldots \cup A_N.$$

Rezultă

$$\mu(A) \leq \mu(F) + \varepsilon \leq \mu(A_1 \cup \ldots \cup A_N) + \varepsilon \leq$$

$$\leq \sum_{1}^{N} \mu(A_n) + \varepsilon \leq \mu^*(A) + 2\varepsilon$$

rezultă astfel că $\mu^*(A) = \mu(A)$, cînd $A \in \mathfrak{E}$.

Fie acum $E = \bigcup E_n$ şi $\mu^*(E_n) < \infty$. Fiind dat $\varepsilon > 0$ arbitrar există acoperirea $\{A_{nk}\}$, $k = 1, 2, 3$ a mulţimii E_n cu mulţimi elementare deschise astfel ca:

$$\sum_{1}^{\infty} \mu(A_{nk}) < \mu^*(E_n) + 2^{-n} \cdot \varepsilon.$$

Atunci

$$\mu^*(E) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_{nk}) \leq \sum_{1}^{\infty} \mu^*(E_n) + \varepsilon.$$

Definiţia 4.5. Pentru orice 2 mulţimi A şi $B \subset \mathbf{R}^n$

fie $$d(A, B) = \mu^*(A \Delta B),$$

unde $A \Delta B = (A - B) \cup (B - A)$.

Vom spune că $A_n \to A$ dacă $\lim_{n \to \infty} d(A_n, A) = 0$.

Dacă există un şir $\{A_n\}_{n \in N}$ de mulţimi elementare astfel ca $A_n \to A$ spunem că mulţimea A este finit μ-măsurabilă şi scriem $A \in \mathfrak{M}^*(\mu)$.

Dacă A este reuniunea unui număr numerabil de mulţimi finit μ-măsurabile spunem că A este măsurabilă şi notăm $A \in \mathfrak{M}(\mu)$.

Se poate arăta că mulţimea $\mathfrak{M}(\mu)$ astfel construită este σ-algebră iar funcţia μ^* este numerabil aditivă pe $\mathfrak{M}(\mu)$.

În acest mod funcţia de mulţime μ definită iniţial pe $\mathfrak{E}$ spunem că a fost prelungită la o funcţie de mulţime numerabil aditivă pe σ-algebra $\mathfrak{M}(\mu)$. μ astfel definit pe $\mathfrak{M}(\mu)$ se numeşte măsura. În cazul particular cînd $\mu = m$ (pe $\mathfrak{E}$) ea se numeşte măsura Lebesgue în $\mathbf{R}^n$.

Teoria măsurii constituie baza matematică pe care s-a dezvoltat „Teoria probabilităţilor" ramură de matematică în plină dezvoltare.

§ 6. INTEGRALE CU PARAMETRI

Fie funcţia $u = f(x, y)$, $f : D = [a, b] \times [c, d]$ integrabilă în raport cu x pe $[a, b]$ pentru orice y, $c \le y \le d$. Integrala

$$J(y) = \int_a^b f(x, y)\,dx$$

este funcţie de parametrul y, $y \in [c, d]$ şi se numeşte integrală cu parametru.
Are loc

Teorema 1.6. Dacă funcţia $f(x, y)$ este continuă în D; $D : a \le x \le b$, $c \le y \le d$ atunci integrala

$$J(y) = \int_a^b f(x, y)\,dx$$

este o funcţie continuă de y pe segmentul $[c, d]$.

Demonstraţie. $f(x, y)$ este continuă în D, D compact deci $f(x, y)$ este uniform continuă. Rezultă că pentru $(\forall)\ \varepsilon > 0$
$(\exists)\ \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ astfel încît $(\forall)\ (x', y'), (x'', y'') \in D$ pentru care

$$|x' - x''| < \delta(\varepsilon), \quad |y' - y''| < \delta(\varepsilon)$$

să avem

$$|f(x', y') - f(x'', y'')| < \frac{\varepsilon}{b - a}.$$

În particular pentru $x' = x'' = x$, obţinem că $(\forall)\ y', y'' \in [c, d]$ care verifică condiţia

$$|y' - y''| < \delta(\varepsilon) \Rightarrow |f(x, y') - f(x, y'')| < \frac{\varepsilon}{b - a}.$$

Putem scrie

$$|J(y') - J(y'')| = \left|\int_a^b [f(x, y') - f(x, y'')]\,dx\right| \le$$

$$\le \int_a^b |f(x, y') - f(x, y'')|\,dx < \frac{\varepsilon}{b - a}(b - a) = \varepsilon,$$

ceea ce arată continuitatea funcţiei $J(y)$ pe $[c, d]$.

Observaţie. În condiţiile teoremei precedente funcţia: $F(u, v, y) = \int_u^v f(x, y)\,dx$ este continuă în intervalul închis

$$I : [a, b] \times [a, b] \times [c, d].$$

Această afirmaţie rezultă astfel: $f(x, y)$ este continuă în $[a, b] \times [c, d]$ deci există constanta C astfel ca $|f(x, y)| < C$ în $D = [a, b] \times [c, d]$.

Deci $(\forall)$ (a', c', y') şi (a'', c'', y'') din V are loc inegalitatea

$$|F(a', c', y') - F(a'', c'', y'')| = \left|\int_{a'}^{c'} f(x, y')\,dx - \right.$$

$$\left. - \int_{a''}^{c''} f(x, y'')\,dx\right| \leq \left|\int_{a'}^{c'} [f(x, y') - f(x, y'')]\,dx\right| +$$

$$+ \left|\int_{a''}^{a'} f(x, y'')\,dx - \int_{c''}^{c'} f(x, y'')\,dx\right| \leq$$

$$\leq \left|\int_{a'}^{c'} [f(x, y') - f(x, y'')]\,dx\right| + C\,|a' - a''| + C\,|c' - c''|.$$

Fie punctul (a', c', y') fixat şi $(a'', c'', y'') \to (a', c', y')$. Atunci termenul

$$\int_{a'}^{c'} (f(x, y') - f(x, y''))\,dx$$

tinde la zero şi deci:

$$F(a'', c'', y'') \to F(a', c', y').$$

În legătură cu derivarea integralelor cu parametru are loc

Teorema 2.6. Dacă $f(x, y)$ şi $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ sînt continue în $D = [a, b] \times [c, d]$ atunci integrala $J(y) = \int_a^b f(x, y)\,dx$ este o funcţie derivabilă în raport cu y, $y \in [c, d]$ şi:

$$\frac{dJ}{dy} = \frac{d}{dy}\int_a^b f(x, y)\,dx = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}\,dx.$$

Demonstraţie. Trebuie arătat că:

$$\lim_{h \to 0} \frac{J(y + h) - J(y)}{h} = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}\,dx.$$

În baza teoremei creşterilor finite putem scrie:

$$\frac{J(y + h) - J(y)}{h} = \int_a^b \frac{f(x, y + h) - f(x, y)}{h}\,dx =$$

$$= \int_a^b \frac{\partial f(x, y + h^*)}{\partial y}\,dx, \qquad 0 < h^* < h$$

şi astfel

$$\frac{J(y + h) - J(y)}{h} - \int_a^b \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\,dx =$$

$$= \int_a^b [f'_y(x, y + h^*) - f'_y(x, y)]\,dx.$$

Deoarece f'_y este continuă în $[a, b] \times [c, d]$, f'_y este și uniform continuă și deci $(\forall)\ \varepsilon > 0\ (\exists)\ \delta(\varepsilon) > 0$ astfel ca pentru $|h| < \delta(\varepsilon)$,

$$|f'_y(x, y + h) - f'_y(x, y)| < \frac{\varepsilon}{b - a}$$

pentru $x \in [a, b]$ și orice $y, y + h \in [c, d]$.

Putem scrie

$$\left|\frac{J(y + h) - J(y)}{h} - \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}\,dx\right| =$$

$$= \left|\int_a^b [f'_y(x, y + h^*) - f'_y(x, y)]\,dx\right| \leqslant$$

$$\leqslant \int_a^b |f'_y(x, y + h^*) - f'_y(x, y)|\,dx < \varepsilon$$

pentru toți $|h| < \delta(\varepsilon)$.

În cazul în care integrala cu parametru are și limitele funcții de parametrul respectiv demonstrăm:

Teorema 3.6. Fie $f(x, y)$ și $f'_y(x, y)$ continue în $D = [a, b] \times [c, d]$ și $x = \varphi(y)$, $x = \psi(y)$ 2 funcții cu graficele în D diferențiabile. Atunci derivata funcției

$$J(y) = \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x, y)\,dx$$

există

$$J'(y) = \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f'_y(x, y)\,dx + f(\psi(y), y)\,\psi'(y) - f(\varphi(y), y)\,\varphi'(y).$$

Demonstrație. Avem:

$$J(y) = F(\varphi(y), \psi(y), y)$$

unde

$$F(u, v, y) = \int_u^v f(x, y)\,dx,$$

$a \leqslant u \leqslant b$, $a \leqslant v \leqslant b$, $c \leqslant y \leqslant d$, are derivate parțiale continue.

$$F_u = -f(u, y),\ F_v = f(v, y),\ F_y = \int_u^v f'_y(x, y)\,dx$$

Deoarece funcțiile $u = \varphi(y)$ și $v = \psi(y)$ sînt presupuse derivabile rezultă că F este derivabilă în raport cu y și aplicînd regula de derivare a unei funcții compuse rezultă

$$F'_y = \frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial y} = -f(u, y)\frac{\partial \varphi}{\partial y} + f(v, y)\frac{\partial \psi}{\partial y} +$$

$$+ \int_u^v f'_y(x, y)\,dx \text{ unde } u = \varphi(y) \text{ și } v = \psi(y).$$

În legătură cu integrarea unei funcţii definite printr-o integrală cu parametru avem:

Teorema 1.6. Dacă funcţia $f(x, y)$ este continuă în $D = [a, b] \times [c, d]$ atunci:

$$\int_c^d I(y)\,dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x, y)\,dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y)\,dy.$$

Demonstraţie. Să arătăm mai general că:

$$\int_c^d dy \int_a^t f(x, y)\,dx = \int_a^t dx \int_c^d f(x, y)\,dy$$

pentru $a \leq t \leq b$.

Să notăm $\varphi(t) = \int_c^d dy \int_a^t f(x, y)\,dx$,

$$\psi(t) = \int_a^t dx \int_c^d f(x, y)\,dy.$$

Va fi suficient să arătăm că

$$\varphi'(t) = \psi'(t) \text{ pentru } a \leq t \leq b \text{ şi } \varphi(a) = \psi(a).$$

Punînd $F(t, y) = \int_a^t f(x, y)\,dx$ punem $\varphi(t) = \int_c^d F(t, y)\,dy$ unde $F(t, y)$ este continuă în dreptunghiul $D^*: a \leq t \leq b$, $c \leq y \leq d$ şi $F'_t(t, y) = f(t, y)$ continuă în condiţiile teoremei anterioare. Astfel:

$$\varphi'(t) = \int_c^d F'_t(t, y)\,dy = \int_c^d f(t, y)\,dy.$$

Punînd $\xi(x) = \int_c^d f(x, y)\,dy$ obţinem $\psi(t) = \int_a^t \xi(x)\,dx$ şi în baza teoremelor demonstrate anterior

$$\psi'(t) = \frac{d}{dt}\int_a^t \xi(x)\,dx = \xi(t) = \int_c^d f(t, y)\,dy.$$

De aici rezultă că $\varphi'(t) \equiv \psi'(t)$ pentru $a \leq t \leq b$ şi cum $\varphi(a) = \psi(a)$ rezultă $\varphi(t) \equiv \psi(t)$ pentru $a \leq t \leq b$ şi deci $\varphi(b) = \psi(b)$.

Exemple. 1) Să se calculeze folosind derivarea în raport cu un parametru integrala

$$I = \int_0^1 \frac{\ln(1 + x)}{1 + x^2}\,dx.$$

Considerăm integrala cu parametru

$$J(\alpha) = \int_0^{\alpha} \frac{\ln(1 + \alpha x)}{1 + x^2}\,dx.$$

Avem $J(0) = 0$, $J(1) = I$

$$\frac{dJ(\alpha)}{d\alpha} = \int_0^\alpha \frac{x}{(1+\alpha x)(1+x^2)}\,dx + \frac{\ln(1+\alpha^2)}{1+\alpha^2} =$$

$$= -\frac{\ln(1+\alpha^2)}{2(1+\alpha^2)} + \frac{\alpha \operatorname{arctg}\alpha}{1+\alpha^2}.$$

Integrînd acum în raport cu α

$$J(\alpha) = -\frac{1}{2}\int \frac{\ln(1+\alpha^2)}{1+\alpha^2}\,d\alpha + \int \frac{\alpha \operatorname{arctg}\alpha}{1+\alpha^2}\,d\alpha + C =$$

$$= \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\alpha \cdot \ln(1+\alpha^2) + C$$

Pentru $\alpha = 0$, $J(0) = 0$ deci $C = 0$.
Astfel pentru $\alpha = 1$

$$J(1) = I = \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{8}\ln 2$$

2) Să se calculeze folosind integrarea în raport cu parametru

$$I = \int_0^1 \cos\left(\ln\frac{1}{x}\right)\cdot\frac{x^b - x^a}{\ln x}\,dx,\ a, b > 0.$$

Vom scrie pentru aceasta:

$$I = \int_0^1 \cos\left(\ln\frac{1}{x}\right)\left(\int_a^b x^y\,dy\right)dx = \int_a^b\left(\int_0^1 x^y \cos\left(\ln\frac{1}{x}\right)dx\right)dy$$

Am putut aplica teorema prin care se poate integra o integrală cu parametru deoarece funcția

$$f(x, y) = \begin{cases} x^y \cos\left(\ln\frac{1}{x}\right), & (x, y) \in (0, 1] \times [a, b] \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

este continuă în $[0, 1] \times [a, b]$.
Calculăm

$$I_1 = \int_0^1 x^y \cos\left(\ln\frac{1}{x}\right)dx$$

facem $\ln x = t$, $x = e^t$, $dx = e^t\,dt$, $t \in (-\infty, 0]$

și

$$I_1 = \int_{-\infty}^{0} e^{(y+1)t}\cos t\,dt = e^{(y+1)t}\sin t\Big|_{-\infty}^{0} -$$

$$-\int_{-\infty}^{0} (y+1)e^{(y+1)t}\sin t\,dt = -(y+1)\left[-e^{(y+1)t}\cos t\Big|_{-\infty}^{0} +\right.$$

$$\left.+ (y+1)\int_{-\infty}^{0} e^{(y+1)t}\cos t\right]dt = (y+1) - (y+1)^2 I_1$$

$$I_1[1 + (y+1)^2] = y+1, \quad I_1 = \frac{y+1}{1+(y+1)^2}$$

deci

$$I = \int_a^b \frac{y+1}{1+(y+1)^2}\,dy = \frac{1}{2}\ln\left[(1+y)^2+1\right]\Big|_a^b =$$

$$= \frac{1}{2}\ln\frac{b^2+2b+2}{a^2+2a+2}.$$

Exerciții propuse

1. Să se arate că $f(x) = x^2$ este integrabilă în raport cu

$$g(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}, & x \in (0, 1] \text{ și să se calculeze } \displaystyle\int_0^1 f\,dg. \\ \dfrac{\pi}{2}, & x = 0 \end{cases}$$

2. Să se calculeze $\int_0^1 x^2\,dg$ unde $g(x) = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ x^2 E\left(\dfrac{1}{x}\right), & x \in (0, 1] \end{cases}$ unde E este partea întreagă a numărului $\dfrac{1}{x}$.

3. Să se calculeze cu ajutorul integralei,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1^k + 2^k + \ldots + n^k}{n^{k+1}}, \; k > 0.$$

Să se calculeze cu aproximație $S = 1^5 + 2^5 + \ldots + 100^5$.

4. Funcția $y = y(x)$ este definită implicit de ecuația

$$\int_0^y e^t\,dt + \int_0^x \cos t\,dt = 0$$

Să se calculeze y'.

5. Să se determine extremele funcției

$$f(x) = \int_0^x t e^{-t^2}\, dt$$

6. Să se calculeze următoarele integrale:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} t e^t \cos at\, dt,\ \int x^n \ln x\, dx,\ \int_0^1 \frac{dx}{x^4+1},$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos x}{1+\cos x}\, dx,\ \int \frac{dx}{\sin x},\ \int \frac{dx}{\sin x + \cos x}.$$

7. Să se calculeze:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x} + 2\sqrt[6]{x}},\ \int \frac{\sqrt{1-x^4}}{x^2}\, dx,\ \int \sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}\, dx$$

$$\int \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) dx,\ \int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2+x+1}},\ \int \frac{\sqrt{1+x^2}}{2+x^2}\, dx$$

8. Să se arate că

$$\int_{\frac{1}{e}}^{\operatorname{tg} x} \frac{t\, dt}{1+t^2} + \int_{\frac{1}{e}}^{\operatorname{ctg} x} \frac{dt}{t(t^2+1)} = 1$$

9. Să se calculeze stabilind o formulă de recurență, integralele:

$$I_n = \int_0^\infty x^n e^{-x}\, dx \quad \text{și} \quad I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\, dx$$

10. Să se arate că dacă f este periodică ($f(x+T) = f(x)$)

$$\int_a^{a+T} f(x)\, dx = \int_0^T f(x)\, dx$$

11. Să se calculeze folosind dezvoltarea în serie de puteri integralele:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x}\, dx,\ \int_0^{0,5} e^{-x^2}\, dx,\ \int_0^1 x^x\, dx,\ \int_0^x e^{-t^2}\, dt$$

12. Fără a calcula integrala să se arate, că:

$$\frac{\pi}{6} < \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2-x^3}} < \frac{1}{\sqrt{2}}$$

13. Să se calculeze aria elipsei

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$$

14. Să se calculeze volumul elipsoidului

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \qquad R: \frac{4}{3}\pi abc$$

15. Să se determine aria obținută prin rotirea curbei $y = 2x - x^2$ în jurul axei Ox, $x \in [0, 2]$.

16. Să se calculeze masa unei bare de lungime $l = 10$ m dacă densitatea de masă variază după legea $\mu(x) = 6 + 0,3x$ unde x este distanța unui punct al barei la capătul ei inferior.

17. Să se determine lucrul mecanic efectuat de forța:

$\vec{F} = (x^2 - x)\vec{i}$ cînd aceasta își deplasează punctul de aplicație pe segmentul $[0, 2]$. $\qquad R: \frac{2}{3}$

18. Să se calculeze aria sectorului mărginit de curba $r = a(1 + \cos\theta)$.

$$R: \frac{3\pi a^2}{2}.$$

19. Să se calculeze cu formula lui Simpson

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1 + x^4}} \qquad \text{alegînd } n = 10.$$

20. Să se calculeze

$$B(m, n) = \int_0^1 x^{m-1}(1 - x)^{n-1}\,dx, \quad m, n \in N$$

21. Să se calculeze

$$F(a) = \int_0^1 \frac{dx}{(x^2 + a^2)^n}, \quad n \in N$$

Considerați-o integrală cu parametru.

22. Să se calculeze $F'(x)$ dacă

$$F(x) = \int_x^{x^2} \frac{\ln(1 + xy)}{y}\,dy$$

CAPITOLUL VI

INTEGRALE IMPROPRII

§ 1. DEFINIȚII ȘI PROPRIETĂȚI ALE INTEGRALELOR IMPROPRII

S-a studiat noțiunea de integrală $\int_a^b f(x)\,dx$, unde s-a presupus intervalul de integrare $[a, b]$ compact, iar funcția f mărginită. Există probleme care conduc la extinderea noțiunii de integrală definită.

Fie funcția $f:[0, \infty) \to (0, 1]$ definită de

$$f(x) = e^{-x}$$

Aria porțiunii din plan cuprinsă între dreptele $x = 0$, $x = a$, $y = 0$ și graficul funcției f este dată de $\int_0^a e^{-x}\,dx = 1 - e^{-a}$. Este natural să considerăm aria cuprinsă între dreptele $x = 0$, $y = 0$ și graficul funcției f ca fiind egală cu

$$\lim_{a\to\infty} \int_0^a e^{-x}\,dx = \lim_{a\to\infty} (1 - e^{-a}) = 1.$$

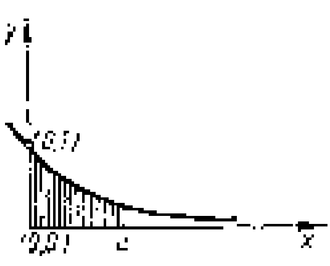

Fig. 24

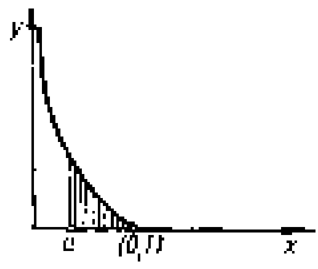

Fig. 25

Dacă considerăm funcția $f:[1, \infty) \to (0, 1]$ definită de

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

atunci nu mai putem da un sens natural noțiunii de arie a porțiunii plane cuprinsă între dreptele $x = 1$, $y = 0$ şi graficul funcţiei f, deoarece

$$\lim_{u\to\infty}\int_1^u \frac{dx}{x} = \lim_{u\to\infty} \ln u = \infty$$

Şi alte probleme ne conduc la studiul existenţei unor limite de forma

$$\lim_{u\to\infty}\int_a^u f(x)\,dx \quad (1);\qquad \lim_{u\to-\infty}\int_u^a f(x)\,dx \quad (2);$$

$$\lim_{\substack{u'\to\infty\\ u''\to-\infty}}\left(\int_{u''}^{a} f(x)\,dx + \int_a^{u'} f(x)\,dx\right) \quad (3)$$

Sîntem conduşi în acest fel la:

Definiţia 1.1. Fie f o funcţie definită în $[a, \infty)$. Presupunem că f este integrabilă pe orice interval compact $[a, u] \subset [a, \infty)$. Să punem

$$F(u) = \int_a^u f(x)\,dx.$$

Dacă $\lim_{u\to\infty} F(u)$ există şi este finită, atunci spunem că f este integrabilă pe $[a, \infty)$ şi punem prin definiţie

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{u\to\infty} F(u)$$

Despre integrala din stînga spunem că este convergentă. O integrală care nu este convergentă spunem că este divergentă.

Limitele de tipul (2) sau (3) conduc la integrale pe intervale de forma $(-\infty, a]$ sau $(-\infty, \infty)$ iar integralele corespunzătoare se notează

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx\,; \qquad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$$

şi pot fi aduse la integrale de tipul celei date în definiţia 1.1. În adevăr, făcînd schimbarea de variabilă $x = -t$ obţinem

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx = \lim_{u\to-\infty}\int_u^a f(x)\,dx = \lim_{u\to-\infty}\int_{-u}^{-a} - f(-t)\,dt =$$

$$= \lim_{u\to-\infty}\int_{-a}^{-u} f(-t)\,dt = \int_{-a}^{\infty} f(-t)\,dt$$

În mod asemănător obţinem

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-a}^{\infty} f(-x)\,dx + \int_a^{\infty} f(x)\,dx.$$

Să considerăm acum funcţia f definită prin

$$f(x) = -\ln x : (0, 1] \to [0, \infty)$$

dacă $u \in (0, 1]$ atunci aria porţiunii plane cuprinsă între dreptele $x = u$, $y = 0$ şi graficul funcţiei f este dată de

$$F(u) = -\int_u^1 \ln x \, dx = (x - x \ln x)\Big|_u^1 = 1 - u + u \ln u$$

Funcţia f nu este definită în 0 şi nu putem pune problema integrabilităţii lui f pe $[0, 1]$.

În definiţia integralei Riemann am presupus f mărginită pe $[a, b]$ iar în cazul nostru f nu este mărginită pe $(0, 1]$. Vom considera aria cuprinsă între dreptele $x = 0$, $y = 0$ şi graficul lui f ca fiind egală cu

$$\lim_{u \to 0} F(u) = \lim_{u \to 0} (1 - u + u \ln u) = 1$$

Şi alte probleme ne conduc la studiul existenţei unor limite de forma

$$\lim_{u \to b-0} \int_a^u f(x)\,dx \quad (1'); \qquad \lim_{u \to a+0} \int_u^b f(x)\,dx \quad (2');$$

$$\lim_{\substack{u' \to a+0 \\ u'' \to b-0}} \left(\int_{u'}^{c} f(x)\,dx + \int_c^{u''} f(x)\,dx \right) \quad (3'); \quad a < c < b$$

Sîntem conduşi în acest fel la:

Definiţia 2.7. Fie f o funcţie reală definită pe $[a, b)$. Presupunem că f este integrabilă pe orice interval compact $[a, u] \subset [a, b)$.

Să punem

$$F(u) = \int_a^u f(x)\,dx$$

dacă $\lim_{u \to b-0} F(u)$ există şi este finită, atunci spunem că f este integrabilă pe $[a, b)$ şi punem prin definiţie

$$\int_a^{b-0} f(x)\,dx = \lim_{u \to b-0} F(u)$$

Despre integrala din stînga spunem că este convergentă. O integrală care nu este convergentă spunem că este divergentă.

Limitele de tipul (2') sau (3') conduc la integrale pe intervale de forma $(a, b]$ sau (a, b) iar integralele corespunzătoare se notează cu

$$\int_{a+0}^{b} f(x)\,dx; \quad \int_{a+0}^{b-0} f(x)\,dx.$$

Se arată, în mod asemănător ca mai sus, că aceste integrale pot fi aduse la integrale de tipul celei date în definiția 3.1. Pentru

$$\int_{a}^{b-0} f(x)\,dx;\quad \int_{a+0}^{b} f(x)\,dx \text{ și } \int_{a+0}^{b-0} f(x)\,dx$$

se mai folosește notația

$$\int_{a}^{b} f(x)\,dx.$$

Se vede imediat că dacă funcția f este definită și integrabilă pe $[a, b]$, atunci f este integrabilă pe $[a, b)$ și integralele coincid.

Există funcții integrabile pe $[a, b)$ care nu sînt integrabile pe $[a, b]$. Pentru ca aceasta să se întîmple este necesar ca funcția f să fie nemărginită pe orice interval $[u, b)$ cu $a \leq u < b$.

Exemplu: fie

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{1-x}}, & x \in [0, 1) \\ 0, & x = 1. \end{cases}$$

După definiția 3.1 avem:

$$\int_{0}^{1} f(x)\,dx = \lim_{u \to 1-0} \int_{0}^{u} \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = \lim_{u \to 1-0} 2(1 - \sqrt{1-u}) = 2.$$

Deci f este integrabilă pe $[0, 1)$ dar nu este integrabilă pe $[0, 1]$ deoarece este nemărginită pe $[0, 1]$.

Am abordat mai sus două probleme, aceea a integrabilității unei funcții pe un interval nemărginit și aceea a integrabilității unei funcții nemărginite. Fiecare dintre aceste probleme este un caz particular a unei probleme mai generale și anume aceea a integrabilității unei funcții pe un interval necompact $[a, b)$ (a finit, b finit sau infinit) în cazul în care funcția este integrabilă pe orice compact $[a, u] \subset [a, b)$.

Definiția 3.2. Fie f o funcție reală, definită pe $[a, b)$ (b finit sau infinit) și integrabilă pe orice interval compact $[a, u] \subset [a, b)$.

Să punem

$$F(u) = \int_{a}^{u} f(x)\,dx.$$

Dacă $\lim\limits_{\substack{u \to b \\ u < b}} F(u)$ există și este finită, atunci spunem că f este integrabilă pe intervalul necompact $[a, b)$, sau integrabilă impropriu pe $[a, b)$ și punem prin definiție

$$\int_{a}^{b} f(x)\,dx = \lim_{\substack{u \to b \\ u < b}} F(u).$$

Despre integrala din stînga spunem că este convergentă. O integrală care nu este convergentă spunem că este divergentă.

Mai departe vom da o condiție necesară și suficientă de convergență a unei integrale. Pentru aceasta sînt necesare următoarele teoreme.

Teorema 2.1. Fie f o funcție reală definită pe $[a, b)$ (b finit sau infinit) și f integrabilă pe orice interval compact $[a, u] \subset [a, b)$. Dacă $a < c < b$, atunci integralele

$$\int_a^b f(x)\,dx, \quad \int_c^b f(x)\,dx$$

sînt în același timp convergente sau în același timp divergente.

Demonstrație. Să punem

$$F(u) = \int_a^u f(x)\,dx; \quad G(u) = \int_c^u f(x)\,dx;$$

$$A = \int_a^c f(x)\,dx.$$

Avem

$$F(u) = G(u) + A$$

de unde se vede că $\lim\limits_{u \to b-0} F(u)$ există și este finită dacă și numai dacă $\lim\limits_{u \to b-0} G(u)$ există și este finită.

Teorema 2.2. Fie f și g două funcții reale definite pe $[a, b)$ (b finit sau infinit), f și g integrabile pe orice interval compact $[a, u] \subset [a, b)$. Dacă integralele

$$\int_a^b f(x)\,dx \quad \text{și} \quad \int_a^b g(x)\,dx$$

sînt convergente atunci și integrala $\int_a^b [Af(x) + Bg(x)]\,dx$ este convergentă, unde A și B sînt constante.

Demonstrație. În adevăr

$$\int_a^b [Af(x)+Bg(x)]\,dx = \lim_{u \to b-0} \int_a^u [Af(x) + Bg(x)]\,dx =$$

$$= A \lim_{u \to b-0} \int_a^u f(x)\,dx + B \lim_{u \to b-0} \int_a^u g(x)\,dx$$

$$= A \int_a^b f(x)\,dx + B \int_a^b g(x)\,dx$$

După cum se vede din definiţia 5.1 convergenţa unei integrale revine la existenţa şi finitudinea limitei funcţiei $F(u)$, în legătură cu care avem

Teorema 5.1. (*Criteriul lui Cauchy-Bolzano*). Fie F o funcţie reală definită pe $[a, b)$ (b finit sau infinit). Pentru ca $\lim\limits_{u \to b} F(u)$ să existe şi să fie finită este necesar şi suficient ca pentru orice $\varepsilon > 0$ să existe $b_0(\varepsilon)$, $a < b_0(\varepsilon) < b$, astfel ca oricare ar fi u' şi u'' cu $b_0(\varepsilon) < u' < u'' < b$ să avem

$$|F(u') - F(u'')| < \varepsilon.$$

Demonstraţie. Vom arăta mai întîi necesitatea condiţiei. Fie:

$$\lim_{u \to b} F(u) = l$$

Atunci, pentru orice $\varepsilon > 0$, există $b_0(\varepsilon)$, $a < b_0(\varepsilon) < b$, astfel încît oricare ar fi u cu $b_0(\varepsilon) < u < b$ să avem $|F(u) - l| < \varepsilon$. Fie u' şi u'' astfel încît $b_0(\varepsilon) < u' < u'' < b$. Avem:

$$|F(u') - l| < \varepsilon \text{ şi } |F(u'') - l| < \varepsilon$$

de unde rezultă

$$|F(u') - F(u'')| \leq |F(u') - l| + |F(u'') - l| < 2\varepsilon$$

şi necesitatea condiţiei este demonstrată.

Arătăm suficienţa condiţiei. Fie şirul (u_n) cu $u_n < b$ şi $u_n \to b$. Deci pentru orice $\varepsilon > 0$ există un rang $N(\varepsilon)$ astfel încît pentru $n > N(\varepsilon)$ să avem $b_0(\varepsilon) < u_n < b$. Fie $m > N(\varepsilon)$, avem $b_0(\varepsilon) < u_m < b$ şi în baza ipotezei rezultă inegalitatea

$$|F(u_n) - F(u_m)| < \varepsilon.$$

Deci şirul $(F(u_n))$ satisface criteriul de convergenţă a lui Cauchy; există şi este finită limita

$$\lim_{n \to \infty} F(u_n)$$

Notăm cu l valoarea acestei limite. Dacă pentru orice alt subşir (u_n') crescător şi convergent la b avem

$$\lim_{n \to \infty} F(u_n') = l$$

atunci suficienţa condiţiei este demonstrată.

Să presupunem, prin reducere la absurd că

$$\lim_{n \to \infty} F(u_n') = l'$$

unde $l' \neq l$. Considerăm şirul

$$u_1, u_1', u_2, u_2', \ldots, u_n, u_n', \ldots$$

Acest șir tinde la b dinspre stînga, deci șirul

$$F(u_1),\ F(u_1'),\ F(u_2),\ F(u_2'),\ \ldots,\ F(u_n),\ F(u_n'),\ \ldots$$

are limită finită. Fie l'' valoarea acestei limite. Deoarece un șir convergent are aceeași limită ca orice subșir al său iar șirurile $(F(u_n))$, $(F(u_n'))$ sînt subșiruri ale șirului cu limita l'', rezultă că $l = l' = l''$. Contradicția obținută demonstrează teorema.

O condiție necesară și suficientă de convergență a unei integrale este dată de

Teorema 4.1. (Criteriul lui Cauchy). Fie funcția reală f definită pe $[a, b)$ (b finit sau infinit) și f integrabilă pe orice interval compact $[a, u] \subset [a, b)$. O condiție necesară și suficientă pentru convergența integralei

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

este următoarea:
pentru orice $\varepsilon > 0$ există $b_0(\varepsilon)$, $a < b_0(\varepsilon) < b$, astfel încît oricare ar fi u' și u'' cu $b_0(\varepsilon) < u' < u'' < b$ să avem

$$\left|\int_{u'}^{u''} f(x)\,dx\right| < \varepsilon$$

Demonstrație. Considerăm funcția $F(u) = \int_a^u f(x)\,dx$. Convergența integralei $\int_a^b f(x)\,dx$ este echivalentă cu existența și finitudinea limitei $\lim\limits_{u \to b} \int_a^u f(x)\,dx$. Observăm că $F(u'') - F(u') = \int_{u'}^{u''} f(x)\,dx$ și aplicînd criteriul Cauchy-Bolzano funcției $F(u)$, rezultă demonstrația criteriului dat.

Definiția 4.1. Fie f o funcție definită pe $[a, b)$ (b finit sau infinit), integrabilă pe orice compact $[a, u] \subset [a, b)$. Spunem că integrala $\int_a^b f(x)\,dx$ este absolut convergentă dacă $\int_a^b |f(x)|\,dx$ este convergentă.

Teorema 5.1. Fie f o funcție definită pe $[a, b)$ (b finit sau infinit) și f integrabilă pe orice compact $[a, u] \subset [a, b)$. Dacă integrala $\int_a^b f(x)\,dx$ este absolut convergentă, atunci ea este convergentă.

Demonstrație. Din criteriul lui Cauchy (necesitatea condiției) aplicat integralei $\int_a^b |f(x)|\,dx$ rezultă că pentru orice $\varepsilon > 0$, există $b_0(\varepsilon)$, $a < b_0(\varepsilon) < b$, astfel încît oricare ar fi u' și u'' cu $b_0(\varepsilon) < u' < u'' < b$ să avem $\int_{u'}^{u''} |f(x)|\,dx < \varepsilon$

Dar $\int_a^u |f(x)|\,dx \le \int_a^b |f(x)|\,dx$ şi deci pe baza aceluiaşi criteriu (suficienţa condiţiei) rezultă că integrala $\int_a^b f(x)\,dx$ este convergentă.

Observaţie. Pe un interval compact integrabilitatea lui f atrage după sine integrabilitatea lui |f|, dar nu şi reciproc. Teorema 5.1 arată că pe un interval necompact din integrabilitatea lui |f| rezultă integrabilitatea lui f. Reciproc nu este adevărat, adică din integrabilitatea lui f pe un interval necompact nu rezultă integrabilitatea lui |f|.

Definiţia 5.1. O integrală improprie se numeşte semiconvergentă dacă este convergentă dar nu este absolut convergentă.

Vom da mai departe un exemplu de integrală semiconvergentă.

§ 2. INTEGRALE IMPROPRII DIN FUNCŢII POZITIVE

Ultima teoremă pune în evidenţă necesitatea studierii integralelor pe interval necompact în cazul în care funcţia de sub semnul integrală este pozitivă.

Teorema 5.2. (Primul criteriu de comparaţie). Fie f şi g două funcţii reale definite pe $[a, b)$ (b finit sau infinit) şi integrabile pe orice interval compact $[a, u] \subset [a, b)$. Presupunem

1) $0 \le f(x) \le g(x)$ pentru orice $x \in [a, b)$

2) integrala $\int_a^b g(x)\,dx$ este convergentă

Atunci şi integrala $\int_a^b f(x)\,dx$ este convergentă.

Demonstraţie. Fie $u \in [a, b)$; din inegalitatea 1) şi proprietatea de monotonie a integralei Riemann avem

$$F(u) = \int_a^u f(x)\,dx \le \int_a^u g(x)\,dx \qquad (3)$$

din $0 \le g(x)$ şi 2) rezultă

$$\int_a^u g(x) \le \int_a^b g(x)\,dx \qquad (4)$$

din (3) şi (4) obţinem $F(u) \le \int_a^b g(x)\,dx$.

Prin urmare funcţia F este mărginită pe $[a, b)$ şi evident este crescătoare. Aşadar $\lim\limits_{u \to b-0} F(u)$ există, este finită şi în plus

$$\int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b g(x)\,dx$$

Consecinţă. Fie f şi g două funcţii reale definite pe $[a, b)$ (b finit sau infinit) şi integrabile pe orice interval compact $[a, u] \subset [a, b)$. Presupunem că:

1) $0 \leqslant f(x) \leqslant g(x)$ pentru orice $x \in [a, b)$

2) integrala $\int_a^b f(x)\,dx$ este divergentă.

Atunci şi integrala $\int_a^b g(x)\,dx$ este divergentă.

Demonstraţia este imediată dacă ţinem seama de primul criteriu de comparaţie.

Teorema 2.2. (Al doilea criteriu de comparaţie). Fie f şi g două funcţii reale definite pe $[a, b)$ (b finit sau infinit) şi integrabile pe orice interval compact $[a, u] \subset [a, b)$. Presupunem că:

$$1)\ f(x) > 0 \text{ şi } g(x) > 0 \text{ pentru orice } x \in [a, b)$$

$$2)\ \lim_{x \to b-0} \frac{f(x)}{g(x)} = A > 0;\ A \neq \infty \tag{5}$$

Atunci integralele $\int_a^b f(x)\,dx$, $\int_a^b g(x)\,dx$ sînt în acelaşi timp convergente sau în acelaşi timp divergente.

Demonstraţie: din (5) rezultă că pentru orice $\varepsilon > 0$ ($\varepsilon < A$) există $b_0(\varepsilon)$, $a < b_0(\varepsilon) < b$, astfel încît oricare ar fi x cu

$$b_0(\varepsilon) < x < b \text{ să avem}$$

$$A - \varepsilon < \frac{f(x)}{g(x)} < A + \varepsilon$$

Deoarece $g(x) > 0$, avem:

$$(A - \varepsilon)\,g(x) < f(x) < (A + \varepsilon)\,g(x);\ \text{cu } b_0(\varepsilon) < x < b \tag{6}$$

Pe baza teoremei 1.1. din convergenţa integralei $\int_a^b g(x)\,dx$ rezultă convergenţa integralei $\int_{b_0(\varepsilon)}^b g(x)\,dx$ care la rîndul său implică convergenţa integralei $\int_{b_0(\varepsilon)}^b (A + \varepsilon)\,g(x)\,dx$. Pe baza primului criteriu de comparaţie, ţinînd cont de (6), deducem că și integrala $\int_{x_0+1}^{+\infty} f(x)\,dx$ este convergentă, care la rîndul său implică (pe baza teoremei 1.1.) convergența integralei $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$. Dacă observăm că din (5) avem $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{f(x)}=\frac{1}{A}>0$, atunci procedînd în mod asemănător ca mai sus, convergența integralei $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ implică convergența integralei $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$, deci cele două integrale converg în același timp.

În mod asemănător se arată că cele două integrale diverg în același timp.

Exemplu. Integrala $\int_e^{+\infty}\frac{dx}{x^2(\ln x)^2}$ are aceeași natură cu integrala $\int_e^{+\infty}\frac{dx}{(\ln x)^2}$ deoarece în acest caz $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=1$.

Un rol important în folosirea criteriilor de comparație îl joacă următoarele două integrale:

$$\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha}\ \begin{cases}\text{convergentă dacă } \alpha<1\\ \text{divergentă dacă } \alpha\geq 1\end{cases}$$

$$\int_a^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha}\ \begin{cases}\text{convergentă dacă } \alpha>1\\ \text{divergentă dacă } \alpha\leq 1,\ a>0\end{cases}$$

În adevăr, pentru $\alpha\neq 1$, avem

$$\int_a^b\frac{dx}{(b-x)^\alpha}=\lim_{u\to b}\int_a^u\frac{dx}{(b-x)^\alpha}=-\lim_{u\to b}\left.\frac{(b-x)^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right|_a^u=$$

$$=-\frac{1}{1-\alpha}\lim_{u\to b}\left[(b-u)^{1-\alpha}-(b-a)^{1-\alpha}\right]=\begin{cases}\frac{(b-a)^{1-\alpha}}{1-\alpha} & \text{dacă } \alpha<1\\ \infty & \text{dacă } \alpha>1\end{cases}$$

Pentru $\alpha=1$, avem

$$\int_a^b\frac{dx}{b-x}=\lim_{u\to b}\int_a^u\frac{dx}{b-x}=-\lim_{u\to b}\ln(b-x)\Big|_a^u=\infty.$$

Pentru cea de a doua integrală avem în cazul $\alpha\neq 1$

$$\int_a^{+\infty}\frac{dx}{x^\alpha}=\lim_{u\to\infty}\int_a^u\frac{dx}{x^\alpha}=\frac{1}{1-\alpha}\lim_{u\to\infty}x^{1-\alpha}\Big|_a^u=$$

$$=\frac{1}{1-\alpha}\lim_{u\to\infty}\left(u^{1-\alpha}-a^{1-\alpha}\right)=\begin{cases}\frac{a^{1-\alpha}}{\alpha-1} & \text{dacă } \alpha>1\\ \infty & \text{dacă } \alpha<1.\end{cases}$$

Pentru $\alpha = 1$, avem

$$\int_a^{\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{u\to\infty} \int_a^{u} \frac{dx}{x} = \lim_{u\to\infty} (\ln u - \ln a) = \infty.$$

Folosind aceste integrale avem următoarele două teoreme.

Teorema 3.2. Fie f o funcţie reală pozitivă pe $[a, \infty)$, $a > 0$ şi integrabilă pe orice compact $[a, u] \subset [a, \infty)$. Presupunem că

$$\lim_{x\to\infty} x^{\alpha} f(x) = A \qquad (7)$$

Atunci

1) dacă $\alpha > 1$ şi $0 \leq A < \infty$, integrala $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ converge

2) dacă $\alpha \leq 1$ şi $0 < A \leq \infty$, integrala $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ diverge.

Demonstraţie. Din (7) rezultă că pentru orice $\varepsilon > 0$ există $h_0(\varepsilon)$ astfel încît oricare ar fi $x > h_0(\varepsilon)$ avem

$$A - \varepsilon < x^{\alpha} f(x) < A + \varepsilon$$

din ultima inegalitate, deoarece $x^{\alpha} > 0$, avem

$$\frac{A - \varepsilon}{x^{\alpha}} < f(x) < \frac{A + \varepsilon}{x^{\alpha}}, \quad x > h_0(\varepsilon)$$

Pentru $\alpha > 1$ şi $0 \leq A < \infty$, ţinînd cont de inegalitatea din dreapta, integrala $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ converge.

Pentru $\alpha \leq 1$ şi $0 < A$, ţinînd cont de inegalitatea din stînga (cu $\varepsilon < A$), integrala $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ diverge.

Exemplu 1:

$$\int_1^{\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{1 + x^3}}\,dx$$

Luăm $\alpha = \frac{3}{2} - \varepsilon$, $\varepsilon > 0$, atunci

$$\lim_{x\to\infty} f(x)\, x^{\frac{3}{2} - \varepsilon} = \lim_{x\to\infty} x^{\frac{3}{2} - \varepsilon} \cdot \frac{\ln x}{\sqrt{x^3 + 1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^{\varepsilon}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\varepsilon x^{\varepsilon}} = 0$$

Putem alege $\varepsilon > 0$ aşa fel încît $\frac{3}{2} - \varepsilon > 1$ şi deci integrala este convergentă.

Exemplu 2:

$$\int_{1}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$$

Luăm $\alpha = 1$, atunci $\lim\limits_{x\to\infty} xf(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = 1$ şi deci integrala este divergentă.

Teorema 4.2 Fie f o funcţie reală pozitivă pe $[a, b)$ şi integrabilă pe orice compact $[a, u] \subset [a, b)$. Presupunem că

$$\lim_{x\to b-0} (b-x)^{\alpha} f(x) = A \tag{8}$$

Atunci

1) dacă $\alpha < 1$ şi $0 \leqslant A < \infty$, integrala $\int_a^b f(x)\,dx$ converge

2) dacă $\alpha \geqslant 1$ şi $0 < A \leqslant \infty$, integrala $\int_a^b f(x)\,dx$ diverge

Demonstraţie: Din (8) rezultă că pentru orice $\varepsilon > 0$ există $b_0(\varepsilon)$, $a < b_0(\varepsilon) < b'$ astfel incît oricare ar fi x cu $b_0(\varepsilon) < x < b$ să avem

$$A - \varepsilon < (b-x)^{\alpha} f(x) < A + \varepsilon$$

din ultima inegalitate, deoarece $(b-x)^{\alpha} > 0$, avem

$$\frac{A-\varepsilon}{(b-x)^{\alpha}} < f(x) < \frac{A+\varepsilon}{(b-x)^{\alpha}}\ ;\ b_0(\varepsilon) < x < b$$

Pentru $\alpha < 1$ şi $0 \leqslant A < \infty$, ţinînd cont de inegalitatea din dreapta, integrala $\int_a^b f(x)\,dx$ converge.

Pentru $\alpha \geqslant 1$ şi $0 < A \leqslant \infty$, ţinînd cont de inegalitatea din stînga (cu $\varepsilon < A$), integrala $\int_a^b f(x)\,dx$ diverge.

Exemplu 1:

$$\int_0^1 \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

Luăm $\alpha = \frac{1}{2}$, atunci $\lim\limits_{x\to 1-0} (1-x)^{\frac{1}{2}} f(x) = \lim\limits_{x\to 1-0} (1-x)^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ şi deci integrala este convergentă.

Exemplu 2:

$$\int_0^1 \frac{dx}{1-x^2}\,.$$

Luăm $\alpha = 1$, atunci $\lim\limits_{x \to 1-0} (1 - x) f(x) = \lim\limits_{x \to 1-0} (1 - x) \dfrac{1}{1 - x^2} = \dfrac{1}{2}$ şi deci integrala este divergentă.

§ 5. INTEGRALE IMPROPRII DIN FUNCŢII DE SEMN VARIABIL

Toate criteriile de convergenţă date pînă acum, cu excepţia criteriului lui Cauchy, se referă la funcţiile pozitive. Vom da în continuare un criteriu de convergenţă pentru integrale, pe interval nemărginit, din funcţii de semn variabil.

Teorema 5.3 (Criteriul lui Dirichlet). Fie f şi g două funcţii reale definite pe $[a, \infty)$. Dacă

1) funcţia f este continuă şi are o primitivă F mărginită pe $[a, \infty)$;

2) funcţia g are derivata continuă pe $[a, \infty)$;

3) funcţia g este monoton descrescătoare pe $[a, \infty)$;

4) $\lim\limits_{x \to \infty} g(x) = 0$,

Atunci integrala $\int_a^\infty f(x)\,g(x)\,dx$ este convergentă.

Demonstraţie. Din primele două ipoteze rezultă că funcţia $f \cdot g$ este continuă $[a, \infty)$ şi deci integrabilă pe orice interval compact $[a, u] \subset [a, \infty)$. Integrînd prin părţi produsul $f \cdot g$ pe intervalul $[a, u]$ obţinem

$$\int_a^u f(x)\,g(x)\,dx = \int_a^u g(x)\,dF(x) = g(x)\,F(x)\Big|_a^u -$$

$$-\int_a^u F(x)\,g'(x)\,dx = g(u)\,F(u) - g(a)\,F(a) - \int_a^u F(x)\,g'(x)\,dx$$

Din ultimele două ipoteze deducem că $g \geq 0$ pe $[a, \infty)$. Funcţia F fiind presupusă mărginită pe $[a, \infty)$, avem

$$|g(u)\,F(u)| \leq Mg(u); \text{ unde } M = \sup |F(x)|$$

Pe baza ipotezei (4) obţinem

$$\lim_{u \to \infty} |g(u)\,F(u)| \leq \lim_{u \to \infty} Mg(u) = 0$$

Funcţia g fiind presupusă monoton descrescătoare rezultă că $g' \leq 0$ pe $[a, \infty)$ de unde

$$\int_a^u |F(x)\,g'(x)|\,dx \leq M \int_a^u |g'(x)|\,dx = -M \int_a^u g'(x)\,dx = M(g(a) - g(u)) \leq Mg(a).$$

În acest mod integrala $\int_a^{+\infty} |F(x)\, g'(x)|\, dx$ este mărginită, de unde rezultă că integrala $\int_a^{+\infty} F(x)\, g'(x)\, dx$ este absolut convergentă deci și convergentă. Prin urmare

$$\lim_{u\to\infty}\int_a^{u} f(x)\, g(x)\, dx \text{ există și este finită.}$$

Exemplul 1. Integrala $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx$ este convergentă. În adevăr, descompunem în sumă de două integrale:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx = I_1 + I_2 \text{ unde } I_1 = \int_0^{1} \frac{\sin x}{x}\, dx;$$

$$I_2 = \int_1^{\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx.$$

Pentru a stabili convergența integralei I_1 este suficient să observăm că $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ și deci putem prelungi funcția de sub semnul integrală la o funcție continuă pe $[0, 1]$. Fie

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \in (0, 1] \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

Funcția f este continuă pe $[0, 1]$ și deci integrabilă pe acest interval, de unde I_1 este convergentă. Pentru a stabili convergența integralei I_2 folosim criteriul lui Dirichlet unde $f(x) = \sin x$ și $g(x) = \frac{1}{x}$. Funcțiile f și g satisfac condițiile cerute. În adevăr $|F(x)| = |-\cos x| \leq 1$ iar $g(x) = \frac{1}{x}$ este descrescătoare pe $[1, \infty)$ și $\lim_{x\to\infty} g(x) = 0$.

Exemplul 2. $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^{\alpha}}\, dx$, cu $\alpha > 0$, este convergentă. Dacă alegem $f(x) = \sin x$; $g(x) = \frac{1}{x^{\alpha}}$; $\alpha > 0$, condițiile criteriului lui Dirichlet sînt satisfăcute.

Exemplul 3. Integralele lui Fresnel $\int_0^{+\infty} \sin x^2\, dx$, $\int_0^{+\infty} \cos x^2\, dx$ sînt convergente. Dacă considerăm prima integrală avem $\int_0^{+\infty} \sin x^2\, dx = \int_0^{1} \sin x^2 +$

$=\int_0^\infty \sin x^2\,dx$. Făcînd schimbarea de variabilă $t = x^2$ obţinem $\int_0^\infty \sin x^2\,dx =$ $= \lim_{u\to\infty}\int_0^u \sin x^2\,dx = \lim_{u\to\infty}\int_0^{u^2} \frac{\sin t}{2\sqrt{t}}\,dt = \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\,dt$.

Integrala $\int_0^\infty \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\,dt$ este convergentă deci şi integrala $\int_0^\infty \sin x^2\,dx$ este convergentă. În mod asemănător se arată convergenţa integralei $\int_0^\infty \cos x^2\,dx$.

Observaţie. Studiul convergenţei integralelor pe interval mărginit din funcţii nemărginite şi de semn variabil se reduce la studiul convergenţei integralelor pe interval nemărginit din funcţii de semn variabil. În adevăr, să considerăm integrala $\int_a^b f(x)\,dx$; $-\infty < a < b < \infty$; cu f nemărginită şi de semn variabil pe orice interval $[u, b) \subset [a, b)$. Făcînd schimbarea de variabilă

$$x = \frac{bt + a}{t + 1};\quad dx = \frac{b - a}{(t + 1)^2}\,dt;\ \text{obţinem}$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\substack{u\to b\\ u<b}}\int_a^u f(x)\,dx = \lim_{\substack{u\to b\\ u<b}}(b - a)\int_0^{\frac{u-a}{b-u}} f\left(\frac{bt + a}{t + 1}\right)\frac{dt}{(t + 1)^2} =$$

$$= (b - a)\int_0^\infty f\left(\frac{bt + a}{t + 1}\right)\frac{dt}{(t + 1)^2}.$$

§ 4. INTEGRALE IMPROPRII ŞI SERII NUMERICE

Fie f o funcţie reală definită pe $[a, b)$ (b finit sau infinit) şi integrabilă pe orice interval compact $[a, u] \subset [a, b)$.

Fie $a = b_0 < b_1 < b_2 < \dots < b_k < \dots < b$, un şir crescător cu $\lim_{k\to\infty} b_k = b$. Cu ajutorul şirului considerat putem defini seria numerică

$$\int_{b_0}^{b_1} f(x)\,dx + \int_{b_1}^{b_2} f(x)\,dx + \dots = \sum_{k=0}^{\infty}\int_{b_k}^{b_{k+1}} f(x)\,dx \qquad (1)$$

al cărui termen general este $u_k = \int_{b_k}^{b_{k+1}} f(x)\,dx$.

Teorema 1.4. Dacă integrala $\int_a^b f(x)\,dx$ (2) este convergentă atunci şi seria (1) este convergentă şi are loc egalitatea

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{k=0}^{\infty}\int_{b_k}^{b_{k+1}} f(x)\,dx \qquad (3)$$

Dacă f este pozitivă pe $[a, b)$ atunci este valabilă şi afirmaţia reciprocă adică convergenţa seriei (1) implică convergenţa integralei (2).

Demonstrație. Pentru seria (1) avem:

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1}\int_{b_k}^{b_{k+1}} f(x)\,dx$$

și deci

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\int_{b_k}^{b_{k+1}} f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\int_{b_0}^{b_n} f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$$

adică convergența integralei (2) implică convergența seriei (1). În cazul în care f este pozitivă pe $[a, b)$ și seria (1) este convergentă notăm cu S suma sa. Pentru orice u cu $a < u < b$, putem găsi un $n = n(u)$ astfel încît $u < b_n$. Folosind faptul că $f(x) \geq 0$ avem:

$$0 \leq \int_a^u f(x)\,dx \leq \int_a^{b_n} f(x)\,dx = \sum_{k=0}^{n-1}\int_{b_k}^{b_{k+1}} f(x)\,dx \leq S,$$

adică funcția $F(u) = \int_a^u f(x)\,dx$, este mărginită pe $[a, b)$. Pe de altă parte funcția $F(u)$ este monoton crescătoare și deci $\lim_{u\to b} F(u) = \int_a^b f(x)\,dx$, există și este finită.

Observații

1) Dacă funcția f nu păstrează semn constant pe $[a, b)$, atunci convergența seriei (1) nu implică întotdeauna convergența integralei (2). *Exemplu:*

$$\text{Seria } \sum_{k=0}^{\infty}\int_{2k\pi}^{2(k+1)\pi} \sin x\,dx = -\sum_{k=0}^{\infty} \cos x \Big|_{2k\pi}^{2(k+1)\pi} = -\sum_{k=0}^{\infty} 0 = 0$$

este convergentă dar integrala $\int_0^{\infty} \sin x\,dx$ este divergentă, deoarece $\int_0^{\infty} \sin x\,dx = \lim_{u\to\infty}\int_0^u \sin x\,dx = \lim_{u\to\infty}(1 - \cos u)$, nu există.

2) Dacă seria (1) este convergentă pentru orice șir (b_n) cu $b_n < b$, atunci rezultă și convergența integralei (2) chiar dacă f nu este pozitivă pe $[a, b)$.

3) Exemplu de integrală semiconvergentă.

Vom arăta că integrala $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$ nu este absolut convergentă. Pentru aceasta vom reduce studiul integralei $\int_0^{\infty} \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx$ la studiul unei serii numerice. Avem egalitatea

$$\int_0^{\infty} \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx = \sum_{k=0}^{\infty}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx.$$

Dacă facem schimbarea de variabilă $x = k\pi + t$ obținem $\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin x|}{x}\,dx = \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{k\pi + t}\,dt$. Avem deci

$$\int_0^{n\pi} \frac{|\sin x|}{x}\,dx = \sum_{k=0}^{n-1}\int_0^{\pi} \frac{\sin t}{k\pi + t}\,dt \geq \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\pi(k+1)}\int_0^{\pi} \sin t\,dt =$$

$$= \frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k+1}.$$

Cum seria $\frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+1}$ este divergentă, folosind partea a doua a teoremei 1.4 deducem că integrala $\int_0^{\infty} \frac{|\sin x|}{x}\,dx$ este divergentă.

Teorema 2.1. (Criteriul integral al lui Cauchy). Fie f o funcție reală, pozitivă și descrescătoare pe $[1, \infty)$, atunci seria

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) \tag{3}$$

este convergentă dacă și numai dacă integrala

$$\int_1^{\infty} f(x)\,dx \tag{4}$$

este convergentă.

Demonstrație. Funcția f fiind descrescătoare pe $[1, \infty)$ este integrabilă pe orice interval compact $[1, u] \subset [1, \infty)$. Dacă $k \leq x \leq k+1$, deoarece f este descrescătoare, avem

$$f(k) \geq f(x) \geq f(k+1),\ k = 1, 2, 3, \ldots$$

de unde deducem

$$f(k) \geq \int_k^{k+1} f(x)\,dx \geq f(k+1),\ k = 1, 2, 3, \ldots$$

Sumînd după k de la 1 la n obținem

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) \geq \int_1^{n+1} f(x)\,dx \geq \sum_{k=1}^{n} f(k+1) \tag{5}$$

Dacă notăm $S_n = \sum_{k=1}^{n} f(k)$, inegalitatea (5) devine

$$S_n \geq \int_1^{n+1} f(x)\,dx \geq S_{n+1} - f(1),\ n = 1, 2, \ldots \tag{6}$$

Presupunem integrala (4) convergentă şi să arătăm că seria (3) este convergentă. Funcţia f fiind pozitivă are loc inegalitatea

$$\int_1^{n+1} f(x)\,dx \le \int_1^{\infty} f(x)\,dx; \quad n = 1, 2, \dots \qquad (7)$$

Folosind inegalităţile (6) şi (7) obţinem:

$$S_{n+1} \le f(1) + \int_1^{\infty} f(x)\,dx$$

adică şirul sumelor parţiale (S_n) al seriei (3) este mărginit. Pe de altă parte şirul (S_n) este crescător (deoarece f este pozitivă) şi deci convergent. Prin urmare convergenţa integralei (4) implică convergenţa seriei (3).

Presupunem seria (3) convergentă şi fie S suma sa. Are loc inegalitatea $S_n \le S$, pentru $n = 1, 2, \dots$, de unde deducem folosind inegalitatea (6) că

$$\int_1^{n+1} f(x)\,dx \le S.$$

Pentru orice $u \in [1, \infty)$ putem găsi un $n = n(u)$ astfel încît $u \le n(u)$. Funcţia f fiind pozitivă deducem că

$$F(u) = \int_1^{u} f(x)\,dx \le \int_1^{n} f(x)\,dx \le S$$

adică funcţia $F(u)$ este mărginită.

Funcţia $F(u)$ fiind crescătoare (deoarece f este pozitivă) şi mărginită pe $[1, \infty)$ rezultă că

$$\lim_{u \to \infty} F(u) = \int_1^{\infty} f(x)\,dx$$

există şi este finită. Prin urmare convergenţa seriei (3) implică convergenţa integralei (4).

Exemplu 1. 1) Seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ are aceeaşi natură cu integrala

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}} \begin{cases} \text{convergentă dacă } \alpha > 1 \\ \text{divergentă dacă } \alpha \le 1. \end{cases}$$

Observaţie. Dacă există un număr natural n_0 astfel încît pe intervalul $[n_0, \infty)$ funcţia f este pozitivă şi descrescătoare, atunci seria $\sum_{n=n_0}^{\infty} f(n)$ este convergentă dacă şi numai dacă integrala $\int_{n_0}^{\infty} f(x)\,dx$ este convergentă.

Exemplu 2. Seria $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^{\alpha}}$ are aceeaşi natură cu integrala

$$\int_2^{\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^{\alpha}} \begin{cases} \text{convergentă dacă } \alpha > 1 \\ \text{divergentă dacă } \alpha \le 1. \end{cases}$$

§ 5. CONVERGENȚA INTEGRALELOR IMPROPRII ÎN SENSUL VALORII PRINCIPALE

Am studiat până acum noțiunea de integrală pe intervale deschise sau nemărginite la una sau ambele extremități ale intervalului. Se întîlnesc cazuri cînd $f : [a, b] - \{c\}$, unde $c \in (a, b)$ și f nemărginită pe $[a, c)$ și $(c, b]$. Presupunem f integrabilă pe orice compact $[a, c - \varepsilon'] \subset [a, c)$ și $[c + \varepsilon'', b] \subset (c, b]$.

Definiția 1.5. În condițiile de mai sus punem

$$F(\varepsilon', \varepsilon'') = \int_a^{c-\varepsilon'} f(x)\,dx + \int_{c+\varepsilon''}^{b} f(x)\,dx$$

Dacă $\lim\limits_{\substack{\varepsilon' \to 0 \\ \varepsilon'' \to 0}} F(\varepsilon', \varepsilon'')$ există și este finită, atunci spunem că f este integrabilă pe $[a, b]$ și punem prin definiție

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\substack{\varepsilon' \to 0 \\ \varepsilon'' \to 0}} F(\varepsilon', \varepsilon'')$$

Despre integrala din stînga spunem că este convergentă. O integrală care nu este convergentă spunem că este divergentă. Vom introduce acum o noțiune de integrabilitate mai generală decît cea dată prin definiția 1.5.

Fie $f : [a, b] - \{c\} \to \mathbf{R}$, $c \in (a, b)$, f nemărginită pe intervalele $[a, c)$ și $(c, b]$. Presupunem f integrabilă pe orice interval compact $[a, c - \varepsilon] \subset [a, c)$ sau $[c + \varepsilon, b] \subset (c, b]$.

Definiția 2.5. În condițiile de mai sus punem

$$F(\varepsilon) = \int_a^{c-\varepsilon} f(x)\,dx + \int_{c+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx$$

Dacă $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} F(\varepsilon)$ există și este finită, atunci spunem că f este integrabilă pe $[a, b]$ în sensul valorii principale. Valoarea acestei limite se notează cu $V.p. \int_a^b f(x)\,dx$ și se numește integrala în sensul valorii principale a funcției f pe $[a, b]$.

Se vede imediat că dacă integrala $\int_a^b f(x)\,dx$ este convergentă atunci funcția f este integrabilă pe $[a, b]$ în sensul valorii principale. Reciproc nu este adevărat așa cum se vede din următorul exemplu. Fie $c \in (a, b)$ și considerăm integrala

$$\int_a^b \frac{dx}{x - c} = \lim_{\varepsilon' \to 0} \int_a^{c-\varepsilon'} \frac{dx}{x - c} + \lim_{\varepsilon'' \to 0} \int_{c+\varepsilon''}^{b} \frac{dx}{x - c} =$$

$$= \lim_{\varepsilon' \to 0} \ln|x - c| \Big|_a^{c-\varepsilon'} + \lim_{\varepsilon'' \to 0} \ln|x - c| \Big|_{c+\varepsilon''}^{b} = \ln\frac{b - c}{c - a} + \lim_{\substack{\varepsilon' \to 0 \\ \varepsilon'' \to 0}} \ln\frac{\varepsilon'}{\varepsilon''}$$

Ultima limită nu există când $a' \to 0$ și $a'' \to 0$ independent una de alta. Dar

$$\text{V.p.} \int_a^b \frac{dx}{x-c} = \lim_{\varepsilon \to 0} \left[\int_a^{c-\varepsilon} \frac{dx}{x-c} + \int_{c+\varepsilon}^b \frac{dx}{x-c} \right] =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \left[\ln \frac{b-c}{c-a} + \ln \frac{\varepsilon}{\varepsilon} \right] = \ln \frac{b-c}{c-a}.$$

Vom considera, în încheiere, cazul unei funcții reale definită pe $(-\infty, \infty)$.

Definiția 4.4. Fie f o funcție reală definită pe $\mathbf{R}$ și f integrabilă pe orice interval compact din $\mathbf{R}$. Să punem

$$F(a', a'') = \int_{a'}^{a} f(x)\,dx + \int_{a}^{a''} f(x)\,dx;\ a \in \mathbf{R}$$

Dacă $\lim\limits_{\substack{a' \to -\infty \\ a'' \to \infty}} F(a', a'')$ există și este finită, atunci spunem că f este integrabilă pe axa reală și punem prin definiție

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{\substack{a' \to -\infty \\ a'' \to \infty}} F(a', a'').$$

Despre integrala din stânga spunem că este convergentă. O integrală care nu este convergentă se numește divergentă.

Definiția 4.5. Fie f o funcție reală definită pe $\mathbf{R}$ și integrabilă pe orice interval compact $[-a, a] \subset \mathbf{R}$, $a > 0$. Să punem

$$F(a) = \int_{-a}^{a} f(x)\,dx$$

Dacă $\lim\limits_{a \to \infty} F(a)$ există și este finită, atunci spunem că f este integrabilă pe $\mathbf{R}$ în sensul valorii principale. Valoarea acestei limite se notează cu $\text{V.p.} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ și se numește integrala în sensul valorii principale a funcției f pe $\mathbf{R}$.

Se vede imediat că dacă integrala $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ converge, atunci funcția f este integrabilă pe $\mathbf{R}$ în sensul valorii principale. Reciproc nu este adevărat așa cum se vede din următorul exemplu.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2x}{x^2+1}\,dx = \lim_{\substack{a' \to -\infty \\ a'' \to \infty}} \int_{a'}^{a''} \frac{2x\,dx}{x^2+1} = \lim_{\substack{a' \to -\infty \\ a'' \to \infty}} \ln \frac{(a'')^2+1}{(a')^2+1}.$$

Această limită nu există când $a' \to -\infty$ și $a'' \to \infty$. Dar

$$\text{V.p.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2x}{x^2+1}\,dx = \lim_{a \to \infty} \int_{-a}^{a} \frac{2x\,dx}{x^2+1} = \lim_{a \to \infty} \ln \frac{a^2+1}{a^2+1} = 0.$$

§ 6. INTEGRALE IMPROPRII CU PARAMETRU

Fie funcţia reală f definită pe $I \times [c, d]$ unde $I = [a, b)$ este un interval necompact. Presupunem că pentru fiecare $y \in [c, d]$ integrala

$$F(y) = \int_a^b f(x, y)\,dx \tag{1}$$

este convergentă. Vom da în continuare condiţii de continuitate şi derivabilitate pentru funcţia F. Pentru a da aceste condiţii introducem noţiunea de integrală convergentă uniform.

Definiţia 1.6. Spunem că integrala (1) converge uniform în raport cu $y \in [c, d]$, dacă pentru orice $\varepsilon > 0$, există un număr $b_0(\varepsilon)$, $a < b_0(\varepsilon) < b$, astfel încît oricare ar fi u cu $b_0(\varepsilon) < u < b$ să avem

$$\left|\int_a^u f(x, y)\,dx - F(y)\right| < \varepsilon \tag{2}$$

pentru orice $y \in [c, d]$.

Exemple de integrale convergente care nu converg uniform.

Exemplul 1. Integrala $F(y) = \int_0^\infty y e^{-xy}\,dx$ converge pentru fiecare $y \in [0, 1]$ dar nu converge uniform în raport cu $y \in [0, 1]$. Pentru $y = 0$ avem $F(0) = 0$. Pentru $y \in (0, 1]$ facem schimbarea de variabilă $xy = t$ şi obţinem

$$F(y) = \lim_{u \to \infty} \int_0^u y e^{-xy}\,dx = \lim_{u \to \infty} \int_0^{uy} e^{-t}\,dt = \lim_{u \to \infty} (1 - e^{-uy}) = 1.$$

Inegalitatea (2) devine în acest caz

$$\left|\int_0^u y e^{-xy}\,dx - 1\right| < \varepsilon \Leftrightarrow e^{-uy} < \varepsilon \Leftrightarrow u > \frac{\ln \frac{1}{\varepsilon}}{y}, \quad 0 < \varepsilon < 1.$$

Prin urmare inegalitatea (2) are loc dacă $u > b_0(\varepsilon, y) = \frac{-\ln \varepsilon}{y}$ şi deci integrala considerată nu converge uniform în raport cu $y \in [0, 1]$.

Exemplul 2. Procedînd la fel ca în exemplul 1 se arată că integrala $F(y) = -\int_0^1 y x^{y-1}\,dx$, converge pentru fiecare $y \in (0, 1]$ dar nu converge uniform în raport cu $y \in (0, 1]$.

Între convergenţa uniformă a unei integrale improprii cu parametru şi convergenţa uniformă a unei serii de funcţii există o strînsă legătură dată de teorema care urmează.

Fie $a = b_0 < b_1 < \dots < b_k < \dots < b$, un şir crescător cu $\lim\limits_{k\to\infty} b_k = b$. Cu ajutorul şirului considerat putem defini seria de funcţii

$$\int_{b_0}^{b_1} f(x, y)\,dx + \int_{b_1}^{b_2} f(x, y)\,dx + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} u_k(y) \tag{3}$$

unde

$$u_k(y) = \int_{b_k}^{b_{k+1}} f(x, y)\,dx$$

Teorema 1.6. Dacă integrala (1) este convergentă uniform în raport cu $y \in [c, d]$, atunci şi seria de funcţii (3) este convergentă uniform pe $[c, d]$ şi are loc egalitatea

$$\int_{a}^{b} f(x, y)\,dx = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{b_k}^{b_{k+1}} f(x, y)\,dx$$

Demonstraţie. Integrala (1) fiind uniform convergentă în raport cu $y \in [c, d]$, atunci pentru orice $\varepsilon > 0$ există $b_0(\varepsilon)$, $a < b_0(\varepsilon) < b$, astfel încât oricare ar fi u cu $b_0(\varepsilon) < u < b$ să aibă loc inegalitatea (2), pentru orice $y \in [c, d]$. Şirul (b_n) fiind crescător şi convergent la b, rezultă că există un număr $N(\varepsilon)$ astfel încât pentru orice $n > N(\varepsilon)$ să avem $b_0(\varepsilon) < b_n < b$. Din convergenţa uniformă a integralei (1) rezultă că pentru $n > N(\varepsilon)$ avem

$$\left| \int_{a}^{b_n} f(x, y)\,dx - F(y) \right| < \varepsilon \tag{4}$$

pentru orice $y \in [c, d]$. Termenul general al şirului sumelor parţiale pentru seria (3) este

$$\sum_{k=0}^{n-1} u_k(y) = \int_{a}^{b_n} f(x, y)\,dx$$

Inegalitatea (4) fiind adevărată pentru $n > N(\varepsilon)$ şi orice $y \in [c, d]$ rezultă convergenţa uniformă a seriei (3) la $F(y)$ pe intervalul $[c, d]$.

Observaţie. Dacă seria (3) este convergentă uniform pe intervalul $[c, d]$ pentru orice şir (b_n) cu $b_n \to b$, atunci şi integrala (1) este convergentă uniform în raport cu $y \in [c, d]$.

Teorema 2.6. Fie funcţia reală f definită şi continuă pe $I \times [c, d]$, unde $I = [a, b)$ este interval necompact. Dacă integrala

$$F(y) = \int_{a}^{b} f(x, y)\,dx$$

este convergentă uniform în raport cu $y \in [c, d]$, atunci funcţia $F(y)$ este continuă pe intervalul $[c, d]$.

Demonstrație. Fie $a = b_0 < b_1 < \dots < b_k < \dots < b$ un șir crescător cu $\lim\limits_{k\to\infty} b_k = b$. Avem

$$F(y) = \int_a^b f(x, y)\,dx = \sum_{k=0}^{\infty} u_k(y) \text{ unde } u_k(y) = \int_{b_k}^{b_{k+1}} f(x, y)\,dx$$

Din continuitatea lui f pe $I \times [c, d]$ rezultă continuitatea lui u_k pe $[c, d]$ pentru $k = 0, 1, 2, \dots$

Convergența uniformă a integralei din enunț, pe baza teoremei 1.6. implică convergența uniformă a seriei de funcții $\sum\limits_{k=0}^{\infty} u_k(y)$, pe intervalul $[c, d]$. Folosind un rezultat de la seriile de funcții deducem continuitatea lui F pe $[c, d]$.

Teorema 3.6. Fie funcția reală f definită și continuă pe $I \times [c, d]$ unde $I = [a, b)$ este un interval necompact. Dacă

1) f'_y există și este continuă pe $I \times [c, d]$

2) integrala $F(y) = \int_a^b f(x, y)\,dx$ este convergentă

3) integrala $\int_a^b f'_y(x, y)\,dx$ este convergentă uniform în raport cu $y \in [c, d]$.

Atunci funcția F este derivabilă pe $[c, d]$ și are loc egalitatea

$$F'(y) = \int_a^b f'_y(x, y)\,dx \quad .$$

Demonstrație. Fie $a = b_0 < b_1 < \dots < b_k < \dots < b$ un șir crescător cu $\lim\limits_{k\to\infty} b_k = b$. Avem

$$F(y) = \int_a^b f(x, y)\,dx = \sum_{k=0}^{\infty} u_k(y) \text{ unde } u_k(y) = \int_{b_k}^{b_{k+1}} f(x, y)\,dx$$

Din ipoteza a doua deducem că seria de funcții $\sum\limits_{k=0}^{\infty} u_k(y)$ este convergentă pentru $y \in [c, d]$ și are suma $F(y)$.

Teorema de derivare a integralelor funcției de un parametru ne dă egalitatea

$$u_k'(y) = \int_{b_k}^{b_{k+1}} f'_y(x, y)\,dx;\ k = 0, 1, 2, \dots$$

și asigură continuitatea lui $u_k'(y)$ pe intervalul $[c, d]$. Din convergența uniformă a integralei $\int_a^b f'_y(x, y)\,dx$, în raport cu $y \in [c, d]$, deducem convergența uniformă a seriei de funcții $\sum\limits_{k=0}^{\infty} u_k'(y)$ pe intervalul $[c, d]$ și are loc egalitatea

$$\sum_{k=0}^{\infty} u_k'(y) = \int_a^b f'_y(x, y)\,dx$$

Folosind un rezultat stabilit la seriile de funcţii deducem că funcţia F este derivabilă pe intervalul $[c, d]$ şi are derivata continuă dată de egalitatea

$$F'(y) = \int_a^{\infty} f'_y(x, y)\,dx$$

Vom da în continuare un criteriu de convergenţă uniformă a integralelor improprii cu parametru.

Teorema 4.6. (Criteriul lui Weierstrass).
Fie o funcţie reală f definită pe $I \times [c, d]$ unde $I = [a, b)$ este un interval necompact. Presupunem că

1) $F(u, y) = \int_a^u f(x, y)\,dx$ există pentru orice $u \in [a, b)$ şi orice $y \in [c, d]$.

2) există o funcţie pozitivă g definită pe $[a, b)$ astfel încît

$$|f(x, y)| \leq g(x)$$

pentru orice $x \in [a, b)$ şi orice $y \in [c, d]$.

3) integrala $\int_a^b g(x)\,dx$ este convergentă.

Atunci $\int_a^b f(x, y)\,dx$ este convergentă uniform în raport cu $y \in [c, d]$.

Demonstraţie. Fie $a = b_0 < b_1 < \ldots < b_k < \ldots < b$ un şir crescător cu $\lim\limits_{k \to \infty} b_k = b$. Cu ajutorul şirului considerat definim seria de funcţii $\sum\limits_{k=0}^{\infty} u_k(y)$ unde $u_k(y) = \int_{b_k}^{b_{k+1}} f(x, y)\,dx$ şi seria numerică cu termeni pozitivi $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ unde $a_k = \int_{b_k}^{b_{k+1}} g(x)\,dx$.

Din prima proprietate a funcţiei g rezultă că pentru orice $y \in [c, d]$ are loc inegalitatea

$$|u_k(y)| \leq a_k \quad (k \geq 0) \quad y \in [c, d]$$

Din cea de a doua proprietate a funcţiei g deducem că seria $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ este convergentă. Folosind criteriul lui Weierstrass de convergenţă uniformă a seriilor de funcţii deducem convergenţa uniformă a seriei $\sum\limits_{k=0}^{\infty} u_k(y)$ pe intervalul $[c, d]$. Seria de funcţii $\sum\limits_{k=0}^{\infty} u_k(y)$ fiind convergentă uniform pentru orice şir (b_n), rezultă că integrala din enunţul teoremei este convergentă uniform în raport cu $y \in [c, d]$.

Exemplu. Considerăm integrala

$$I = \int_0^{\infty} \frac{\sin \alpha x}{x}\,dx \quad (\alpha > 0)$$

În cazul de față nu putem aplica rezultatul stabilit la teorema 3.6 deoarece derivînd în raport cu parametrul α, obținem integrala divergentă:

$$\int_0^{+\infty} \cos \alpha x \, dx$$

Vom considera integrala

$$I_1 = \int_0^{+\infty} e^{-\beta x} \frac{\sin \alpha x}{x} \, dx \quad (\beta > 0)$$

Derivînd în raport cu α obținem integrala

$$\int_0^{+\infty} e^{-\beta x} \cos \alpha x \, dx$$

care este uniform convergentă în raport α deoarece este majorată de integrala convergentă

$$\int_0^{+\infty} e^{-\beta x} \, dx \quad (\beta > 0)$$

Se obține, pentru $\alpha \geqslant 0$,

$$\frac{\partial I_1}{\partial \alpha} = \frac{\beta}{\alpha^2 + \beta^2}$$

Integrînd în raport cu α, avem

$$I_1 = \operatorname{arc\,tg} \frac{\alpha}{\beta}$$

(constanta de integrare este în acest caz egală cu zero).

Dar integrala I_1 este convergentă uniform în raport cu β, pentru $\beta \geqslant 0$. Teorema 2.6 ne asigură continuitatea lui I_1 și pentru $\beta = 0$, adică $I = \lim\limits_{\beta \to 0} I_1$.

Pentru $\alpha > 0$ avem

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x} \, dx = \lim_{\beta \to 0} \operatorname{arc\,tg} \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\pi}{2}$$

În cazul particular $\alpha = 1$ avem

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} \, dx = \frac{\pi}{2}$$

§ 7. INTEGRALELE LUI EULER

Integrala lui Euler de speța a doua sau funcția $\Gamma(p)$ este definită pentru $p > 0$ prin egalitatea

$$\Gamma(p) = \int_0^{+\infty} x^{p-1} e^{-x} \, dx \tag{1}$$

Pentru a arăta convergenţa integralei (1), în cazul $p > 0$, folosim descompunerea

$$\Gamma(p) = \int_{0}^{1} x^{p-1}e^{-x}\,dx + \int_{1}^{+\infty} x^{p-1}e^{-x}\,dx.$$

Integrala $\int_{0}^{1} x^{p-1}e^{-x}\,dx$ este convergentă (vezi teorema 4.2), pentru $1 - p < 1$, deci pentru $0 < p$. Pentru integrala $\int_{1}^{+\infty} x^{p-1}e^{-x}\,dx$ ţinem seama de inegalitatea

$$e^{x} > \frac{x^{n}}{n!} \text{ sau } e^{-x} < \frac{n!}{x^{n}}\text{; de unde}$$

$$x^{p-1}e^{-x} < \frac{n!}{x^{n+1-p}}.$$

Dacă luăm $n > p$ atunci, folosind primul criteriu de comparaţie avem $\int_{1}^{+\infty} x^{p-1}e^{-x}\,dx < n!\int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^{n+1-p}}$,
unde integrala din dreapta este convergentă deoarece $s = n + 1 - p > 1$.

Integrînd prin părţi în (1) obţinem:

$$\Gamma(p+1) = \int_{0}^{\infty} x^{p}e^{-x}\,dx = -x^{p}e^{-x}\Big|_{0}^{\infty} + p\int_{0}^{\infty} x^{p-1}e^{-x}\,dx\text{, adică}$$

$$\Gamma(p+1) = p\Gamma(p) \tag{2}$$

Relaţia (2) ne conduce la relaţia

$$\Gamma(p+n) = (p+n-1)(p+n-2)\ldots(p+1)p\cdot\Gamma(p) \tag{3}$$

Dacă $p = 1$, avem $\Gamma(1) = \int_{0}^{\infty} e^{-x}\,dx = 1$ şi folosind relaţia (3) obţinem

$$\Gamma(n+1) = n(n-1)\ldots 2\cdot 1 = n!$$

adică funcţia $\Gamma(p)$ ia valoarea $n!$ pentru $p = n + 1$ iar pentru $p > 0$, $p \neq n + 1$, extrapolează factorialul.

Integrala lui Euler de prima speţă sau funcţia $B(p, q)$ este definită pentru $p > 0$ şi $q > 0$ prin egalitatea

$$B(p, q) = \int_{0}^{1} x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx \tag{4}$$

Pentru $p \geq 1$ şi $q \geq 1$, funcţia de sub semnul integrală este continuă pe intervalul $(0, 1)$ şi deci integrala are sens chiar pe $[0, 1]$. Dacă $p < 1$ sau $q < 1$ procedăm în modul următor: dacă $p < 1$ atunci integrala

$$\int_{0}^{1} \frac{(1-x)^{q-1}}{x^{1-p}}\,dx$$

este convergentă pentru $1-p<1$, deci pentru $p>0$. Dacă $q<1$ atunci integrala

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{x^{p-1}}{(1-x)^{1-q}}\,dx$$

este convergentă pentru $1-q<1$, deci pentru $q>0$. Prin urmare integrala (4) este convergentă pentru $p>0$ şi $q>0$. Funcţia $B(p,q)$ are proprietatea de a fi simetrică în p şi q adică

$$B(p,\ q)=B(q,\ p) \tag{5}$$

Dacă facem schimbarea de variabilă $x=1-t$, rezultă imediat egalitatea (5).

În legătură cu funcţiile $\Gamma(p)$ şi $B(p,q)$ dăm două relaţii care deseori sînt întîlnite în aplicaţii. Între aceste două funcţii există legătura

$$B(p,\ q)=\frac{\Gamma(p)\,\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} \tag{6}$$

care va fi demonstrată cu ajutorul integralei duble improprii.

Funcţia $\Gamma(p)$ satisface egalitatea

$$\Gamma(p)\cdot\Gamma(1-p)=\frac{\pi}{\sin p\pi},\ \text{unde}\ 0<p<1 \tag{7}$$

Dacă în formula (6) facem $p=q=\frac{1}{2}$, obţinem

$$B\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(1)},\ \text{de unde rezultă}$$

$$\left(\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right)^2=B\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)=\int_0^1 x^{-\frac{1}{2}}(1-x)^{-\frac{1}{2}}\,dx=\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$$

În ultima integrală facem schimbarea de variabilă $x=\sin^2 t$ şi atunci obţinem

$$\left(\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right)^2=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2\sin t\cos t}{\sin t\cos t}\,dt=\pi\ \text{şi deci}\ \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}.$$

Dacă ţinem seama de definiţia funcţiei $\Gamma(p)$ avem

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\int_0^{\infty}x^{-\frac{1}{2}}e^{-x}\,dx$$

şi facem schimbarea de variabilă $x=t^2$, rezultă

$$\int_0^{\infty}e^{-t^2}\,dt=\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\ \text{(integrala Euler-Poisson)}$$

Exemple.

1) Să se calculeze $\int_0^{\infty} e^{-x^p}\,dx$, $p>0$. Dacă facem schimbarea de variabilă $y = x^p$ atunci $dy = p x^{p-1}\,dx$, $dx = \frac{1}{p}\, y^{\frac{1}{p}-1}\,dy$.

Avem $\int_0^{\infty} e^{-x^p}\,dx = \frac{1}{p}\int_0^{\infty} e^{-y}\, y^{\frac{1}{p}-1}\,dy = \frac{1}{p}\,\Gamma\left(\frac{1}{p}\right) = \Gamma\left(1+\frac{1}{p}\right)$.

2) Să se calculeze $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{p-1} x \cos^{q-1} x\,dx$; $p>0$; $q>0$. Facem schimbarea de variabilă $y = \sin^2 x$; $dy = 2\sin x \cos x\,dx$ şi obţinem

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{p-1} x \cos^{q-1} x\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 y^{\frac{p}{2}-1}(1-y)^{\frac{q}{2}-1}\,dy$$

$$= \frac{1}{2}\,B\left(\frac{p}{2}, \frac{q}{2}\right) = \frac{1}{2}\,\frac{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)\Gamma\left(\frac{q}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{p+q}{2}\right)}$$

În cazul particular $q = 1$ avem

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{p-1} x\,dx = \frac{1}{2}\,\frac{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\,\frac{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)}.$$

3) Să se arate că $B(p,q) = \int_0^{\infty} \frac{y^{p-1}}{(1+y)^{p+q}}\,dy$.

Dacă facem schimbarea de variabilă $x = \frac{y}{y+1}$ în (4) şi ţinem cont că $dx = \frac{dy}{(1+y)^2}$ obţinem

$$B(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx = \int_0^{\infty}\left(\frac{y}{y+1}\right)^{p-1}\frac{1}{(y+1)^{q-1}}\,\frac{dy}{(y+1)^2}$$

$$= \int_0^{\infty}\frac{y^{p-1}}{(y+1)^{p+q}}\,dy.$$

4) Să se calculeze $\int_0^{\infty}\frac{\sqrt[4]{x}}{(x+1)^2}\,dx$.

Dacă folosim relaţia de la exerciţiul (3), avem

$$\int_0^{\infty} \frac{\sqrt[4]{x}}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}x = B\left(\frac{5}{4}, \frac{3}{4}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{5}{4}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}{\Gamma(2)} = \frac{\Gamma\left(1+\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}{\Gamma(1+1)} =$$

$$= \frac{\frac{1}{4}\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}{1\cdot\Gamma(1)} = \frac{1}{4}\cdot\frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi\sqrt{2}}{4}.$$

Probleme

Să se arate că următoarele integrale sînt convergente şi apoi să se calculeze:

1) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^4}$; $\quad$ *R*: $\dfrac{\pi\sqrt{2}}{4}$.

2) $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-ax}\sin bx\,\mathrm{d}x$; $(a>0)$ $\quad$ *R*: $\dfrac{b}{a^2+b^2}$.

3) $\displaystyle\int_{\frac{2}{\pi}}^{\infty} \frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$; $\quad$ *R*: 1.

4) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{x\ln x}{(1+x^2)^3}\,\mathrm{d}x$; $\quad$ *R*: $-\dfrac{1}{8}$.

5) $\displaystyle\int_2^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x(\ln x)^3}$; $\quad$ *R*: $\dfrac{1}{2\ln^2 2}$.

6) $\displaystyle\int_1^{2} \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{3x^2-2x-1}}$; $\quad$ *R*: $\dfrac{\pi}{2} - \arcsin\dfrac{3}{4}$.

7) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{(\arcsin x)^n}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$; $\quad$ *R*: $\dfrac{1}{n+1}\left(\dfrac{\pi}{2}\right)^{n+1}$; $n > -1$.

8) $I_1 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\sin x\,\mathrm{d}x$;

$I_2 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\cos x\,\mathrm{d}x$; $\quad$ *R*: $I_1 = I_2 = -\dfrac{\pi}{2}\ln 2$.

9) $\displaystyle\int_a^{b} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}$ $\quad$ *R*: π

10) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 nx}{\sin x}\,dx;\ n \in N$; $R: \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k-1}$

11) Să se studieze natura seriei

$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)(\ln \ln n)^{\alpha}}$; R: dacă $\alpha > 1$ seria este convergentă

Să se calculeze în sensul valorii principale următoarele integrale

12) $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^{3}}$; $R: 0$

13) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x+1}{x^4+1}\,dx$. $R: \frac{\pi\sqrt{2}}{2}$.

14) Dacă f este o funcţie reală definită şi continuă pe $[0, \infty)$ şi limita $\lim_{x\to\infty} f(x) = f(\infty)$ există şi este finită atunci următoarea integrală există şi valoarea sa este dată de formula (lui Frullani)

$$\int_{0}^{\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x}\,dx = [f(0) - f(\infty)]\ln\frac{b}{a};\ a > 0;\ b > 0$$

Dacă $\lim_{x\to\infty} f(x)$ nu există dar integrala $\int_{A}^{\infty} \frac{f(x)}{x}\,dx$; $A > 0$ este convergentă atunci

$$\int_{0}^{\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x}\,dx = f(0)\cdot\ln\frac{b}{a}.$$

Folosind formula lui Frullani să se calculeze următoarele integrale

15) $\int_{0}^{\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x}\,dx;\ a > 0,\ b > 0$ $R: \ln\frac{b}{a}$.

16) $\int_{0}^{\infty} \ln\frac{p + qe^{-ax}}{p + qe^{-bx}}\frac{dx}{x};\ a > 0;\ b > 0;\ p > 0;\ q > 0$

$R: \left(\ln\frac{p+q}{p}\right)\ln\frac{b}{a}$

17) $\int_{0}^{\infty} \frac{\cos ax - \cos bx}{x}\,dx;\ a > 0;\ b > 0$ $R: \ln\frac{b}{a}$

18) $\int_{0}^{\infty} \frac{e^{-a^2x^2} - e^{-b^2x^2}}{x}\,dx;\ a\cdot b \neq 0$ $R: \ln\left|\frac{b}{a}\right|$

Folosind teorema de derivare a unei integrale improprii funcție de un parametru, să se calculeze următoarele integrale

19) $\int_0^{\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} \sin mx \, dx$; $a > 0$; $b > 0$; $m \neq 0$;

R: $\operatorname{arctg} \frac{a}{m} - \operatorname{arctg} \frac{b}{m}$

20) $\int_0^{\infty} \frac{\ln (a^2 + x^2)}{b^2 + x^2} \, dx$; $b \neq 0$; R: $\frac{\pi}{|b|} \ln (|a| + |b|)$

21) $\int_0^{1} \frac{\ln (1 - a^2 x^2)}{x^2 \sqrt{1 - x^2}} \, dx$; $|a| \leq 1$; R: $\pi(1 - \sqrt{1 - a^2})$

22) $\int_0^{1} \frac{\ln (1 - a^2 x^2)}{\sqrt{1 - x^2}} \, dx$; $|a| \leq 1$; R: $\ln \frac{1 + \sqrt{1 - a^2}}{2}$

Folosind integralele lui Euler să se calculeze următoarele integrale

23) $\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^3 + 1}$ R: $\frac{2\pi\sqrt{3}}{9}$

24) $\int_0^{\infty} \frac{x^2}{x^4 + 1} \, dx$ R: $\frac{\pi\sqrt{2}}{4}$

25) $\int_0^{1} \frac{dx}{\sqrt[n]{1 - x^n}}$ R: $\frac{\pi}{n \sin \frac{\pi}{n}}$

26) $\int_0^{1} \left(\ln \frac{1}{x}\right)^p dx$; $(p > -1)$ R: $\Gamma(p + 1)$

Să se arate următoarele egalități

27) $\int_0^{1} \frac{dx}{\sqrt{1 - x^4}} \int_0^{1} \frac{x^2 \, dx}{\sqrt{1 - x^4}} = \frac{\pi}{4}$;

28) $\int_0^{\infty} e^{-x^4} dx \int_0^{\infty} x^2 e^{-x^4} dx = \frac{\pi\sqrt{2}}{16}$.

CAPITOLUL VII

INTEGRALE CURBILINII

§ 1. DRUMURI

Definiţie:

Fie $[a, b] \subset R$ un interval compact. O funcţie continuă $\gamma : [a, b] \to R^3$ se numeşte drum parametrizat în spaţiu de capete $\gamma(a)$, $\gamma(b)$.

Rezultă deci că există trei funcţii reale f, g, h definite şi continue pe $[a, b]$ astfel încît

$$\gamma(t) = (f(t), g(t), h(t)) ; \ t \in [a, b].$$

Se numeşte imaginea drumului γ, mulţimea din spaţiu

$$I(\gamma) = \{\gamma(t) ; \ t \in [a, b]\} = \{(f(t), g(t), h(t)) ; \ t \in [a, b]\}$$

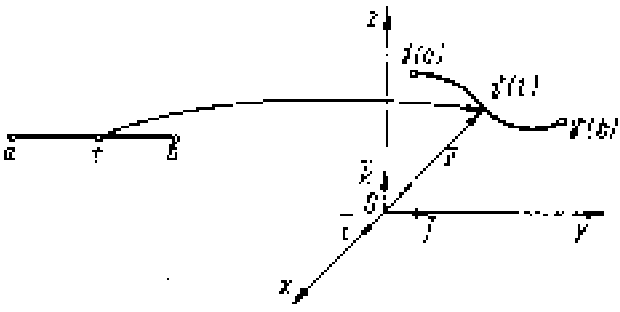

Fig. 26.

Dacă notăm cu $\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$ vectorul de poziţie al unui punct M aparţinînd lui $I(\gamma)$, prin identificare obţinem

$$x = f(t), \ y = g(t), \ z = h(t) ; \ t \in [a, b] \tag{1}$$

Ansamblul acestor trei funcţii se numeşte o reprezentare parametrică a lui $I(\gamma)$, iar t se numeşte parametru.

Dacă $\gamma(a) = \gamma(b)$ spunem că drumul este închis.

Dacă există două valori t' şi t'' astfel încît $a \leq t' < t'' \leq b$, $\gamma(t') = \gamma(t'')$ şi astfel încît cel puţin una dintre inegalităţile $a < t'$ şi $t'' < b$ să fie satisfăcută, spunem că punctul $\gamma(t')$ este punct multiplu al drumului.

Dacă drumul γ nu admite nici un punct multiplu spunem că este drum simplu.

Dacă funcţiile f, g, h admit derivate continue pe $[a, b]$ şi $f'^2(t) + g'^2(t) + h'^2(t) > 0$, $\forall t \in [a, b]$ spunem că drumul γ este neted.

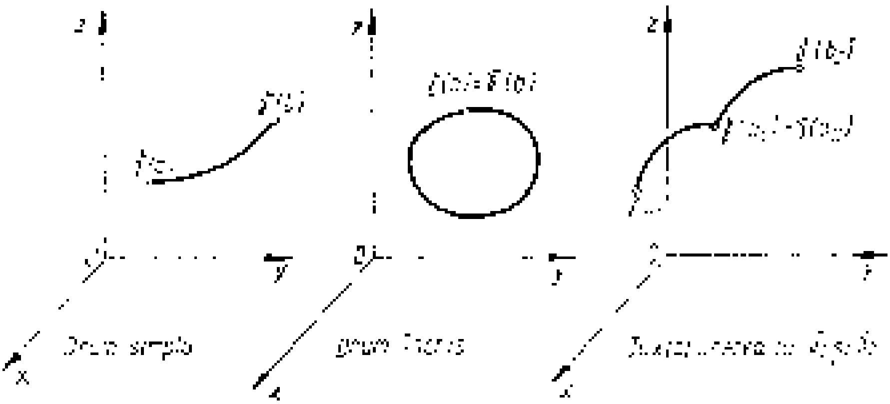

Fig. 27

Drumurile $\gamma_1 : [a_1, b_1] \to \mathbf{R}^3$ şi $\gamma_2 : [a_2, b_2] \to \mathbf{R}^3$ se numesc juxtapozabile dacă $b_1 = a_2$ şi $\gamma_1(b_1) = \gamma_2(a_2)$.

În acest caz drumul $\gamma : [a_1, b_2] \to \mathbf{R}^3$ definit prin

$$\gamma(t) = \begin{cases} \gamma_1(t) \text{ dacă } t \in [a_1, b_1] \\ \gamma_2(t) \text{ dacă } t \in [a_2, b_2] \end{cases}$$

se numeşte juxtapunerea drumurilor γ_1 şi γ_2 şi se notează $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$.

Un drum $\gamma : [a, b] \to \mathbf{R}^3$ se numeşte neted pe porţiuni dacă el este juxtapunerea unui număr finit de drumuri netede.

In fig. 27 sînt ilustrate imagini ale diferitelor tipuri de drumuri.

§ 2. DRUMURI RECTIFICABILE

Fie γ un drum parametrizat din spaţiu şi fie

$$d = \{a = t_0 < t_1 < \ldots < t_i < t_{i+1} < \ldots < t_n = b\}$$

o diviziune oarecare a intervalului $[a, b]$. Punctele

$$A = M_0(f(t_0), g(t_0), h(t_0)), \ldots, M_i(f(t_i), g(t_i), h(t_i)), \ldots,$$

$$M_n(f(t_n), g(t_n), h(t_n)) = B$$

determină o linie poligonală ale cărei vîrfuri aparţin lui $I(\gamma)$ iar M_0 şi M_n coincid cu capetele drumului.

Lungimea acestei linii poligonale, pe care o notăm l_d, este

$$l_d = \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{(f(t_{i+1}) - f(t_i))^2 + (g(t_{i+1}) - g(t_i))^2 + (h(t_{i+1}) - h(t_i))^2}$$

Dacă înlocuim diviziunea d cu o diviziune mai fină atunci l_d crește.

Definiție: Drumul γ se numește rectificabil dacă mulțimea $\{l_d\}$ este majorată. Marginea superioară a acestei mulțimi se numește lungimea drumului γ și se notează $l(\gamma)$.

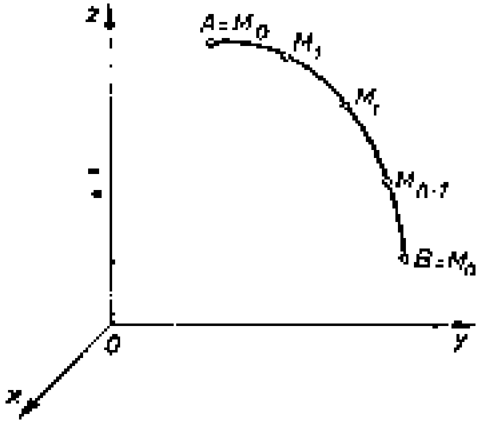

Fig. 28.

Deci $l(\gamma) = \sup\{l_d : d \in \mathcal{D}\}$, unde $\mathcal{D}$ este mulțimea tuturor diviziunilor intervalului $[a, b]$.

Dintre drumurile rectificabile cel mai des întîlnite sînt cele netede, în legătură cu care avem următoarea

Teoremă 1.2.

Un drum neted are lungime. Dacă $x = f(t)$, $y = g(t)$, $z = h(t)$; $t \in [a, b]$ (1) este o reprezentare parametrică a lui $l(\gamma)$ atunci are loc egalitatea

$$l(\gamma) = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{df}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dg}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dh}{dt}\right)^2}\, dt \qquad (2)$$

Demonstrație. Fie $d = (a = t_0 < t_1 < \dots < t_i < t_{i+1} < \dots < t_n = b)$ o diviziune oarecare a intervalului $[a, b]$ și

$$l_d = \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{(f(t_{i+1}) - f(t_i))^2 + (g(t_{i+1}) - g(t_i))^2 + (h(t_{i+1}) - h(t_i))^2}$$

lungimea liniei poligonale determinată de punctele $M_0, M_1, \dots, M_i, \dots, M_n$.

Aplicînd formula de medie a lui Lagrange pentru funcțiile f, g, h pe fiecare subinterval $[t_i, t_{i+1}] \subset [a, b]$ obținem

$$l_d = \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{f'^2(\xi_i) + g'^2(\eta_i) + h'^2(\zeta_i)}\,(t_{i+1} - t_i) \text{ unde } t_i < \xi_i, \eta_i, \zeta_i < t_{i+1}$$

Pe de altă parte avem egalitatea

$$L_d = \sum_{i=0}^{n-1}\sqrt{f'^2(\xi_i)+g'^2(\xi_i)+h'^2(\xi_i)}\,(t_{i+1}-t_i) +$$

$$+\sum_{i=0}^{n-1}\left[\sqrt{f'^2(\xi_i)+g'^2(\eta_i)+h'^2(\zeta_i)}-\sqrt{f'^2(\xi_i)+g'^2(\xi_i)+h'^2(\xi_i)}\right](t_{i+1}-t_i) \qquad (3)$$

Considerăm funcția reală α de trei variabile reale definită de $\alpha(u,v,w)=\sqrt{f'^2(u)+g'^2(v)+h'^2(w)}$, $\alpha:\Delta\to\mathbf{R}$, unde $\Delta=[a,b]\times[a,b]\times[a,b]$, care este evident continuă pe compactul Δ. Funcția α va fi și uniform continuă pe Δ și deci $(\forall)\varepsilon>0$, $(\exists)\delta(\varepsilon)>0$ așa fel încît oricare ar fi punctele (u',v',w') și (u'',v'',w'') din Δ cu $|u'-u''|<\delta(\varepsilon)$, $|v'-v''|<\delta(\varepsilon)$, $|w'-w''|<\delta(\varepsilon)$ să avem $|\alpha(u',v',w')-\alpha(u'',v'',w'')|<\varepsilon$.

Dacă considerăm diviziunea d a intervalului $[a,b]$ astfel încît $\nu(d)<\delta(\varepsilon)$ și alegem

$$(u',v',w')=(\xi_i,\eta_i,\zeta_i);\quad (u'',v'',w'')=(\xi_i,\xi_i,\xi_i)$$

atunci pentru termenul al doilea din membrul drept al egalității (3) obținem

$$\left|\sum_{i=0}^{n-1}[\alpha(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)-\alpha(\xi_i,\xi_i,\xi_i)](t_{i+1}-t_i)\right|\le$$

$$\le\sum_{i=0}^{n-1}|\alpha(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)-\alpha(\xi_i,\xi_i,\xi_i)|(t_{i+1}-t_i)<\varepsilon\sum_{i=0}^{n-1}(t_{i+1}-t_i)=\varepsilon(b-a).$$

Prin urmare termenul considerat este majorat de $\varepsilon(b-a)$.

Primul termen din membrul drept al egalității (3) este o sumă Riemann corespunzătoare funcției $\sqrt{f'^2+g'^2+h'^2}$, diviziunii d și alegerii punctelor intermediare ξ_i. Dar această funcție fiind continuă pe intervalul compact $[a,b]$ este integrabilă pe acest interval.

Să considerăm un șir de diviziuni (d_n) ale lui $[a,b]$ cu $\nu(d_n)\to0$. Pentru fiecare diviziune d_n putem scrie o egalitate de tipul (3) și prin trecere la limită avem

$$\lim_{n\to\infty}L_{d_n}=\int_a^b\sqrt{f'^2(t)+g'^2(t)+h'^2(t)}\,dt$$

§ 3. DRUMURI ECHIVALENTE. CURBĂ

Definiția 1.3. Două drumuri $\gamma_1:[a_1,b_1]\to\mathbf{R}^3$ și $\gamma_2:[a_2,b_2]\to\mathbf{R}^3$ se numesc *echivalente* și se scrie $\gamma_1\sim\gamma_2$ dacă există o funcție

$\varphi:[a_1,b_1]\to[a_2,b_2]$, continuă, strict crescătoare cu $\varphi(a_1)=a_2$, $\varphi(b_1)=b_2$ și astfel încît

$$\gamma_1(t)=\gamma_2(\varphi(t)),\quad(\forall)t\in[a_1,b_1]$$

Se vede imediat că două drumuri echivalente au aceeași imagine deoarece $\varphi([a_1, b_1]) = [a_2, b_2]$ și acest fapt este ilustrat în fig. 29.

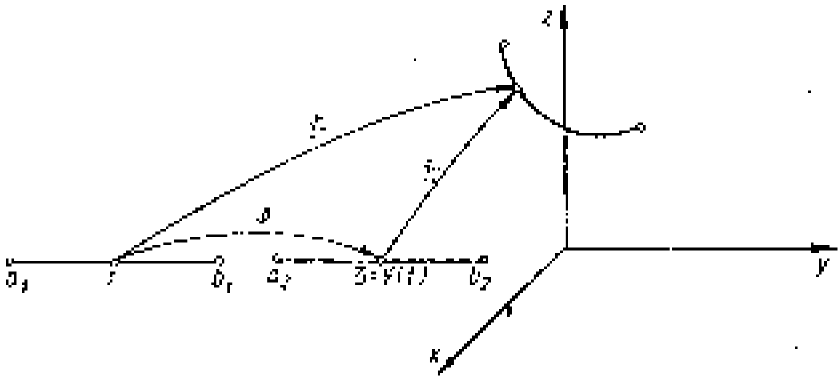

Fig. 29.

În legătură cu drumurile echivalente are loc

Teorema 1.5

Un drum echivalent cu un drum rectificabil este rectificabil.

Demonstrație: Fie γ_1 și γ_2 două drumuri echivalente și

$$x = f_1(t);\ y = g_1(t);\ z = h_1(t);\ t \in [a_1, b_1]$$

o reprezentare parametrică a lui $I(\gamma_1)$ iar

$$x = f_2(\tau);\ y = g_2(\tau);\ z = h_2(\tau);\ \tau \in [a_2, b_2]$$

o reprezentare parametrică a lui $I(\gamma_2)$.

Fie φ funcția care apare în condiția de echivalență a lui γ_1 cu γ_2. Orice diviziune

$$d_2 = (a_2 = \tau_0 < \tau_1 < \ldots < \tau_i < \ldots < \tau_n = b_2)$$

a intervalului $[a_2, b_2]$ este imaginea prin φ a unei diviziuni

$$d_1 = (a_1 = t_0 < t_1 < \ldots < t_i < \ldots < t_n = b_1)$$

a intervalului $[a_1, b_1]$, adică $\tau_i = \varphi(t_i)$; $i = 0, 1, \ldots, n$.

Reciproc, oricărei diviziuni d_1 a lui $[a_1, b_1]$ îi corespunde o diviziune d_2 a lui $[a_2, b_2]$. Deci funcția φ stabilește o corespondență biunivocă între diviziunile lui $[a_1, b_1]$ și cele ale lui $[a_2, b_2]$. Din definiția echivalenței drumurilor γ_1 și γ_2 avem:

$$f_1(t) = f_2(\varphi(t));\ g_1(t) = g_2(\varphi(t));\ h_1(t) = h_2(\varphi(t)),$$

și deci

$$l_{d_1} = \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{(f_1(t_{i+1}) - f_1(t_i))^2 + (g_1(t_{i+1}) - g_1(t_i))^2 + (h_1(t_{i+1}) - h_1(t_i))^2} =$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{(f_2(\tau_{i+1}) - f_2(\tau_i))^2 + (g_2(\tau_{i+1}) - g_2(\tau_i))^2 + (h_2(\tau_{i+1}) - h_2(\tau_i))^2} = l_{d_2}$$

prin urmare mulțimile de numere pozitive $\{l_{\Delta}\}$ și $\{l_{\Delta'}\}$ coincid. Rezultă că aceste două mulțimi sînt în același timp majorate sau nemajorate și teorema este demonstrată. Mai mult decît atît, marginile superioare a celor două mulțimi coincid dacă există și deci:

Două drumuri rectificabile și echivalente au aceeași lungime.

Se arată cu ușurință că relația „$\sim$" este o *relație de echivalență algebrică* și deci împarte mulțimea tuturor drumurilor în clase de echivalență disjuncte; două drumuri sînt echivalente, dacă și numai dacă sînt în aceeași clasă.

Definiția 2.3.

Se numește curbă o clasă de drumuri echivalente.

Următoarele caracteristici și noțiuni sînt invariante față de relația de echivalență introdusă în mulțimea drumurilor: imaginea drumului; drum simplu; drum închis; drum rectificabil; lungimea unui drum rectificabil.

Relativ la curbe se introduc următoarele noțiuni: *imaginea curbei*, ca fiind imaginea unui drum conținut de curbă; *curbă simplă*, ca fiind o curbă care conține cel puțin un drum simplu; *curbă închisă*, ca fiind o curbă care conține cel puțin un drum închis; *curbă rectificabilă* ca fiind o curbă care conține cel puțin un drum rectificabil; *lungimea unei curbe rectificabile*, ca fiind lungimea comună a drumurilor care alcătuiesc această curbă; *curbă netedă* ca fiind o curbă care conține cel puțin un drum neted; *curbe juxtapozabile* ca fiind două curbe Γ_1 și Γ_2 pentru care există un drum γ_1 aparținînd lui Γ_1 și un drum γ_2 aparținînd lui Γ_2, astfel încît γ_1 și γ_2 să fie juxtapozabile. În acest caz curba definită de clasa de echivalență a drumului $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$ se numește juxtapunerea curbelor Γ_1 și Γ_2 și se notează

$$\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$$

O curbă Γ se numește netedă pe porțiuni dacă ea este juxtapunerea unui număr finit de curbe netede Γ_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ și se notează

$$\Gamma = \bigcup_{i=1}^{n} \Gamma_i$$

Este evident faptul că o curbă netedă pe porțiuni este rectificabilă.

Dacă notăm cu $l(\Gamma)$ lungimea unei curbe rectificabile se arată cu ușurință că pentru o curbă netedă pe porțiuni are loc egalitatea

$$l(\Gamma) = \sum_{i=1}^{n} l(\Gamma_i)$$

În tot ce urmează mai departe, vom desemna prin reprezentări parametrice atît drumurile cît și curbele.

Expresii ca „imaginea curbei", „imaginea drumului", „imaginea reprezentării" vor fi folosite în aceeași accepțiune. Noțiuni ca acelea de „drum" și „curbă" vor fi desemnate printr-o reprezentare parametrică.

Observaţie. Deşi toate consideraţiile făcute pînă acum s-au referit la drumuri şi curbe din spaţiu ele se transpun fără dificultate la drumuri şi curbe din plan. De exemplu, lungimea $l(\gamma)$ a unui drum neted din plan este dată de formula

$$l(\gamma) = \int_a^b \sqrt{f'^2(t) + g'^2(t)}\,dt \tag{3}$$

Dacă γ este un drum din plan definit de reprezentarea parametrică în coordonate polare

$$x = \varphi(\theta)\cos\theta;\quad y = \varphi(\theta)\sin\theta;\quad \theta\in[a, b]$$

unde θ este unghiul polar iar funcţia $\varphi \geq 0$ pe $[a, b]$ şi dacă φ admite derivata continuă pe $[a, b]$ atunci drumul γ este rectificabil şi lungimea sa este dată de formula

$$l(\gamma) = \int_a^b \sqrt{\varphi^2(\theta) + \varphi'^2(\theta)}\,d\theta \tag{4}$$

În adevăr; să punem $f(\theta) = \varphi(\theta)\cdot\cos\theta$; $g(\theta) = \varphi(\theta)\sin\theta$.

Funcţiile f şi g sînt derivabile, cu derivata continuă pe $[a, b]$, deci drumul considerat este rectificabil.

Avem $f'(\theta) = \varphi'(\theta)\cos\theta - \varphi(\theta)\sin\theta$; $g'(\theta) = \varphi'(\theta)\sin\theta + \varphi(\theta)\cos\theta$ şi deci $f'^2(\theta) + g'^2(\theta) = \varphi^2(\theta) + \varphi'^2(\theta)$. Prin simpla aplicare a formulei (3) obţinem formula (4).

Exemplu 1. Să se calculeze lungimea curbei Γ definită de reprezentarea parametrică:

$$x = a\cos t;\quad y = a\sin t;\quad z = bt;\quad t\in[0, 2\pi];\quad a > 0;\quad b > 0$$

(elicea circulară a cărei imagine este ilustrată în fig. 30).

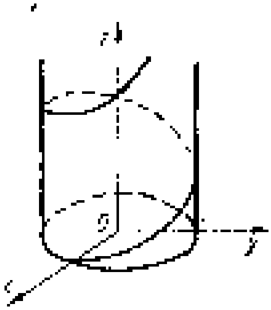

Fig. 30.

Cu ajutorul formulei (2) obţinem

$$l(\gamma) = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2\sin^2 t + a^2\cos^2 t + b^2}\,dt = \sqrt{a^2 + b^2}\int_0^{2\pi} dt = 2\pi\sqrt{a^2 + b^2}$$

Exemplu 2.

Să se calculeze lungimea curbei plane Γ definită de reprezentarea parametrică

$$x = a(t - \sin t); \quad y = a(1 - \cos t); \quad t \in [0, 2\pi]; \quad a > 0$$

(o buclă a cicloidei şi imaginea sa este ilustrată în fig. 31).

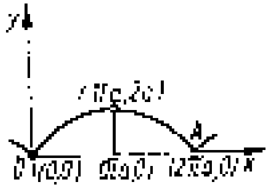

Fig. 31

Cu ajutorul formulei (3) obţinem

$$l(\Gamma) = a\int_0^{2\pi} \sqrt{(1 - \cos t)^2 + \sin^2 t}\, dt = 2a\int_0^{2\pi} \sin\frac{t}{2} = 8a$$

Exemplu 3. Să se calculeze lungimea curbei plane definită de reprezentarea parametrică:

$$x = a\cos t; \quad y = b\sin t; \quad t \in [0, 2\pi]; \quad a > b > 0 \quad \text{(elipsa)}$$

Tot cu ajutorul formulei (3) obţinem

$$l(\Gamma) = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}\, dt = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}\, dt =$$

$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2 - (a^2 - b^2)\cos^2 t}\, dt = 4a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \varepsilon^2\cos^2 t}\, dt$$

unde am notat $\varepsilon = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$. Dacă în ultima integrală facem schimbarea de variabilă $t = \frac{\pi}{2} - \varphi$ obţinem

$$l(\Gamma) = 4a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \varepsilon^2\sin^2\varphi}\, d\varphi \quad (0 < \varepsilon < 1)$$

Deci lungimea elipsei se exprimă cu ajutorul unei integrale eliptice de speţa a doua. Deoarece $0 < \varepsilon < 1$ putem folosi seria binominală şi obţinem:

$$(1 - \varepsilon^2\sin^2\varphi)^{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}\varepsilon^2\sin^2\varphi - \frac{1}{2^2}\cdot\frac{1}{2!}\varepsilon^4\sin^4\varphi - \frac{1\cdot 1\cdot 3}{2^3\cdot 3!}\varepsilon^6\sin^6\varphi \ldots$$

Dacă utilizăm teorema de integrare a seriilor de funcţii rezultă:

$$l(\Gamma) = 2\pi a\left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 \varepsilon^2 - \frac{1^2 \cdot 3}{2^2 \cdot 4^2}\varepsilon^4 - \frac{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2}\varepsilon^6 - \dots\right]$$

Probleme: Să se calculeze lungimea curbelor definite de următoarele reprezentări parametrice.

1) $x = ae^{kt}\cos t$; $y = ae^{kt}\sin t$; $z = ae^{kt}$; $t \in [0, 1]$; $a > 0$; $k > 0$

R: $\frac{a}{k}\sqrt{1 + 2k^2}\,(e^k - 1)$

2) $x = \mathrm{tg}\, t$; $y = \mathrm{ctg}\, t$; $z = \sqrt{2}\ln \mathrm{tg}\, t$; $t \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}\right]$ R: $\frac{2}{\sqrt{3}}$

3) $x = \frac{\cos^3 t}{3}$; $y = \sin t - \frac{\sin^3 t}{3}$; $t \in [0, 2\pi]$ R: π

4) $x = t$; $y = \ln \sin t$; $t \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$; R: $2\ln(1 + \sqrt{2})$

5) $\rho = ae^{k\theta}$; $\theta \in [0, \theta_0]$ unde $a > 0$; $\theta_0 > 0$; $k > 0$;

R: $\frac{a}{k}\sqrt{1 + k^2}\,(e^{k\theta_0} - 1)$

6) $\rho = \sin\theta$; $\theta \in [0, 2\pi]$ R: 2π

§ 4. INTEGRALA CURBILINIE DE PRIMUL TIP

Să considerăm un fir material de grosime neglijabilă, deoarece firul este prevăzut cu o lungime, vom admite că el este imaginea unei curbe rectificabile Γ, definită de reprezentarea parametrică

$$x = f(t);\ y = g(t);\ z = h(t);\ t \in [a, b] \tag{1}$$

Pe imaginea curbei Γ presupunem distribuită o masă de densitate $\rho(x, y, z)$, cunoscută în fiecare punct $(x, y, z) \in I(\Gamma)$.

Problema determinării masei unui fir material conduce la noţiunea de integrală curbilinie de primul tip. Pentru fiecare $t \in [a, b]$ să notăm cu $\Gamma(t)$ curba (parţială) definită de reprezentarea parametrică

$$x = f(\tau);\ y = g(\tau);\ z = h(\tau);\ \tau \in [a, t] \tag{2}$$

şi cu $l(t)$ lungimea ei. Din însăşi definiţia lungimii rezultă că $l(t)$ este strict crescătoare pe $[a, b]$.

Fie

$$d = (a = t_0 < t_1 < \dots < t_i < \dots < t_n = b)$$

o diviziune oarecare a intervalului $[a, b]$.

Masa firului material poate fi aproximată cu suma

$$\sum_{i=0}^{n-1} \rho(f(\xi_i), g(\xi_i), h(\xi_i)) [l(t_{i+1}) - l(t_i)] \tag{6}$$

unde ξ_i este un punct oarecare din intervalul $[t_i, t_{i+1}]$.

Există și alte probleme care conduc la considerarea unor sume de forma celor de mai sus, sume cu ajutorul cărora se definește integrala Stieltjes.

Astfel este problema determinării sarcinii electrice totale a unui fir material atunci cînd se cunoaște densitatea de repartiție în fiecare punct al firului. Pentru a introduce noțiunea de integrală curbilinie de primul tip reamintim definiția noțiunii de domeniu.

Definiția 1.4.

O mulțime $D \subset \mathbf{R}^3$ $(\mathbf{R}^2)$ se numește mulțime conexă dacă nu există nici o pereche de mulțimi deschise G_1 și G_2 astfel ca:

$$D \subset G_1 \cup G_2; \; D \cap G_1 \neq \emptyset; \; D \cap G_2 \neq \emptyset \text{ și } D \cap G_1 \cap G_2 = \emptyset$$

În limbajul obișnuit, a spune că mulțimea D este conexă revine la faptul că „este formată dintr-o singură bucată".

Exemple. Sferele și intervalele tridimensionale sînt mulțimi conexe din $\mathbf{R}^3$. În $\mathbf{R}^2$, coroanele circulare sînt mulțimi conexe. Tot în $\mathbf{R}^2$ reuniunea a două cercuri închise și disjuncte nu este o mulțime conexă.

Definiția 2.4.

O mulțime $D \subset \mathbf{R}^3$ $(\mathbf{R}^2)$ deschisă și conexă se numește *domeniu*.

Tot în limbajul obișnuit, a spune că o mulțime D este domeniu revine la faptul că D este o mulțime deschisă formată dintr-o singură bucată.

Definiția 3.4.

Fie F o funcție reală definită pe un domeniu $D \subset \mathbf{R}^3$ care conține imaginea curbei rectificabile Γ definită de reprezentarea parametrică (1). Dacă integrala Stieltjes

$$\int_a^b F(f(t), g(t), h(t))\, dl(t) \tag{7}$$

există, atunci ea se notează astfel

$$\int_\Gamma F(x, y, z)\, dl$$

și se numește integrala curbilinie de primul tip a funcției F de-a lungul curbei Γ.

Dacă integrala (7) există, atunci spunem că F este integrabilă în raport cu l de-a lungul curbei Γ.

Pentru ca noțiunea de integrală curbilinie de primul tip să nu fie contradictorie, trebuie să arătăm că nici existența și nici valoarea sa nu depind de alegerea drumului ci numai de curba Γ.

În acest sens are loc

Teorema 1.4. Fie γ_1 şi γ_2 două drumuri din spaţiu, rectificabile şi echivalente, definite de următoarele reprezentări parametrice

$$x = f_1(t)\,;\ y = g_1(t)\,;\ z = h_1(t)\,;\ t \in [a_1, b_1]$$

respectiv

$$x = f_2(\tau)\,;\ y = g_2(\tau)\,;\ z = h_2(\tau)\,;\ \tau \in [a_2, b_2]$$

atunci existenţa fiecăreia dintre următoarele două integrale Stieltjes implică existenţa celeilalte şi egalitatea lor:

$$\int_{a_1}^{b_1} F(f_1(t),\ g_1(t),\ h_1(t))\, dl_1(t) = \int_{a_2}^{b_2} F(f_2(\tau),\ g_2(\tau),\ h_2(\tau))\ dl_2(\tau) \tag{8}$$

Demonstraţie. Să presupunem că prima integrală există. Fie

$$d_1 = (a_1 = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_i < \ldots < t_n = b_1)$$

o diviziune a intervalului $[a_1, b_1]$. Funcţia φ care apare în condiţia de echivalenţă a lui γ_1 cu γ_2, asociază lui d_1 o diviziune

$$d_2 = (a_2 = \tau_0 < \tau_1 < \tau_2 < \ldots < \tau_i < \ldots < \tau_n = b_2)$$

a intervalului $[a_2, b_2]$ unde $\tau_i = \varphi(t_i)$. Fie $\xi_i \in [t_i, t_{i+1}]$. Prin funcţia φ, lui ξ_i îi corespunde o valoare $\eta_i = \varphi(\xi_i)$ cu proprietatea că $\eta_i \in [\tau_i, \tau_{i+1}]$. Dacă ţinem seama că drumurile γ_1 şi γ_2 sînt echivalente avem $l_1(t) = l_2(\tau)$ şi

$$f_1(t) = f_2(\varphi(t))\,;\ g_1(t) = g_2(\varphi(t))\,;\ h_1(t) = h_2(\varphi(t))\,;$$

$$(\forall)\ t \in [a_1, b_1],$$

deci

$$\sum_{i=0}^{n-1} F(f_1(\xi_i),\ g_1(\xi_i),\ h_1(\xi_i))\ [l_1(t_{i+1}) - l_1(t_i)] =$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} F(f_2(\eta_i),\ g_2(\eta_i),\ h_2(\eta_i))\ [l_2(\tau_{i+1}) - l_2(\tau_i)].$$

Dacă observăm că φ este uniform continuă pe $[a_1, b_1]$, rezultă că norma uneia dintre diviziunile d_1 şi d_2 devine oricît de mică de îndată ce norma celeilalte este suficient de mică şi prin urmare există a doua integrală din (8) şi are loc egalitatea (8).

§ 5. CALCULUL INTEGRALEI CURBILINII DE PRIMUL TIP

Vom arăta, în anumite ipoteze, că o integrală curbilinie de primul tip se calculează cu ajutorul unei integrale Riemann.

In acest sens are loc

Teorema 1.5.

Dacă curba Γ definită de reprezentarea parametrică (1) este netedă iar funcția F este continuă pe un domeniu $D \subset \mathbb{R}^3$ care conține imaginea lui Γ, atunci

$$\int_\Gamma F(x, y, z)\, dl = \int_a^b F(f(t), g(t), h(t)) \sqrt{f'^2(t) + g'^2(t) + h'^2(t)}\, dt \qquad (9)$$

Demonstrație. Arătăm mai întîi că $l(t)$ lungimea curbei $\Gamma(t)$, admite derivată continuă pe $[a, b]$.
În condițiile teoremei avem

$$l(t) = \int_a^t \sqrt{f'^2(u) + g'^2(u) + h'^2(u)}\, du$$

Însă funcția de sub semnul integrală este continuă pe $[a, b]$ și deci $l(t)$ este derivabilă și are loc relația

$$l'(t) = \sqrt{f'^2(t) + g'^2(t) + h'^2(t)}$$

Dacă ținem seama de teorema de reducere a integralei Stieltjes la o integrală Riemann, avem

$$\int_\Gamma F(x, y, z)\, dl = \int_a^b F(f(t), g(t), h(t)) \sqrt{f'^2(t) + g'^2(t) + h'^2(t)}\, dt$$

și teorema este demonstrată.

Exemplu. Să se calculeze $I = \int_\Gamma xyz\, dl$ unde Γ este definită de reprezentarea parametrică

$$x = a \cos t;\ y = a \sin t;\ z = bt;\ t \in [0, 2\pi].$$ Avem

$$I = \int_0^{2\pi} a^2 (\cos t \sin t)\, bt \sqrt{a^2 + b^2}\, dt = \frac{1}{2} a^2 b \sqrt{a^2 + b^2} \int_0^{2\pi} t \sin 2t\, dt =$$

$$= \frac{1}{2} a^2 b \sqrt{a^2 + b^2} \left(-\frac{t \cos 2t}{2} \Big|_0^{2\pi} + \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \cos 2t\, dt \right) = -\frac{1}{2} \pi a^2 b \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Observația 1.

Dacă curba Γ din spațiu este netedă pe porțiuni $\Gamma = \bigcup_{i=1}^{n} \Gamma_i$ și funcția F este integrabilă pe fiecare curbă Γ_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ atunci funcția F este integrabilă pe Γ și are loc egalitatea

$$\int_\Gamma F(x, y, z)\, dl = \sum_{i=1}^{n} \int_{\Gamma_i} F(x, y, z)\, dl$$

Exemplu.

Să se calculeze $I = \int_\Gamma (x + y + z)\, dl$ unde $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ iar curbele

Γ_1 şi Γ_2 sînt definite de următoarele reprezentări parametrice

$$x = R\cos t;\ y = R\sin t;\ z = 0;\ t\in\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

respectiv

$$x = 0;\ y = R - t;\ z = t;\ t\in[0, R]$$

Imaginea curbei Γ este ilustrată în fig. 52.

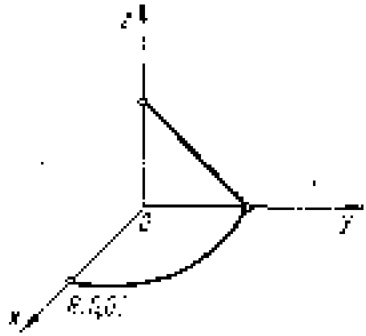

Fig. 52

Avem

$$I = \int_{\Gamma_1}(x + y + z)\,dl + \int_{\Gamma_2}(x + y + z)\,dl$$

Dar

$$\int_{\Gamma_1}(x + y + z)\,dl = \int_0^{\frac{\pi}{2}}(R\cos t + R\sin t)\sqrt{R^2\sin^2 t + R^2\cos^2 t}\,dt = 2R^2$$

şi

$$\int_{\Gamma_2}(x + y + z)\,dl = \int_0^R (0 + R - t + t)\sqrt{2}\,dt = \sqrt{2}\,R^2$$

şi deci

$$I = (2 + \sqrt{2})\,R^2$$

Observaţia 2. Fie Γ o curbă rectificabilă din plan definită de reprezentarea parametrică

$$x = f(t);\ y = g(t);\ t\in[a, b]$$

şi F o funcţie reală definită pe un domeniu plan D care conţine imaginea curbei Γ. Integrala curbilinie de primul tip a funcţiei F de-a lungul curbei Γ se defineşte la fel ca şi integrala curbilinie de primul tip de-a lungul unei curbe rectificabile din spaţiu şi se notează astfel:

$$\int_{\Gamma} F(x, y)\,dl$$

În condiţii asemănătoare celor din teorema 1.5 avem:

$$\int_{\Gamma} F(x, y)\,dl = \int_a^b F(f(t), g(t))\sqrt{f'^2(t) + g'^2(t)}\,dt$$

În particular, dacă curba Γ este definită de reprezentarea parametrică

$$x = t;\ y = f(t);\ t \in [a, b] \text{ adică } y = f(x);\ x \in [a, b]$$

avem

$$\int_{\Gamma} F(x, y)\, dl = \int_a^b F(x, f(x)) \sqrt{1 + f'^2(x)}\, dx$$

Exemplu: Să se calculeze $I = \int_{\Gamma} xy\, dl$ unde Γ este definită de reprezentarea parametrică,

$$x = a \cos t;\ y = a \sin t;\ t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right];\ a > 0$$

avem

$$I = a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \cos t \sqrt{a^2 \sin^2 t + a^2 \cos^2 t}\, dt =$$

$$= a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \cos t\, dt = \frac{a^3}{2}$$

Observaţia 2

Integrala definită $\int_a^b f(x)\, dx$ a unei funcţii reale şi pozitive poate fi interpretată ca fiind egală cu aria unui trapez curbiliniu, haşurat în fig. 33.

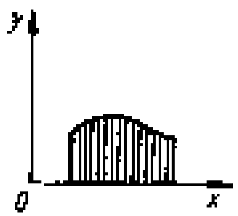

Fig. 33

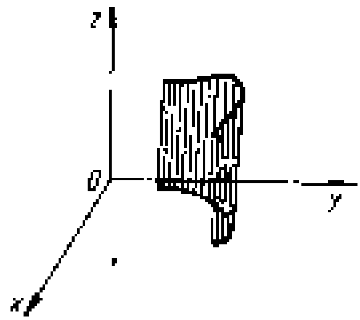

Fig. 34

Similar, integrala curbilinie de primul tip din plan

$$\int_{\Gamma} F(x, y)\, dl$$

a unei funcţii reale F cu $F(x, y) \geq 0$; $(\forall)\ (x, y) \in I(\Gamma)$, poate fi interpretată ca fiind egală cu aria unei porţiuni dintr-o suprafaţă cilindrică, haşurată în fig. 34.

§ 6. MASA ŞI CENTRUL DE GREUTATE ALE UNUI FIR MATERIAL

Să considerăm un fir material de grosime neglijabilă, care este imaginea unei curbe simple rectificabile Γ din spaţiu.

Dacă $\rho(x, y, z)$ este densitatea, cunoscută în fiecare punct $(x, y, z) \in \Gamma(I)$, atunci din considerații de mecanică se poate arăta că masa M şi coordonatele centrului de greutate (x_G, y_G, z_G) ale firului sînt date de formulele:

$$M = \int_\Gamma \rho(x, y, z)\, dl; \quad x_G = \frac{1}{M}\int_\Gamma x\rho(x, y, z)\, dl$$

$$y_G = \frac{1}{M}\int_\Gamma y\rho(x, y, z)\, dl; \quad z_G = \frac{1}{M}\int_\Gamma z\rho(x, y, z)\, dl$$

în ipoteza că integralele scrise există.

Dacă densitatea este constantă (fir material omogen) atunci coordonatele centrului de greutate sînt date de formulele:

$$x_G = \frac{1}{l(\Gamma)}\int_\Gamma x\, dl; \quad y_G = \frac{1}{l(\Gamma)}\int_\Gamma y\, dl; \quad z_G = \frac{1}{l(\Gamma)}\int_\Gamma z\, dl$$

Dacă firul material este imaginea unei curbe simple rectificabile Γ din plan, atunci masa M şi coordonatele centrului de greutate (x_G, y_G) sînt date de formulele:

$$M = \int_\Gamma \rho(x, y)\, dl; \quad x_G = \frac{1}{M}\int_\Gamma x\rho(x, y)\, dl; \quad y_G = \frac{1}{M}\int_\Gamma y\rho(x, y)\, dl.$$

Exemplu:

Să se afle coordonatele centrului de greutate al unui fir material omogen dacă el este imaginea curbei Γ definită de reprezentarea parametrică

$$x = a\cos t;\ y = a\sin t;\ z = bt;\ t \in [0, 2\pi];\ a > 0;\ b > 0$$

Avem:

$$x_G = \frac{\int_0^{2\pi} a(\cos t)\sqrt{a^2 + b^2}\, dt}{\int_0^{2\pi}\sqrt{a^2 + b^2}\, dt} = \frac{a}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos t\, dt = 0;$$

analog $y_G = 0$

$$z_G = \frac{\int_0^{2\pi} bt\sqrt{a^2 + b^2}\, dt}{2\pi\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{\int_0^{2\pi} bt\, dt}{2\pi} = b\pi$$

şi deci $(x_G, y_G, z_G) = (0, 0, b\pi)$

Probleme

Să se calculeze următoarele integrale curbilinii de primul tip.

1) $\int_\Gamma x^2y^2\,dl$, unde $\Gamma: x = a\cos^3 t$; $y = a\sin^3 t$; $t \in [0, 2\pi]$. R: $\frac{3a^5}{70}$

2) $\int_\Gamma z(x^2 + y^2)\,dl$ unde $\Gamma: x = t\cos t$; $y = t\sin t$; $z = t$, $t \in [0, 1]$.

R: $-\frac{\sqrt{3}}{5} + \frac{8\sqrt{2}}{15}$

3) $\int_\Gamma |xy|\,dl$ unde: $x = a\cos t$; $y = b\sin t$; $t \in [0, 4\pi]$ cu $a > 0$ și $b > 0$

R: $\frac{8ab(a^2 + ab + b^2)}{3(a + b)}$

4) $\int_\Gamma (x^2 + y^2)\ln z\,dl$ unde $x = e^t\cos t$, $y = e^t\sin t$; $z = e^t$; $t \in [0, 1]$

R: $\frac{1 + 2e^3}{3\sqrt{3}}$

Să se calculeze masa M și coordonatele centrului de greutate ale firelor materiale care sînt imagini ale curbelor definite de următoarele reprezentări parametrice și au densitățile specificate.

5) $x = a(t - \sin t)$; $y = a(1 - \cos t)$; $t \in [0, 2\pi]$; $a > 0$ și $\rho = \sqrt{y}$

R: $M = 2a\sqrt{2a}\,\pi$; $x_G = a\pi$; $y_G = \frac{3}{2}a$

6) $x = a\cos^3 t$; $y = a\sin^3 t$; $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, unde $a > 0$ și $\rho = 1$

R: $M = \frac{3a}{2}$; $x_G = y_G = \frac{2}{5}a$

7) $x = 4t^5$; $y = \sqrt{15}\,t^4$; $z = 2t^3$; $t \in [-1, 1]$; $\rho = \frac{1}{2}|z|$

R: $M = 7$; $x_G = z_G = 0$; $y_G = \frac{68\sqrt{15}}{105}$

§ 7. INTEGRALA CURBILINIE DE AL DOILEA TIP

Pentru funcțiile reale definite și mărginite pe un interval compact $[a, b]$ s-a introdus integrala Riemann $\int_a^b f(x)\,dx$.

Acest concept poate fi extins la funcţiile vectoriale definite pe imaginea unei curbe, conducînd la noţiunea de integrală curbilinie de al doilea tip. În matematica aplicată, integrala curbilinie apare în probleme diferite cum ar fi determinarea lucrului mecanic, calculul circulaţiei fluidelor etc.

Pentru o forţă constantă $\bar{F} = P\bar{i} + Q\bar{j} + R\bar{k}$ care acţionează asupra unui punct material ce se deplasează de la punctul $A(x_1, y_1, z_1)$ la punctul $B(x_2, y_2, z_2)$ pe segmentul AB, lucrul mecanic a lui $\bar{F}$ este egal cu produsul scalar

$$L = \bar{F}\cdot\overline{AB} = |\bar{F}|\cdot|\overline{AB}|\cdot\cos\alpha = (x_2 - x_1)P + (y_2 - y_1)Q + (z_2 - z_1)R \qquad (1)$$

unde α este unghiul făcut de $\bar{F}$ cu $\overline{AB}$.

Dacă $\bar{r}_1 = x_1\bar{i} + y_1\bar{j} + z_1\bar{k}$ şi $\bar{r}_2 = x_2\bar{i} + y_2\bar{j} + z_2\bar{k}$ sînt vectorii de poziţie ai lui A respectiv B atunci

$$L = \bar{F}\cdot(\bar{r}_2 - \bar{r}_1).$$

În cazul general considerăm o curbă Γ rectificabilă din spaţiu definită de reprezentarea parametrică

$$x = f(t),\quad y = g(t),\quad z = h(t),\quad t \in [a, b] \qquad (2)$$

şi o forţă $\bar{F} = P\bar{i} + Q\bar{j} + R\bar{k}$ ale cărei componente P, Q şi R sînt funcţii reale de trei variabile reale x, y, z definite pe un domeniu D care conţine imaginea lui Γ.

Pentru a defini integrala curbilinie de al doilea tip introducem noţiunea de curbă orientată.

Fie $M(f(t), g(t), h(t))$ punctul de pe $I(\Gamma)$ corespunzător lui $t \in [a, b]$ prin (2). Cînd t parcurge continuu intervalul $[a, b]$ de la a la b, punctul corespunzător M parcurge $I(\Gamma)$ într-un sens pe care îl numim direct.

Cînd t parcurge continuu intervalul $[a, b]$ de la b la a, punctul corespunzător M parcurge $I(\Gamma)$ în sens invers.

Definiţia 1.7

O curbă Γ împreună cu unul din sensurile de parcurgere a lui $I(\Gamma)$ se numeşte curbă orientată.

Curba Γ împreună cu sensul direct de parcurgere a lui $I(\Gamma)$ se notează cu Γ_+. În mod asemănător se defineşte Γ_-.

În fig. 36 sînt ilustrate cele două sensuri de parcurgere a lui $I(\Gamma)$.

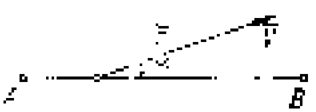

Fig. 35.

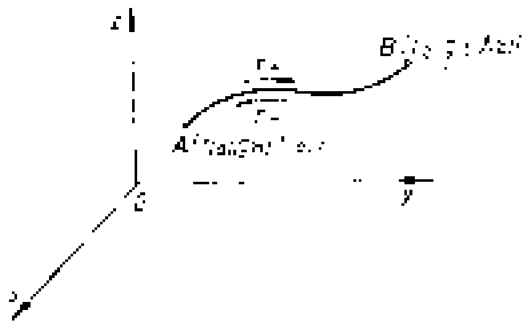

Fig. 36.

Observații

4. Dacă ținem seama de faptul că funcția φ care apare în definiția echivalenței a două drumuri este continuă și strict crescătoare, rezultă că sensul de parcurgere a lui $I(\Gamma)$ nu depinde de alegerea drumului ci numai de curba Γ.

Fie d o diviziune oarecare a intervalului $[a, b]$

$$d = (a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b)$$

și $\xi_i \in [t_i, t_{i+1}]$.

Lucrul mecanic al unei forțe variabile $\mathbf{F}$ care acționează asupra unui punct material ce se deplasează pe $I(\Gamma)$ în sens direct îl aproximăm cu suma

$$\sum_{i=0}^{n-1} P(f(\xi_i), g(\xi_i), h(\xi_i))[f(t_{i+1}) - f(t_i)] +$$
$$+ \sum_{i=0}^{n-1} Q(f(\xi_i), g(\xi_i), h(\xi_i))[g(t_{i+1}) - g(t_i)] + \tag{3}$$
$$+ \sum_{i=0}^{n-1} R(f(\xi_i), g(\xi_i), h(\xi_i))[h(t_{i+1}) - h(t_i)]$$

Este deci natural ca în cazul în care forța $\mathbf{F}$ este variabilă și acționează asupra unui punct material care se deplasează pe $I(\Gamma)$ în sens direct să definim lucrul mecanic a lui $\mathbf{F}$ printr-o sumă de integrale Stieltjes (în cazul în care există)

$$\int_a^b P(f(t), g(t), h(t))\,df(t) + \int_a^b Q(f(t), g(t), h(t))\,dg(t) +$$
$$+ \int_a^b R(f(t), g(t), h(t))\,dh(t)$$

În cazul general al unei funcții vectoriale

$$\mathbf{F} : D \subset \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3 \text{ (cîmp vectorial)}$$

independent de semnificația sa fizică, sîntem conduși la următoarea

Definiție 2.7

Fie Γ o curbă rectificabilă din spațiu definită de reprezentarea parametrică (2). Dacă P, Q și R sînt trei funcții reale definite pe un domeniu $D \subset \mathbf{R}^3$ care conține imaginea lui Γ și dacă următoarele integrale Stieltjes există

$$\int_a^b P(f(t), g(t), h(t))\,df(t), \int_a^b Q(f(t), g(t), h(t))\,dg(t)$$
$$\int_a^b R(f(t), g(t), h(t))\,dh(t)$$

atunci suma lor se notează astfel:

$$\int_{\Gamma_+} P(x, y, z)\,dx + Q(x, y, z)\,dy + R(x, y, z)\,dz \tag{4}$$

şi se numeşte integrala curbilinie de al doilea tip a funcţiei vectoriale

$$\bar{V} = P\bar{i} + Q\bar{j} + R\bar{k} \text{ (cîmp vectorial)}$$

de-a lungul curbei Γ_γ.

Pentru ca noţiunea de integrală curbilinie de al doilea tip să nu fie contradictorie, trebuie să arătăm că nici existenţa şi nici valoarea sa nu depind de alegerea drumului ci numai de curbă.

In acest sens are loc

Teorema 1.7.

Fie γ_1 şi γ_2 două drumuri din spaţiu, rectificabile şi echivalente, definite de următoarele reprezentări parametrice

$$x = f_1(t);\ y = g_1(t);\ z = h_1(t);\ t \in [a_1, b_1]$$

respectiv

$$x = f_2(\tau);\ y = g_2(\tau);\ z = h_2(\tau);\ \tau \in [a_2, b_2]$$

atunci există şi sînt egale următoarele integrale Stieltjes

$$\int_{a_1}^{b_1} P(f_1(t),\ g_1(t),\ h_1(t))\, df_1(t) = \int_{a_2}^{b_2} P(f_2(\tau),\ g_2(\tau),\ h_2(\tau))\, df_2(\tau) \qquad (5)$$

Demonstraţie:

Să presupunem că prima integrală există.
Fie

$$d_1 = (a_1 = t_0 < t_1 < \ldots < t_i < \ldots < t_n = b_1)$$

o diviziune a intervalului $[a_1, b_1]$ şi $\xi_i \in [t_i, t_{i+1}]$.

Funcţia φ care apare în condiţia de echivalenţă a lui γ_1 cu γ_2 asociază lui d_1 o diviziune

$$d_2 = (a_2 = \tau_0 < \tau_1 < \ldots < \tau_i < \ldots < \tau_n = b_2)$$

a intervalului $[a_2, b_2]$; unde $\tau_i = \varphi(t_i)$.

Prin funcţia φ lui ξ_i îi corespunde o valoare $\sigma_i = \varphi(\xi_i)$ cu proprietatea că $\sigma_i \in [\tau_i, \tau_{i+1}]$. Dacă ţinem seama că drumurile sînt echivalente avem

$$f_1(t) = f_2(\varphi(t));\ g_1(t) = g_2(\varphi(t));\ h_1(t) = h_2(\varphi(t));\ (\forall)\ t \in [a_1, b_1]$$

şi deci

$$\sum_{i=0}^{n-1} P(f_1(\xi_i),\ g_1(\xi_i),\ h_1(\xi_i))\,[f_1(t_{i+1}) - f_1(t_i)] =$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} P(f_2(\sigma_i),\ g_2(\sigma_i),\ h_2(\sigma_i))\,[f_2(\tau_{i+1}) - f_2(\tau_i)]$$

Dacă observăm că φ este uniform continuă pe $[\alpha_1, \beta_1]$ rezultă că atunci cînd norma uneia dintre diviziunile d_1 și d_2 devine oricît de mică (de indice) ce norma celeilalte este suficient de mică și prin urmare există a doua integrală din (5) și are loc egalitatea (5). În mod asemănător se arată că au loc egalitățile

$$\int_{\alpha_1}^{\beta_1} Q(f_1(t), g_1(t), h_1(t))\, dg_1(t) = \int_{\alpha_2}^{\beta_2} Q(f_2(\tau), g_2(\tau), h_2(\tau))\, dg_2(\tau)$$

$$\int_{\alpha_1}^{\beta_1} R(f_1(t), g_1(t), h_1(t))\, dh_1(t) = \int_{\alpha_2}^{\beta_2} R(f_2(\tau), g_2(\tau), h_2(\tau))\, dh_2(\tau)$$

și deci existența și valoarea integralei curbilinii de al doilea tip nu depinde de alegerea drumului ci numai de curba Γ.

Observația 1

Fie Γ o curbă rectificabilă din plan, definită de reprezentarea parametrică

$$x = f(t);\; y = g(t);\; t \in [a, b]$$

și P și Q două funcții reale definite pe un domeniu din plan care conține imaginea lui Γ.

Integrala curbilinie de al doilea tip a funcției vectoriale

$$\mathbf{V} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j}$$

de-a lungul curbei Γ_+ se definește la fel ca și integrala curbilinie de al doilea tip de-a lungul unei curbe din spațiu și se notează

$$\int_{\Gamma_+} P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy$$

Observația 2

Dacă $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ este vectorul de poziție al unui punct de pe $I(\Gamma)$ și $d\mathbf{r}$ este vectorul simbolic

$\mathbf{i}\, dx + \mathbf{j}\, dy + \mathbf{k}\, dz$ atunci expresia

$$P(x, y, z)\, dx + Q(x, y, z)\, dy + R(x, y, z)\, dz$$

este egală cu produsul scalar simbolic $\mathbf{V} \cdot d\mathbf{r}$ și integrala curbilinie de al doilea tip se scrie sub forma condensată, vectorială

$$\int_{\Gamma_+} \mathbf{V} \cdot d\mathbf{r}$$

Observația 3. Integrala curbilinie de al doilea tip în lungul curbei Γ_- se definește prin egalitatea

$$\int_{\Gamma_-} \mathbf{V} \cdot d\mathbf{r} = -\int_{\Gamma_+} \mathbf{V} \cdot d\mathbf{r}$$

Observaţia 4.

Dacă curba Γ din definiţia 2.7 este închisă atunci integrala curbilinie de al doilea tip se notează astfel

$$\oint_{\Gamma_+} \bar{F}\cdot d\bar{r}$$

Dacă ţinem seama de proprietăţile integralei Stieltjes rezultă imediat următoarele proprietăţi ale integralei curbilinii de al doilea tip.

1) Dacă funcţiile vectoriale $\bar{F}_1$ şi $\bar{F}_2$ sînt integrabile de-a lungul curbei Γ, atunci şi funcţia vectorială $\bar{F}_1+\bar{F}_2$ este integrabilă de-a lungul curbei Γ, şi are loc egalitatea

$$\int_{\Gamma_+}(\bar{F}_1+\bar{F}_2)\cdot d\bar{r}=\int_{\Gamma_+}\bar{F}_1\cdot d\bar{r}+\int_{\Gamma_+}\bar{F}_2\cdot d\bar{r}$$

2) Dacă funcţia vectorială $\bar{F}$ este integrabilă de-a lungul curbei Γ, atunci $\lambda\bar{F}$ este integrabilă de-a lungul curbei Γ, oricare ar fi λ real şi

$$\int_{\Gamma_+}\lambda\bar{F}\cdot d\bar{r}=\lambda\int_{\Gamma_+}\bar{F}\cdot d\bar{r}$$

3) Dacă curba Γ este juxtapunerea curbelor Γ_1 şi Γ_2 $(\Gamma=\Gamma_1\cup\Gamma_2)$ şi dacă funcţia vectorială $\bar{F}$ este integrabilă de-a lungul curbelor Γ_1 şi Γ_2, atunci $\bar{F}$ este integrabilă de-a lungul curbei Γ, şi are loc egalitatea

$$\int_{\Gamma_+}\bar{F}\cdot d\bar{r}=\int_{\Gamma_{1+}}\bar{F}\cdot d\bar{r}+\int_{\Gamma_{2+}}\bar{F}\cdot d\bar{r}$$

§ 8. CALCULUL INTEGRALEI CURBILINII DE AL DOILEA TIP

În anumite condiţii calculul integralei curbilinii de al doilea tip revine la calculul unei integrale Riemann, aşa cum reiese din următoarea

Teorema 2.8.

Fie Γ o curbă netedă din spaţiu definită de reprezentarea parametrică

$$x=f(t);\ y=g(t);\ z=h(t);\ t\in[a,b]$$

Dacă P, Q şi R sînt trei funcţii reale definite şi continue pe un domeniu $D\subset\mathbf{R}^3$, care conţine imaginea lui Γ, atunci există integrala curbilinie (4) şi are loc egalitatea

$$\int_{\Gamma_+}P(x,y,z)\,dx+Q(x,y,z)\,dy+R(x,y,z)\,dz=$$

$$=\int_a^b[P(f(t),g(t),h(t))f'(t)+Q(f(t),g(t),h(t))g'(t)+$$

$$+R(f(t),g(t),h(t))h'(t)]\,dt \tag{6}$$

Demonstrație:

Funcțiile f, g și h au derivatele continue (curba Γ a fost presupusă netedă) și prin simpla aplicare a teoremei de reducere a unei integrale Stieltjes la o integrală Riemann avem

$$\int_{\Gamma} P(x, y, z)\, dx = \int_a^b P(f(t), g(t), h(t))\, f'(t)\, dt$$

$$\int_{\Gamma} Q(x, y, z)\, dy = \int_a^b Q(f(t), g(t), h(t))\, g'(t)\, dt$$

$$\int_{\Gamma} R(x, y, z)\, dz = \int_a^b R(f(t), g(t), h(t))\, h'(t)\, dt$$

Dacă ținem seama de definiția integralei curbilinii de al doilea tip (definiția 2.7) rezultă imediat egalitatea (6).

Exemplu:

Să se calculeze $I = \int_{\Gamma} y\, dx - x\, dy + (x^2 + y^2 - z^2)\, dz$ unde curba Γ este definită de reprezentarea parametrică

$$x = -t \cos t + \sin t\,;\; y = t \sin t + \cos t\,;\; z = t + 1\,;\; t \in [0, \pi]$$

În acest caz avem $f'(t) = t \sin t$; $g'(t) = t \cos t$; $h'(t) = 1$.
Dacă ținem seama de formula (6) avem

$$I = \int_0^{\pi} [(t \sin t + \cos t)\, t \sin t - (-t \cos t + \sin t)\, t \cos t$$

$$+ (-t \cos t + \sin t)^2 + (t \sin t + \cos t)^2 - (t + 1)^2]\, dt$$

$$= \int_0^{\pi} (3t^2 + 2t + 2)\, dt = \pi^3 + \pi^2 + 2\pi$$

Observație:

În cazul integralei curbilinii de al doilea tip de-a lungul unei curbe din plan se arată, în condiții asemănătoare celor din teorema 2.8, că are loc egalitatea

$$\int_{\Gamma} P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy = \int_a^b [P(f(t), g(t))\, f'(t) + Q(f(t), g(t))\, g'(t)]\, dt \qquad (7)$$

Exemplu:

Să se calculeze $I = \int_{\Gamma} x\, dx + e^x\, dy$, unde Γ este definită de reprezentarea parametrică

$$x = \ln (1 + t)\,;\; y = \sqrt{1 - t}\,;\; t \in [0, 1]$$

În acest caz $f'(t) = \frac{1}{1+t}$ şi $g'(t) = \frac{1}{2\sqrt{1+t}}$; deci

$$I = \int_0^1 \left(\frac{\ln(1+t)}{1+t} + \frac{(1+t)}{2\sqrt{1+t}}\right) dt = \int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{1+t}\, dt + \frac{1}{2}\int_0^1 \sqrt{1+t}\, dt =$$

$$= \frac{1}{2}(\ln 2)^2 + \frac{1}{3}(2\sqrt{2} - 1)$$

§ 9. INDEPENDENŢA DE DRUM A INTEGRALEI CURBILINII

După cum am văzut, integrala curbilinie de al doilea tip are o semnificaţie fizică deosebită şi anume ea exprimă lucrul mecanic al unei forţe care acţionează asupra unui punct material ce se deplasează de-a lungul lui $I(\Gamma)$. În legătură cu lucrul mecanic se pune problema independenţei sale de drum, adică valoarea lucrului mecanic să nu depindă de curba Γ (netedă pe porţiuni) pe a cărei imagine se află punctele A şi B ci numai de aceste puncte.

În acest sens un exemplu ne este oferit de forţa gravitaţională, pentru care se ştie că lucrul mecanic nu depinde de drum. Independenţa de drum a integralei curbilinii de al doilea tip, prezintă interes şi din punct de vedere matematic. Pentru a da condiţii necesare şi suficiente ca integrala curbilinie de al doilea tip să nu depindă de drum sînt necesare cîteva noţiuni.

Definiţia 1.9.

Spunem că domeniul $D \subset \mathbf{R}^2$ este un domeniu simplu conex dacă odată cu orice curbă Γ simplă şi închisă cu imaginea $I(\Gamma) \subset D$, aparţine lui D şi porţiunea plană mărginită de $I(\Gamma)$.

Exemple:

Interiorul unui cerc este un domeniu simplu conex din plan.

Partea plană mărginită de două cercuri unul interior celuilalt (coroană circulară) nu este un domeniu simplu conex.

Definiţia 2.9.

Spunem că domeniul $D \subset \mathbf{R}^3$ este un domeniu simplu conex dacă pentru orice curbă Γ simplă şi închisă cu $I(\Gamma) \subset D$, există o suprafaţă deschisă cu bordura $I(\Gamma)$, conţinută în D.

Exemple:

Interiorul unei sfere este un domeniu simplu conex în $\mathbf{R}^3$.

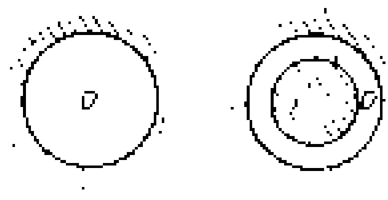

Fig. 77.

Vom da în continuare condiţii necesare şi suficiente pentru ca o integrală curbilinie să nu depindă de drum.

Aceste condiții sînt date de:

Teorema 1.9.

Fie P, Q și R trei funcții reale definite și continue pe un domeniu simplu conex $D \subset \mathbf{R}^3$. Următoarele afirmații sînt echivalente:

1) Există o funcție $V : D \to \mathbf{R}$, diferențiabilă, astfel încît

$$dV(x, y, z) = P(x, y, z)\,dx + Q(x, y, z)\,dy + R(x, y, z)\,dz;$$

$$(\forall)\,(x, y, z) \in D \tag{6}$$

2) Integrala curbilinie a funcției vectoriale

$$\bar{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$$

este nulă pe orice curbă Γ simplă, închisă, netedă pe porțiuni cu $I(\Gamma) \subset D$.

3) Pentru orice două puncte M_0 și M din D, integrala curbilinie a lui $\bar{F}$ pe orice două curbe simple și netede cu imaginile în D, de capete M_0 și M, este aceeași.

Demonstrație

Să arătăm că afirmația 1) implică afirmația 3). Fie $M(x, y, z)$ și $M_0(x_0, y_0, z_0)$ două puncte arbitrare, dar fixate, din D.

Fie Γ_{M_0M} o curbă simplă, netedă avînd capetele M_0 și M, definită de următoarea reprezentare parametrică:

$$x = f(\tau);\ y = g(\tau);\ z = h(\tau);\ \tau \in [t_0, t] \text{ și}$$

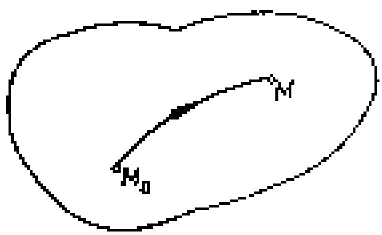

Fig. 38

$I(\Gamma_{M_0M}) \subset D$. Dacă ținem seama de condiția 1), de teorema 1.8 și de regula de derivare a unei funcții compuse, avem:

$$\int_{\Gamma_{M_0M}} P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \int_{\Gamma_{M_0M}} \frac{\partial V}{\partial x}\,dx + \frac{\partial V}{\partial y}\,dy + \frac{\partial V}{\partial z}\,dz$$

$$= \int_{t_0}^{t} \left(\frac{\partial V}{\partial x}\frac{df}{d\tau} + \frac{\partial V}{\partial y}\frac{dg}{d\tau} + \frac{\partial V}{\partial z}\frac{dh}{d\tau} \right) d\tau = \int_{t_0}^{t} \frac{d}{d\tau} V(f(\tau), g(\tau), h(\tau))\,d\tau$$

$$= V(f(t), g(t), h(t)) - V(f(t_0), g(t_0), h(t_0)) = V(M) - V(M_0)$$

și deci valoarea integralei curbilinii a lui $\bar{F}$ depinde numai de punctele M_0 și M.

Invers, din afirmaţia 3) să arătăm că rezultă afirmaţia 1).

Pentru aceasta vom considera un punct arbitrar $M_0(x_0, y_0, z_0)$, dar fixat, din D.

Fie $F = Pi + Qj + Rk$ o funcţie vectorială pentru care valoarea integralei curbilinii pe orice curbă netedă de capete M_0 şi M (punct arbitrar din D) nu depinde de curbă dar depinde de punctul M. În acest mod există funcţia

$$V(x, y, z) = V(M) = \int_{\Gamma_{M_0M}} P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y + R\,\mathrm{d}z$$

Vom arăta că funcţia V verifică afirmaţia 1); pentru aceasta trebuie demonstrat că:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = P; \quad \frac{\partial V}{\partial y} = Q; \quad \frac{\partial V}{\partial z} = R \text{ pe } D$$

Dovedim numai prima dintre aceste egalităţi.

Deoarece D este domeniu, există o sferă cu centrul în punctul $M(x, y, z)$ conţinută în D. În această sferă considerăm punctul $M'(x + h, y, z)$ şi notăm cu $\Gamma_{MM'}$ segmentul de dreaptă determinat de punctele M şi M'. Avem:

$$V(x + h, y, z) = \int_{\Gamma_{M_0M} \cup \Gamma_{MM'}} P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y + R\,\mathrm{d}z$$

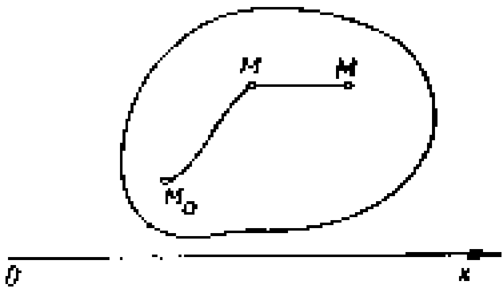

Fig. 59

şi dacă ţinem seama de proprietăţile integralei curbilinii de al doilea tip obţinem:

$$V(x + h, y, z) - V(x, y, z) = \int_{\Gamma_{MM'}} P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y + R\,\mathrm{d}z$$

Dar y şi z sînt constante pe MM', deci

$$V(x + h, y, z) - V(x, y, z) = \int_x^{x+h} P(t, y, z)\,\mathrm{d}t.$$

Funcţia P este continuă pe D, deci putem aplica formula de medie pentru integrale şi obţinem:

$$V(x + h, y, z) - V(x, y, z) = hP(x + \theta h, y, z);\ 0 < \theta < 1$$

Atunci, folosind din nou continuitatea funcţiei P, rezultă:

$$\lim_{h \to 0} \frac{U(x+h, y, z) - U(x, y, z)}{h} = P(x, y, z)$$

pentru orice $(x, y, z) \in D$, adică $\frac{\partial U}{\partial x} = P$ pe D.

În mod asemănător se arată că $\frac{\partial U}{\partial y} = Q$ şi $\frac{\partial U}{\partial z} = R$ pe D şi deci 3) $\Rightarrow$ 1).

Echivalenţa lui 2) cu 3) este imediată.

Presupunem adevărată afirmaţia 2).

Fie Γ' şi Γ'' două curbe netede cu imaginile în D şi a căror capete sînt punctele M_0 şi M.

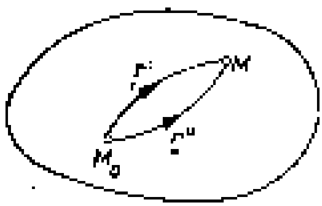

Fig. 40.

Considerăm curba $\Gamma = \Gamma' \cup \Gamma''^{-}$. Prin ipoteză avem:

$\oint_{\Gamma} P\,dx + Q\,dy + R\,dz = 0$; dar $\oint_{\Gamma} = \int_{\Gamma'} + \int_{\Gamma''^{-}}$

şi deci

$$\int_{\Gamma'} + \int_{\Gamma''^{-}} = 0, \text{ de unde rezultă } \int_{\Gamma'} = \int_{\Gamma''}$$

Prin urmare 2) $\Rightarrow$ 3). Să arătăm că 3) $\Rightarrow$ 2). Fie Γ o curbă simplă, închisă netedă pe porţiuni cu imaginea conţinută în D. Putem pune $\Gamma = \Gamma' \cup \Gamma''$ unde Γ' şi Γ'' sînt două curbe avînd aceleaşi capete.

Avem:

$$\oint_{\Gamma_+} = \int_{\Gamma'_+} + \int_{\Gamma''_+} = \int_{\Gamma'_+} - \int_{\Gamma''_-}$$

Prin ipoteză $\int_{\Gamma'_+} = \int_{\Gamma''_-}$, de unde rezultă $\oint_{\Gamma_+} = 0$, deci 3) $\Rightarrow$ 2) şi teorema este demonstrată.

Prima afirmaţie din teorema 3.9 arată că problema independenţei de drum a integralei curbilinii revine la problema recunoaşterii faptului că expresia de sub semnul integrală este diferenţiala unei funcţii de trei variabile. Pentru a da un răspuns la această problemă dăm mai întîi.

Definiţia 3.9.

Fie P, Q şi R trei funcţii reale definite şi continue pe domeniul $D \subset \mathbf{R}^3$. Spunem că expresia diferenţială:

$$P(x, y, z)\,dx + Q(x, y, z)\,dy + R(x, y, z)\,dz \tag{9}$$

este o diferenţială totală exactă dacă există o funcţie

$U: D \to \mathbf{R}$, diferenţiabilă pe D astfel încît:

$dU(x, y, z) = P(x, y, z)\,dx + Q(x, y, z)\,dy + R(x, y, z)\,dz$ pentru orice $(x, y, z) \in D$.

Cu această ultimă noțiune dacă ținem seama de teorema 1.9, integrala curbilinie de al doilea tip este independentă de drum, dacă și numai dacă expresia diferențială care apare sub semnul integrală, este o diferențială totală exactă.

Un răspuns la problema formulată mai înainte este dat de:

Teorema 2.9.

Fie P, Q și R trei funcții reale definite pe un domeniu simplu conex $D \subset \mathbf{R}^3$ și admițînd derivate parțiale de ordinul întîi continue pe D. Expresia diferențială

$$P(x, y, z)\,dx + Q(x, y, z)\,dy + R(x, y, z)\,dz \tag{9}$$

este o diferențială totală exactă dacă și numai dacă pe D au loc egalitățile

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}; \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}; \quad \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z}.$$

Demonstrație. Presupunem că expresia diferențială (9) este o diferențială totală exactă și deci există o funcție $V: D \to \mathbf{R}$, diferențiabilă astfel încît

$$dV(x, y, z) = P(x, y, z)\,dx + Q(x, y, z)\,dy + R(x, y, z)\,dz$$

$$(\forall)\ (x, y, z) \in D$$

Dacă scriem diferențiala funcției V, obținem

$$\frac{\partial V}{\partial x} = P; \quad \frac{\partial V}{\partial y} = Q; \quad \frac{\partial V}{\partial z} = R$$

Despre funcțiile P, Q și R am propus că admit derivate parțiale de ordinul întîi continue, fapt care garantează existența și continuitatea tuturor derivatelor mixte de ordinul doi ale funcției V. Au loc egalitățile:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} = \frac{\partial P}{\partial y}; \quad \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial z} = \frac{\partial P}{\partial z}; \quad \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial x} = \frac{\partial Q}{\partial x};$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y \partial z} = \frac{\partial Q}{\partial z}; \quad \frac{\partial^2 V}{\partial z \partial x} = \frac{\partial R}{\partial x}; \quad \frac{\partial^2 V}{\partial z \partial y} = \frac{\partial R}{\partial y}$$

Prin simpla aplicare a criteriului lui Schwarz de egalitate a derivatelor mixte deducem egalitățile din enunț.

Reciproc, presupunem că au loc egalitățile din enunț și să arătăm că există o funcție V astfel încît

$$dV = P\,dx + Q\,dy + R\,dz \text{ pe } D$$

Funcția V o construim în felul următor:

Fie $M_0(x_0, y_0, z_0)$ un punct fixat din D și $M(x, y, z)$ un punct arbitrar din D. Considerăm

$$V(x, y, z) = \int_{x_0}^{x} P(t, y_0, z_0)\,dt + \int_{y_0}^{y} Q(x, t, z_0)\,dt + \int_{z_0}^{z} R(x, y, t)\,dt$$

Trebuie dovedite egalităţile $\frac{\partial V}{\partial x} = P$; $\frac{\partial V}{\partial y} = Q$; $\frac{\partial V}{\partial z} = R$.

Avem:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = P(x, y_0, z_0) + \int_{y_0}^{y} \frac{\partial Q}{\partial x}(x, t, z_0)\, dt + \int_{z_0}^{z} \frac{\partial R}{\partial x}(x, y, t)\, dt$$

Dacă ţinem seama de egalităţile din enunţ avem:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = P(x, y_0, z_0) + \int_{y_0}^{y} \frac{\partial P}{\partial y}(x, t, z_0)\, dt + \int_{z_0}^{z} \frac{\partial P}{\partial z}(x, y, t)\, dt =$$

$$= P(x, y_0, z_0) + P(x, y, z_0) - P(x, y_0, z_0) + P(x, y, z) -$$

$$- P(x, y, z_0) = P(x, y, z)$$

unde am folosit regula de derivare sub semnul integrală şi formula lui Newton-Leibniz.

În mod analog se demonstrează şi egalităţile:

$$\frac{\partial V}{\partial y} = Q; \quad \frac{\partial V}{\partial z} = R.$$

Observaţia 1.

În cazul integralelor curbilinii independente de drum se mai foloseşte şi notaţia

$$\int_{M_1(x_1, y_1, z_1)}^{M_2(x_2, y_2, z_2)} P\, dx + Q\, dy + R\, dz$$

care pune în evidenţă doar capetele M_1 şi M_2 ale curbelor pe care se consideră integrala.

Observaţia 2.

Referitor la expresiile diferenţiale de forma

$$P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy, \quad (x, y) \in D \subset \mathbf{R}^2$$

are loc:

Teorema 2.9. Fie P şi Q două funcţii reale definite pe un domeniu simplu conex $D \subset \mathbf{R}^2$ şi admiţînd derivate parţiale de ordinul întîi continue pe D. Expresia diferenţială:

$$P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy$$

este o diferenţială totală exactă dacă şi numai dacă pe D are loc egalitatea:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

Demonstraţia acestei teoreme urmează aceleaşi etape ca şi demonstraţia teoremei 2.9 unde se consideră

$$V(x, y) = \int_{x_0}^{x} P(t, y_0)\, dt + \int_{y_0}^{y} Q(x, t)\, dt$$

Observația 3.

Condiția ca domeniul să fie simplu conex este esențială așa cum rezultă din următorul exemplu:

Fie $D = \left\{(x, y) : \frac{1}{2} < x^2 + y^2 < 2\right\}$ și curba Γ definită de reprezentarea parametrică

$$x = \cos t;\ y = \sin t,\ t \in [0, 2\pi]$$

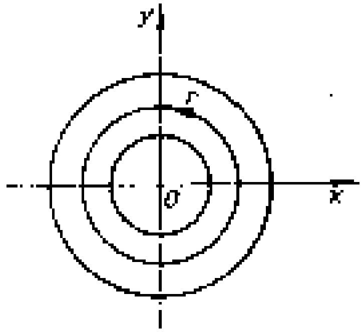

Fig. 47

Se vede imediat că D nu este un domeniu simplu conex. Fie $\bar{F} : D \to \mathbf{R}$ funcția vectorială definită prin

$$\bar{F}(x, y) = -\frac{y}{x^2 + y^2}\,\bar{i} + \frac{x}{x^2 + y^2}\,\bar{j}$$

În acest caz avem $P(x, y) = \frac{-y}{x^2 + y^2}$ și $Q(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}$

Funcțiile P și Q admit derivate parțiale de ordinul întîi continue pe D și are loc egalitatea:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

Totuși:

$$\oint_{\Gamma} P\,dx + Q\,dy = \oint_{\Gamma} \frac{-y\,dx + x\,dy}{x^2 + y^2} = \int_0^{2\pi} (\sin^2 t + \cos^2 t)\,dt = 2\pi \neq 0$$

Probleme

Să se calculeze următoarele integrale curbilinii de al doilea tip:

1) $\int_\Gamma \frac{dx}{x^2 + y^2}$, unde $\Gamma : x = a\cos t;\ y = a\sin t;\ t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

$$R: -\frac{2\pi\sqrt{3}}{9a^2}$$

2) $\int_{\Gamma_+} (\arcsin y)\,dx + x^2\,dy$, unde $\Gamma: x = t;\ y = \sqrt{1 - t^2};\ t \in [-1, 1]$.

$R: \frac{3\pi}{8}$.

3) $\int_{\Gamma} yz\,dx + xz\,dy - xy\,dz$, unde $\Gamma: x = t;\ y = t^2;\ z = t^3;\ t \in [0, 1]$.

$R: \frac{61}{42}$

4) $\int_{\Gamma_+} z\sqrt{a^2 - y^2}\,dx + xz\,dy + (x^2 + y^2)\,dz$, unde Γ:

$$x = a\cos t;\ y = a\sin t;\ z = bt;\ t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

$R: \frac{a^2 b}{2}(\pi + 1)$.

5) $\int_{\Gamma_+} (y - 1)\,dx + x^2\,dy$, unde $I(\Gamma)$ este porţiunea din parabola $y = 1 - x^2$ cuprinsă între punctele $A(1, 0)$ şi $B(-1, 0)$ şi $I(\Gamma)$ are originea în punctul A.

$R: \frac{2}{3}$.

6) $\oint_{\Gamma_+} y\,dx - (x - a)\,dy$, unde Γ este elipsa $\frac{(x - a)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$; $a > 0$, $b > 0$.

$R: -2\pi ab$.

7) $\int_{\Gamma_+} \sqrt{y^2 + z^2}\,dx + \sqrt{z^2 + x^2}\,dy + \sqrt{x^2 + y^2}\,dz$, unde $I(\Gamma)$ este segmentul de dreaptă AB cu $A = (-1, -1, -1)$ şi $B = (2, 2, 2)$, iar A este originea.

$R: \frac{15\sqrt{2}}{2}$.

8) $\oint_{\Gamma_+} (y - 2z)\,dx + (x - z)\,dy + (2x - y)\,dz$, unde $I(\Gamma)$ este cercul din spaţiu obţinut prin intersecţia sferei $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ $(a > 0)$ cu planul $x - y + z = 0$, iar Γ are originea şi capătul în punctul $A\left(\frac{a}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{a}{\sqrt{2}}\right)$

Indicaţie: Pentru $I(P)$ se obţine următoarea reprezentare parametrică

$$x = -\frac{a}{\sqrt{2}}\cos t + \frac{a}{\sqrt{6}}\sin t;\ y = \frac{2a}{\sqrt{6}}\sin t;\ z = -\frac{a}{\sqrt{6}}\sin t - \frac{a}{\sqrt{2}}\cos t,\ t \in [0, 2\pi].$$

R: $\frac{4a^2\sqrt{3}}{3}$.

Verificînd în prealabil ca expresia de sub semnul integrală să fie o diferenţială totală, să se calculeze următoarele integrale curbilinii în care s-au specificat numai capetele curbei de integrare.

9) $\int y^2 e^x \,dx + 2y e^x \,dy$. R: 4.

10) $\int_{\left(\frac{1}{2},\, 2\right)} \frac{1}{2}\sqrt{\frac{y}{x}}\,dx + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{x}{y}}\,dy$, luată pe o curbă cu imaginea în primul cadran $(x > 0,\ y > 0)$.

R: 2.

11) $\int \frac{y^2}{(x-y)^2}\,dx - \frac{x^2}{(x-y)^2}\,dy$, luată pe o curbă a cărei imagine nu intersectează prima bisectoare.

R: 4.

12) $\int_{(0,0,0)} x^2\,dx + \sqrt{y}\,dy - z\sqrt{z}\,dz$, luată pe o curbă cu imaginea aflată în regiunea $y \geq 0;\ z \geq 0$.

R: $-2(1 - 3\sqrt{3})$.

13) $\int \frac{x\,dx + y\,dy + z\,dz}{(x^2 + y^2 + z^2)\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$, luată pe o curbă a cărei imagine nu trece prin originea coordonatelor.

R: $\frac{2}{15}$.

14) $\int \frac{y^2 z^2\,dx - 2xz^2\,dy - 2x^2 y\,dz}{(2x - yz)^2}$, luată pe o curbă a cărei imagine nu traversează suprafaţa de ecuaţie $2x - yz = 0$.

R: $\frac{2}{3}$.

CAPITOLUL VIII

INTEGRALE DUBLE

§ 1. DEFINIȚIA INTEGRALEI DUBLE

Definiție 1.1. Fie $D \subset \mathbf{R}^2$ un domeniu. Reuniunea dintre un domeniu și frontiera sa se numește domeniu închis. Un domeniu închis și mărginit se numește domeniu compact.

Pe dreapta reală, orice domeniu este un interval, pe cînd în plan sau în spațiu există domenii care nu sînt intervale. Unele domenii din plan sau spațiu au o structură mult deosebită de aceea a unui interval. Din această cauză vom considera numai acele domenii care au arie. Cadrul firesc în care se definește integrala dublă este acela al domeniilor compacte a căror frontieră este o reuniune finită de imagini de curbe netede. În tot ce urmează convenim să spunem că frontiera unui astfel de domeniu este o curbă netedă pe porțiuni. Se demonstrează că astfel de domenii au arie, [24].

În continuare vom considera numai domenii de acest fel. Fie $f: D \subset \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, o funcție reală definită și mărginită pe domeniul compact D.

Dacă presupunem că f este pozitivă, $f(x, y) \geq 0$ pentru orice $(x, y) \in D$, atunci graficul său este o suprafață S situată deasupra planului xOy și proiecția lui S pe planul xOy este domeniul D.

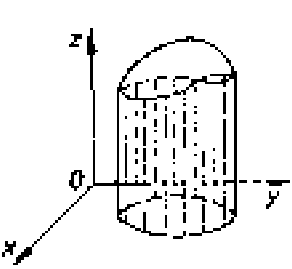

Fig. 42

Pentru a afla volumul cilindrului care se sprijină pe D și este limitat superior de S sînt necesare cîteva noțiuni.

Definiție 2.1.

Prin diametrul unei mulțimi $A \subset \mathbf{R}^2$, notat cu $d(A)$ înțelegem marginea superioară a mulțimii de distanțe între diferitele puncte ale lui A. Avem deci

$$d(A) = \sup_{M, N \in A} d(M, N)$$

unde $d(M, N)$ este distanța dintre două puncte M și N arbitrare ale lui A.

Exemplu de diametru al unei mulţimi date este ilustrat în figura 43.

Definiţia 5.1. Prin diviziune $\Delta = \{D_1, D_2, \ldots, D_n\}$ a domeniului compact D înţelegem un număr finit de domenii compacte $D_1, D_2, \ldots, D_n$ fără puncte interioare comune, astfel încît

$$D = D_1 \cup D_2 \cup \ldots \cup D_n$$

şi $\mathrm{Fr}\, D_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, este o curbă închisă netedă sau netedă pe porţiuni.

Fig. 43

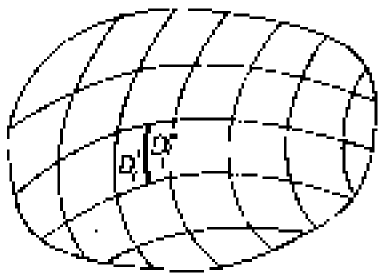

Fig. 44

Prin norma unei diviziuni $\Delta = (D_1, D_2, \ldots, D_n)$, notată cu $\nu(\Delta)$, înţelegem numărul pozitiv dat de egalitatea $\nu(\Delta) = \max\limits_{1 \leq i \leq n} d(D_i)$.

Fie Δ_1 şi Δ_2 două diviziuni ale domeniului compact D.

Spunem că diviziunea Δ_2 este mai fină decît diviziunea Δ_1 şi vom scrie $\Delta_1 \subset \Delta_2$ dacă orice domeniu al diviziunii Δ_1 sau coincide cu un domeniu al diviziunii Δ_2, sau este egal cu o reuniune finită de domenii ale diviziunii Δ_2.

În fig. 44 am considerat două diviziuni

$$\Delta_1 = \{D_1, \ldots, D_{i-1}, D_i, D_{i+1}, \ldots, D_n\}$$

$$\Delta_2 = \{D_1, \ldots, D_{i-1}, D_i', D_i'', D_{i+1}, \ldots, D_n\}$$

În acest caz avem $D_i = D_i' \cup D_i''$ iar celelalte domenii ale diviziunii Δ_1 coincid cu domenii ale diviziunii Δ_2 şi deci $\Delta_1 \subset \Delta_2$.

Dacă $\Delta_1 \subset \Delta_2$, atunci are loc inegalitatea $\nu(\Delta_1) \geq \nu(\Delta_2)$.

Reciproc nu este adevărat, dacă Δ_1 şi Δ_2 sînt două diviziuni ale lui D şi $\nu(\Delta_1) \geq \nu(\Delta_2)$ nu rezultă că $\Delta_1 \subset \Delta_2$.

Fie $\Delta = (D_1, D_2, \ldots, D_n)$ o diviziune oarecare a domeniului compact D şi funcţia reală f definită şi mărginită pe D. Vom nota cu

$$m_i = \inf_{(x,y)\in D_i} f(x, y) \qquad M_i = \sup_{(x,y)\in D_i} f(x, y)$$

$$m = \inf_{(x,y)\in D} f(x, y) \qquad M = \sup_{(x,y)\in D} f(x, y)$$

au loc inegalităţile

$$m \leq f(x, y) \leq M \qquad (\forall) \qquad (x, y) \in D$$

$$m_i \leq f(x, y) \leq M_i \qquad (\forall) \qquad (x, y) \in D_i$$

Formăm sumele

$$s_\Delta(f) = m_1 \text{ aria } D_1 + \ldots + m_n \text{ aria } D_n = \sum_{i=1}^{n} m_i \text{ aria } D_i$$

$$S_\Delta(f) = M_1 \text{ aria } D_1 + \ldots + M_n \text{ aria } D_n = \sum_{i=1}^{n} M_i \text{ aria } D_i$$

Sumele $s_\Delta(f)$ şi $S_\Delta(f)$ se numesc sumele Darboux, ale funcţiei f corespunzătoare diviziunii Δ, $s_\Delta(f)$ se numeşte suma inferioară Darboux iar $S_\Delta(f)$ se numeşte suma superioară Darboux. Dacă considerăm în fiecare domeniu D_i cîte un punct $(\xi_i, \eta_i) \subset D_i$, atunci putem forma suma

$$\sigma_\Delta(f, \xi_i, \eta_i) = f(\xi_1, \eta_1) \text{ aria } D_1 + \ldots + f(\xi_n, \eta_n) \text{ aria } D_n =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i) \text{ aria } D_i$$

care se numeşte suma Riemann a funcţiei f corespunzătoare diviziunii Δ şi punctelor intermediare $(\xi_i, \eta_i) \subset D_i$. Trebuie observat că pentru aceeaşi diviziune Δ putem forma o infinitate de sume Riemann, corespunzătoare diferitelor moduri de alegere a punctelor (ξ_i, η_i), dar numai două sume Darboux, $s_\Delta(f)$ şi $S_\Delta(f)$.

Sumele Darboux şi Riemann au următoarele proprietăţi:

1) Au loc inegalităţile

$$m \text{ aria } D \leqslant s_\Delta(f) \leqslant \sigma_\Delta(f, \xi_i, \eta_i) \leqslant S_\Delta(f) \leqslant M \text{ aria } D.$$

În adevăr, oricare ar fi punctul intermediar $(\xi_i, \eta_i) \subset D_i$, avem

$$m \leqslant m_i \leqslant f(\xi_i, \eta_i) \leqslant M_i \leqslant M \quad \text{pentru } i = 1, 2, \ldots, n$$

Înmulţind toţi termenii cu numărul pozitiv aria D_i, obţinem

$$m \text{ aria } D_i \leqslant m_i \text{ aria } D_i \leqslant f(\xi_i, \eta_i) \text{ aria } D_i \leqslant M_i \text{ aria } D_i \leqslant M \text{ aria } D_i$$

Adunînd membru cu membru cele n inegalităţi scrise pentru $i = 1, 2, \ldots, n$ obţinem rezultatul dorit.

2) Legătura dintre sumele Darboux şi sumele Riemann corespunzătoare unei diviziuni Δ este dată de egalităţile

$$s_\Delta(f) = \inf_{(\xi_i, \eta_i)} \sigma_\Delta(f, \xi_i, \eta_i)$$

$$S_\Delta(f) = \sup_{(\xi_i, \eta_i)} \sigma_\Delta(f, \xi_i, \eta_i)$$

unde marginea inferioară şi cea superioară se consideră după toate alegerile posibile ale punctelor intermediare (ξ_i, η_i).

Fie $\Delta = (D_1, D_2, \ldots, D_n)$ o diviziune a domeniului D şi $\varepsilon > 0$, arbitrar dar fixat.

Deoarece $m_i = \inf_{(x,y)\in D_i} f(x, y)$ în fiecare domeniu D_i există un punct (ξ_i, η_i) aşa fel încît

$$f(\xi_i, \eta_i) - m_i < \frac{\varepsilon}{\text{aria } D}.$$ Atunci,

$$\sigma_\Delta(f, \xi_i, \eta_i) - s_\Delta(f) = \sum_{i=1}^{n} (f(\xi_i, \eta_i) - m_i)\, \text{aria } D_i \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\varepsilon}{\text{aria } D} \sum_{i=1}^{n} \text{aria } D_i = \varepsilon$$

deci

$$\sigma_\Delta(f, \xi_i, \eta_i) - \varepsilon \leqslant s_\Delta(f) \leqslant \sigma_\Delta(f, \xi_i, \eta_i)$$

adică

$$s_\Delta(f) = \inf_{(\xi_i, \eta_i)} \sigma_\Delta(f, \xi_i, \eta_i)$$

La fel se demonstrează şi cea de a doua egalitate.

3) Dacă Δ_1 şi Δ_2 sînt două diviziuni oarecare ale domeniului D, cu $\Delta_1 \subset \Delta_2$ atunci

$$s_{\Delta_1}(f) \leqslant s_{\Delta_2}(f) \leqslant S_{\Delta_2}(f) \leqslant S_{\Delta_1}(f)$$

adică prin trecerea la o diviziune mai fină sumele inferioare cresc, iar sumele superioare descresc.

Fie D_i un domeniu al diviziunii Δ_1 şi presupunem că $D_i = D_i' \cup D_i''$, unde D_i' şi D_i'' sînt domenii ale diviziunii Δ_2.

Să notăm

$$m_i = \inf_{(x,y)\in D_i} f(x, y), \qquad m_i' = \inf_{(x,y)\in D_i'} f(x, y),$$

$$m_i'' = \inf_{(x,y)\in D_i''} f(x, y)$$

Evident au loc inegalităţile

$$m_i \leqslant m_i' \quad \text{şi} \quad m_i \leqslant m_i''$$

deci m_i aria $D_i' \leqslant m_i'$ aria D_i' şi m_i aria $D_i'' \leqslant m_i''$ aria D_i''. Prin adunarea membru cu membru a ultimelor două inegalităţi obţinem

$$m_i \,\text{aria } D_i \leqslant m_i' \,\text{aria } D_i' + m_i'' \,\text{aria } D_i''$$

O inegalitate asemănătoare rămîne valabilă dacă D_i este reuniunea finită a trei sau mai multe domenii ale diviziunii Δ_2. Procedînd la fel cu fiecare din domeniile diviziunii Δ_1 şi sumînd membru cu membru inegalităţile obţinute, rezultă

$$s_{\Delta_1}(f) \leqslant s_{\Delta_2}(f) \leqslant S_{\Delta_2}(f)$$

Inegalitatea $S_{\Delta_1}(f) \leqslant S_{\Delta_2}(f)$ se demonstrează asemănător.

4) Pentru orice două diviziuni Δ_1 şi Δ_2 ale lui D are loc inegalitatea

$$s_{\Delta_1}(f) \leqslant S_{\Delta_2}(f)$$

adică orice sumă inferioară este mai mică decît orice sumă superioară.

5) Dacă $\mathscr{D}$ este mulţimea tuturor diviziunilor domeniului compact D, atunci mulţimea

$$(s_\Delta(f))_{\Delta\in\mathscr{D}}$$

este mărginită superior, iar mulţimea

$$(S_\Delta(f))_{\Delta\in\mathscr{D}}$$

este mărginită inferior, şi are loc inegalitatea

$$\sup_{\Delta\in\mathscr{D}} s_\Delta(f) \leq \inf_{\Delta\in\mathscr{D}} S_\Delta(f)$$

În adevăr, fie Δ_0 o diviziune oarecare a lui D. Pentru orice diviziune Δ a lui D avem

$$s_\Delta(f) \leq S_{\Delta_0}(f)$$

deci mulţimea $(s_\Delta(f))_{\Delta\in\mathscr{D}}$ este majorată de $S_{\Delta_0}(f)$ şi deci are o margine superioară finită pe care o notăm cu $\underline{I}$.

În mod asemănător se arată că mulţimea $(S_\Delta(f))_{\Delta\in\mathscr{D}}$ este minorată şi deci are o margine inferioară finită pe care o notăm cu $\bar{I}$.
Între cele două numere are loc inegalitatea $\underline{I} \leq \bar{I}$.

Numerele $\underline{I} = \sup\limits_{\Delta\in\mathscr{D}} s_\Delta(f)$ şi $\bar{I} = \inf\limits_{\Delta\in\mathscr{D}} S_\Delta(f)$ se numesc integralele Darboux ale funcţiei f pe domeniul D; $\underline{I}$ se numeşte integrala inferioară Darboux, iar $\bar{I}$ se numeşte integrala superioară Darboux.

Pentru orice diviziune Δ a lui D au loc inegalităţile evidente

$$s_\Delta(f) \leq \underline{I} \leq \bar{I} \leq S_\Delta(f)$$

6) În cazul în care $f\geq 0$ pe D, suma inferioară Darboux reprezintă volumul corpului format prin reuniunea a n cilindroizi având ca baze pe $D_1, D_2, \ldots, D_n$ şi înălţimile egale respectiv cu $m_1, \ldots, m_n$. Volumul astfel obţinut aproximează prin lipsă volumul căutat. În mod asemănător, suma superioară Darboux reprezintă volumul corpului format prin reuniunea a n cilindroizi având ca baze pe $D_1, D_2, \ldots, D_n$ şi înălţimile egale respectiv cu $M_1, \ldots, M_n$. Volumul astfel obţinut aproximează prin adaos, volumul căutat. În cazul sumelor Riemann acestea aproximează volumul căutat, dar nu mai putem preciza dacă prin lipsă sau prin adaos.

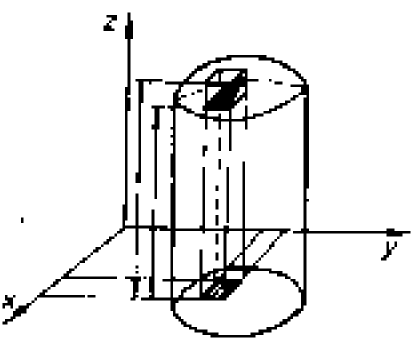

Fig. 1[illegible]

Definiţie [illegible]. Fie f o funcţie reală, definită şi mărginită pe un domeniu compact $D\subset\mathbf{R}^2$.

Spunem că f este integrabilă Riemann pe D, dacă există un număr I cu proprietatea că pentru orice $\varepsilon>0$, există un număr $\delta(\varepsilon)>0$ astfel încît oricare ar fi diviziunea Δ cu $\nu(\Delta)<\delta(\varepsilon)$ şi oricare ar fi alegerea punctelor intermediare $(\xi_i, \eta_i)\in D_i$ să avem $|\sigma_\Delta(f, \xi_i, \eta_i) - I| < \varepsilon$.

În acest caz numărul I se numește integrala Riemann a funcției f pe domeniul D și se folosește notația

$$I = \lim_{\nu(\Delta)\to 0} \sigma_\Delta(f, \xi_i, \eta_i) = \iint_D f(x, y)\, dx\, dy.$$

Dacă $f \geq 0$ pe D, atunci $\iint_D f(x, y)\, dx\, dy$ reprezintă volumul cilindrului de care am pomenit la începutul acestui paragraf.

§ 2. CRITERII DE INTEGRABILITATE

Teorema 1.2. (*Criteriul lui Darboux*). Fie f o funcție reală, definită și mărginită pe un domeniu compact $D \subset \mathbf{R}^2$. Funcția f este integrabilă pe D dacă și numai dacă pentru orice $\varepsilon > 0$, există un număr $\delta(\varepsilon) > 0$, astfel încît oricare ar fi diviziunea Δ a lui D, cu $\nu(\Delta) < \delta(\varepsilon)$ să avem

$$S_\Delta(f) - s_\Delta(f) < \varepsilon$$

Demonstrație. Condiția este necesară. Dacă f este o funcție mărginită și integrabilă pe domeniul compact D, fie

$$I = \iint_D f(x, y)\, dx\, dy$$

Din definiția integrabilității avem că oricare ar fi $\varepsilon > 0$ există $\delta(\varepsilon) > 0$ astfel încît oricare ar fi diviziunea Δ cu $\nu(\Delta) < \delta(\varepsilon)$ și oricare ar fi alegerea punctelor intermediare (ξ_i, η_i) are loc inegalitatea $|\sigma_\Delta(f, \xi_i, \eta_i) - I| < \varepsilon$ sau

$$I - \varepsilon < \sigma_\Delta(f, \xi_i, \eta_i) < I + \varepsilon$$

Folosind legătura dintre sumele Darboux și sumele Riemann obținem inegalitatea

$$I - \varepsilon \leq s_\Delta(f) \leq S_\Delta(f) \leq I + \varepsilon$$

și deci

$$S_\Delta(f) - s_\Delta(f) \leq I + \varepsilon - (I - \varepsilon) = 2\varepsilon;$$

$$S_\Delta(f) - s_\Delta(f) \leq 2\varepsilon$$

pentru orice diviziune Δ cu $\nu(\Delta) < \delta(\varepsilon)$.

Prin urmare dacă f este integrabilă pe D atunci este îndeplinită condiția din enunț.

Condiția este suficientă. Să arătăm deci că funcția f, mărginită pe D, este integrabilă dacă este îndeplinită condiția din enunț.

Din proprietățile sumelor Darboux avem

$$s_\Delta(f) \leq \underline{I} \leq \overline{I} \leq S_\Delta(f)$$

pentru orice diviziune Δ a lui D.

Dacă $\nu(\Delta) < \delta(\varepsilon)$, din inegalitatea de mai sus şi din condiţia dată în enunţ, obţinem

$$0 \leq \bar{I} - \underline{I} \leq S_\Delta(f) - s_\Delta(f) < \varepsilon$$

adică $0 \leq \bar{I} - \underline{I} < \varepsilon$. Deoarece $\varepsilon > 0$ a fost presupus arbitrar rezultă că $\underline{I} = \bar{I}$. Să notăm $I = \underline{I} = \bar{I}$, valoarea comună a integralelor Darboux. Avem

$$s_\Delta(f) \leq I \leq S_\Delta(f) \quad \text{şi} \quad s_\Delta(f) \leq \sigma_\Delta(f, \xi_i, \eta_i) \leq S_\Delta(f)$$

de unde

$$s_\Delta(f) - S_\Delta(f) \leq \sigma_\Delta(f, \xi_i, \eta_i) - I \leq S_\Delta(f) - s_\Delta(f)$$

sau

$$|\sigma_\Delta(f, \xi_i, \eta_i) - I| \leq S_\Delta(f) - s_\Delta(f)$$

Dacă $\nu(\Delta) < \delta(\varepsilon)$ atunci $S_\Delta(f) - s_\Delta(f) < \varepsilon$ şi deci

$$|\sigma_\Delta(f, \xi_i, \eta_i) - I| < \varepsilon$$

adică funcţia f este integrabilă pe D şi $\iint_D f(x, y)\,dx\,dy = I$.

Observaţie. Din criteriul lui Darboux rezultă că o funcţie reală f, definită şi mărginită pe un domeniu compact $D \subset \mathbf{R}^2$, este integrabilă pe D, dacă şi numai dacă integralele Darboux corespunzătoare, $\underline{I}$ şi $\bar{I}$ sînt egale. Valoarea comună a celor două integrale $I = \underline{I} = \bar{I}$ este tocmai integrala lui f pe domeniul D.

Cu ajutorul criteriului lui Darboux se demonstrează integrabilitatea funcţiilor continue, aşa cum rezultă din:

Teorema 2.2. Orice funcţie reală f, definită şi continuă pe un domeniu compact $D \subset \mathbf{R}^2$, este integrabilă pe D.

Demonstraţie. Fie $\Delta = (D_1, D_2, \ldots, D_n)$ o diviziune oarecare a lui D. Deoarece f este presupusă continuă pe D, va fi continuă pe fiecare domeniu compact D_i $(i = 1, \ldots, n)$. Atunci funcţia f este mărginită pe D_i şi îşi atinge marginile; există deci două puncte $A_i'(x_i', y_i')$ şi $A_i''(x_i'', y_i'')$ din D_i astfel încît

$$m_i = f(x_i', y_i'), \quad M_i = f(x_i'', y_i'')$$

Rezultă atunci

$$S_\Delta(f) - s_\Delta(f) = \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i) \text{ aria } D_i = \sum_{i=1}^{n} [f(x_i'', y_i'') - f(x_i', y_i')] \text{ aria } D_i$$

Fie acum $\varepsilon > 0$. Deoarece f este continuă pe domeniul compact D, este uniform continuă pe D. Numărului $\varepsilon > 0$ îi corespunde un număr $\delta(\varepsilon) > 0$ astfel încît pentru orice două puncte $A'(x', y')$ şi $A''(x'', y'')$ cu $d(A', A'') <$ $< \delta(\varepsilon)$ să avem

$$|f(x', y') - f(x'', y'')| < \frac{\varepsilon}{\text{aria } D}$$

Pentru orice diviziune Δ, cu $\nu(\Delta) < \delta(\varepsilon)$ avem

$$d(M_i', M_i'') < \delta(\varepsilon)$$

şi deci

$$|f(\xi_i', \eta_i') - f(\xi_i'', \eta_i'')| < \frac{\varepsilon}{\text{aria } D}.$$

Aşadar, dacă $\nu(\Delta) < \delta(\varepsilon)$ atunci

$$S_\Delta(f) - s_\Delta(f) \leq \sum_{i=1}^{n} |f(\xi_i', \eta_i') - f(\xi_i'', \eta_i'')| \text{ aria } D_i < \frac{\varepsilon}{\text{aria } D} \text{ aria } D = \varepsilon$$

adică

$$S_\Delta(f) - s_\Delta(f) < \varepsilon \quad \text{pentru} \quad (\forall)\ \Delta, \text{ cu } \nu(\Delta) < \delta(\varepsilon)$$

şi deci f este integrabilă pe D.

Criteriul lui Lebesgue

Pentru a enunţa acest criteriu avem nevoie de noţiunea de mulţime **neglijabilă** sau de măsură Lebesgue nulă.

Definiţie. Spunem că mulţimea $E \subset \mathbf{R}^2$ este de măsură Lebesgue nulă sau neglijabilă dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există un şir (I_n) de intervale deschise, din $\mathbf{R}^2$, care acoperă pe E, adică $E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$, astfel încît

$$\sum_{n=1}^{\infty} \text{aria } I_n < \varepsilon$$

Cu această definiţie putem enunţa următoarea:

Teoremă 2.2. (Criteriul lui Lebesgue). Fie f o funcţie reală şi mărginită, definită pe un domeniu compact $D \subset \mathbf{R}^2$. Funcţia f este integrabilă pe D dacă şi numai dacă mulţimea punctelor de discontinuitate ale lui f este de măsură Lebesgue nulă.

Ca o primă consecinţă a acestui criteriu, se vede imediat că mulţimea funcţiilor integrabile este mult mai bogată decît mulţimea funcţiilor continue. Pentru demonstraţie vezi [24].

§ 3. PROPRIETĂŢILE INTEGRALEI DUBLE

La fel ca şi în cazul integralei simple se demonstrează următoarele proprietăţi:

1. Dacă funcţia f este integrabilă pe D şi $\lambda \in \mathbf{R}$, atunci şi funcţia λf este integrabilă pe D şi are loc egalitatea

$$\iint_D \lambda f(x, y)\, dx\, dy = \lambda \iint_D f(x, y)\, dx\, dy$$

Aceasta este proprietatea de omogenitate a integralei duble.

2. Dacă f şi g sînt două funcţii integrabile pe D, atunci şi funcţiile $f \pm g$ sînt integrabile pe D şi are loc egalitatea

$$\iint_D (f(x, y) \pm g(x, y))\, dx\, dy = \iint_D f(x, y)\, dx\, dy \pm \iint_D g(x, y)\, dx\, dy$$

Aceasta este proprietatea de linearitate a integralei duble.

3. Dacă $D = D_1 \cup D_2$, unde D_1 şi D_2 sînt domenii compacte iar D_1 şi D_2 nu au puncte interioare comune şi f integrabilă pe D, atunci

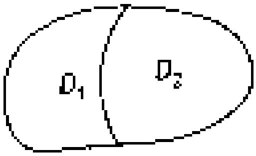

Fig. 46

$$\iint_D f(x, y)\, dx\, dy = \iint_{D_1} f(x, y)\, dx\, dy + \iint_{D_2} f(x, y)\, dx\, dy$$

Aceasta este proprietatea de aditivitate a integralei duble ca funcţie de domeniu.

4. Dacă f este integrabilă pe D şi $f(x, y) \geq 0$; $(\forall)$ $(x, y) \in D$ atunci

$$\iint_D f(x, y)\, dx\, dy \geq 0$$

5. Dacă f şi g sînt integrabile pe D şi $f(x, y) \geq g(x, y)$; $(\forall)$ $(x, y) \in D$ atunci

$$\iint_D f(x, y)\, dx\, dy \geq \iint_D g(x, y)\, dx\, dy$$

Aceasta este proprietatea de monotonie a integralei duble.

6. Dacă $m \leq f \leq M$ pe D şi f este integrabilă pe D, atunci

$$m \cdot \text{aria } D \leq \iint_D f(x, y)\, dx\, dy \leq M \cdot \text{aria } D$$

7. Dacă f este integrabilă pe D atunci şi $|f|$ este integrabilă pe D şi are loc inegalitatea

$$\left| \iint_D f(x, y)\, dx\, dy \right| \leq \iint_D |f(x, y)|\, dx\, dy$$

8. Este evidentă egalitatea

$$\iint_D dx\, dy = \text{aria } D$$

9. Teorema de medie pentru integrala dublă.

Dacă f este continuă pe domeniul compact D, atunci există un punct $(\xi, \eta) \in D$, astfel încît

$$\iint_D f(x, y)\, dx\, dy = f(\xi, \eta) \cdot \text{aria } D$$

Demonstrație. Deoarece f este continuă pe domeniul compact D, rezultă că f este mărginită pe D, și își atinge marginile. Există deci punctele $A_1(x_1, y_1)$ și $A_2(x_2, y_2)$ din D astfel încît $m = f(x_1, y_1)$ și $M = f(x_2, y_2)$ unde M, m sînt marginile lui f. Avem în baza proprietății 6)

$$m \cdot \text{aria } D \leqslant \iint_D f(x, y)\, dx\, dy \leqslant M \cdot \text{aria } D$$

de unde rezultă

$$m \leqslant \frac{\iint_D f(x, y)\, dx\, dy}{\text{aria } D} \leqslant M$$

Notînd

$$\mu = \frac{\iint_D f(x, y)\, dx\, dy}{\text{aria } D}, \quad \text{avem } m \leqslant \mu \leqslant M$$

Fie Γ o curbă a cărei imagine este complect conținută în D și avînd capetele în A_1 și A_2. Existența unei astfel de curbe rezultă chiar din definiția noțiunii de domeniu.

Dacă
$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}, \qquad t \in [a, b]$$

este reprezentarea parametrică a lui Γ atunci funcția compusă

$$g(t) = f[\varphi(t), \psi(t)]$$

este continuă pe compactul $[a, b]$. Din $f(x_1, y_1) = m$ și $f(x_2, y_2) = M$ rezultă $g(a) = m$ și $g(b) = M$.

Din proprietatea lui Darboux a funcțiilor continue deducem existența unei valori $t_0 \in [a, b]$ astfel încît $g(t_0) = \mu$, adică

$$f[\varphi(t_0), \psi(t_0)] = \mu$$

Dacă luăm $\xi = \varphi(t_0)$ și $\eta = \psi(t_0)$ avem $\mu = f(\xi, \eta)$ și formula este demonstrată.

§ 4. CALCULUL INTEGRALEI DUBLE

Vom arăta, în anumite ipoteze, că o integrală dublă se calculează printr-o succesiune de integrale simple.

Pentru început vom considera cazul în care D este un interval bidimensional $I = [a, b] \times [c, d]$.

Teorema 1.4. Fie f o funcție reală, definită și mărginită pe un interval bidimensional $I = [a, b] \times [c, d]$. Să presupunem că

1. f este integrabilă pe I

2. pentru orice $x \in [a, b]$, există integrala

$$\int_c^d f(x, y)\, dy = F(x).$$

În aceste condiții, există integrala $\int_a^b F(x)\, dx$ și are loc egalitatea

$$\iint_I f(x, y)\, dx\, dy = \int_a^b F(x)\, dx = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y)\, dy\right) dx$$

Demonstrație.

Fie $d' = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_i < x_{i+1} < \ldots < x_n = b\}$ o diviziune a intervalului $[a, b]$ și $d'' = \{c = y_0 < y_1 < \ldots < y_j < y_{j+1} < \ldots < y_m = d\}$ o diviziune a intervalului $[c, d]$. Cu ajutorul diviziunilor d' și d'' putem defini o diviziune Δ a lui I, unde elementele lui Δ sînt intervalele $I_{ij} = [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}]$ $(i = 0, 1, \ldots, n - 1;\ j = 0, 1, \ldots, m - 1)$. Vom nota $m_{ij} = \inf\limits_{(x, y) \in I_{ij}} f(x, y)$ și $M_{ij} = \sup\limits_{(x, y) \in I_{ij}} f(x, y)$.

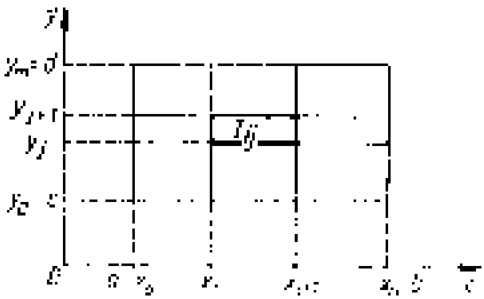

Fig. 4

Pentru a arăta că funcția F este integrabilă pe $[a, b]$ considerăm sumele Riemann asociate lui F pe $[a, b]$. Avem

$$\sigma_{d'}(F, \xi_i) = \sum_{i=0}^{n-1} F(\xi_i)(x_{i+1} - x_i)$$

Dacă ținem seama de modul cum este definită funcția F și de proprietatea de aditivitate a integralei simple avem

$$F(\xi_i) = \int_c^d f(\xi_i, y)\, dy = \sum_{j=0}^{m-1} \int_{y_j}^{y_{j+1}} f(\xi_i, y)\, dy.$$

Aplicînd formula de medie pentru integrala simplă rezultă existența unui număr μ_{ij} cu $m_{ij} \leq \mu_{ij} \leq M_{ij}$, astfel încît

$$\int_{y_j}^{y_{j+1}} f(\xi_i, y)\, dy = \mu_{ij}(y_{j+1} - y_j).$$

Deci pentru sumele Riemann asociate lui F pe $[a, b]$ avem

$$\sigma_{d'}(F, \xi_i) = \sum_{i=0}^{n-1} F(\xi_i)(x_{i+1} - x_i) =$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i)\left(\sum_{j=0}^{m-1} \mu_{ij}(y_{j+1} - y_j)\right) = \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{m-1} \mu_{ij}(x_{i+1} - x_i)(y_{j+1} - y_j).$$

Dacă ținem seama de inegalitățile

$$m_{ij} \leq \mu_{ij} \leq M_{ij} \qquad (i = 0, 1, \ldots, n-1;\ j = 0, 1, \ldots, m-1)$$

rezultă

$$\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{m-1} m_{ij}(x_{i+1} - x_i)(y_{j+1} - y_j) \leq \sigma_{d'}(F, \xi_i) \leq$$

$$\leq \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{m-1} M_{ij}(x_{i+1} - x_i)(y_{j+1} - y_j).$$

Dar prima sumă din aceste inegalități este tocmai suma Darboux inferioară relativă la funcția f și la diviziunea Δ a lui I:

$$s_\Delta(f) = \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{m-1} m_{ij}(x_{i+1} - x_i)(y_{j+1} - y_j).$$

Ultima sumă din inegalitățile de mai sus este tocmai suma Darboux superioară relativă la funcția f și diviziunea Δ a lui I:

$$S_\Delta(f) = \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{m-1} M_{ij}(x_{i+1} - x_i)(y_{j+1} - y_j).$$

Avem deci inegalitățile

$$s_\Delta(f) \leq \sigma_{d'}(F, \xi_i) \leq S_\Delta(f)$$

pentru orice alegere a punctelor intermediare ξ_i.

Fie acum (d'_k) un șir oarecare de diviziuni ale lui $[a, b]$ cu $\nu(d'_k) \to 0$ și (d''_k) un șir de diviziuni ale lui $[c, d]$ cu $\nu(d''_k) \to 0$. Notăm cu Δ_k diviziunea lui I definită, ca mai sus, de diviziunile d'_k și d''_k. Se vede imediat că din condițiile $\nu(d'_k) \to 0$ și $\nu(d''_k) \to 0$ rezultă $\nu(\Delta_k) \to 0$. Pentru fiecare k avem inegalitățile

$$s_{\Delta_k}(f) \leq \sigma_{d'_k}(F, \xi_i) \leq S_{\Delta_k}(f) \tag{1}$$

Funcția f fiind presupusă integrabilă pe I, aplicînd observația de la criteriul lui Darboux, avem

$$\lim_{k \to \infty} S_{\Delta_k}(f) = \lim_{k \to \infty} s_{\Delta_k}(f) = \iint_I f(x, y)\, dx\, dy \tag{2}$$

Trecînd la limită în (1) şi ţinînd cont de (2) obţinem

$$\lim_{\nu \to 0} \sigma_{\Delta_2}(F, \xi_i) = \iint_I f(x, y)\, dx\, dy \tag{3}$$

Dacă ţinem seama de definiţia integralei pentru funcţiile reale, de o singură variabilă, se vede imediat că

$$\lim_{\nu \to 0} \sigma_{\Delta_2}(F, \xi_i) = \int_a^b F(x)\, dx \tag{4}$$

Din egalităţile (3) şi (4) obţinem

$$\iint_I f(x, y)\, dx\, dy = \int_a^b F(x) dx = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y)\, dy \right) dx$$

De obicei se foloseşte notaţia

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x, y)\, dy \right) dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y)\, dy$$

Observaţia 1. În mod asemănător se demonstrează

Teorema 2.1. Fie f o funcţie definită şi mărginită pe $I = [a, b] \times [c, d]$. Să presupunem că

1) f este integrabilă pe I

2) pentru orice $y \in [c, d]$, există integrala $\int_a^b f(x, y)\, dx = G(y)$. În aceste condiţii există integrala

$$\int_c^d G(y)\, dy \text{ şi are loc egalitatea}$$

$$\iint_I f(x, y)\, dx\, dy = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y)\, dx \right) dy$$

Observaţia 2. Dacă $f(x, y) = g(x) \cdot h(y)$ atunci

$$\iint_I f(x, y)\, dx\, dy = \left(\int_a^b g(x)\, dx \right) \left(\int_c^d h(y)\, dy \right).$$

Observaţia 3. Interpretarea geometrică a teoremei 1.4.

Teorema 1.4. are o interpretare geometrică simplă, ilustrată în fig. 48. Dacă f este o funcţie pozitivă pe I, atunci volumul cilindrului V care se sprijină pe I și este limitat superior de graficul S al funcției f, este dat de egalitatea

$$\text{Volum } \Gamma = \iint_I f(x, y)\, dx\, dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y)\, dy \right) dx$$

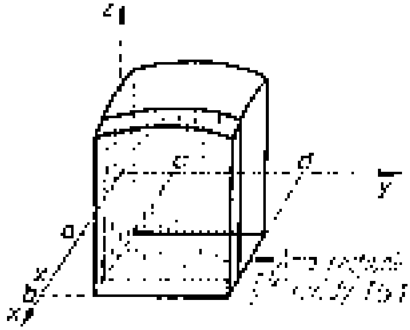

Fig. 48

Pentru orice $x \in [a, b]$ integrala $\int_c^d f(x, y)\, dy = F(x)$ este aria secțiunii făcute în cilindrul Γ de un plan ce trece prin punctul $(x, 0, 0)$ și este paralel cu planul yOz. Dacă ținem seama de semnificația geometrică a integralei duble, atunci $\int_a^b F(x)\, dx$ este tocmai volumul lui Γ.

Exemplu. Să se calculeze volumul cilindrului Γ care se sprijină pe $I = [-1, 1] \times [-1, 1]$ și este mărginit superior de suprafața de ecuație $z = x^2 + y^2$.

Avem vol $\Gamma = \iint_I (x^2 + y^2)\, dx\, dy$. Dacă ținem seama de teorema 1.4, atunci

$$\text{vol. } \Gamma = \int_{-1}^{1} dx \int_{-1}^{1} (x^2 + y^2)\, dy = \int_{-1}^{1} \left(x^2 y + \frac{y^3}{3} \right)\Big|_{-1}^{1} dx =$$

$$= \int_{-1}^{1} 2\left(x^2 + \frac{1}{3} \right) dx = 2\left(\frac{x^3}{3} + \frac{x}{3} \right)\Big|_{-1}^{1} =$$

$$= 2\left(\frac{2}{3} + \frac{2}{3} \right) = \frac{8}{3}.$$

Pentru a da regula de calcul a unei integrabile duble în cazul în care domeniul D nu mai este un interval este necesară noțiunea de domeniu simplu în raport cu una din axe.

Definiție. 1.4. Fie D un domeniu compact, definit de inegalitățile

$$a \leq x \leq b \qquad \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)$$

unde φ_1 și φ_2 sînt funcții continue pe $[a, b]$ și $\varphi_1(x) \leq \varphi_2(x)$ pentru $(\forall)\, x \in [a, b]$. Un astfel de domeniu se numește simplu în raport cu axa Oy.

Un domeniu D, compact, definit de inegalitatea

$$c \leq y \leq d$$

$$\psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y)$$

unde ψ_1 şi ψ_2 sînt două funcţii continue pe $[c, d]$ şi $\psi_1(y) \leq \psi_2(y)$ pentru $(\forall)\ y \in [c, d]$, se numeşte simplu în raport cu axa Ox.

În fig. 49 este ilustrat un domeniu simplu în raport cu axa Oy, iar în fig. 50 este ilustrat un domeniu simplu în raport cu axa Ox.

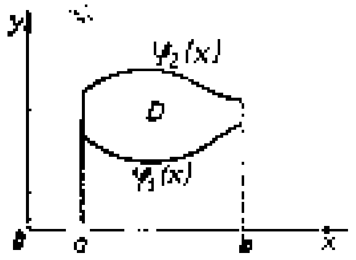

Fig. 49

Fig. 50

Pentru un domeniu simplu în raport cu axa Oy, regula de calcul este dată de teorema care urmează.

Teorema 5.4. Fie D un domeniu compact, simplu în raport cu axa Oy definit de inegalităţile:

$$a \leq x \leq b; \quad \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x),$$

f o funcţie mărginită, definită pe D şi presupunem că:

1) f este integrabilă pe D

2) pentru $(\forall)\ x \in [a, b]$, există integrala

$$\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\, dy \tag{5}$$

Atunci există şi integrala

$$\int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\, dy \right) dx = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\, dy$$

şi are loc egalitatea

$$\iint_D f(x, y)\, dx\, dy = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\, dy$$

Demonstraţie. Funcţiile φ_1 şi φ_2 au fost presupuse continue pe intervalul compact $[a, b]$ deci sînt şi mărginite pe acest interval.

Fie

$$c = \inf_{x \in [a,b]} \varphi_1(x) \quad \text{şi} \quad d = \sup_{x \in [a,b]} \varphi_2(x)$$

Fie $I = [a, b] \times [c, d]$. Se vede imediat că $D \subset I$ şi acest fapt este ilustrat în fig. 51.

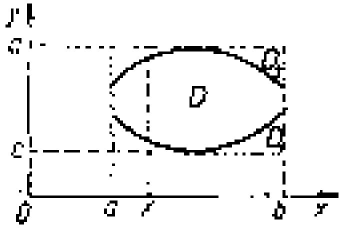

Fig. 51

Notînd cu D_1 domeniul compact definit de inegalităţile

$$a \leq x \leq b$$

$$c \leq y \leq \varphi_1(x)$$

şi cu D_2 domeniul compact definit de inegalităţile

$$a \leq x \leq b$$

$$\varphi_2(x) \leq y \leq d$$

Avem, evident $I = D_1 \cup D \cup D_2$.

Frontiera fiecăruia dintre domeniile D_1, D, D_2 este de arie nulă, deoarece funcţiile φ_1 şi φ_2 au fost presupuse continue, deci domeniile considerate au arie. Să considerăm funcţia ajutătoare $\bar{f}$, definită pe I în modul următor

$$\bar{f}(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & \text{dacă } (x, y) \in D \\ 0 & \text{dacă } (x, y) \in I - D \end{cases}$$

Eventualele puncte de discontinuitate pe care funcţia $\bar{f}$ le poate avea în plus faţă de funcţia f, sînt situate în orice caz pe una din frontierele domeniilor D_1, D, D_2. Funcţia f a fost presupusă integrabilă pe D şi deci mulţimea punctelor sale de discontinuitate este de măsură Lebesgue nulă. Putem spune deci că mulţimea punctelor de discontinuitate ale funcţiei $\bar{f}$, este de măsură Lebesgue nulă, şi deci $\bar{f}$ este integrabilă pe I.

Folosind acum proprietatea de aditivitate a integralei duble ca funcţie de domeniu, obţinem

$$\iint_I \bar{f}(x, y)\, dx\, dy = \iint_{D_2} \bar{f}(x, y)\, dx\, dy + \iint_D \bar{f}(x, y)\, dx\, dy + \iint_{D_1} \bar{f}(x, y)\, dx\, dy$$

Din modul cum a fost definită funcţia $\bar{f}$ rezultă imediat că

$$\iint_{D_1} \bar{f}(x, y)\, dx\, dy = \iint_{D_2} \bar{f}(x, y)\, dx\, dy = 0$$

şi în plus avem

$$\iint_{R} \bar{f}(x, y)\, dx\, dy = \iint_{D} f(x, y)\, dx\, dy.$$

Deci are loc egalitatea

$$\iint_{R} \bar{f}(x, y)\, dx\, dy = \iint_{D} f(x, y)\, dx\, dy. \tag{6}$$

Funcţiei $\bar{f}$ îi vom aplica rezultatul stabilit în teorema 1.4. Pentru aceasta trebuie observat că integrala

$$\int_{c}^{d} \bar{f}(x, y)\, dy$$

există, deoarece am presupus existenţa integralei (5) şi în plus pentru fiecare $x \in [a, b]$ are loc egalitatea

$$\int_{c}^{d} \bar{f}(x, y)\, dy = \int_{c}^{\varphi_1(x)} \bar{f}(x, y)\, dy + \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \bar{f}(x, y)\, dy + \int_{\varphi_2(x)}^{d} \bar{f}(x, y)\, dy =$$
$$= 0 + \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\, dy + 0. \tag{7}$$

Funcţia $\bar{f}$ satisface deci toate condiţiile din teorema 1.4 şi putem scrie

$$\iint_{R} \bar{f}(x, y)\, dx\, dy = \int_{a}^{b} dx \int_{c}^{d} \bar{f}(x, y)\, dy.$$

Dacă ţinem seama de egalităţile (6) şi (7) avem

$$\iint_{D} f(x, y)\, dx\, dy = \int_{a}^{b} dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\, dy,$$

adică tocmai egalitatea din enunţul teoremei.

Observaţia 2. Dacă domeniul compact D este simplu în raport cu axa Ox, atunci are loc următoarea

Teorema 1.6. Fie D un domeniu compact simplu în raport cu axa Ox, delimitat de inegalităţile

$$c \le y \le d, \qquad \psi_1(y) \le x \le \psi_2(y);$$

fie f o funcţie reală, definită şi mărginită pe D şi presupunem că

1) f este integrabilă pe D

2) pentru orice $y \in [c, d]$ există integrala

$$\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y)\, dx$$

Atunci există şi integrala

$$\int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y)\,dx \text{ şi are loc egalitatea}$$

$$\iint_D f(x, y)\,dx\,dy = \int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y)\,dx.$$

Observaţia 5. Dacă domeniul compact D are proprietatea că orice paralelă la axa Oy intersectează frontiera lui D în cel mult două puncte, aşa cum este ilustrat în fig. 52 atunci rezultatul stabilit în teorema 3.4 rămîne valabil.

Un rezultat asemănător este valabil dacă orice paralelă la axa Ox intersectează frontiera lui D, în cel mult două puncte. Această situaţie este ilustrată în fig. 53.

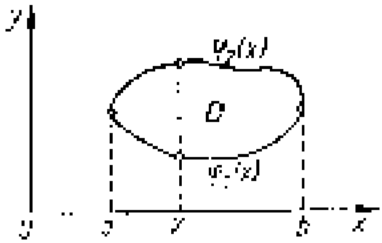

Fig. 52

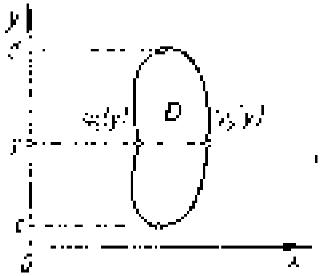

Fig. 53

Observaţia 6. Dacă domeniul compact D nu este în una din situaţiile date la observaţia 5, atunci descompunem pe D prin paralele la axele de coordonate, într-un număr finit de subdomenii $D_1, D_2, \ldots, D_n$ cu $\bigcup_{i=1}^{n} D_i = D$ şi fiecare $D_i (i = 1, 2, \ldots, n)$ să fie în una din situaţiile date mai sus.

Folosind apoi proprietatea de aditivitate a integralei duble ca funcţie de domenii avem

$$\iint_D f(x, y)\,dx\,dy = \sum_{i=1}^{n} \iint_{D_i} f(x, y)\,dx\,dy.$$

O astfel de situaţie este ilustrată în fig. 54.

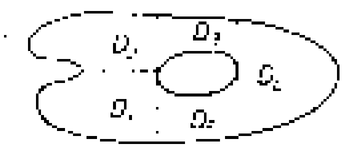

Fig. 54

Exemplul 1. Să se calculeze

$$I = \iint_D \frac{dx\,dy}{(x + y + 1)^2}$$

unde

$$D = [0, 1] \times [0, 1]$$

$$J = \iint_D \frac{dx\,dy}{(x+y+1)^2} = \int_0^1 \left[-\frac{1}{x+y+1} \right]_0^1 dx =$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} \right) dx = \ln \frac{4}{3}$$

Exemplul 2. Să se calculeze $J = \iint_D x^2 y\,dx\,dy$ unde D este semicercul definit de inegalitățile $x^2 + y^2 \leq R^2$, $y \geq 0$.

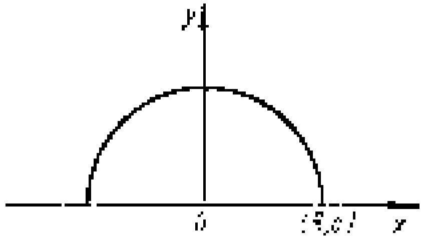

Fig. 55

Avem

$$J = \iint_D x^2 y\,dx\,dy = \int_{-R}^{R} dx \int_0^{\sqrt{R^2 - x^2}} x^2 y\,dy =$$

$$= \int_{-R}^{R} x^2 \left. \frac{y^2}{2} \right|_0^{\sqrt{R^2-x^2}} dx = \frac{1}{2} \int_{-R}^{R} x^2 (R^2 - x^2)\,dx = \frac{2R^5}{15}$$

Exemplul 3. Să se calculeze $J = \iint_D (x + y)\,dx\,dy$ unde D este porțiunea din plan mărginită de parabola $y = x^2$ și dreapta $y = x$.

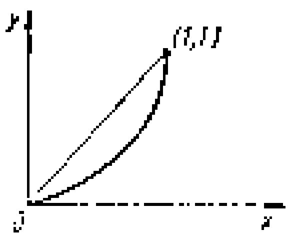

Fig. 56

În acest caz avem $\varphi_1(x) = x^2$;

$$\varphi_2(x) = x \quad \text{și} \quad x \in [0, 1]$$

Avem deci

$$J = \iint_D (x + y)\,dx\,dy = \int_0^1 dx \int_{x^2}^{x} (x + y)\,dy =$$

$$= \int_0^1 \left(xy + \frac{y^2}{2} \right)\Bigg|_{x^2}^{x} dx = \int_0^1 \left(x^2 + \frac{x^2}{2} - x^3 - \frac{x^4}{2} \right) dx =$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{3}{2}x^2 - x^3 - \frac{x^4}{2} \right) dx = \left(\frac{x^3}{2} - \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{10} \right)\Bigg|_0^1 = \frac{3}{20}.$$

Exemplu 4. Să se pună limitele de integrare în cele două moduri posibile $\iint_D f(x, y)\,dx\,dy$, dacă D este mărginit de cercul $y = \sqrt{2ax - x^2}$, parabola $y = \sqrt{2ax}$ şi dreapta $x = 2a$, $a > 0$.

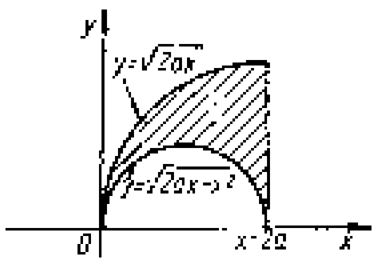

Fig. 57

Domeniul D este dat în fig. 57. Domeniul D este simplu în raport cu Oy şi avem

$$\iint_D f(x, y)\,dx\,dy = \int_0^{2a} dx \int_{\sqrt{2ax - x^2}}^{\sqrt{2ax}} f(x, y)\,dy.$$

În raport cu axa Ox domeniul D nu mai este simplu, îl descompunem în trei subdomenii şi obţinem în acest fel

$$\iint_D f(x, y)\,dx\,dy = \int_0^a dy \int_{\frac{y^2}{2a}}^{a - \sqrt{a^2 - y^2}} f(x, y)\,dx + \int_0^a dy \int_{a + \sqrt{a^2 - y^2}}^{2a} f(x, y)\,dx +$$

$$+ \int_a^{2a} dy \int_{\frac{y^2}{2a}}^{2a} f(x, y)\,dx$$

Exemplu 5. Să se calculeze $I = \iint_D xy\,dx\,dy$, unde D este dat în fig. 58.

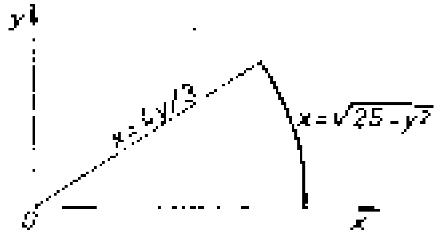

Fig. 58

În acest caz este convenabil să integrăm mai întîi în raport cu x şi obţinem:

$$I = \int_0^3 dy \int_{\frac{4}{3}y}^{\sqrt{25-y^2}} xy\,dx = \frac{1}{2}\int_0^3 yx^2 \Big|_{\frac{4}{3}y}^{\sqrt{25-y^2}} dy =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^3 y\left(25 - y^2 - \frac{16y^2}{9}\right)dy = \frac{1}{2}\int_0^3\left(25y - \frac{25y^3}{9}\right)dy = \frac{225}{8}.$$

§ 5. FORMULA LUI RIEMANN-GREEN

În anumite condiţii există legătură între integrala curbilinie şi integrala dublă. Pentru a stabili această legătură introducem noţiunea de frontieră orientată a unui domeniu compact.

Definiţie 7.5. Fie $D \subset \mathbf{R}^2$, un domeniu compact avînd frontiera formată dintr-o curbă netedă sau reuniune finită de curbe netede. Sensul dat pe Γ de un observator care prin deplasare pe această curbă lasă la stînga domeniul D se numeşte sensul direct sau pozitiv de parcurgere a lui Γ. Curba Γ împreună cu sensul direct de parcurgere se numeşte curbă orientată direct sau pozitiv şi se notează cu Γ_+. În mod asemănător se introduce şi Γ_-.

În fig. 59 este ilustrat un exemplu de domeniu compact simplu convex cu frontiera orientată direct.

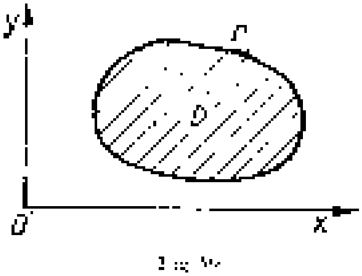

Fig. 59

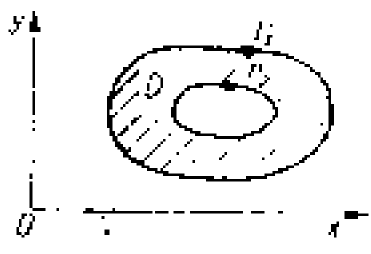

Fig. 60

În fig. 60 este ilustrat un exemplu de domeniu compact cu frontiera formată din două curbe netede şi orientată direct. Un astfel de domeniu cu „gaură" se numeşte domeniu dublu convex. În ambele cazuri domeniul D este haşurat.

Noţiunea de frontieră orientată se menţine şi în cazul în care Fr D este o curbă netedă pe porţiuni sau reuniuni de astfel de curbe. Pentru a pune în evidenţă faptul că o integrală curbilinie este considerată pe o curbă închisă orientată pozitiv se folosește notaţia $\oint$.

Pentru a stabili formula lui Riemann-Green, pentru un domeniu compact oarecare, vom demonstra două teoreme ajutătoare, valabile în cazul domeniilor simple în raport cu una din axe.

Teorema 1.3. Fie P o funcţie reală definită şi continuă pe un domeniu compact $D \subset \mathbf{R}^2$, simplu în raport cu axa Oy. Dacă derivata $\frac{\partial P}{\partial y}$ există şi este continuă pe D, atunci are loc egalitatea

$$\oint_{\Gamma} P(x, y)\,dx = \iint_D -\frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy; \quad \text{Fr } D = \Gamma \tag{1}$$

Demonstraţie. Existenţa celor două integrale este garantată de continuitatea funcţiilor de sub semnul integrală şi de ipoteza făcută asupra lui D. Domeniul D are forma din fig. 61 unde $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4$ şi Γ este orientată direct.

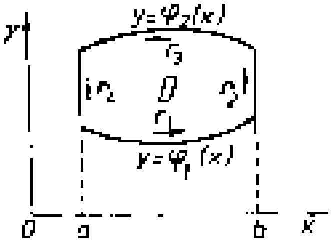

Fig. 61

Funcţiile φ_1 şi φ_2 sînt continue pe $[a, b]$. Calculăm integrala dublă din membrul drept al egalităţii (1) şi arătăm că ea este egală cu integrala curbilinie din membrul stîng.
Avem

$$\iint_D -\frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy = \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} -\frac{\partial P}{\partial y}\,dy = \int_a^b -P(x, y)\Big|_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)}\,dx =$$
$$= \int_a^b [P(x, \varphi_1(x)) - P(x, \varphi_2(x))]\,dx \tag{2}$$

Pe de altă parte avem

$$\oint_{\Gamma} P(x, y)\,dx = \int_{\Gamma_1} P(x, y)\,dx + \int_{\Gamma_2} P(x, y)\,dx +$$
$$+ \int_{\Gamma_3} P(x, y)\,dx + \int_{\Gamma_4} P(x, y)\,dx$$

unde sensul considerat pe fiecare curbă este indicat în figură.

Integralele pe Γ_2 şi Γ_4 sînt nule, deoarece aici x este constant; în cazul lui Γ_2 avem $x = b$, iar în cazul lui Γ_4 avem $x = a$.

Pentru Γ_1 avem reprezentarea parametrică

$$\begin{cases} x = t \\ y = \varphi_1(t) \end{cases}, \quad t \in [a, b]; \text{ deci}$$

$$\int_{\Gamma_1} P(x, y)\, dx = \int_a^b P(t, \varphi_1(t))\, dt.$$

Pentru Γ_3 avem reprezentarea parametrică

$$\begin{cases} x = t \\ y = \varphi_2(t) \end{cases}, \quad t \in [a, b], \text{ deci}$$

$$\int_{\Gamma_3} P(x, y)\, dx = \int_b^a P(t, \varphi_2(t))\, dt = -\int_a^b P(t, \varphi_2(t))\, dt$$

Prin urmare

$$\oint_{\Gamma} P(x, y)\, dx = \int_a^b [P(t, \varphi_1(t)) - P(t, \varphi_2(t))]\, dt \tag{3}$$

Din relaţiile (2) şi (3) rezultă imediat că

$$\oint_{\Gamma} P(x, y)\, dx = \iint_D -\frac{\partial P}{\partial y}\, dx\, dy$$

Teorema 2.5. Fie Q o funcţie reală definită şi continuă pe un domeniu compact, $D \subset \mathbf{R}^2$ simplu în raport cu axa Ox. Dacă derivata $\frac{\partial Q}{\partial x}$ există şi este continuă pe D, atunci

$$\oint_{\Gamma} Q(x, y)\, dy = \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x}\, dx\, dy; \quad \Gamma = \mathrm{Fr}\, D \tag{4}$$

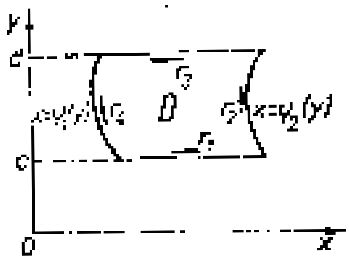

Fig. 62

Demonstraţie. Domeniul D are forma din fig. 62 unde $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4$. Procedînd ca şi în cazul teoremei 2.4, obţinem

$$\iint_D \frac{\partial Q}{\partial x}\, dx\, dy = \int_c^d dy \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} \frac{\partial Q}{\partial x}\, dx = \int_c^d Q(x, y)\Big|_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} dy =$$

$$= \int_c^d [Q(\psi_2(y), y) - Q(\psi_1(y), y)]\, dy \tag{5}$$

Pe de altă parte avem:

$$\oint_{\Gamma} Q(x,y)\,\mathrm{d}y = \int_{\Gamma_1} Q(x,y)\,\mathrm{d}y + \int_{\Gamma_2} Q(x,y)\,\mathrm{d}y + \int_{\Gamma_3} Q(x,y)\,\mathrm{d}y +$$
$$+ \int_{\Gamma_4} Q(x,y)\,\mathrm{d}y$$

unde sensul considerat pe fiecare curbă este cel indicat în figură. Dar integralele pe Γ_1 și Γ_3 sînt nule deoarece aici y este constant. Pentru Γ_2 avem reprezentarea parametrică

$$\begin{cases} x = \psi_2(t) \\ y = t \end{cases}, \quad t \in [c, d]$$

și deci

$$\int_{\Gamma_2} Q(x,y)\,\mathrm{d}y = \int_c^d Q(\psi_2(t), t)\,\mathrm{d}t$$

Pentru Γ_4 avem reprezentarea parametrică

$$\begin{cases} x = \psi_1(t) \\ y = t \end{cases}, \quad t \in [c, d] \text{ și deci}$$

$$\int_{\Gamma_4} Q(x,y)\,\mathrm{d}y = \int_d^c Q(\psi_1(t), t)\,\mathrm{d}t = -\int_c^d Q(\psi_1(t), t)\,\mathrm{d}t$$

Deci

$$\oint_{\Gamma} Q(x,y)\,\mathrm{d}y = \int_c^d [Q(\psi_2(t), t) - Q(\psi_1(t), t)]\,\mathrm{d}t \tag{6}$$

Din relațiile (5) și (6) rezultă imediat că

$$\oint_{\Gamma} Q(x,y)\,\mathrm{d}y = \iint_D \frac{\partial Q}{\partial x}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

Pentru a demonstra formula lui Riemann-Green este necesară următoarea

Observație. Presupunem că domeniul compact $D \subset \mathbf{R}^2$ este o reuniune finită de domenii compacte D_i, $D = \bigcup_{i=1}^{n} D_i$ și că aceste domenii nu au puncte interioare comune iar $\Gamma_i = \mathrm{Fr}\, D_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ este o curbă netedă pe porțiuni. În fig. 63 este ilustrată o astfel de situație.

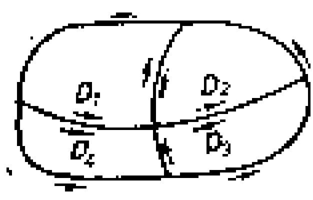

Fig. 63

În aceste condiții, dacă P și Q sînt două funcții reale definite și continue pe D, are loc egalitatea

$$\oint_{\Gamma} P\,dx + Q\,dy = \sum_{i=1}^{n} \oint_{\Gamma_i} P\,dx + Q\,dy.$$

Egalitatea se demonstrează imediat dacă ținem seama de aditivitatea integralei curbilinii relativ la juxtapunerea de curbe și de egalitatea

$$\int_{\widehat{AB}} P\,dx + Q\,dy = -\int_{\widehat{BA}} P\,dx + Q\,dy.$$

Formula lui Riemann-Green. Fie P și Q două funcții reale definite și continue pe domeniul compact $D \subset \mathbf{R}^2$. Dacă derivatele parțiale $\dfrac{\partial P}{\partial y}$ și $\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ există și sînt continue pe D, atunci are loc egalitatea

$$\oint_{\Gamma} P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy,$$

$$\Gamma = \operatorname{Fr} D \qquad (7)$$

Demonstrație. Prin paralele la axa Oy putem descompune domeniul D într-o reuniune finită de domenii simple în raport cu axa Oy: $D = \bigcup_{i=1}^{n} D_i$.

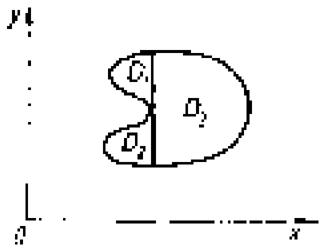

Fig. 64

O astfel de situație este ilustrată în fig. 64. Folosind proprietatea de aditivitate a integralei duble ca funcție de domeniu, obținem:

$$\iint_D -\frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy = \sum_{i=1}^{n} \iint_{D_i} -\frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy.$$

Aplicînd pentru fiecare D_i rezultatul stabilit în teorema 1.5, obținem

$$\iint_{D_i} -\frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy = \oint_{\Gamma_i} P(x, y)\,dx, \quad \Gamma_i = \operatorname{Fr} D_i.$$

Prin urmare avem

$$\iint_D -\frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy = \sum_{i=1}^{n} \oint_{\Gamma_i} P(x, y)\,dx.$$

Observaţia precedentă ne permite să scriem egalitatea

$$\sum_{i=1}^{n} \oint_{\Gamma_i} P(x, y)\,dx = \oint_{\Gamma} P(x, y)\,dx$$

şi deci avem

$$\iint_D -\frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy = \oint_{\Gamma} P(x, y)\,dx \tag{8}$$

Procedînd similar cu $\iint_D \frac{\partial Q}{\partial x}\,dx\,dy$, obţinem

$$\iint_D \frac{\partial Q}{\partial x}\,dx\,dy = \oint_{\Gamma} Q(x, y)\,dy \tag{9}$$

Prin sumarea relaţiilor (8) şi (9) obţinem

$$\oint_{\Gamma} P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy$$

adică tocmai egalitatea (7), dată la început.

Consecinţă. Dacă $\Gamma = \mathrm{Fr}\,D$ este netedă pe porţiuni atunci D are arie şi avem egalitatea

$$\text{aria } D = \frac{1}{2} \oint_{\Gamma} x\,dy - y\,dx .$$

Dacă luăm $P(x, y) = -\frac{y}{2}$ şi $Q(x, y) = \frac{x}{2}$ şi aplicăm formula Riemann-Green avem

$$\frac{1}{2} \oint_{\Gamma} x\,dy - y\,dx = \iint_D dx\,dy$$

Prin urmare obţinem formula ariei lui D cu ajutorul integralei curbilinii

$$\text{aria } D = \frac{1}{2} \oint_{\Gamma} x\,dy - y\,dx$$

Exemplu 1. Să se calculeze aria lui

$$D = \left\{ (x, y) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \right\}$$

Frontiera lui D este elipsa $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, pentru care avem reprezentarea parametrică

$$x = a \cos \theta, \quad y = b \sin \theta \qquad \theta \in [0, 2\pi]$$

Aplicînd formula de mai sus, avem

$$\text{aria } D = \frac{1}{2}\oint_{\Gamma} x\,dy - y\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (ab\cos^2\theta + ab\sin^2\theta)\,d\theta =$$

$$= \frac{ab}{2}\int_0^{2\pi} d\theta = \pi ab.$$

În aplicaţii formula lui Riemann-Green se foloseşte în general pentru a transforma o integrală curbilinie pe o curbă închisă, într-o integrală dublă.

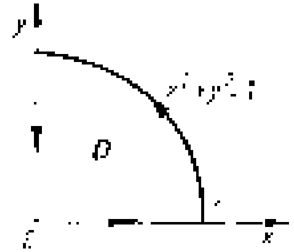

Fig. 65

Exemplul 2. Să se calculeze $\oint_{\Gamma} -xy^2\,dx + x^2y\,dy$ unde Γ este ilustrată în fig. 65. În acest caz $P(x, y) = -xy^2$ şi $Q(x, y) = x^2y$, deci

$$\oint -xy^2\,dx + x^2y\,dy = \iint_D (2xy + 2xy)\,dx\,dy = 4\iint_D xy\,dx\,dy =$$

$$= 4\int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} xy\,dy = 4\int_0^1 \left.\frac{xy^2}{2}\right|_0^{\sqrt{1-x^2}} dx = 2\int_0^1 x(1-x^2)\,dx = \frac{1}{2}.$$

§ 6. SCHIMBAREA DE VARIABILE LA INTEGRALA DUBLĂ

Fie D' un domeniu compact, în planul uOv, avînd frontiera Γ' o curbă simplă, închisă şi netedă pe porţiuni. Dacă

$$T: \begin{cases} x = \varphi(u, v) \\ y = \psi(u, v) \end{cases} \qquad (u, v) \in D' \tag{1}$$

este o transformare regulată de la planul uOv la planul xOy, atunci $D = T(D')$ este un domeniu compact din planul xOy iar curba $\Gamma = T(\Gamma')$ este o curbă simplă închisă, netedă pe porţiuni şi în plus $\mathrm{Fr}\, D = \Gamma$.

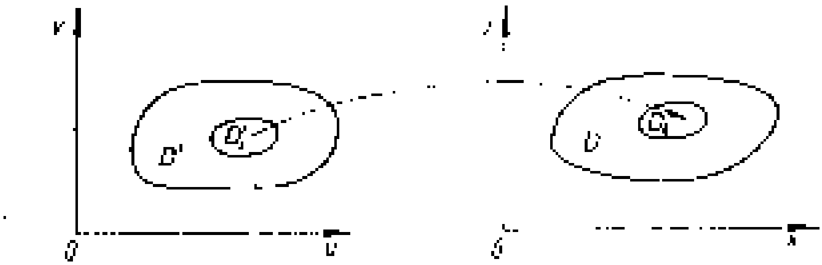

Fig. 44

În aceste condiţii spunem că transformarea T este directă, dacă un punct care se deplasează în sens direct pe curba Γ' este transformat prin T într-un punct care se deplasează pe Γ, tot în sens direct. Dacă un punct care se deplasează pe Γ' în sens direct este transformat prin T, într-un punct care se deplasează pe Γ în sens invers, atunci spunem că transformarea regulată T este inversă. În legătură cu transformările regulate care duc un domeniu D' din planul uOv într-un domeniu D din planul xOy avem următoarea

Teoremă 1.6. Dacă jacobianul transformării regulate (1) este pozitiv pe D', $\dfrac{D(\varphi, \psi)}{D(u, v)} > 0$; $(\forall)\,(u, v) \in D'$, atunci transformarea (1) este directă.

Demonstraţie. Pentru a demonstra acest fapt, presupunem în plus că funcţiile φ şi ψ admit derivate parţiale mixte de ordinul doi continue pe D'. Ştim că

$$\text{aria } D = \oint_{\Gamma} x\, dy.$$

Dar fiecare punct de pe curba Γ este imaginea unui punct de pe curba Γ', prin transformarea (1) şi deci avem

$$\text{aria } D = \oint_{\Gamma} x\, dy = \oint_{\Gamma'} \varphi(u, v)\left(\frac{\partial \psi}{\partial u}\, du + \frac{\partial \psi}{\partial v}\, dv\right) \tag{2}$$

urmînd ca sensul pe curba Γ' să fie precizat mai departe. Ultimei integrale îi aplicăm formula lui Riemann-Green

$$\oint_{\Gamma'} P(u, v)\, du + Q(u, v)\, dv = \pm \iint_{D'} \left(\frac{\partial Q}{\partial u} - \frac{\partial P}{\partial v}\right) du\, dv$$

unde semnul + corespunde sensului direct pe Γ' iar semnul − corespunde sensului invers pe Γ'.

În cazul nostru avem

$$P(u, v) = \varphi(u, v) \frac{\partial \psi}{\partial u}; \quad Q(u, v) = \varphi(u, v) \frac{\partial \psi}{\partial v}$$

şi deci

$$\frac{\partial Q}{\partial u} - \frac{\partial P}{\partial v} = \frac{\partial \varphi}{\partial u} \frac{\partial \psi}{\partial v} + \varphi \frac{\partial^2 \psi}{\partial u\, \partial v} - \frac{\partial \varphi}{\partial v} \frac{\partial \psi}{\partial u} - \varphi \frac{\partial^2 \psi}{\partial v\, \partial u}$$

În baza criteriului lui Schwarz derivatele mixte sînt egale și deci

$$\frac{\partial Q}{\partial u} - \frac{\partial P}{\partial v} = \frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{\partial \psi}{\partial v} - \frac{\partial \varphi}{\partial v}\frac{\partial \psi}{\partial u} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial u} & \frac{\partial \psi}{\partial u} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial v} & \frac{\partial \psi}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{D(\varphi, \psi)}{D(u, v)}$$

Obținem deci egalitatea

$$\text{aria } D = \pm \iint_{D'} \frac{D(\varphi, \psi)}{D(u, v)} \, du \, dv$$

Dar aria $D > 0$; prin urmare în fața ultimei integrale trebuie luat semnul $+$, adică în egalitatea (2) pe Γ' trebuie luat sensul direct. În mod asemănător se arată că dacă $\frac{D(\varphi, \psi)}{D(u, v)} < 0$ atunci în egalitatea (2) trebuie luat sensul invers pe curba Γ'.

Observație. Din demonstrația dată, rezultă că putem scrie egalitatea

$$\text{aria } D = \iint_{D'} \left| \frac{D(\varphi, \psi)}{D(u, v)} \right| du \, dv$$

indiferent dacă transformarea regulată T este directă sau inversă. Aplicînd formula de medie pentru integrala dublă (funcția de sub semnul integrală este continuă) rezultă existența unui punct $(u_0, v_0) \in D'$ astfel încît

$$\text{aria } D = \left| \frac{D(\varphi, \psi)}{D(u, v)} \right|_{(u_0, v_0)} \cdot \text{aria } D'. \tag{3}$$

Această egalitate are un analog remarcabil în cazul dreptelor unidimensionale. Fie f o funcție reală definită pe un interval $(\alpha, \beta) \subset \mathbf{R}$, derivabilă pe acest interval și cu $f' \neq 0$. Dacă intervalul (a, b) este imaginea prin f a intervalului (α, β), atunci pe baza formulei de medie a lui Lagrange avem lungimea $(a, b) = |f'(\xi)| \cdot$ lungimea (α, β), unde $\xi \in (\alpha, \beta)$. Această ultimă egalitate este analogul unidimensional al egalității (3).

Teorema 26. Fie în planul uOv un domeniu compact D' avînd frontiera o curbă simplă, închisă, netedă pe porțiuni și

$$T: \begin{cases} x = \varphi(u, v) \\ y = \psi(u, v) \end{cases}, \qquad (u, v) \in D'$$

o transformare regulată de la planul uOv la planul xOy. Dacă punem $D = T(D')$ și $\Gamma = T(\Gamma')$ și dacă f este o funcție reală definită și continuă pe D, atunci are loc egalitatea

$$\iint_{D} f(x, y) \, dx \, dy = \iint_{D'} f(\varphi(u, v), \psi(u, v)) \left| \frac{D(\varphi, \psi)}{D(u, v)} \right| du \, dv \tag{4}$$

numită formula schimbării de variabile la integrala dublă sau formula de transport.

Demonstrație. Domeniile D și D' au arie deoarece frontierele lor sînt curbe netede pe porțiuni. Din continuitatea funcțiilor f, φ, ψ și din faptul că transformarea T a fost presupusă regulată, rezultă continuitatea funcțiilor care apar sub cele două integrale. Aceste două observații garantează existența integralelor din egalitatea (4). Fie acum $\Delta' = (D'_1, D'_2, \ldots, D'_n)$ o diviziune oarecare a lui D'. Prin transformarea regulată T fiecărui domeniu D'_i îi corespunde un domeniu $D_i \subset D$. Obținem în acest fel o diviziune $\Delta = (D_1, D_2, \ldots, D_n)$ a lui D.

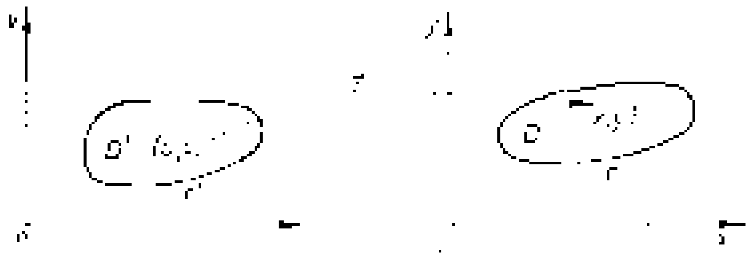

Fig. 6

Pentru fiecare domeniu D_i aplicăm formula (3). Rezultă în acest fel că pentru fiecare $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ există un punct $(u_i, v_i) \in D'_i$ astfel încît: aria $D_i = \left|\frac{D(\varphi, \psi)}{D(u, v)}\right|_{(u_i, v_i)} \cdot$ aria D'_i. Să punem $\xi_i = \varphi(u_i, v_i)$, $\eta_i = \psi(u_i, v_i)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ și avem $(\xi_i, \eta_i) \in D_i$. Putem deci forma suma Riemann

$$\sigma_\Delta(f, \xi_i, \eta_i) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i) \cdot \text{aria } D_i$$

Dacă ținem seama de relațiile stabilite mai sus, obținem

$$\sigma_\Delta(f, \xi_i, \eta_i) = \sum_{i=1}^{n} f(\varphi(u_i, v_i), \psi(u_i, v_i)) \left|\frac{D(\varphi, \psi)}{D(u, v)}\right|_{(u_i, v_i)} \cdot \text{aria } D'_i$$

Considerăm funcția

$$F(u, v) = f(\varphi(u, v), \psi(u, v)) \left|\frac{D(\varphi, \psi)}{D(u, v)}\right|$$

și deci avem

$$\sigma_\Delta(f, \xi_i, \eta_i) = \sum_{i=1}^{n} F(u_i, v_i) \text{ aria } D'_i = \sigma_{\Delta'}(F, u_i, v_i) \tag{5}$$

Rezultă în acest fel că orice sumă Riemann relativă la funcția F și la diviziunea Δ' a lui D' este egală cu o sumă Riemann relativă la funcția f și diviziunea Δ a lui D.

Fie (Δ'_k) un șir de diviziuni ale lui D', cu $\nu(\Delta'_k) \to 0$. Din continuitatea lui T pe D' (compact) rezultă că T este uniform continuă și deci din condiția $\nu(\Delta'_k) \to 0$ rezultă că și $\nu(\Delta_k) \to 0$; unde Δ_k este diviziunea lui D corespunzătoare diviziunii Δ'_k a lui D'.

Egalitatea (5) este adevărată pentru fiecare k; deci

$$\sigma_\Delta(f, \xi_i, \eta_i) = \sigma_{\Delta'}(F, u_i, v_i)$$

Din existența celor două integrale și prin trecerea la limită în ultima relație obținem formula dată în enunțul teoremei.

Observații și exemple

1) Condiția ca jacobianul transformării T să fie diferit de zero este suficient să fie îndeplinită în interiorul lui D'.

2) Din punct de vedere al aplicațiilor, găsirea lui T constituie problema esențială. Pentru rezolvarea acestei probleme nu există o metodă generală. Găsirea transformării T este dictată în general de ecuațiile curbelor care formează frontiera lui D.

Exemplul 1. Să se calculeze aria domeniului D, mărginit de curbele

$$xy = a \qquad xy = b \qquad b > a > 0$$

$$y = \alpha x \qquad y = \beta x \qquad \beta > \alpha > 0$$

și situat în primul cadran.

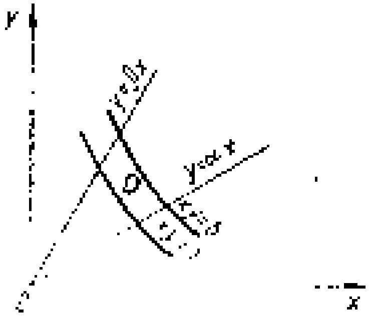

Fig. 68

Domeniul D este dat în fig. 68. Considerăm transformarea

$$T: \begin{cases} u = xy, & u \in [a, b] \\ v = \dfrac{y}{x}, & v \in [\alpha, \beta] \end{cases}$$

sau

$$\begin{cases} x = \sqrt{\dfrac{u}{v}} \\ y = \sqrt{uv} \end{cases}$$

Cu această ultimă transformare intervalul $D' = [a, b] \times [\alpha, \beta]$ se transformă în domeniul D din fig. 68.

Avem

$$\frac{D(x,y)}{D(u,v)}=\frac{1}{\dfrac{D(u,v)}{D(x,y)}}=\frac{1}{\begin{vmatrix} y & x \\ -\dfrac{y}{x^2} & \dfrac{1}{x} \end{vmatrix}}=\frac{1}{2\dfrac{y}{x}}=\frac{1}{2v}$$

și deci aria căutată va fi:

$$\text{aria } D=\iint_D dx\,dy=\frac{1}{2}\iint_{D'}\frac{du\,dv}{v}=\frac{1}{2}\int_a^b du\int_\alpha^\beta\frac{dv}{v}=\frac{b-a}{2}\ln\frac{\beta}{\alpha}$$

Exemplu 2. Schimbarea de variabile în coordonate polare este una dintre schimbările de variabile cel mai des utilizate și este definită de:

$$T:\begin{cases} x=\rho\cos\theta & \rho\in[0,R] \\ y=\rho\sin\theta & \theta\in[0,2\pi] \end{cases}$$

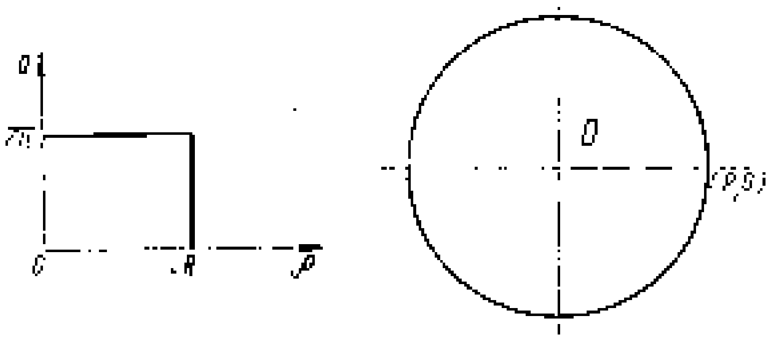

Fig. 69

În fig. 69 sînt ilustrate domeniile D' și $D=T(D')$.

$$\text{În acest caz } \frac{D(x,y)}{D(\rho,\theta)}=\begin{vmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\rho\sin\theta & \rho\cos\theta \end{vmatrix}=\rho$$

Se vede că jacobianul se anulează pe axa $O\theta$ din planul $\rho O\theta$, lucru permis conform observației precedente.
Să se calculeze

$$I=\iint_D(x^2+y^2)^2\,dx\,dy;\quad \text{unde}\quad D=\{(x,y);\,x^2+y^2\leq R^2\}$$

Aplicînd schimbarea de variabile în coordonate polare obținem

$$I=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^R\rho^4\cdot\rho\,d\rho=2\pi\frac{R^6}{6}=\frac{\pi R^6}{3}.$$

§ 7. INTEGRALE DUBLE IMPROPRII

Am definit integrala dublă $\iint_D f(x, y)\,dx\,dy$ a unei funcţii reale f, definită şi integrabilă pe un domeniu compact $D \subset \mathbf{R}^2$.

Vom extinde această definiţie mai întîi pentru cazul în care D nu mai este mărginit. Amintim că un domeniu plan D se numeşte nemărginit dacă el conţine puncte exterioare oricărui cerc cu centrul în originea axelor de coordonate.

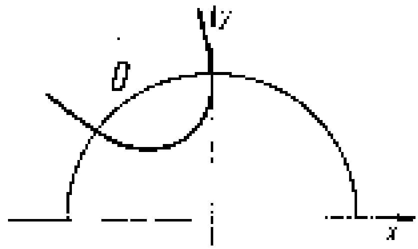

Fig. 70

În fig. 70 este ilustrat un exemplu de domeniu plan nemărginit. Vom presupune în continuare că orice parte mărginită a frontierei lui D este o curbă netedă sau netedă pe porţiuni.

Definiţia 7.1. Fie D o mulţime nemărginită din plan. Spunem că D admite o exhaustiune dacă există un şir (D_n) de mulţimi din plan, compacte care au arie, astfel încît:

1) şirul (D_n) este ascendent faţă de operaţia de incluziune, adică $D_n \subset D_{n+1}$ şi $\bigcup_{n=1}^{\infty} D_n = D$.

2) Orice mulţime compactă inclusă în D este conţinută într-un D_n.

Dacă D este un domeniu plan nemărginit, atunci putem realiza o exhaustiune a lui D în felul următor:

Considerăm un şir de numere reale pozitive (R_n), strict crescător cu $\lim\limits_{n\to\infty} R_n = \infty$, şi fie

$$K_n = \{(x, y) : x^2 + y^2 \le R_n^2\}$$

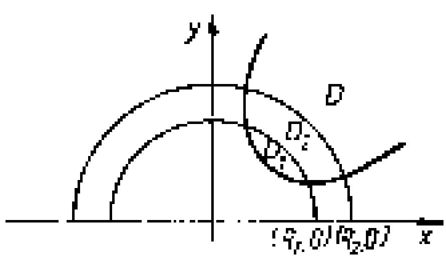

Fig. 71

Dacă luăm $D_n = D \cap K_n$, atunci este evident că șirul de mulțimi (D_n) este o exhaustiune a lui D. În fig. 71 este ilustrată o exhaustiune a lui D pentru un șir (K_n) dat.

Definiție 2.7. Fie f o funcție reală definită pe un domeniu nemărginit $D \subset \mathbf{R}^2$ și integrabilă pe orice subdomeniu compact care are arie, a lui D. Spunem că f este integrabilă impropriu pe D, dacă există un număr I, astfel încît pentru orice exhaustiune (D_n) a lui D să avem

$$\lim_{n\to\infty} \iint_{D_n} f(x, y)\,dx\,dy = I \text{ și vom scrie}$$

$$\iint_{D} f(x, y)\,dx\,dy = I.$$

Despre integrala din membrul stîng spunem că este convergentă pe D.

Exemplu. Fie $f(x, y) = xy : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$. Deci în acest caz $D = \mathbf{R}^2$ și să luăm

$$D_n = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq n^2\}.$$

Se vede că (D_n) este o exhaustiune a lui $\mathbf{R}^2$ și trecînd la coordonate polare obținem

$$\iint_{D_n} f(x, y)\,dx\,dy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^n \rho^3 \sin\theta \cos\theta\,d\rho = 0,$$

deci

$$\lim_{n\to\infty} \iint_{D_n} f(x, y)\,dx\,dy = 0.$$

Pe de altă parte dacă luăm $D_n' = [-n, 2n] \times [-n, 2n]$ se vede imediat că (D_n') este o exhaustiune a lui $\mathbf{R}^2$ și

$$\iint_{D_n'} f(x, y)\,dx\,dy = \int_{-n}^{2n} x\,dx \cdot \int_{-n}^{2n} y\,dy = \left(\frac{3n^2}{2}\right)^2,$$

deci

$$\lim_{n\to\infty} \iint_{D_n'} f(x, y)\,dx\,dy = +\infty.$$

Dacă ținem seama de definiția dată rezultă că funcția $f(x, y) = xy$ nu este integrabilă impropriu pe $\mathbf{R}^2$.

În legătură cu integrabilitatea funcțiilor pozitive pe un domeniu nemărginit are loc

Teorema 2.7. Fie f o funcție pozitivă definită pe un domeniu nemărginit $D \subset \mathbf{R}^2$ și integrabilă pe orice subdomeniu compact care are aria lui D, atunci f este integrabilă impropriu pe D, dacă și numai dacă există o exhaustiune (D_n) a lui D astfel încît

$$\lim_{n\to\infty} \iint_{D_n} f(x, y)\,dx\,dy = I$$

există şi este finită. În plus are loc egalitatea

$$I = \iint_D f(x, y)\, dx\, dy$$

Demonstraţie. Necesitatea condiţiei este evidentă. Pentru a demonstra suficienţa condiţiei fie (D_n) o exhaustiune a lui D pentru care

$$\lim_{n \to \infty} \iint_{D_n} f(x, y)\, dx\, dy = I$$

există şi este finită. Fie (D'_n) o altă exhaustiune a lui D. Mulţimile D'_n $(n \in \mathbf{N})$ sînt mulţimi compacte şi din definiţia exhaustiunii (D_n) rezultă că există un indice $k(n)$ astfel încît

$$D'_n \subset D_{k(n)}.$$

Din faptul că f a fost presupusă pozitivă pe D, rezultă

$$\iint_{D'_n} f(x, y)\, dx\, dy \leq \iint_{D_{k(n)}} f(x, y)\, dx\, dy \leq I$$

Tot din faptul că $f \geq 0$ pe D rezultă că şirul $\left(\iint_{D'_n} f(x, y)\, dx\, dy\right)$ este monoton crescător, că este mărginit superior de I, prin urmare există şi este finită limita următoare

$$\lim_{n \to \infty} \iint_{D'_n} f(x, y)\, dx\, dy = I'$$

Între cele două limite are loc inegalitatea $I' \leq I$. Dacă schimbăm rolul celor două exhaustiuni obţinem că $I \leq I'$ şi deci $I' = I$. Cum exhaustiunea (D'_n) a fost luată arbitrar, deducem că f este integrabilă impropriu pe D şi că are loc egalitatea

$$\iint_D f(x, y)\, dx\, dy = I$$

Exemplu. Fie $f(x, y) = e^{-x^2-y^2}$, $f: \mathbf{R}^2_+ \to \mathbf{R}$. Aici $D = \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}_+$. Vom arăta că f este integrabilă impropriu pe D. Deoarece f este pozitivă pe $\mathbf{R}^2_+$ este suficient să considerăm o exhaustiune particulară a lui D.

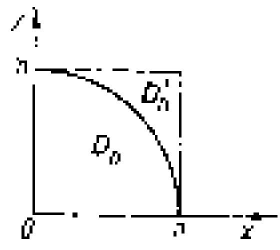

Fig. 72

Luăm

$$D_n = \{(x, y);\ x^2 + y^2 \le n^2;\ x \ge 0,\ y \ge 0\}$$

şi atunci

$$I = \iint_{\mathbf{R}_+^2} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy = \lim_{n\to\infty}\iint_{D_n} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy$$

Dacă facem schimbarea de variabile în coordonate polare obţinem

$$I = \lim_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^n \rho e^{-\rho^2}\,d\rho = \lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{2}\left(-\frac{1}{2}e^{-\rho^2}\right)\Big|_0^n =$$

$$= \frac{\pi}{4}\lim_{n\to\infty}(1 - e^{-n^2}) = \frac{\pi}{4}$$

Dacă considerăm exhaustiunea $D_n' = [0, n] \times [0, n]$, atunci

$$\iint_{\mathbf{R}_+^2} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy = \lim_{n\to\infty}\int_0^n dx\int_0^n e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\int_0^n e^{-x^2}\,dx\right)^2 = \left(\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx\right)^2$$

Dacă ţinem seama de teorema 1.7, din confruntarea celor două rezultate deducem

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$$

În fig. 72 sînt ilustrate cele două domenii D_n şi D_n'.

Acest procedeu de calcul extrem de simplu aparţine lui Poisson.

În continuare vom da unele rezultate în legătură cu integralele duble improprii, fără însă a da demonstraţiilor lor.

Teorema 2.7. O condiţie necesară şi suficientă pentru ca o funcţie f să fie integrabilă improprie pe un domeniu D nemărginit este ca funcţia $|f|$ să fie integrabilă improprie pe D.

Demonstraţia acestei teoreme se găseşte în [24] sau [25].

După cum se vede din această teoremă găsim o neconcordanţă între integrale pe domenii nemărginite din $\mathbf{R}^2$ şi integrala pe domenii nemărginite de pe dreapta reală. Această neconcordanţă se datoreşte varietăţii formelor domeniilor plane faţă de structura foarte simplă a unui domeniu al dreptei reale (pe $\mathbf{R}$ orice domeniu este un interval). Unele rezultate stabilite pentru integralele improprii pe domenii nemărginite ale funcţiilor de o variabilă pot fi refăcute şi în cazul integralelor duble improprii pe domenii nemărginite. Se demonstrează cu uşurinţă, dacă ţinem seama de teorema 2.7 următorul criteriu de comparaţie dat în

Teorema 3.7. Fie f şi g două funcţii reale definite pe un *acelaşi* domeniu nemărginit $D \subset \mathbf{R}^2$, integrabile pe orice subdomeniu compact, cu arie, a lui D. Dacă

1) g este integrabilă impropriu pe D

2) $|f(x, y)| \leq g(x, y)$, $(\forall)\ (x, y) \in D$

atunci f este integrabilă impropriu pe D.

Aplicaţie. În condiţiile teoremei 3.7 dacă

$$g(x, y) = \frac{M}{(x^2 + y^2 + a^2)^\alpha}, \quad \alpha > 1, \ M > 0$$

atunci f este integrabilă. Este suficient să demonstrăm că g este integrabilă impropriu pe D.
Fie

$$K_n = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq n^2\}, \quad n \in \mathbf{N} \text{ şi } D_n = D \cap K_n$$

Este evident că (D_n) este o exhaustiune a lui D şi că

$$\iint_{D_n} g(x, y)\, dx\, dy \leq \iint_{K_n} g(x, y)\, dx\, dy$$

Trecând la coordonate polare obţinem

$$\iint_{K_n} \frac{dx\, dy}{(x^2 + y^2 + a^2)^\alpha} = M \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^n \frac{\rho\, d\rho}{(\rho^2 + a^2)^\alpha} =$$

$$= \frac{M\pi}{1 - \alpha} \left. \frac{1}{(\rho^2 + a^2)^{\alpha - 1}} \right|_0^n = \frac{\pi M}{\alpha - 1} \left[\frac{1}{a^{2\alpha - 2}} - \frac{1}{(n^2 + a^2)^{\alpha - 1}} \right] \leq$$

$$\leq \frac{\pi M}{(\alpha - 1) a^{2\alpha - 2}}.$$

Funcţia g fiind pozitivă rezultă că şirul $\left(\iint_{D_n} g(x, y)\, dx\, dy\right)$ este crescător, am arătat că este mărginit superior, deci este convergent. Prin urmare funcţia g este integrabilă impropriu pe D, în cazul $\alpha > 1$.

Teorema 4.7. Să presupunem că funcţiile f şi g sînt absolut integrabile pe intervalul $(-\infty, +\infty)$. Atunci funcţia f g este integrabilă pe $\mathbf{R}^2$ şi are loc egalitatea

$$\iint_{\mathbf{R}^2} f(x)\, g(y)\, dx\, dy = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx \cdot \int_{-\infty}^{\infty} g(y)\, dy$$

Folosind această teoremă putem stabili formula lui Jacobi care dă legătura între funcţiile B şi Γ ale lui Euler.

Fie p și q două numere pozitive. Avem

$$\Gamma(p) = \int_0^{+\infty} x^{p-1} e^{-x}\, dx,$$

$$\Gamma(q) = \int_0^{+\infty} y^{q-1} e^{-y}\, dy.$$

Din ultima teoremă rezultă că

$$\Gamma(p)\cdot\Gamma(q) = \iint_{\mathbf{R}_+^2} e^{-x-y} x^{p-1} y^{q-1}\, dx\, dy.$$

Dacă facem schimbarea de variabile

$$T : \begin{cases} x = u(1-v) \\ y = uv \end{cases}$$

atunci domeniul $D' = (0, \infty) \times (0, 1)$ se transformă în $\mathbf{R}_+^2$.

Jacobianul transformării va fi

$$\frac{D(x, y)}{D(u, v)} = \begin{vmatrix} 1-v & -u \\ v & u \end{vmatrix} = u(1-v) + uv = u$$

și deci

$$\Gamma(p)\,\Gamma(q) = \int_0^{\infty} du \int_0^1 e^{-u} u^{p+q-1} v^{p-1}(1-v)^{q-1}\, dv =$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-u} u^{p+q-1}\, du \int_0^1 v^{p-1}(1-v)^{q-1}\, dv = \Gamma(p+q)\, B(p, q).$$

Prin urmare

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\cdot\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$$

Vom considera acum cazul în care funcția reală f este definită pe un domeniu $D \subset \mathbf{R}^2$ cu excepția unui punct $M_0(x_0, y_0) \in D$ și în orice vecinătate V a lui M_0 funcția f este nemărginită.

În continuare vom presupune că D și V au arie și că f este integrabilă pe $D - V$. În fig. 73 porțiunile hașurate ilustrează pe $D - V$.

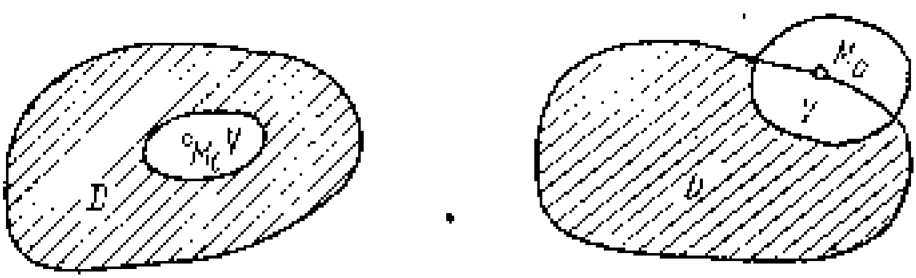

Fig. 73

Notăm cu $d(V)$ diametrul lui V şi fie (V_n) un şir de vecinătăţi ale lui M_0 cu $V_n \supset V_{n+1}$ şi $\lim d(V_n) = 0$.

În aceste condiţii putem da următoarea

Definiţie 3.7. Spunem că f este integrabilă impropriu pe D dacă există un număr I, astfel încît pentru orice şir de vecinătăţi (V_n) ale lui M_0 cu $\lim\limits_{n\to\infty} d(V_n) = 0$ să avem

$$\lim_{n\to\infty} \iint_{D-V_n} f(x, y)\, dx\, dy = I$$

şi vom scrie

$$\iint_D f(x, y)\, dx\, dy = I.$$

Despre integrala din membrul stîng spunem că este convergentă. Rezultate asemănătoare celor de la integrala dublă pe domenii nemărginite pot fi stabilite şi în acest caz.

Ne rezumăm doar la un exemplu.

Să se afle valorile lui $\alpha > 0$ pentru care integrala

$$\iint_D \frac{dx\, dy}{[(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2]^\alpha},$$

unde

$$D = \{(x, y) ; (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \leqslant R^2\} ;$$

este convergentă.

În acest caz $M_0 = (x_0, y_0)$. Considerăm

$$V_n = \left\{(x, y) ; (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \leqslant \frac{1}{n^2}\right\}$$

şi atunci

$$\iint_{D-V_n} f(x, y)\, dx\, dy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_{\frac{1}{n}}^{R} \frac{\rho\, d\rho}{\rho^{2\alpha}} = 2\pi \int_{\frac{1}{n}}^{R} \rho^{1-2\alpha}\, d\rho =$$

$$= 2\pi \left.\frac{\rho^{2-2\alpha}}{2-2\alpha}\right|_{\frac{1}{n}}^{R} = \frac{\pi}{1-\alpha}\left[R^{2-2\alpha} - \frac{1}{n^{2-2\alpha}}\right].$$

Deci $\lim\limits_{n\to\infty} \iint_{D-V_n} f(x, y)\, dx\, dy$ există (pentru $\alpha > 0$) dacă şi numai dacă $\alpha \in (0, 1)$. Pentru $\alpha \leqslant 0$ integrala considerată nu mai este improprie.

§ 8. APLICAŢII ALE INTEGRALEI DUBLE

I. *Calculul ariilor.* Dacă $D \subset \mathbf{R}^2$ este un domeniu compact şi Fr D o curbă netedă pe porţiuni, atunci

$$\text{aria } D = \iint_D \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

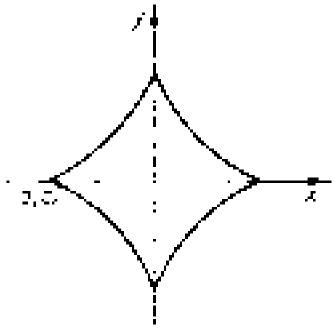

Fig. 74

Exemplu. Să se calculeze aria lui $D = \left\{(x, y);\ x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} \leq a^{\frac{2}{3}}\right\}$. Frontiera lui D este în acest caz astroida. Dacă facem schimbarea de variabile în coordonate polare generalizate

$$x = \rho \cos^3 \theta, \quad \rho \in [0, a]$$

$$y = \rho \sin^3 \theta, \quad \theta \in [0, 2\pi]$$

avem

$$\frac{D(x, y)}{D(\rho, \theta)} = 3\rho \cos^2 \theta \sin^2 \theta$$

Deci aria lui D este

$$\text{aria } D = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^a 3\rho \cos^2 \theta \sin^2 \theta\, \mathrm{d}\rho = \frac{3a^2}{8} \int_0^{2\pi} \sin^2 2\theta\, \mathrm{d}\theta = \frac{3\pi a^2}{8}$$

II. *Coordonatele centrului de greutate a unei plăci plane*

Fie D o placă materială (de grosime neglijabilă) situată în planul xOy. Dacă

$$\rho : D \to \mathbf{R}_+$$

este funcţia densitate a plăcii şi ρ este presupusă continuă atunci masa plăcii D este dată de formula

$$\text{masa } D = \iint_D \rho(x, y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$$

Coordonatele centrului de greutate (x_G, y_G) ale plăcii D sînt date de formulele

$$x_G = \frac{1}{\text{masa } D} \iint_D x\,\rho(x, y)\,dx\,dy;$$

$$y_G = \frac{1}{\text{masa } D} \iint_D y\,\rho(x, y)\,dx\,dy;$$

Dacă ρ = constant (placa omogenă), atunci

$$x_G = \frac{\iint_D x\,dx\,dy}{\text{aria } D}; \quad y_G = \frac{\iint_D y\,dx\,dy}{\text{aria } D}$$

Exemplu. Să se afle coordonatele centrului de greutate al plăcii plane

$D = \left\{(x, y) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1, \ x \geq 0, \ y \geq 0\right\}$, în cazul ρ = constant.

Dacă facem schimbarea de variabile în coordonate polare

$$x = a\rho\cos\theta, \ y = b\rho\sin\theta; \quad \rho \in [0, 1]; \quad \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

avem

$$\frac{D(x, y)}{D(\rho, \theta)} = ab\rho$$

și deci

$$\iint_D x\,dx\,dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 a^2 b\,\rho^2 \cos\theta\,d\rho = a^2 b \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta\,d\theta \int_0^1 \rho^2\,d\rho = \frac{a^2 b}{3}.$$

Deci

$$x_G = \frac{4a^2 b}{3\pi ab} = \frac{4a}{3\pi}.$$

În mod asemănător obținem $y_G = \frac{4b}{3\pi}$.

III. *Momentele de inerție ale unei plăci plane*

Momentul de inerție al plăcii D, față de originea axelor de coordonate, este dat de formula

$$I_0 = \iint_D (x^2 + y^2)\,\rho(x, y)\,dx\,dy$$

Momentele de inerție I_x și I_y ale plăcii D față de axele de coordonate Ox și Oy sînt date de formulele

$$I_x = \iint_D y^2 \rho(x, y)\, dx\, dy;$$

$$I_y = \iint_D x^2 \rho(x, y)\, dx\, dy,$$

și se vede că

$$I_0 = I_x + I_y.$$

Exemplu. Să se calculeze momentele de inerție în raport cu axele și coordonatele ale plăcii D

$$D = \{(x, y) \mid x + y \leq 1,\ x \geq 0,\ y \geq 0\}$$

în cazul

$$\rho(x, y) = xy.$$

Avem

$$I_x = \iint_D xy^3\, dx\, dy = \int_0^1 y^3 dy \int_0^{1-y} x\, dx = \frac{1}{2}\int_0^1 (1 - y)^2 y^3\, dy = \frac{1}{120};$$

$$I_y = \iint_D x^3 y\, dx\, dy = \int_0^1 x^3 dx \int_0^{1-x} y\, dy = \frac{1}{2}\int_0^1 (1 - x)^2 x^3\, dx = \frac{1}{120}.$$

Folosind egalitatea $I_0 = I_x + I_y$ obținem și $I_0 = \dfrac{1}{60}$.

PROBLEME

Să se calculeze următoarele integrale duble:

1) $\iint_D xy\, dx\, dy$, unde D este domeniul mărginit de parabola $y = x^2$ și de dreapta $y = 2x + 3$. R: $\dfrac{160}{3}$.

2) $\iint_D \dfrac{y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}\, dx\, dy$, unde D este domeniul mărginit de dreptele $y = 0$; $y = 1$; $y = \sqrt{2}$ și $y = x$; R: $\dfrac{1}{6}(\sqrt{2} - \ln(1 + \sqrt{2}))$.

3) $\iint_D (1 - y)\, dx\, dy$, unde $D = \{(x, y) \mid x^2 + (y - 1)^2 \leq 1,\ y \leq x^2,\ x \geq 0\}$. R: $\dfrac{1}{15}$.

4) $\iint_D \arcsin\sqrt{x+y}\,dx\,dy$, unde D este domeniul mărginit de dreptele $x+y=0$; $x+y=1$; $y=-1$ şi $y=1$. $\quad R: \frac{\pi}{4}$

5) $\iint_D \frac{dx\,dy}{6x+y+9}$; unde D este mărginit de curbele $y=x^2$; $y=2x^2-1$

$R: 3\ln 2-2$

6) $\iint_D x^{p-1}y^{q-1}\,dx\,dy$; unde $D=\{(x,y) : x+y\leq 1;\ y\geq 0;\ x\geq 0\}$

$R: \frac{\Gamma(p)\,\Gamma(q)}{\Gamma(p+q+1)}$

7) $\iint_D |\cos(x+y)|\,dx\,dy$ unde $D=[0,\pi]\times[0,\pi]$ $\quad R: 2\pi$

Să se calculeze, trecînd la coordonate polare, următoarele integrale duble

8) $\iint_D \sqrt{(x^2+y^2)^3}\,dx\,dy$; unde $D=\{(x,y) : x^2+y^2\leq a^2;\ y\geq 0\}$ $\quad R: \frac{\pi a^5}{5}$

9) $\iint_D \frac{\ln(x^2+y^2)}{x^2+y^2}\,dx\,dy$; unde $D=\{(x,y) ; 1\leq x^2+y^2\leq e^2\}$ $\quad R: 2\pi$

10) $\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy$; unde $D=\{(x,y) ; ax\leq x^2+y^2\leq 2ax;\ y\geq 0\}$

$R: \frac{14a^3}{9}$

11) $\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy$; unde $D=\{(x,y) ; ax\leq x^2+y^2\leq a^2;\ x\geq 0;\ y\geq 0\}$

$R: \frac{a^3}{3}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3}\right)$

12) $\iint_D \sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}\,dx\,dy$; unde

$D=\{(x,y) ; \pi^2\leq (x-1)^2+(y-1)^2\leq (2\pi)^2\}$ $\quad R: \frac{14}{3}\pi^4$

13) $\iint_D \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\,dx\,dy$; unde $D=\left\{(x,y) : \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leq 1\right\}$

$R: \frac{2}{3}\pi ab.$

Să se calculeze cu ajutorul formulei lui Riemann-Green următoarele integrale curbilinii:

14) $\displaystyle\oint_{\mathrm{Fr}\,D}^{+} e^{x^2+y^2}(-y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y)$; unde $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leqslant 1\}$ $\quad R: 2\pi e$

15) $\displaystyle\oint_{\mathrm{Fr}\,D}^{+} (xy - y)\,\mathrm{d}x + (xy + x)\,\mathrm{d}y$; unde $D = \left\{(x, y) : \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} \leqslant 1\right\}$

$R: 2\pi\,|ab|$

16) $\displaystyle\oint_{\mathrm{Fr}\,D}^{+} (x - y)\,\mathrm{d}x + \mathrm{d}y$ unde $D = \{(x, y) ; x^2 + y^2 \leqslant 2x ; y \geqslant 0\}$

$R: \dfrac{\pi}{2}$

17) $\displaystyle\oint_{\mathrm{Fr}\,D}^{+} \sqrt{x^2 + y^2}\,\mathrm{d}x + y[xy + \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2})]\,\mathrm{d}y$ unde

$D = \{(x, y) ; (x - 1)^2 + (y - 1)^2 \leqslant 1\}$ $\quad R: \dfrac{5\pi}{4}$

Să se calculeze ariile domeniilor mărginite de următoarele curbe:

18) $xy = a$; $xy = b$; $x^2 = \alpha y$; $x^2 = \beta y$; $(0 < a < b;\ 0 < \alpha < \beta)$

$R: \dfrac{1}{3}(b - a) \ln \dfrac{\beta}{\alpha}$

19) $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2)$ $\quad R: 2a^2$

20) $x^4 + y^4 = x^2 + y^2$ $\quad R: \pi\sqrt{2}$

21) $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2)$; $x^2 + y^2 \geqslant a^2$ $\quad R: \dfrac{3\sqrt{3} - \pi}{3}\,a^2$

22) $\sqrt{\dfrac{x}{a}} + \sqrt{\dfrac{y}{b}} = 1$; $\sqrt{\dfrac{x}{a}} + \sqrt{\dfrac{y}{b}} = 2$

$\dfrac{x}{a} = \dfrac{y}{b}$; $4\dfrac{x}{a} = \dfrac{y}{b}$; $a > 0$; $b > 0$ $\quad R: \dfrac{65}{108}\,ab$

23) $x^3 + y^3 = a\,xy$; $x \geqslant 0$; $y \geqslant 0$; $\quad R: \dfrac{a^2}{6}$

Să se calculeze coordonatele centrelor de greutate ale plăcilor omogene mărginite de următoarele curbe

24) $y^2 = 4x + 4$; $y^2 = -2x + 4$ $\quad R: x_G = \dfrac{2}{5}$; $y_G = 0$

25) $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{9} = 1$; $\dfrac{x}{5} + \dfrac{y}{3} = 1$; $(x \geqslant 0;\ y \geqslant 0)$

$R: x_G = \dfrac{10}{3(\pi - 2)}$; $y_G = \dfrac{2}{\pi - 2}$

26) $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$; $x = 0$; $(x \geq 0)$; $x_G = \frac{8a}{35}$; $y_G = 0$

Să se calculeze momentele de inerție în raport cu axele de coordonate ale plăcilor omogene mărginite de următoarele curbe:

27) $y = x^2$; $x = y^2$ R: $I_x = \frac{3}{35}$; $I_y = \frac{3}{35}$

28) $x^2 + y^2 = ay \ (a > 0)$ R: $I_x = \frac{5\pi a^4}{64}$; $I_y = \frac{\pi a^4}{64}$

29) $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$; $x = 0$; $y = 0 \ (a > 0)$ R: $I_x = \frac{a^4}{84}$; $I_y = \frac{a^4}{84}$

Să se calculeze următoarele integrale duble improprii:

30) $\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-\alpha(x^2+y^2)} \cos(x^2 + y^2)\, dx\, dy \ (\alpha > 0)$ R: $\frac{\pi\alpha}{1+\alpha^2}$

31) $\iint_D \frac{dx\, dy}{x^p y^q}$ unde $D = \{(x, y) : xy \geq 1;\ x \geq 1\}$

Indicație: Se consideră exhaustiunea (D_n), unde

$$D_n = \{(x, y) : 1 \leq xy \leq n,\ 1 \leq x \leq n\}$$

R: Integrala este convergentă pentru $p > q > 1$ și este egală cu $\frac{1}{(q-1)(p-q)}$

32) $\iint_D e^{-\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)} dx\, dy$; unde $D = \left\{(x, y) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \geq 1\right\}$ R: $\frac{\pi}{e} ab$

33) $\iint_D \frac{dx\, dy}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}}$ unde $D = \left\{(x, y) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} < 1;\ x \geq 0,\ y \geq 0\right\}$

R: $\frac{\pi}{2} ab$

CAPITOLUL IX

INTEGRALE DE SUPRAFAȚĂ

§ 1. ARIA UNEI SUPRAFEȚE

Reamintim că o mulțime $E \subset \mathbb{R}^2$ se numește domeniu dacă E este deschisă și conexă.

Definiția 1.1. Fie f o funcție reală definită și continuă pe un domeniu $E \subset \mathbb{R}^2$. Dacă f admite derivate parțiale de ordinul întîi continue pe E, atunci mulțimea punctelor din spațiu

$$G_f = \{(x, y, z);\ z = f(x, y);\ (x, y) \in E\}$$

se numește suprafață netedă de ecuație

$$z = f(x, y);\quad (x, y) \in E \tag{1}$$

Dacă punctul (x, y) în plan descrie o mulțime $D \subset E$ și D are arie, punctul corespunzător (x, y, z) descrie în spațiu o porțiune S, a suprafeței considerate. În continuare vom considera D un domeniu compact cu frontiera γ o curbă simplă închisă, netedă sau netedă pe porțiuni.

Dacă curba γ este definită de următoarea reprezentare parametrică

$$x = \varphi(t);\quad y = \psi(t);\quad t \in [a, b]$$

atunci curba $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$ definită de reprezentarea parametrică

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \qquad\qquad , \qquad t \in [a, b] \\ z = f(\varphi(t), \psi(t)) \end{cases}$$

se numește bordura lui S și se notează ∂S. Se vede imediat că Γ este o curbă netedă sau netedă pe porțiuni și că $pr_{xOy} I(\Gamma) = I(\gamma)$.

În fig. 75 sînt ilustrate D, $l(\gamma)$, S şi $l(\Gamma)$.

În aceste condiţii vom defini noţiunea de arie a lui S.

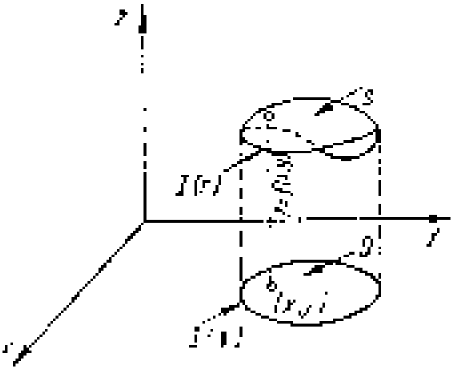

Fig. 75

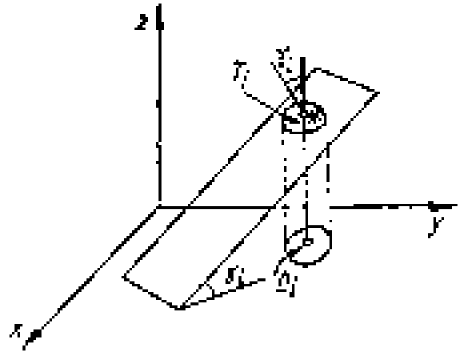

Fig. 76

Fie $\Delta = (D_1, D_2, \dots, D_n)$ o diviziune oarecare a domeniului compact D şi (ξ_i, η_i) un punct oarecare din D_i. Fie M_i acel punct al suprafeţei S ale cărui coordonate sînt ξ_i, η_i, ζ_i unde $\zeta_i = f(\xi_i, \eta_i)$.

În punctul M_i putem considera planul π_i tangent la suprafaţa S.

Considerăm cilindrul care are drept curbă directoare frontiera lui D_i şi generatoarele paralele cu axa Oz. Acest cilindru determină pe planul tangent π_i un domeniu T_i cu proprietatea că

$$\mathrm{Pr}_{xOy} T_i = D_i$$

Să considerăm suma $\sum_{i=1}^{n} \text{aria } T_i$.

Definiţie 2.1. Prin aria suprafeţei netede S şi o notăm aria S, înţelegem numărul dat de egalitatea

$$\text{aria } S = \lim_{\nu(\Delta)\to 0} \sum_{i=1}^{n} \text{aria } T_i$$

Teorema 2.1. Dacă S este o suprafaţă netedă de ecuaţie $z = f(x, y)$; $(x, y) \in D$ unde D este un compact cu frontieră netedă pe porţiuni atunci:

$$\text{aria } S = \iint_D \sqrt{1 + p^2 + q^2}\, dx\, dy \quad \text{unde } p = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial f}{\partial y} \tag{2}$$

Demonstraţie. Fie γ_i unghiul ascuţit format de normala la suprafaţa S în punctul M_i cu axa Oz. Se vede imediat că unghiul ascuţit format de planul π_i cu planul xOy este egal cu γ_i. Între aria T_i şi aria D_i avem egalitatea aria D_i = aria $T_i \cos \gamma_i$.

În fig. 76 sînt ilustrate D_i, T_i şi γ_i.

Dacă notăm cu p_i și q_i valorile derivatelor parțiale $\frac{\partial f}{\partial x}$ și respectiv $\frac{\partial f}{\partial y}$ în punctul (ξ_i, η_i) atunci $\cos \gamma_i = \frac{1}{\sqrt{1 + p_i^2 + q_i^2}}$

Deci

$$\text{aria } T_i = \sqrt{1 + p_i^2 + q_i^2} \text{ aria } D_i$$

Să punem

$$F(x, y) = \sqrt{1 + p^2 + q^2}$$

atunci avem

$$\sum_{i=1}^{n} \text{aria } T_i = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + p_i^2 + q_i^2} \text{ aria } D_i = \sigma_\Delta(F, \xi_i, \eta_i)$$

În membrul drept al ultimei egalități avem o sumă Riemann a funcției F, relativ la diviziunea Δ și la punctele intermediare (ξ_i, η_i). Deoarece F este continuă pe D (compunere de funcții continue), rezultă că F este integrabilă pe D și prin trecerea la limită în ultima egalitate obținem:

$$\text{aria } S = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \text{aria } T_i = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sigma_\Delta(F, \xi_i, \eta_i) = \iint_D \sqrt{1 + p^2 + q^2}\, dx\, dy$$

Deci aria $S = \iint_D \sqrt{1 + p^2 + q^2}\, dx\, dy$

Volum

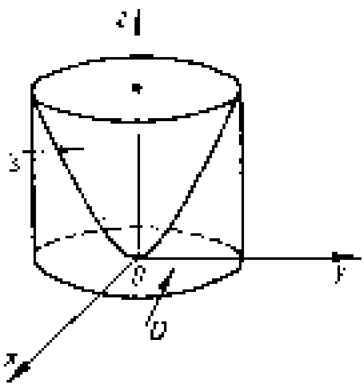

Fig. 77.

Exemplu. Să se calculeze aria suprafeței de ecuație $z = x^2 + y^2$ unde $(x, y) \in D$ iar $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq R^2\}$

Avem aria $S = \iint_D \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}\, dx\, dy$

Trecînd la coordonate polare obținem

$$\text{aria } S = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R \sqrt{1+4\rho^2}\,\rho\, d\rho = \frac{\pi}{6}\left[(1+4R^2)^{\frac{3}{2}} - 1\right].$$

Vom arăta ce devine formula (2) dacă facem o schimbare de variabile. Fie transformarea punctuală bijectivă

$$T: \begin{cases} x = \varphi(u, v) \\ y = \psi(u, v), \end{cases} \quad (u, v) \in d \tag{3}$$

de la d pe D, unde frontiera lui d este o curbă netedă pe porțiuni.

Presupunem că funcțiile φ și ψ sînt continue împreună cu derivatele lor parțiale de ordinul întîi și că jacobianul transformării (3): $\frac{D(\varphi, \psi)}{D(u, v)} \neq 0$ pe d.

În aceste condiții, obținem pentru suprafața netedă S următoarele ecuații parametrice:

$$\begin{aligned} x &= \varphi(u, v) \\ y &= \psi(u, v) \\ z &= f(\varphi(u, v), \psi(u, v)) = \chi(u, v) \end{aligned} \tag{4}$$

În locul ecuațiilor parametrice (4) putem folosi scrierea vectorială prescurtată

$$\bar{r} = \bar{r}(u, v) = \varphi(u, v)\,\bar{i} + \psi(u, v)\,\bar{j} + \chi(u, v)\,\bar{k} \tag{5}$$

unde $\bar{r}$ este vectorul de poziție.

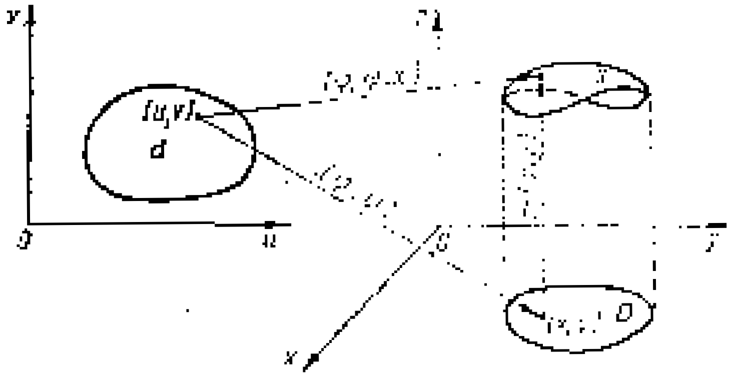

Fig. 58

Pentru a efectua schimbarea de variabile (3) în formula (2) trebuie calculate derivatele parțiale $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$. Folosind regula de derivare a funcțiilor compuse în ecuația

$$z = f(\varphi(u, v), \psi(u, v))$$

obţinem

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial u} = \dfrac{\partial f}{\partial \varphi}\dfrac{\partial \varphi}{\partial u} + \dfrac{\partial f}{\partial \psi}\dfrac{\partial \psi}{\partial u} \\[2ex] \dfrac{\partial z}{\partial v} = \dfrac{\partial f}{\partial \varphi}\dfrac{\partial \varphi}{\partial v} + \dfrac{\partial f}{\partial \psi}\dfrac{\partial \psi}{\partial v} \end{cases} \quad \text{sau} \quad \begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial u} = \dfrac{\partial z}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial u} + \dfrac{\partial z}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial u} \\[2ex] \dfrac{\partial z}{\partial v} = \dfrac{\partial z}{\partial x}\dfrac{\partial x}{\partial v} + \dfrac{\partial z}{\partial y}\dfrac{\partial y}{\partial v} \end{cases}$$

Din ultimul sistem obţinem

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{D(z, y)}{D(u, v)} : \frac{D(x, y)}{D(u, v)} \quad \text{şi} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{D(x, z)}{D(u, v)} : \frac{D(x, y)}{D(u, v)}$$

Atunci rezultă:

$$\iint_\Delta \sqrt{1 + \left(\frac{D(y, z)}{D(u, v)} : \frac{D(x, y)}{D(u, v)}\right)^2 + \left(\frac{D(z, x)}{D(u, v)} : \frac{D(x, y)}{D(u, v)}\right)^2} \cdot \left|\frac{D(x, y)}{D(u, v)}\right| \, du\, dv =$$

$$= \text{aria } S$$

sau

$$\text{aria } S = \iint_\Delta \sqrt{\left(\frac{D(x, y)}{D(u, v)}\right)^2 + \left(\frac{D(y, z)}{D(u, v)}\right)^2 + \left(\frac{D(z, x)}{D(u, v)}\right)^2} \, du\, dv \tag{6}$$

Formula (6) poate servi ca definiţie pentru noţiunea de arie a unei suprafeţe S netedă şi simplă dată parametric

$$\begin{cases} x = \varphi(u, v) \\ y = \psi(u, v), \quad (u, v) \in D \\ z = \chi(u, v) \end{cases} \tag{7}$$

sau sub formă vectorială

$$\bar{r} = \varphi(u, v)\,\bar{i} + \psi(u, v)\,\bar{j} + \chi(u, v)\,\bar{k} \tag{8}$$

Amintim că o suprafaţă S dată parametric prin (7) sau prin (8) se numeşte netedă dacă

$$|\bar{r}_u \times \bar{r}_v|^2 = \left(\frac{D(x, y)}{D(u, v)}\right)^2 + \left(\frac{D(y, z)}{D(u, v)}\right)^2 + \left(\frac{D(z, x)}{D(u, v)}\right)^2 > 0 \text{ pe } D$$

Suprafaţa S se numeşte simplă dacă aplicaţia definită de (7)

$$(u, v) \to (x, y, z)$$

este injectivă.

Definiţia 2.1. Fie S o suprafaţă netedă şi simplă dată parametric prin (7) unde D este domeniu care are arie. Atunci prin aria S înţelegem numărul real dat de egalitatea

$$\text{aria } S = \iint_D |\bar{r}_u \times \bar{r}_v| \, du\, dv$$

Dacă introducem notațiile

$$E = \bar{r}_u \cdot \bar{r}_u = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial \chi}{\partial u}\right)^2$$

$$F = \bar{r}_u \cdot \bar{r}_v = \frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{\partial \varphi}{\partial v} + \frac{\partial \psi}{\partial u}\frac{\partial \psi}{\partial v} + \frac{\partial \chi}{\partial u}\frac{\partial \chi}{\partial v}$$

$$G = \bar{r}_v \cdot \bar{r}_v = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial \chi}{\partial v}\right)^2$$

$$A = \frac{D(\psi, \chi)}{D(u, v)}; \quad B = \frac{D(\chi, \varphi)}{D(u, v)} \quad \text{și} \quad C = \frac{D(\varphi, \psi)}{D(u, v)}$$

atunci folosind identitatea lui Lagrange

$$(bc' - b'c)^2 + (ca' - c'a)^2 + (ab' - a'b)^2 =$$
$$= (a^2 + b^2 + c^2)(a'^2 + b'^2 + c'^2) - (aa' + bb' + cc')^2$$

rezultă imediat

$$\|\bar{r}_u \times \bar{r}_v\| = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} = \sqrt{EG - F^2}$$

și deci avem

$$\text{aria } S = \iint_D \sqrt{EG - F^2}\, du\, dv = \iint_D \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\, du\, dv \tag{9}$$

Definiție 4.1. Forma diferențială $d\sigma = \sqrt{EG - F^2}\, du\, dv$ se numește elementul de arie al suprafeței S.

În cazul unei suprafețe S de ecuație $z = f(x, y)$; $(x, y) \in D$ dacă punem $x = u$, $y = v$, $z = f(u, v)$ obținem $E = 1 + p^2$, $G = 1 + q^2$,

$$F = p \cdot q; \; p = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial f}{\partial y}$$

și deci elementul de arie este

$$d\sigma = \sqrt{(1 + p^2)(1 + q^2) - p^2 q^2}\, dx\, dy = \sqrt{1 + p^2 + q^2}\, dx\, dy$$

Exemplu. Sfera de ecuație $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ poate fi dată parametric prin:

$$x = R \sin\theta \cos\varphi; \quad y = R \sin\theta \sin\varphi; \quad z = R\cos\theta;$$
$$\theta \in [0, \pi]; \; \varphi \in [0, 2\pi]$$

și deci

$$\bar{r}(\theta, \varphi) = R \sin\theta \cos\varphi\, \bar{i} + R \sin\theta \sin\varphi\, \bar{j} + R \cos\theta\, \bar{k}$$

În acest caz

$$E = R^2; \; F = 0; \; G = R^2 \sin^2\theta$$

și deci

$$\text{aria sferei} = 8\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{EG - F^2}\, d\theta = 8R^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta\, d\theta = 4\pi R^2$$

Teorema 2.1. Aria unei suprafețe S netede și simple nu depinde de reprezentarea sa parametrică.

Demonstrație. Fie suprafața S dată parametric de (7) și transformarea punctuală bijectivă

$$\begin{matrix} u = \lambda(u', v') \\ v = \mu(u', v') \end{matrix}, \quad (u', v') \in D'$$

de la D' la D, unde frontiera lui D' este o curbă netedă pe porțiuni, funcțiile λ și μ sînt continue și cu derivate parțiale continue iar $\frac{D(\lambda, \mu)}{D(u', v')} \neq 0$ pe D'.

Obținem în acest fel o nouă reprezentare parametrică a lui S și anume

$$\begin{cases} x = \varphi_1(u', v') = \varphi(\lambda(u', v'), \mu(u', v')) \\ y = \psi_1(u', v') = \psi(\lambda(u', v'), \mu(u', v')), \quad (u', v') \in D' \\ z = \chi_1(u', v') = \chi(\lambda(u', v'), \mu(u', v')) \end{cases} \tag{10}$$

Dacă notăm

$$A' = \frac{D(\psi_1, \chi_1)}{D(u', v')}; \quad B' = \frac{D(\chi_1, \varphi_1)}{D(u', v')}; \quad C' = \frac{D(\varphi_1, \psi_1)}{D(u', v')}$$

atunci se obțin cu ușurință următoarele egalități

$$A' = A\,\frac{D(\lambda, \mu)}{D(u', v')}; \quad B' = B\,\frac{D(\lambda, \mu)}{D(u', v')}; \quad C' = C\,\frac{D(\lambda, \mu)}{D(u', v')} \tag{11}$$

și deci

$$\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} = \sqrt{A'^2 + B'^2 + C'^2} : \left|\frac{D(\lambda, \mu)}{D(u', v')}\right|$$

Folosind formula schimbării de variabile de la integrala dublă obținem

$$\text{aria } S = \iint_D \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\, du\, dv =$$

$$= \iint_{D'} \left(\sqrt{A'^2 + B'^2 + C'^2} : \left|\frac{D(\lambda, \mu)}{D(u', v')}\right|\right) \left|\frac{D(\lambda, \mu)}{D(u', v')}\right| du'\, dv' =$$

$$= \iint_{D'} \sqrt{A'^2 + B'^2 + C'^2}\, du'\, dv'$$

și teorema este demonstrată.

§ 2. INTEGRALA DE SUPRAFAŢĂ DE PRIMUL TIP

Fie S o suprafaţă netedă dată parametric

$$x = \varphi(u, v),\ y = \psi(u, v),\ z = \chi(u, v) \tag{7}$$

unde φ, ψ, χ, sînt funcţii reale definite pe domeniul compact D din planul uOv. Presupunem că D are arie. Fie F o funcţie reală definită şi mărginită pe un domeniu din spaţiu care conţine suprafaţa S. Fie $\Delta = (D_1, D_2, \ldots, D_n)$ o diviziune oarecare a domeniului D. Fiecărui domeniu compact D_i ($i = 1, \ldots, n$) îi corespunde prin (7) o porţiune S_i din S. Alegem în fiecare domeniu D_i cîte un punct oarecare (u_i, v_i).
Punem.

$$\xi_i = \varphi(u_i, v_i),\ \eta_i = \psi(u_i, v_i);\ \zeta_i = \chi(u_i, v_i)$$

şi formăm suma

$$\sigma_\Delta(F, \xi_i, \eta_i, \zeta_i) = \sum_{i=1}^{n} F(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \text{ aria } S_i$$

Definiţia 1.2. Spunem că funcţia F este integrabilă pe suprafaţa netedă S, dacă există un număr I cu proprietatea că

$$(\forall)\ \varepsilon > 0,\ (\exists)\ \delta(\varepsilon) > 0$$

astfel încît, oricare ar fi diviziunea Δ a lui D cu $\nu(\Delta) < \delta(\varepsilon)$ şi oricare ar fi alegerea punctelor $(u_i, v_i) \in D_i$ să avem

$$|\sigma_\Delta(F, \xi_i, \eta_i, \zeta_i) - I| < \varepsilon$$

Atunci punem

$$I = \iint_S F(x, y, z)\, d\sigma$$

şi citim *integrala funcţiei F pe suprafaţa S.*

Observaţie. Dacă presupunem că S este o suprafaţă materială iar $F(x, y, z)$ este densitatea suprafeţei în punctul de coordonate x, y, z atunci dacă integrala funcţiei F pe suprafaţa S există, ea dă masa suprafeţei S. Dacă F ar reprezenta densitatea de repartiţie a unei sarcini electrice, integrala lui F pe suprafaţa S ar reprezenta sarcina electrică totală distribuită pe S.

Regula de calcul a integralei de suprafaţă de prima speţă este dată de următoarea

Teorema 1.2. Dacă presupunem că integralele

$$\iint_S F(x, y, z)\, d\sigma$$

$$\iint_D F[\varphi(u, v), \psi(u, v), \chi(u, v)] \sqrt{A^2(u, v) + B^2(u, v) + C^2(u, v)}\, du\, dv$$

există, atunci ele sînt egale.

Demonstrație. Din modul cum a fost definită aria unei suprafețe avem

$$\text{aria } S_i = \iint_{D_i} \sqrt{A^2(u, v) + B^2(u, v) + C^2(u, v)}\, du\, dv$$

Deoarece funcția de sub semnul integrală este continuă, aplicînd formula de medie pentru integrala dublă, deducem existența unui punct $(\bar{u}_i, \bar{v}_i) \in D_i$ astfel încît să avem

$$\text{aria } S_i = \sqrt{A^2(\bar{u}_i, \bar{v}_i) + B^2(\bar{u}_i, \bar{v}_i) + C^2(\bar{u}_i, \bar{v}_i)} \cdot \text{aria } D_i$$

Dacă punem

$$\xi_i = \varphi(\bar{u}_i, \bar{v}_i), \quad \eta_i = \psi(\bar{u}_i, \bar{v}_i), \quad \zeta_i = \chi(\bar{u}_i, \bar{v}_i)$$

avem

$$\sigma_\Delta(F, \xi_i, \eta_i, \zeta_i) = \sum_{i=1}^{n} F(\varphi(\bar{u}_i, \bar{v}_i), \psi(\bar{u}_i, \bar{v}_i), \chi(\bar{u}_i, \bar{v}_i)) \cdot$$

$$\cdot \sqrt{A^2(\bar{u}_i, \bar{v}_i) + B^2(\bar{u}_i, \bar{v}_i) + C^2(\bar{u}_i, \bar{v}_i)}\, \text{aria } D_i = \sigma_\Delta(H, \bar{u}_i, \bar{v}_i)$$

unde

$$H(u, v) = F(\varphi(u, v), \psi(u, v), \chi(u, v)) \sqrt{A^2(u, v) + B^2(u, v) + C^2(u, v)}$$

iar $\sigma_\Delta(H, \bar{u}_i, \bar{v}_i)$ este o sumă Riemann relativ la funcția H, diviziunea Δ a lui D și la punctele $(\bar{u}_i, \bar{v}_i)$. Deoarece am presupus existența celor două integrale din enunț iar egalitatea

$$\sigma_\Delta(F, \xi_i, \eta_i, \zeta_i) = \sigma_\Delta(H, \bar{u}_i, \bar{v}_i)$$

se păstrează prin trecere la limită, rezultă egalitatea celor două integrale.

Observație. 1) În condițiile teoremei de mai sus, dacă ținem seama de egalitatea (9) obținem

$$\iint_S F(x, y, z)\, d\sigma = \iint_D F(\varphi(u, v), \psi(u, v), \chi(u, v)) \sqrt{E(u, v)G(u, v) - F^2(u, v)}\, du\, dv$$

Exemplu. Să se calculeze integrala

$$I = \iint_S \sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}}\, d\sigma$$

unde S este elipsoidul

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Pentru suprafaţa S avem reprezentarea parametrică

$$x = a \sin\theta \cos\varphi; \quad y = b \sin\theta \sin\varphi; \quad z = c \cos\theta;$$

$$\theta \in [0, \pi]; \quad \varphi \in [0, 2\pi]$$

În acest caz

$$d\sigma = abc \sqrt{\frac{\sin^2\theta \cos^2\varphi}{a^2} + \frac{\sin^2\theta \sin^2\varphi}{b^2} + \frac{\cos^2\theta}{c^2}} \cdot \sin\theta \, d\theta \, d\varphi$$

iar

$$\sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}} = \sqrt{\frac{\sin^2\theta \cos^2\varphi}{a^2} + \frac{\sin^2\theta \sin^2\varphi}{b^2} + \frac{\cos^2\theta}{c^2}}$$

şi deci

$$I = 8abc \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\sin^2\theta \cos^2\varphi}{a^2} + \frac{\sin^2\theta \sin^2\varphi}{b^2} + \frac{\cos^2\theta}{c^2} \right) \sin\theta \, d\theta \, d\varphi =$$

$$= \frac{4}{3} \pi abc \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \right).$$

Observaţia 2) Dacă suprafaţa S este dată de ecuaţia $z = f(x, y)$; $(x, y) \in D$ iar f admite derivate parţiale continue atunci avem

$$\iint_S F(x, y, z) \, d\sigma = \iint_D F(x, y, f(x, y)) \sqrt{1 + p^2 + q^2} \, dx \, dy$$

Exemplu: Să se calculeze integrala

$$I = \iint_S z \, d\sigma \text{ unde } S: z = x^2 + y^2 \text{ iar } D = \{(x, y): x^2 + y^2 \leq R^2\}$$

Avem

$$d\sigma = \sqrt{1 + p^2 + q^2} \, dx \, dy = \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2} \, dx \, dy$$

şi deci

$$I = \iint_D (x^2 + y^2) \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2} \, dx \, dy.$$

Trecînd la coordonate polare avem

$$I = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R \rho^3 \sqrt{1 + 4\rho^2} \, d\rho = \frac{\pi}{60} [1 - (1 + 4R^2)^{\frac{3}{2}} (6R^2 - 1)]$$

Observația 3) Dacă suprafața S este juxtapunerea a două suprafețe S_1 și S_2 simple și netede (ca în fig. 79) și dacă F este integrală pe S_1 și S_2, atunci prin definiție

$$\iint_S F(x, y, z)\, d\sigma = \iint_{S_1} F(x, y, z)\, d\sigma + \iint_{S_2} F(x, y, z)\, d\sigma$$

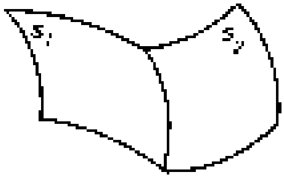

Fig. 79

Observația 4) Dacă suprafața S este o suprafață materială iar $\rho(x, y, z)$ este densitatea suprafeței în punctul (x, y, z) atunci coordonatele centrului de greutate sînt date de egalitățile

$$x_G = \frac{\iint_S x\rho(x, y, z)\, d\sigma}{\iint_S \rho(x, y, z)\, d\sigma}; \quad y_G = \frac{\iint_S y\rho(x, y, z)\, d\sigma}{\iint_S \rho(x, y, z)\, d\sigma};$$

$$z_G = \frac{\iint_S z\rho(x, y, z)\, d\sigma}{\iint_S \rho(x, y, z)\, d\sigma}$$

iar momentele de inerție, de egalitățile

$$I_0 = \iint_S (x^2 + y^2 + z^2)\, \rho(x, y, z)\, d\sigma$$

$$I_{ox} = \iint_S (y^2 + z^2)\, \rho(x, y, z)\, d\sigma; \quad I_{oy} = \iint_S (z^2 + x^2)\, \rho(x, y, z)\, d\sigma;$$

$$I_{oz} = \iint_S (x^2 + y^2)\, \rho(x, y, z)\, d\sigma$$

$$I_{oxy} = \iint_S z^2 \rho(x, y, z)\, d\sigma; \quad I_{oyz} = \iint_S x^2\, \rho(x, y, z)\, d\sigma;$$

$$I_{ozx} = \iint_S y^2 \rho(x, y, z)\, d\sigma$$

§ 3. INTEGRALA DE SUPRAFAȚĂ DE AL DOILEA TIP

Pentru a defini integrala de suprafață de al doilea tip trebuie să introducem mai întîi noțiunea de suprafață orientată.

Această noțiune este analoagă cu cea a orientării unei curbe.

Fie S o suprafață netedă, simplă dată parametric prin

$$\bar r(u, v) = \varphi(u, v)\bar i + \psi(u, v)\bar j + \chi(u, v)\bar k, \quad (u, v) \in D.$$

Fie $M'(u, v)$ un punct din D și $M(x, y, z)$ punctul corespunzător pe suprafața S. În punctul M putem considera doi versori normali la suprafața S și anume:

$$\bar n_1 = \frac{\bar r_u \times \bar r_v}{\|\bar r_u \times \bar r_v\|}; \quad \bar n_2 = -\frac{\bar r_u \times \bar r_v}{\|\bar r_u \times \bar r_v\|} \qquad (1)$$

Fie $M(x, y, z)$ un punct arbitrar aparținînd lui $S - \partial S$ și $\bar n(M)$ unul din cei doi versori normali la suprafața S în punctul M.

Definiție 3.1. Spunem că suprafața S este bilateră (cu două pagini sau cu două fețe) dacă $\bar n(M)$ este funcție continuă în fiecare punct $M \in S - \partial S$. O suprafață bilateră împreună cu o alegere, cu o fixare, a unuia din cei doi versori-normală se numește suprafață orientată.

Exemple: 1) Un plan este o suprafață bilateră. Orice porțiune a unui plan este o suprafață bilateră.

2) Orice suprafață netedă de forma $z = f(x, y)$, $(x, y) \in D$ este bilateră.

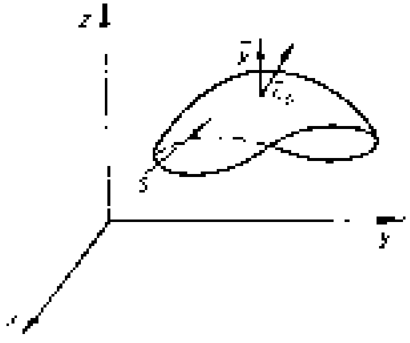

Fig. 50.

Fig. 51.

Dacă alegem în fiecare punct al său sensul normalei îndreptat în sus (fig. 50) obținem pagina superioară a suprafeței; dacă alegem în fiecare punct al său sensul normalei îndreptat în jos, obținem pagina inferioară a suprafeței.

3) Orice suprafață S netedă, simplă și închisă este o suprafață bilateră. În acest caz există două domenii D_1 și D_2, D_1 mărginit iar D_2 nemărginit așa fel încît

$$\mathrm{Fr}\, D_1 = \mathrm{Fr}\, D_2 = S \quad \text{și} \quad D_1 \cup D_2 \cup S = \mathbf{R}^3.$$

Dacă în fiecare punct al lui S alegem sensul normalei ($\bar{n}_e$) îndreptat spre domeniul D_e obținem fața exterioară a suprafeței S. Dacă în fiecare punct al lui S alegem sensul normalei ($\bar{n}_i$) îndreptat spre domeniul D_i obținem fața interioară a suprafeței S.

Observația 1. O suprafață bilaterală mai poate fi caracterizată și în alt mod. Fie S o suprafață simplă, netedă și M un punct oarecare, aparținînd lui $S - \partial S$. În punctul M alegem unul din cei doi versori-normală la suprafața S și-l notăm cu $\bar{n}$. Pe suprafața S considerăm o curbă Γ oarecare închisă ce trece prin M și nu are puncte comune cu bordura lui S. Prin deplasarea continuă a versorului normală $\bar{n}$ pe curba Γ, acesta revine în M sau în poziția inițială sau coincide cu $-\bar{n}$. Dacă prima dintre aceste situații are loc pentru orice punct $M \in S - \partial S$ și orice curbă Γ atunci suprafața este bilateră. Dacă, cea de-a doua situație are loc pentru un punct $M \in S - \partial S$ și o curbă Γ, atunci suprafața S se numește unilateră.

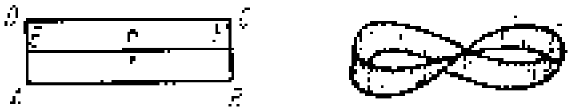

Fig. 82.

Un exemplu de suprafață unilateră este banda lui Möbius care se construiește îndoind o foaie dreptunghiulară $ABCD$ în așa fel încît vîrful A să coincidă cu C iar vîrful B să coincidă cu D.

Pe suprafața astfel obținută, dacă ne deplasăm pe Γ pornind din punctul E cu un sens fixat $\bar{n}$, ajungem în punctul E' (care coincide cu E) cu sensul $-\bar{n}$.

Observația 2. Fie S o suprafață netedă bilateră, dată parametric prin (7) sau (8). Cei doi versori normală la suprafața S sînt dați de (12) sau de

$$\bar{n}_1 = \frac{A\mathbf{i} + B\mathbf{j} + C\mathbf{k}}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \quad \bar{n}_2 = -\frac{A\mathbf{i} + B\mathbf{j} + C\mathbf{k}}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Dacă facem o schimbare de variabile ca în condițiile teoremei 2.1 și ținem seama de egalitățile (11) obținem

$$\bar{n}_1 = \frac{A\mathbf{i} + B\mathbf{j} + C\mathbf{k}}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{A'\mathbf{i} + B'\mathbf{j} + C'\mathbf{k}}{\sqrt{A'^2 + B'^2 + C'^2}} \cdot \frac{D(u, v)}{D(u', v')} : \left|\frac{D(u, v)}{D(u', v')}\right| =$$

$$= \frac{A'\mathbf{i} + B'\mathbf{j} + C'\mathbf{k}}{\sqrt{A'^2 + B'^2 + C'^2}} \operatorname{sgn} \frac{D(u, v)}{D(u', v')}.$$

Deci în cazul în care iacobianul transformării

$$u = \lambda(u', v'), \quad v = \mu(u', v'), \quad (u', v') \in D'$$

este pozitiv, atunci versorul normală este același.

Vom considera o problemă de fizică care sugerează definirea integralei de suprafaţă de al doilea tip.

Presupunem că într-un domeniu $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ există un fluid în mişcare de masă specifică egală cu unitatea şi

$$\bar{V}(x, y, z) = P(x, y, z)\,\bar{i} + Q(x, y, z)\,\bar{j} + R(x, y, z)\,\bar{k},\quad (x, y, z) \in \Omega$$

este cîmpul vectorial al vitezelor particulelor de fluid.

Vrem să evaluăm cantitatea de fluid care trece printr-o suprafaţă bilateră $S \subset \Omega$, în unitatea de timp.

Cantitatea de fluid care trece printr-o porţiune $d\sigma$ (a suprafeţei S) în unitatea de timp este egală cu volumul cilindrului avînd baza $d\sigma$ şi înălţimea egală cu produsul scalar dintre $\bar{V}$ şi $\bar{n}$ (normala la suprafaţa S). Dacă $\bar{n} = \cos\alpha\,\bar{i} + \cos\beta\,\bar{j} + \cos\gamma\,\bar{k}$ atunci cantitatea de fluid care trece prin $d\sigma$ în unitatea de timp este egală cu $\|\bar{V}\| \cos(\bar{n}, \bar{V}) = P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma$.

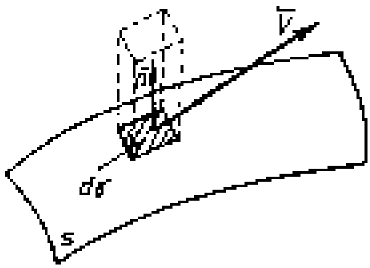

Fig. 9.1.

Este natural să considerăm că prin suprafaţa S trece în unitatea de timp o cantitate de fluid egală cu

$$\iint_S [P(x, y, z)\cos\alpha + Q(x, y, z)\cos\beta + R(x, y, z)\cos\gamma]\,d\sigma = \iint_S (\bar{V} \cdot \bar{n})\,d\sigma$$

În cazul general fie $\bar{V} = P\bar{i} + Q\bar{j} + R\bar{k}$ un cîmp vectorial, unde P, Q, R sînt trei funcţii reale definite şi continue pe un domeniu $\Omega \subset \mathbb{R}^3$.

Fie $S \subset \Omega$ o suprafaţă netedă bilateră dată parametric prin $\bar{r}(u, v) = \varphi(u, v)\,\bar{i} + \psi(u, v)\,\bar{j} + \chi(u, v)\,\bar{k}$; $(u, v) \in D$ (domeniu care are arie) şi fixăm o orientare pe S, alegînd

$$\bar{n} = \frac{\bar{r}_u \times \bar{r}_v}{\|\bar{r}_u \times \bar{r}_v\|} = \cos\alpha\,\bar{i} + \cos\beta\,\bar{j} + \cos\gamma\,\bar{k}$$

Suprafaţa S astfel orientată o notăm cu S_+. În aceste condiţii putem da următoarea

Definiţie. 1.3. Integrala funcţiei vectoriale $\bar{V}$ pe suprafaţa S_+ (sau integrala de suprafaţă de al doilea tip), pe care o notăm cu

$$\iint_{S_+} P(x, y, z)\,dy\,dz + Q(x, y, z)\,dz\,dx + R(x, y, z)\,dx\,dy,$$

se definește prin egalitatea

$$\iint_{S_+} P\,dy\,dz + Q\,dz\,dx + R\,dx\,dy = \iint_S (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\,d\sigma$$

În mod asemănător se definește

$$\iint_{S_-} P\,dy\,dz + Q\,dz\,dx + R\,dx\,dy = -\iint_S (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\,d\sigma$$

Dacă ținem seama de regula de calcul a integralei de suprafață de primul tip, dată în teorema 1.2 și de faptul că

$$n = \frac{A\mathbf{i} + B\mathbf{j} + C\mathbf{k}}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \text{ obținem}$$

$$\iint_{S_+} P\,dy\,dz + Q\,dz\,dx + R\,dx\,dy = \iint_S (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\,d\sigma =$$

$$= \iint_S \frac{P\cdot A + QB + RC}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}\,d\sigma = \iint_D (P\cdot A + Q\cdot B + R\cdot C)\,du\,dv$$

Am obținut deci, regula de calcul a integralei de suprafață de al doilea tip:

$$\iint_{S_+} P\,dy\,dz + Q\,dz\,dx + R\,dx\,dy = \iint_D (P\cdot A + Q\cdot B + R\cdot C)\,du\,dv,$$

unde

$$P = P(\varphi(u, v), \psi(u, v), \chi(u, v))$$

$$Q = Q(\varphi(u, v), \psi(u, v), \chi(u, v))$$

$$R = R(\varphi(u, v), \psi(u, v), \chi(u, v))$$

iar funcțiile $A = A(u, v)$, $B = B(u, v)$ și $C = C(u, v)$ sînt date la definiția 3.1.

Dacă folosim scrierea vectorială rezultatele de mai sus se pot scrie prin egalitățile următoare:

$$\iint_{S_+} P\,dy\,dz + Q\,dz\,dx + R\,dx\,dy = \iint_S (\bar{V}\cdot\bar{n})\,d\sigma = \iint_S \frac{(\bar{V}, \bar{r}_u, \bar{r}_v)}{|\bar{r}_u \times \bar{r}_v|}\,d\sigma =$$

$$= \iint_D (\bar{V}, \bar{r}_u, \bar{r}_v)\,du\,dv = \iint_D \begin{vmatrix} P & Q & R \\ \frac{\partial\varphi}{\partial u} & \frac{\partial\psi}{\partial u} & \frac{\partial\chi}{\partial u} \\ \frac{\partial\varphi}{\partial v} & \frac{\partial\psi}{\partial v} & \frac{\partial\chi}{\partial v} \end{vmatrix}\,du\,dv$$

În cazul în care suprafaţa netedă este de ecuaţie $z = f(x, y)$, $(x, y) \in D$ (domeniul care are arie) atunci versorul normală, $\bar{n}_+$, corespunzător paginei superioare va fi

$$\bar{n}_+ = \frac{-p\,\mathbf{i} - q\,\mathbf{j} + \mathbf{k}}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}$$

iar versorul normală, corespunzător paginii inferioare va fi egal cu $-\bar{n}_+$.

Trebuie precizat că în practică fixarea orientării se face funcţie de context.

Exemplul 1. Să se calculeze $I = \iint_S x^2\,dy\,dz + y^2\,dz\,dx + z^2\,dx\,dy$ pe pagina exterioară a sferei $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

În cazul sferei date, avem că $\bar{n}_+ = \frac{x}{R}\mathbf{i} + \frac{y}{R}\mathbf{j} + \frac{z}{R}\mathbf{k}$. Atunci $I = \iint_S \frac{x^3 + y^3 + z^3}{R}\,d\sigma$. Pentru sfera considerată avem reprezentarea parametrică

$$x = R \sin\theta \cos\varphi,\ y = R \sin\theta \sin\varphi,\ z = R \cos\theta,$$

$$\theta \in [0, \pi],\ \varphi \in [0, 2\pi] \text{ şi deci}$$

$$I = R\int_0^{\pi} d\theta \int_0^{2\pi} (R^3 \sin^3\theta \cos^3\varphi + R^3 \sin^3\theta \sin^3\varphi +$$

$$+ R^3 \cos^3\theta) \sin\theta\, d\varphi = \frac{4\pi R^4}{3}.$$

Exemplul 2. Să se calculeze

$I = \iint_S xz\,dy\,dz + yz\,dz\,dx + (x^2 + y^2)\,dx\,dy$ pe pagina superioară a lui $S: z = x^2 + y^2$, $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \le 1\}$. În acest caz avem $\bar{n}_+ = \frac{-2x\mathbf{i} - 2y\mathbf{j} + \mathbf{k}}{\sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}}$ şi deci

$$I = \iint_S \frac{-2x^2 z - 2y^2 z + x^2 + y^2}{\sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}}\,d\sigma = \iint_S \frac{(x^2 + y^2)(1 - 2z)}{\sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}}\,d\sigma.$$

Dacă ţinem seama de regula de calcul a unei integrale de suprafaţă de primul tip avem,

$$I = \iint_D (x^2 + y^2)(1 - 2x^2 - 2y^2)\,dx\,dy = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \rho^3(1 - 2\rho^2)\,d\rho = -\frac{\pi}{6}.$$

§ 4. FORMULA LUI STOKES

Această formulă stabilește o legătură între integrala curbilinie în spațiu și integrala de suprafață. Fie S o suprafață netedă, bilaterală și orientată, dată parametric prin

$$\bar{r}(u, v) = \varphi(u, v)\bar{i} + \psi(u, v)\bar{j} + \chi(u, v)\bar{k}, \quad (u, v) \in D$$

(domeniu compact cu arie). Deci este fixat versorul normalei $\bar{n}$ la suprafața S. Presupunem că frontiera lui S este curba Γ închisă, simplă și netedă. Pe curba Γ introducem o orientare pe care o numim compatibilă cu cea a suprafeței S. În fiecare punct $M \in \Gamma$ considerăm versorul normalei $\bar{n}$. Tot în punctul M considerăm vectorul $\bar{\tau}$ cu proprietatea că este perpendicular și pe $\bar{n}$ și pe Γ și „intră" în S.

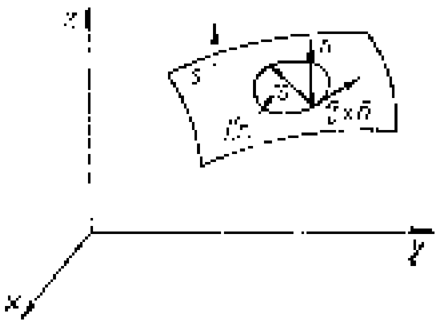

Fig. 88.

Orientarea de pe curba Γ dată de vectorul $\bar{\tau} \times \bar{n}$ se numește compatibilă cu cea a suprafeței S sau într-un limbaj mai sugestiv: orientarea pe Γ compatibilă cu cea a suprafeței S este dată de un observator care deplasându-se pe Γ are capul spre $\bar{n}$ și lasă la stânga suprafața S. Mai presupunem că suprafața S poate fi descompusă într-un număr finit de porțiuni de suprafață cu proprietatea că fiecare dintre ele poate fi reprezentată prin ecuații explicite în raport cu fiecare variabilă.

Putem enunța

Teorema 14. Dacă suprafața S și frontiera sa Γ satisfac condițiile de mai sus iar

$$\bar{F} = P\bar{i} + Q\bar{j} + R\bar{k}$$

este un câmp vectorial definit pe un domeniu $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ care conține suprafața S, iar funcțiile P, Q, R au derivate parțiale continue pe Ω atunci are loc egalitatea

$$\oint_{\Gamma} P\,dx + Q\,dy + R\,dz =$$

$$\iint_S \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)dy\,dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)dz\,dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy \quad (13)$$

Această formulă se numește „f o r m u l a l u i S t o k e s".

Demonstrație. Din ipoteza făcută rezultă că suprafața poate fi luată de forma $z = f(x, y)$; $(x, y) \in D$ cu $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ continue pe D.

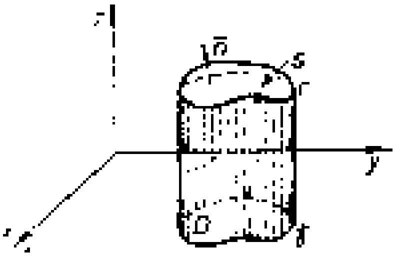

Fig. 88.

În acest caz proiecția suprafeței S pe planul xOy este D, iar proiecția lui Γ este frontiera lui D pe care o notăm cu γ.

Pentru a fixa ideile vom presupune că $\bar{n}$ este versorul-normală corespunzător paginii superioare, adică

$$\bar{n} = \cos\alpha\, \bar{i} + \cos\beta\, \bar{j} + \cos\gamma\, \bar{k} = \frac{-\frac{\partial f}{\partial x}\bar{i} - \frac{\partial f}{\partial y}\bar{j} + \bar{k}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}} \qquad (14)$$

Demonstrăm egalitatea (13), transformînd integrala curbilinie într-o integrală de suprafață după următoarea schemă:

$$\int_{\Gamma} \to \int_{\gamma} \to \iint_{D} \to \iint_{S}$$

Pentru început vom considera integrala

$$I_1 = \oint_{\Gamma} P(x, y, z)\,dx$$

și observăm că

$$I_1 = \oint_{\Gamma} P(x, y, z)\,dx = \oint_{\gamma} P(x, y, f(x, y))\,dx$$

deoarece Γ aparține suprafeței S (de ecuație $z = f(x, y)$). Dacă aplicăm formula lui Riemann-Green (în planul xOy) pentru ultima integrală și ținem seama de regula de derivare a funcțiilor compuse rezultă

$$\oint_{\gamma} P(x, y, f(x, y))\,dx = -\iint_{D}\left(\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial y}\right)dx\,dy$$

Folosind expresiile (14) care dau cosinușii directori ai normalei la suprafața S avem

$$\cos\alpha = \frac{-\dfrac{\partial f}{\partial x}}{\sqrt{1+\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)^2}};\ \cos\beta = \frac{-\dfrac{\partial f}{\partial y}}{\sqrt{1+\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)^2}};$$

$$\cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)^2}}$$

de unde obținem

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{\cos\beta}{\cos\gamma}$$

$$\text{Atunci } I_1 = -\iint_D \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial P}{\partial z}\cdot\frac{\cos\beta}{\cos\gamma}\right)dx\,dy$$

Dacă ținem seama de definiția integralei de suprafață de al doilea tip avem

$$I_1 = -\iint_S \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial P}{\partial z}\,\frac{\cos\beta}{\cos\gamma}\right)\cos\gamma\,d\sigma = -\iint_S \left(\frac{\partial P}{\partial y}\cos\gamma - \frac{\partial P}{\partial z}\cos\beta\right)d\sigma =$$

$$-\iint_S \left(\frac{\partial P}{\partial z}\cos\beta - \frac{\partial P}{\partial y}\cos\gamma\right)d\sigma = \iint_S \frac{\partial P}{\partial z}\,dz\,dx - \iint_S \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy$$

Procedînd analog și cu ceilalți termeni ai integralei curbilinii din egalitatea (13) obținem:

$$\oint_\Gamma Q\,dy = \iint_S \frac{\partial Q}{\partial x}\,dx\,dy - \iint_S \frac{\partial Q}{\partial z}\,dy\,dz \text{ și}$$

$$\oint_\Gamma R\,dz = \iint_S \frac{\partial R}{\partial y}\,dy\,dz - \iint_S \frac{\partial R}{\partial x}\,dz\,dx$$

Prin însumarea egalităților stabilite se obține formula (13).

Observația 1 Dacă ținem seama de definiția integralei de suprafață de al doilea tip, formula (13) poate fi scrisă și în forma

$$\oint_\Gamma P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \iint_S \left[\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\cos\alpha + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\cos\beta + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\cos\gamma\right]d\sigma \qquad (16)$$

Formula lui Stokes poate fi scrisă sub o formă vectorială simplă.

Cu ajutorul rotorului formula lui Stokes, dacă ținem seama de (16) se poate scrie sub forma:

$$\oint_\Gamma \bar{F}\cdot d\bar{r} = \iint_S (\bar{n}\cdot \operatorname{rot} \bar{F})\, d\sigma$$

și din punct de vedere fizic aceasta înseamnă că circulația câmpului vectorial $\bar{F}$ pe bordura unei suprafețe este egală cu fluxul rotorului lui $\bar{F}$ prin acea suprafață.

Observația 2. În cazul în care suprafața S este o juxtapunere a două suprafețe netede S_1 și S_2 ca în fig. 86 și pe fiecare dintre ele funcționează formula lui Stokes atunci are loc egalitatea

$$\oint_\Gamma \bar{F}\cdot d\bar{r} = \iint_{S_1} (\bar{n}_1 \cdot \operatorname{rot} \bar{F})\, d\sigma + \iint_{S_2} (\bar{n}_2 \cdot \operatorname{rot} \bar{F})\, d\sigma$$

unde $\Gamma = \operatorname{Fr} S$; $\bar{n}_1$ este normala la S_1 și $\bar{n}_2$ este normala la S_2.

Fig. 86

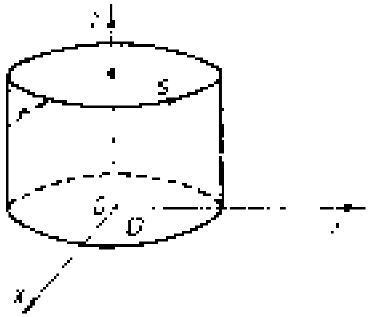

Fig. 87

Orientarea se face ca în fig. 86.

Exemplu. Să se calculeze $I = \oint_\Gamma -\frac{y^3z^2}{3}\,dx + \left(\frac{x^3z}{3} + 2\right)dy - xyz\,dz$ unde $\Gamma: \begin{cases} x^2 + y^2 = R^2 \\ z = 1 \end{cases}$ parcursă în sensul indicat în fig. 87.

În acest caz rot. $\bar{F} = \left(xz - \frac{x^3}{3}\right)\bar{i} + \left(-\frac{2y^3z}{3} - yz\right)\bar{j} + (x^2z + y^2z^2)\bar{k}$ și $\bar{n} = \bar{k}$. Cu ajutorul formulei lui Stokes obținem

$$I = \iint_S (x^2z + y^2z^2)\, d\sigma = \iint_D (x^2 + y^2)\, dx\, dy = \frac{\pi R^4}{2}.$$

PROBLEME

1) Să se afle aria porțiunii de pe paraboloidul

$z = \frac{x^2}{2a} + \frac{y^2}{2b}$ $(a>0,\ b>0)$ situată în interiorul cilindrului $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = c^2$

$R: \frac{2\pi}{3} ab[(1+c^2)\sqrt{1+c^2} - 1]$

2) Să se afle aria porțiunii de pe conul $x^2 = y^2 + z^2$ situată în interiorul cilindrului $x^2 + y^2 = a^2$.

$R: \frac{a^2\sqrt{2}}{2}\pi$

3) Să se afle aria porțiunii de pe conul $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ situată în interiorul cilindrului $x^2 + y^2 - 2x = 0$

$R: \pi\sqrt{2}$

4) Să se afle aria porțiunii de pe sfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ situată în interiorul cilindrului $x^2 + y^2 - 2ax = 0$

$R: 4a^2(\pi - 2)$

5) Să se afle aria suprafeței

$x = \operatorname{tg} u \cos v;\ y = \operatorname{tg} u \sin v;\ z = \frac{\sin u}{2\cos^2 u} + \frac{1}{2}\ln\frac{1+\sin u}{\cos u}$

unde $u \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right],\ v \in [0, 2\pi]$ $R: \frac{8}{3}\pi$

6) Să se calculeze următoarele integrale de suprafață de primul tip

$\iint_S (x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2)\, d\sigma$ unde S este porțiunea din conul $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ situată în interiorul cilindrului $x^2 + y^2 - 2x = 0$

$R: \frac{29}{8}\pi\sqrt{2}$

7) $\iint_S \frac{z\, d\sigma}{\sqrt{x^2 + y^2 + a^2}}$ unde S este porțiunea din paraboloidul $2az = x^2 + y^2$ situată între planele $z = 0$ și $z = b$, $a > 0$; $b > 0$

$R: \pi b^2$

8) $\iint_S \frac{d\sigma}{\sqrt{x^2 + y^2 + 4z^2}}$ unde $S: x^2 + y^2 + z^2 = a^2$; $z \geq 0$

$R: \frac{2\pi a\sqrt{3}}{3} \ln(2 + \sqrt{3})$

9) $\iint_S z\, d\sigma$ unde $S: x = u\cos v$; $y = u\sin v$; $z = v$ $u\in[0, a]$; $v\in[0, 2\pi]$;

$R: \pi^2[a\sqrt{1 + a^2} + \ln(a + \sqrt{1 + a^2})]$

10) Să se afle masa suprafeţei materiale

$$z = \frac{1}{2}(x^2 + y^2);\ (0 \leq z \leq 1)\ \text{dacă}\ \rho(x, y, z) = z$$

$R: \frac{2\pi(1 + 6\sqrt{3})}{15}$.

11) Să se afle coordonatele centrului de greutate a suprafeţei materiale omogene $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ situată în interiorul cilindrului $x^2 + y^2 - x = 0$

$R: x_G = y_G = 0$; $z_G = \frac{16}{19}$

12) Să se calculeze momentul de inerţie I_{Oz} a suprafeţei materiale omogene $(\rho = \rho_0)$: $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$; $z \geq 0$

$R: \frac{4}{3}\pi a^4 \rho_0$

13) Să se calculeze următoarele integrale de suprafaţă de al doilea tip

$\iint_S x^2\,dy\,dz + y^2\,dz\,dx + z^2\,dx\,dy$ pe pagina exterioară a sferei $(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = m^2$

$R: \frac{8}{3}\pi(a + b + c)\cdot m^3$

14) $\iint_S \frac{dy\,dz}{ax} + \frac{dz\,dx}{by} + \frac{dx\,dy}{cz}$ pe pagina interioară a elipsoidului $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$

$R: -4\pi\left(\frac{bc}{a^2} + \frac{ca}{b^2} + \frac{ab}{c^2}\right)$

15) $\iint_S x^2\,dy\,dz + y^2\,dz\,dx + z^2\,dx\,dy$; pe pagina exterioară a tetraedrului cu vîrfurile în punctele $(0, 0, 0)$; $(1, 0, 0)$; $(0, 1, 0)$; $(0, 0, 1)$

$R: \frac{1}{12}$.

16) $\iint_S (x^2+y^2)\, z\, dx\, dy$ pe pagina superioară a porțiunii de pe paraboloidul $z = x^2 + y^2$ situată în interiorul cilindrului $x^2 + y^2 = 1$

R: $\frac{25}{84}\pi$

17) Folosind formula lui Stokes să se calculeze următoarele integrale curbilinii

$\oint_\Gamma (y^2+z^2)\,dx + (z^2+x^2)\,dy + (x^2+y^2)\,dz$; unde Γ este definită de următoarea reprezentare parametrică

$x = r(1+\cos t)$; $y = r\sin t$; $z = \sqrt{2r(a-r)(1-\cos t)}$; $t\in[0, 2\pi]$; $a > r$

Indicație: Imaginea curbei Γ se află la intersecția sferei $x^2+y^2+z^2=a^2$ cu cilindrul $x^2+y^2=2rx$; $z \geqslant 0$

R: $2\pi a r^2$

18) $\oint_\Gamma (y-z)\,dx + (z-x)\,dy + (x-y)\,dz$; unde imaginea curbei Γ se află la intersecția cilindrului $x^2+y^2=a^2$ cu planul $hx + az = ah$; $a > 0$; $h > 0$

R: $\pm 2\pi a(a+h)$

19) $\oint_\Gamma (y^2-z^2)\,dx + (z^2-x^2)\,dy + (x^2-y^2)\,dz$ unde imaginea curbei Γ se află la intersecția frontierei cubului $0 \leqslant x \leqslant a$; $0 \leqslant y \leqslant a$; $0 \leqslant z \leqslant a$ cu planul $2(x+y+z) = 3a$

R: $\pm\frac{9a^3}{2}$

CAPITOLUL X

INTEGRALE TRIPLE

§ 1. DEFINIŢIA INTEGRALEI TRIPLE

Cadrul firesc în care se defineşte integrala triplă este acela al domeniilor compacte $\Omega \subset \mathbf{R}^3$, cu frontiera formată dintr-o reuniune finită de suprafeţe netede. Se demonstrează [24] că astfel de domenii au volum. În continuare vom considera numai domenii de acest fel.

Definiţia 1.1. Prin diviziune $\Delta = (\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_n)$ a domeniului compact Ω înţelegem un număr finit de domenii compacte $\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_n$ fără puncte interioare comune, astfel încît

$$\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \ldots \cup \Omega_n$$

şi Fr. Ω_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ este o suprafaţă închisă netedă sau netedă pe porţiuni.

Prin norma diviziunii $\Delta = (\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_n)$ notată cu $\nu(\Delta)$ înţelegem numărul pozitiv dat de egalitatea

$$\nu(\Delta) = \max_{1 \le i \le n} d(\Omega_i)$$

unde $d(\Omega_i)$ este diametrul domeniului Ω_i. Noţiunea de diviziune mai fină se defineşte în mod asemănător ca în cazul domeniilor plane.

Fie $\Delta = (\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_n)$ o diviziune oarecare a domeniului compact $\Omega \subset \mathbf{R}^3$ şi funcţia reală f definită şi mărginită pe Ω. Vom nota cu

$$m = \inf_{(x,y,z)\in\Omega} f(x, y, z); \qquad M = \sup_{(x,y,z)\in\Omega} f(x, y, z)$$

$$m_i = \inf_{(x,y,z)\in\Omega_i} f(x, y, z); \qquad M_i = \sup_{(x,y,z)\in\Omega_i} f(x, y, z)$$

$$V(\Omega) = \text{volumul lui } \Omega$$

Formăm sumele

$$S_\Delta(f) = M_1V(\Omega_1) + M_2V(\Omega_2) + \ldots + M_nV(\Omega_n) = \sum_{i=1}^{n} M_iV(\Omega_i) \text{ (suma superioară Darboux)}$$

$$s_\Delta(f) = m_1v(\Omega_1) + m_2v(\Omega_2) + \ldots + m_nv(\Omega_n) = \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot v(\Omega_i) \text{ (suma inferioară Darboux)}$$

Dacă considerăm în fiecare domeniu Ω_i cîte un punct (ξ_i, η_i, ζ_i) atunci putem forma suma

$$\sigma_\Delta(f, \xi_i, \eta_i, \zeta_i) = f(\xi_1, \eta_1, \zeta_1)\cdot v(\Omega_1) + \ldots + f(\xi_n, \eta_n, \zeta_n)\cdot v(\Omega_n) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\, v(\Omega_i) \text{ (suma Riemann)}$$

Proprietățile sumelor Darboux și Riemann sînt aceleași ca și în cazul unei funcții reale definită și mărginită pe un domeniu compact $D \subset \mathbf{R}^2$, iar demonstrarea lor nu prezintă nici o dificultate.

Definiția 2.1. Fie f o funcție reală, definită și mărginită pe un domeniu compact $\Omega \subset \mathbf{R}^3$. Spunem că funcția f este integrabilă Riemann pe Ω, dacă există un număr I cu proprietatea că pentru orice $\varepsilon > 0$, există un număr $\delta(\varepsilon) > 0$ astfel încît oricare ar fi diviziunea Δ cu $\nu(\Delta) < \delta(\varepsilon)$ și oricare ar fi alegerea punctelor intermediare $(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \in \Omega_i$ să avem

$$|\sigma_\Delta(f, \xi_i, \eta_i, \zeta_i) - I| < \varepsilon$$

În acest caz numărul I (dacă există) se numește integrala Riemann a funcției f pe domeniul Ω și se folosește notația

$$I = \lim_{\nu(\Delta)\to 0} \sigma_\Delta(f, \xi_i, \eta_i, \zeta_i) = \iiint_\Omega f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz \text{ sau}$$

$$I = \iiint_\Omega f(x, y, z)\, dV$$

Criteriile de integrabilitate precum și proprietățile integralei triple se formulează și se demonstrează la fel ca și în cazul integralei duble.

§ 2. CALCULUL INTEGRALEI TRIPLE

O integrală triplă se calculează printr-o succesiune de integrale simple. Pentru început vom considera cazul în care Ω este un interval tridimensional $I = [a, b] \times [c, d] \times [e, g]$.

Teorema 2.2. Fie f o funcție reală, definită și mărginită pe un interval tridimensional $I = [a, b] \times [c, d] \times [e, g]$. Să presupunem că

1) f este integrabilă pe I

2) pentru orice $(x, y) \in D = [a, b] \times [c, d]$ există integrala

$$\int_e^g f(x, y, z)\, dz = F(x, y)$$

În aceste condiții există integrala $\iint_D F(x, y)\, dx\, dy$ și are loc egalitatea

$$\iiint_I f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \iint_D F(x, y)\, dx\, dy = \iint_D \left(\int_e^g f(x, y, z)\, dz\right) dx\, dy$$

De obicei se folosește notația

$$\iiint_I f(x, y, z)\, dx\, dz\, dy = \iint_D dx\, dy \int_e^g f(x, y, z)\, dz$$

Demonstrație

$d' = (a = x_0 < x_1 < \dots < x_i < \dots < x_n = b)$ o diviziune a intervalului $[a, b]$

$d'' = (c = y_0 < y_1 < \dots < y_j < \dots < y_m = d)$ o diviziune a intervalului $[c, d]$

$d''' = (e = z_0 < z_1 < \dots < z_k < \dots < z_p = g)$ o diviziune a intervalului $[e, g]$

Cu ajutorul diviziunilor d', d'', d''' putem defini o diviziune Δ a lui I, unde domeniile lui Δ sînt intervalele

$$I_{ijk} = [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}] \times [z_k, z_{k+1}]$$

$$(i = 0, 1, \dots, n-1;\ j = 0, 1, \dots, m-1;\ k = 0, 1, \dots, p-1)$$

iar cu ajutorul diviziunilor d' și d'' definim o diviziune Δ' a lui D, unde domeniile lui Δ' sînt intervalele

$$I_{ij} = [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}]$$

$$(i = 0, 1, \dots, n-1,\ j = 0, 1, \dots, m-1)$$

Vom nota

$$m_{ijk} = \inf f(x, y, z);\quad M_{ijk} = \sup f(x, y, z) \text{ unde } (x, y, z) \in I_{ijk}$$

Pentru a arăta că F este integrabilă pe D considerăm sumele Riemann asociate lui F pe D. Avem

$$\sigma_{\Delta'}(F, \xi_i, \eta_j) = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{m-1} F(\xi_i, \eta_j)(x_{i+1} - x_i)(y_{j+1} - y_j)$$

Dacă ținem seama de modul cum a fost definită funcția F și de proprietatea de aditivitate a integralei simple, avem

$$F(\xi_i, \eta_j) = \int_e^g f(\xi_i, \eta_j, z)\, dz = \sum_{k=0}^{p-1} \int_{z_k}^{z_{k+1}} f(\xi_i, \eta_j, z)\, dz$$

Aplicînd formula de medie pentru integrala simplă, rezultă existența unui număr μ_{ijk} cu

$$m_{ijk} \leq \mu_{ijk} \leq M_{ijk} \text{ astfel încît}$$

$$\int_{z_k}^{z_{k+1}} f(\xi_i, \eta_j, z)\, dz = \mu_{ijk}(z_{k+1} - z_k)$$

Deci pentru sumele Riemann asociate lui F pe D, avem

$$\sigma_{\Delta'}(F, \xi_i, \eta_j) = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{m-1} F(\xi_i, \eta_j)(x_{i+1} - x_i)(y_{j+1} - y_j) =$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{m-1} \sum_{k=0}^{p-1} \mu_{ijk}(x_{i+1} - x_i)(y_{j+1} - y_j)(z_{k+1} - z_k)$$

Dacă ținem seama de inegalitățile

$$m_{ijk} \leqslant \mu_{ijk} \leqslant M_{ijk} \quad (i = 0, 1, \ldots, n-1;\ j = 0, 1, \ldots, m-1;\ k = 0, 1, \ldots, p-1)$$

rezultă

$$\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{m-1}\sum_{k=0}^{p-1} m_{ijk}(x_{i+1}-x_i)(y_{j+1}-y_j)(z_{k+1}-z_k) \leqslant \sigma_{\Delta'}(F, \xi_i, \eta_j) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{m-1}\sum_{k=0}^{p-1} M_{ijk}(x_{i+1}-x_i)(y_{j+1}-y_j)(z_{k+1}-z_k)$$

Dar prima sumă din aceste inegalități este tocmai suma Darboux inferioară, relativ la funcția f și la diviziunea Δ a lui I

$$s_\Delta(f) = \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{m-1}\sum_{k=0}^{p-1} m_{ijk}(x_{i+1}-x_i)(y_{j+1}-y_j)(z_{k+1}-z_k)$$

Ultima sumă din inegalitățile de mai sus este tocmai suma Darboux superioară relativ la funcția f și la diviziunea Δ a lui I

$$S_\Delta(f) = \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{m-1}\sum_{k=0}^{p-1} M_{ijk}(x_{i+1}-x_i)(y_{j+1}-y_j)(z_{k+1}-z_k)$$

Avem deci inegalitățile

$$s_\Delta(f) \leqslant \sigma_{\Delta'}(F, \xi_i, \eta_j) \leqslant S_\Delta(f)$$

pentru orice alegere a punctelor intermediare (ξ_i, η_j).

Fie acum (d'_r) un șir oarecare de diviziuni ale intervalului $[a, b]$ cu $\nu(d'_r) \to 0$, (d''_r) un șir oarecare de diviziuni ale intervalului $[c, d]$ cu $\nu(d''_r) \to 0$, fie (d'''_r) un șir oarecare de diviziuni ale intervalului $[e, g]$ cu $\nu(d'''_r) \to 0$. Notăm cu Δ_r diviziunea lui I definită, ca mai sus, de diviziunile d'_r, d''_r, d'''_r și cu Δ'_r diviziunea lui D definită de diviziunile d'_r și d''_r. Se vede imediat că din condițiile

$$\nu(d'_r) \to 0,\ \nu(d''_r) \to 0,\ \nu(d'''_r) \to 0 \text{ rezultă } \nu(\Delta_r) \to 0 \text{ și } \nu(\Delta'_r) \to 0$$

Pentru fiecare r avem inegalitățile

$$s_{\Delta_r}(f) \leqslant \sigma_{\Delta'_r}(F, \xi_i, \eta_j) \leqslant S_{\Delta_r}(f) \tag{1}$$

Funcția f fiind integrabilă pe I, avem

$$\lim_{r\to\infty} s_{\Delta_r}(f) = \lim_{r\to\infty} S_{\Delta_r}(f) = \iiint_I f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz \tag{2}$$

Trecînd la limită în (1) și ținînd cont de (2) avem

$$\lim_{r\to\infty} \sigma_{\Delta'_r}(F, \xi_i, \eta_j) = \iiint_I f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz \tag{3}$$

Dacă ţinem seama de definiţia integralei duble, se vede imediat că

$$\lim \sigma_{\Delta_k}(F, \xi_k, \eta_k) = \iint_D F(x, y)\, dx\, dy \tag{4}$$

Din egalităţile (3) şi (4), obţinem

$$\iiint_I f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \iint_D F(x, y)\, dx\, dy$$

şi teorema este demonstrată.

Exemplu. Să se calculeze $J = \iiint_I xyz\, dx\, dy\, dz$ unde $I = [0, 1] \times [2, 4] \times [5, 8]$. În acest caz avem $D = [0, 1] \times [2, 4]$ şi deci

$$J = \iint_D dx\, dy \int_5^8 xyz\, dz = \iint_D \frac{xyz^2}{2}\Big|_5^8 dx\, dy = \frac{39}{2}\int_0^1 dx \int_2^4 xy\, dy =$$

$$= \frac{39}{2}\int_0^1 \frac{xy^2}{2}\Big|_2^4 dx = 117\int_0^1 x\, dx = \frac{117}{2}.$$

Pentru a da regula de calcul a unei integrale triple în cazul în care domeniul Ω nu mai este un interval este necesară noţiunea de domeniu simplu în raport cu una din axe.

Să considerăm un domeniu compact D situat în planul xOy şi fie două funcţii reale φ_1 şi φ_2 definite şi continue pe D cu $\varphi_1(x, y) \leqslant \varphi_2(x, y)$ pentru orice $(x, y) \in D$. Să notăm cu Ω domeniul compact din $\mathbf{R}^3$ dat de egalitatea

$$\Omega = \{(x, y, z) ;\ \varphi_1(x, y) \leqslant z \leqslant \varphi_2(x, y) ;\ (x, y) \in D\}$$

Un astfel de domeniu se numeşte simplu în raport cu axa Oz şi este ilustrat în fig. 88. Procedînd exact ca în cazul teoremei de la integrala dublă avem:

Teorema 2.2. Fie $\Omega \subset \mathbf{R}^3$ un domeniu compact simplu în raport cu axa Oz, definit ca mai sus şi fie f o funcţie reală definită şi mărginită pe Ω. Presupunem

1) f este integrabilă pe Ω

2) pentru $(\forall)$ $(x, y) \in D$, există integrala $\int_{\varphi_1(x,y)}^{\varphi_2(x,y)} f(x, y, z)\, dz$ (5)

Atunci există şi integrala

$$\iint_D \left(\int_{\varphi_1(x,y)}^{\varphi_2(x,y)} f(x, y, z)\, dz\right) dx\, dy = \iint_D dx\, dy \int_{\varphi_1(x,y)}^{\varphi_2(x,y)} f(x, y, z)\, dz$$

și are loc egalitatea

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \iint_{D} dx\, dy \int_{\varphi_1(x, y)}^{\varphi_2(x, y)} f(x, y, z)\, dz$$

Demonstrație. Funcțiile φ_1 și φ_2 au fost presupuse continue pe domeniul compact D, deci sînt și mărginite pe acest domeniu. Fie

$$e = \inf \varphi_1(x, y) \text{ și } g = \sup \varphi_2(x, y), \quad (x, y) \in D.$$

Dacă a și b sînt respectiv cea mai mică și cea mai mare abscisă a punctelor din D și iar c și d sînt respectiv cea mai mică și cea mai mare ordonată a punctelor din D, atunci considerăm intervalul

$$I = [a, b] \times [c, d] \times [e, g].$$

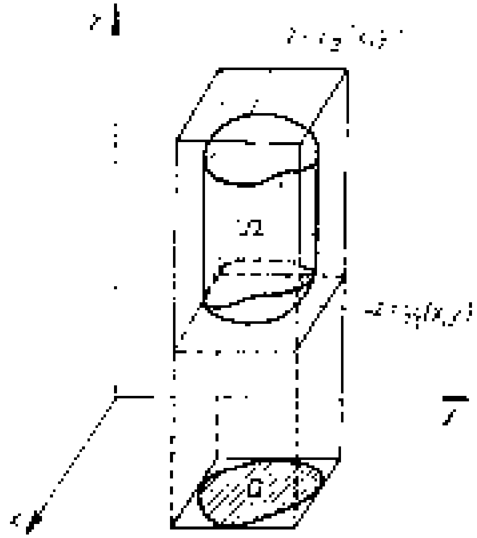

Fig. 88.

Se vede că $\Omega \subset I$ și acest fapt este ilustrat în fig. 88. Să considerăm funcția ajutătoare $\tilde{f}$, definită pe I în modul următor

$$\tilde{f}(x, y, z) = \begin{cases} f(x, y, z) & \text{dacă } (x, y, z) \in \Omega \\ 0 & \text{dacă } (x, y, z) \in I - \Omega \end{cases}$$

Din modul cum a fost definită funcția $\tilde{f}$ rezultă că este integrabilă pe I. Folosim proprietatea de aditivitate a integralei triple ca funcție de domeniu și obținem

$$\iiint_{I} \tilde{f}(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \iiint_{\Omega} \tilde{f}(x, y, z)\, dx\, dy\, dz + \iiint_{I - \Omega} \tilde{f}(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$$

Dacă ţinem seama de modul cum este definită funcţia $\tilde{f}$ rezultă imediat că

$$\iiint_{P-\Omega} \tilde{f}(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = 0 \text{ și } \iiint_{\Omega} \tilde{f}(x, y, z)\, dx\, dy\, dz =$$

$$= \iiint_{\Omega} f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$$

Deci are loc egalitatea

$$\iiint_{P} \tilde{f}(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \iiint_{\Omega} f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz \tag{6}$$

Funcţiei $\tilde{f}$ îi vom aplica regula stabilită în teorema precedentă. Pentru aceasta trebuie observat că integrala există, deoarece am presupus existenţa integralei (5) şi în plus pentru fiecare $(x, y) \in D$ are loc egalitatea

$$\int_{e}^{f} \tilde{f}(x, y, z)\, dz = \int_{e}^{\varphi_1(x, y)} \tilde{f}(x, y, z)\, dz + \int_{\varphi_1(x, y)}^{\varphi_2(x, y)} \tilde{f}(x, y, z)\, dz +$$

$$+ \int_{\varphi_2(x, y)}^{f} \tilde{f}(x, y, z)\, dz = 0 + \int_{\varphi_1(x, y)}^{\varphi_2(x, y)} f(x, y, z)\, dz + 0 \tag{7}$$

Funcţia $\tilde{f}$ satisface deci toate condiţiile din teorema precedentă şi putem scrie

$$\iiint_{P} \tilde{f}(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \iint_{(x, y) \in [a, b] \times [c, d]} dx\, dy \int_{e}^{f} \tilde{f}(x, y, z)\, dz$$

Dacă ţinem seama de egalităţile (6) şi (7) avem

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \iint_{D} dx\, dy \int_{\varphi_1(x, y)}^{\varphi_2(x, y)} f(x, y, z)\, dz$$

adică tocmai egalitatea din enunţul teoremei.

Observaţie: Teoreme asemănătoare se pot da pentru cazurile în care Ω este simplu în raport cu Oy sau Ox. Dacă domeniul Ω nu este simplu în raport cu nici una din axe, atunci prin plane paralele la unul din planele de coordonate poate fi descompus într-un număr finit de subdomenii, $\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_p$ cu

$\Omega = \bigcup_{i=1}^{p} \Omega_i$ şi fiecare Ω_i $(i = 1, 2, \ldots, p)$ să fie simplu în raport cu una din axe.

Folosind apoi proprietatea de aditivitate a integralei triple ca funcţie de domeniu avem

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \sum_{i=1}^{p} \iiint_{\Omega_i} f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$$

Exemplul 1. Să se calculeze integrala

$$I = \iiint_{\Omega} \frac{dx\,dy\,dz}{(1+x+y+z)^3}, \quad \text{unde } \Omega \text{ este}$$

tetraedrul delimitat de planele $x=0$, $y=0$, $z=0$ şi $x+y+z=1$ (fig. 89). Se vede imediat că Ω este simplu în raport cu Oz şi că $\varphi_1(x,y)=0$, $\varphi_2(x,y)=1-x-y$ iar

$$D = \{(x,y);\ 0 \leq y \leq 1-x;\ 0 \leq x \leq 1\} \text{ (fig. 90)}$$

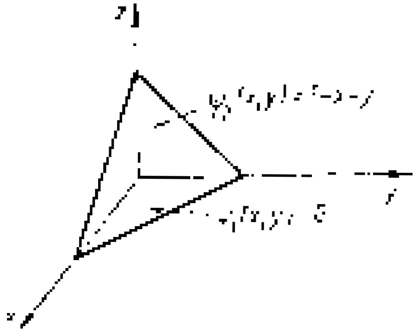

Fig. 89

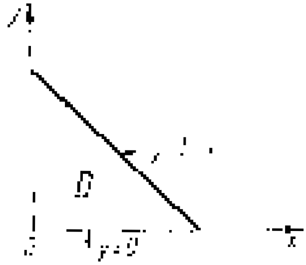

Fig. 90

Dacă aplicăm formula din teorema 2.2 avem

$$I = \iint_D dx\,dy \int_0^{1-x-y} \frac{dz}{(1+x+y+z)^3}.$$

Însă

$$\int_0^{1-x-y} \frac{dz}{(1+x+y+z)^3} = -\frac{1}{2(1+x+y+z)^2}\Bigg|_0^{1-x-y} =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{(1+x+y)^2} - \frac{1}{4}\right].$$

Deci

$$I = \frac{1}{2}\iint_D \left[\frac{1}{(1+x+y)^2} - \frac{1}{4}\right] dx\,dy =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 dx \int_0^{1-x}\left[\frac{1}{(1+x+y)^2} - \frac{1}{4}\right] dy = \frac{1}{2}\int_0^1 \left(-\frac{1}{1+x+y} - \frac{y}{4}\right)\Bigg|_0^{1-x} dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 \left(\frac{1}{1+x} - \frac{3-x}{4}\right) dx = \frac{1}{2}\ln(1+x) - \frac{(3-x)^2}{16}\Bigg|_0^1 = \frac{1}{2}\ln 2 - \frac{5}{16}.$$

Exemplul 2. Să se calculeze integrala $I = \iiint_\Omega (x^2 + y^2) z \, dx\, dy\, dz$, unde domeniul Ω este mărginit de paraboloidul $z = x^2 + y^2$ și de sfera $x^2 + y^2 + z^2 = 6$; $z \geqslant 0$ (fig. 91).

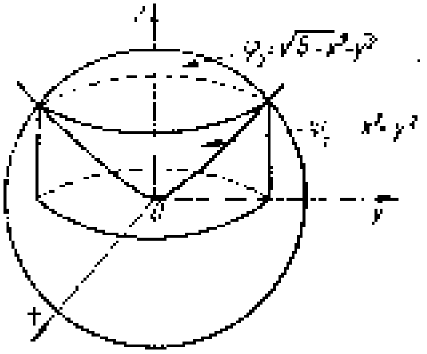

Fig. 91

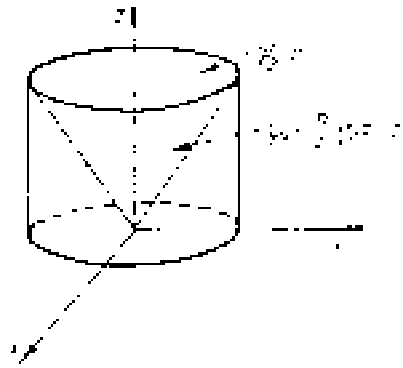

Fig. 92

În acest caz $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leqslant 2\}$ și deci avem

$$I = \iint_D dx\, dy \int_{x^2+y^2}^{\sqrt{6-x^2-y^2}} (x^2 + y^2) z \, dz = \frac{1}{2} \iint_D (x^2 + y^2) z^2 \Big|_{x^2+y^2}^{\sqrt{6-x^2-y^2}} dx\, dy =$$

$$= \frac{1}{2} \iint_D (x^2 + y^2) [6 - x^2 - y^2 - (x^2 + y^2)^2] \, dx\, dy.$$

Dacă trecem la coordonate polare avem

$$x = \rho \cos \theta, \quad y = \rho \sin \theta, \quad \theta \in [0, 2\pi]; \quad \rho \in [0, \sqrt{2}] \text{ și}$$

deci

$$I = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{2}} \rho^2 (6 - \rho^2 - \rho^4) \rho \, d\rho = \frac{8\pi}{3}.$$

Exemplul 3. Să se calculeze integrala $I = \iiint_\Omega z \, dx\, dy\, dz$, unde Ω este delimitat de conul $z = \frac{h}{R} \sqrt{x^2 + y^2}$ ($h > 0$, $R > 0$) și planul $z = h$ (fig. 92).

În acest caz $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leqslant R^2\}$ și deci

$$I = \iint_D dx\, dy \int_{\frac{h}{R}\sqrt{x^2+y^2}}^{h} z \, dz = \frac{1}{2} \iint_D \left[h^2 - \frac{h^2}{R^2}(x^2 + y^2)\right] dx\, dy.$$

Dacă trecem la coordonate polare, obținem:

$$I = \frac{h^2}{2R^2} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R (R^2 - \rho^2) \rho \, d\rho = \frac{\pi R^2 h^2}{4}.$$

§ 3. FORMULA LUI GAUSS-OSTROGRADSKY

Vom da în continuare o legătură între integrala de suprafață și integrala triplă. Fie $\Omega \subset \mathbf{R}^3$ un domeniu compact cu frontiera o suprafață S, simplă, închisă, netedă sau netedă pe porțiuni.

Notăm cu S_e pagina exterioară a suprafeței S. Fie P, Q și R trei funcții reale definite și continue pe Ω. Presupunem că derivatele parțiale $\frac{\partial P}{\partial x}$, $\frac{\partial Q}{\partial y}$, $\frac{\partial R}{\partial z}$ există și sînt continue.

Teorema 1.3. În condițiile de mai sus are loc egalitatea

$$\oiint_{S_e} P\,dy\,dz + Q\,dz\,dx + R\,dx\,dy = \iiint_\Omega \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz$$

numită formula integrală a lui Gauss-Ostrogradsky.

Demonstrație. Presupunem că Ω este descompus într-un număr finit de subdomenii simple în raport cu axa Oz. Dacă aplicăm proprietatea de

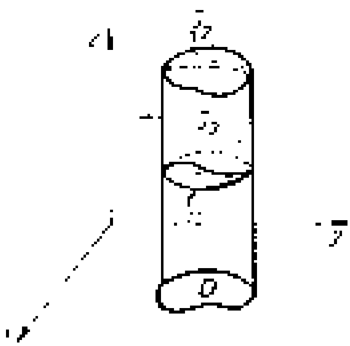

Fig. 93.

aditivitate pentru integrala de suprafață și pentru integrala triplă putem presupune chiar pe Ω simplu în raport cu axa Oz (fig. 93). În acest caz avem $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3$ și

$z = \varphi_1(x, y)$; $(x, y) \in D$ ecuația suprafeței S_1;

$z = \varphi_2(x, y)$; $(x, y) \in D$ ecuația suprafeței S_2. Suprafața S_3 se află pe un cilindru cu generatoarele paralele cu axa Oz.

Dacă ținem seama de regula de calcul a integralei triple avem

$$\iiint_\Omega \frac{\partial R}{\partial z}\,dx\,dy\,dz = \iint_D dx\,dy \int_{\varphi_1(x,y)}^{\varphi_2(x,y)} \frac{\partial R}{\partial z}\,dz =$$

$$= \iint_D R(x, y, z)\Big|_{\varphi_1(x,y)}^{\varphi_2(x,y)} dx\,dy = \iint_D R(x, y, \varphi_2(x, y))\,dx\,dy -$$

$$- \iint_D R(x, y, \varphi_1(x, y))\,dx\,dy$$

Dar

$$\iint_{D} R(x, y, \varphi_2(x, y))\, dx\, dy = \iint_{S_2} R(x, y, z)\, dx\, dy \tag{8}$$

şi

$$-\iint_{D} R(x, y, \varphi_1(x, y))\, dx\, dy = \iint_{S_1} R(x, y, z)\, dx\, dy \tag{9}$$

unde pentru S_2 am luat pagina superioară care coincide cu pagina exterioară a lui S (v. Fig. Ω) iar pentru S_1 am luat pagina inferioară, care coincide cu pagina exterioară a lui S. Pe suprafaţa S_3 avem

$$\iint_{S_3} R(x, y, z)\, dx\, dy = \iint_{S_3} R(x, y, z) \cos \gamma\, d\sigma = 0, \tag{10}$$

deoarece $\gamma = \frac{\pi}{2}$.

Dacă ţinem seama de egalităţile (8), (9) şi (10) avem

$$\iiint_{\Omega} \frac{\partial R}{\partial z}\, dx\, dy\, dz = \iint_{S} R(x, y, z)\, dx\, dy$$

unde integrala de suprafaţă este luată pe pagina exterioară a lui S. În mod asemănător se arată egalităţile

$$\iiint_{\Omega} \frac{\partial P}{\partial x}\, dx\, dy\, dz = \iint_{S} P\, dy\, dz$$

$$\iiint_{\Omega} \frac{\partial Q}{\partial y}\, dx\, dy\, dz = \iint_{S} Q\, dz\, dx$$

Prin însumarea ultimelor trei egalităţi obţinem

$$\iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dx\, dy\, dz = \iint_{S} P\, dy\, dz + Q\, dz\, dx + R\, dx\, dy \quad \text{sau}$$

$$\iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dx\, dy\, dz = \iint_{S} (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma)\, d\sigma \tag{11}$$

Exemplu. Să se calculeze integrala

$I = \iint_{S} x^2y^2\, dy\, dz + x^2y^2\, dz\, dx + 3z\, dx\, dy$, unde S este frontiera domeniului mărginit de paraboloizii $z = x^2 + y^2$; $z = 6 - x^2 - y^2$; $0 \leq z \leq 6$. În acest caz $P = x^2y^2$; $Q = x^2y^2$ şi $R = 3z$.

Aplicând formula lui Gauss-Ostrogradsky, obținem

$$I = \iiint_{\Omega} (3x^2y^2 + 3x^2y^2 + 3)\,dx\,dy\,dz = 3\iiint_{\Omega} (2x^2y^2 + 1)\,dx\,dy\,dz =$$

$$3\iint_{D} dx\,dy \int_{x^2+y^2}^{6-x^2-y^2} (2x^2y^2 + 1)\,dz, \text{ unde } D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 3\}.$$

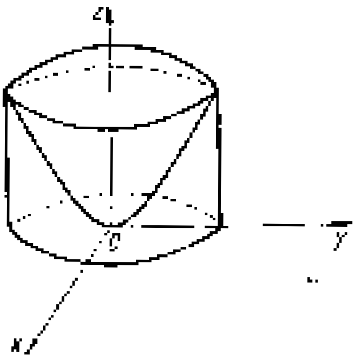

Fig. 94

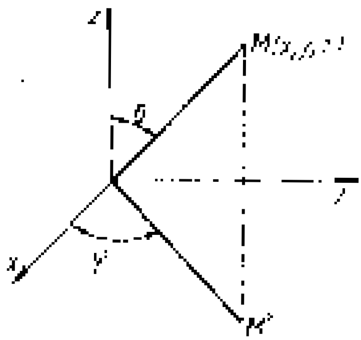

Fig. 95

Deci

$$I = 3\iint_{D} (2x^2y^2 + 1)\,z\Big|_{x^2+y^2}^{6-x^2-y^2} dx\,dy = 3\iint_{D} (2x^2y^2 + 1)(6 - 2x^2 - 2y^2)\,dx\,dy.$$

Dacă trecem la coordonate polare

$x = \rho\cos\theta;\ y = \rho\sin\theta;\ \rho \in [0, \sqrt{3}];\ \theta \in [0, 2\pi]$, obținem

$$I = 3\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{3}} (2\rho^4 \sin^2\theta \cos^2\theta + 1)(6 - 2\rho^2)\rho\,d\rho$$

$$= 3\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{3}} 2\rho^5(6 - 2\rho^2)\sin^2\theta\cos^2\theta\,d\rho + 3\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{3}} \rho(6 - 2\rho^2)\,d\rho$$

$$= 6\int_0^{2\pi} \sin^2\theta\cos^2\theta\,d\theta \int_0^{\sqrt{3}} (6\rho^5 - 2\rho^7)\,d\rho + 6\pi\int_0^{\sqrt{3}} (6\rho - 2\rho^3)\,d\rho = \frac{297\pi}{8}.$$

Observația 1) Dacă folosim scrierea vectorială, atunci formula lui Gauss-Ostrogradsky capătă o formă mai simplă.

Dacă ținem seama de egalitatea (11) și de definiția divergenței, atunci formula lui Gauss-Ostrogradsky se poate scrie sub forma

$$\iint_{S} \bar{n} \cdot \bar{F}\,d\sigma = \iiint_{\Omega} \operatorname{div} \bar{F}\,dx\,dy\,dz$$

unde $\bar{F} = P\bar{i} + Q\bar{j} + R\bar{k}$

adică fluxul câmpului vectorial $\bar{F}$ prin suprafața închisă S după normala exterioară $\bar{n}$, este egal cu integrala triplă a divergenței lui $\bar{F}$ pe domeniul Ω.

Observația 2) Dacă în formula lui Gauss-Ostrogradsky luăm $P = 0$; $Q = 0$ și $R = z$ obținem

$$\text{vol}\ \Omega = \oiint_{S_e} z\, dx\, dy \qquad (12)$$

§ 4. SCHIMBAREA DE VARIABILĂ LA INTEGRALA TRIPLĂ

Teorema de schimbare de variabile la integrala triplă se enunță asemănător cu teorema de schimbare de variabile la integrala dublă. Stabilirea ei se face într-un mod asemănător, de aceea nu vom da detalii de calcul care pot fi refăcute de cititor.

Teorema 7.4. Fie în spațiul (u, v, w) un domeniu compact Ω' având frontiera o suprafață simplă închisă și netedă pe porțiuni și fie

$$T: \begin{cases} x = \varphi(u, v, w) \\ y = \psi(u, v, w), \quad (u, v, w) \in \Omega' \\ z = \chi(u, v, w) \end{cases}$$

o transformare regulată de la spațiul (u, v, w) la spațiul (x, y, z) care aplică biunivoc domeniul Ω' pe domeniul Ω.

Dacă f este o funcție reală și continuă pe Ω, atunci are loc egalitatea

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz =$$

$$= \iiint_{\Omega'} f[\varphi(u, v, w), \psi(u, v, w), \chi(u, v, w)] \cdot \left| \frac{D(\varphi, \psi, \chi)}{D(u, v, w)} \right| du\, dv\, dw \qquad (13)$$

numită formula schimbării de variabile la integrala triplă sau formula de transport.

Demonstrație. Fie $S' = \text{Fr}\,\Omega'$ și $S = \text{Fr}\,\Omega$ iar $u = u(s, t)$; $v = v(s, t)$; $w = w(s, t)$; $(s, t) \in D$ (domeniu compact din $\mathbf{R}^2$) o reprezentare parametrică a suprafeței S'. Atunci suprafața S va fi dată parametric prin

$$x = x(s, t) = \varphi[u(s, t), v(s, t), w(s, t)]$$

$$y = y(s, t) = \psi[u(s, t), v(s, t), w(s, t)], \quad (s, t) \in D$$

$$z = z(s, t) = \chi[u(s, t), v(s, t), w(s, t)]$$

Dacă folosim formula (12) și ținem seama de regula de calcul a unei integrale de suprafață de al doilea tip avem

$$V(\Omega) = \oiint_{S} z\, dx\, dy = \pm \iint_D z \frac{D(x, y)}{D(s, t)}\, ds\, dt$$

Folosind regula de derivare a funcțiilor compuse, se poate verifica prin calcul că

$$\frac{D(x, y)}{D(s, t)} = \frac{D(x, y)}{D(u, v)} \cdot \frac{D(u, v)}{D(s, t)} + \frac{D(x, y)}{D(v, w)} \cdot \frac{D(v, w)}{D(s, t)} + \frac{D(x, y)}{D(w, u)} \cdot \frac{D(w, u)}{D(s, t)}$$

și deci

$$V(\Omega) = \iint_{\Delta} z \left[\frac{D(x, y)}{D(u, v)} \cdot \frac{D(u, v)}{D(s, t)} + \frac{D(x, y)}{D(v, w)} \cdot \frac{D(v, w)}{D(s, t)} + \frac{D(x, y)}{D(w, u)} \cdot \frac{D(w, u)}{D(s, t)} \right] ds\, dt$$

Dacă ținem seama de regula de calcul a integralei de suprafață de al doilea tip obținem că

$$V(\Omega) = \oint\!\!\!\oint_{\Sigma'} z \left[\frac{D(x, y)}{D(u, v)}\, du\, dv + \frac{D(x, y)}{D(v, w)}\, dv\, dw + \frac{D(x, y)}{D(w, u)}\, dw\, du \right]$$

Aplicînd formula lui Gauss-Ostrogradsky și făcînd calculele, găsim

$$V(\Omega) = \iiint_{\Omega'} \frac{D(x, y, z)}{D(u, v, w)}\, du\, dv\, dw \quad .$$

Aplicînd formula de medie la integrala triplă (asemănătoare celei de la integrala dublă) obținem

$$V(\Omega) = \left. \frac{D(\varphi, \psi, \chi)}{D(u, v, w)} \right|_{(u_0, v_0, w_0)} \cdot V(\Omega') \qquad (14)$$

unde $(u_0, v_0, w_0) \in \Omega'$. Dacă ținem seama de această formulă în sumele Riemann și repetăm raționamentul făcut în teorema 2.6, cap. VIII obținem formula (13).

Observațiile făcute la integrala dublă în legătură cu schimbarea de variabile, rămîn valabile și în acest caz.

Exemplul 1. Una dintre cele mai importante schimbări de variabile este trecerea de la coordonate carteziene la coordonate sferice. Fie M un punct de coordonate carteziene x, y, z. Fie θ unghiul format de direcția pozitivă a axei Oz cu raza vectoare OM. Fie M' proiecția lui M pe planul xOy. Fie φ unghiul format de direcția pozitivă a axei Ox cu raza vectoare OM'. Fie ρ lungimea segmentului OM. Mărimile ρ, θ și φ constituie coordonatele sferice ale punctului M. Această denumire este justificată de faptul că pentru ρ fixat, se obține o suprafață sferică cu centrul în O (vezi fig. 95). Se vede ușor că între coordonatele carteziene x, y și z a lui M și coordonatele sferice ale aceluiași punct, au loc egalitățile:

$$T: \begin{cases} x = \rho \sin\theta \cos\varphi \\ y = \rho \sin\theta \sin\varphi \\ z = \rho \cos\theta \end{cases}$$

În general avem: $\rho \geqslant 0$; $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$; $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$

Notăm cu I intervalul din R^3 definit de inegalitățile

$$0 \leqslant \rho \leqslant R, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$$

Transformarea T, care definește trecerea de la coordonatele sferice la coordonatele carteziene aplică intervalului I pe sfera

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$$

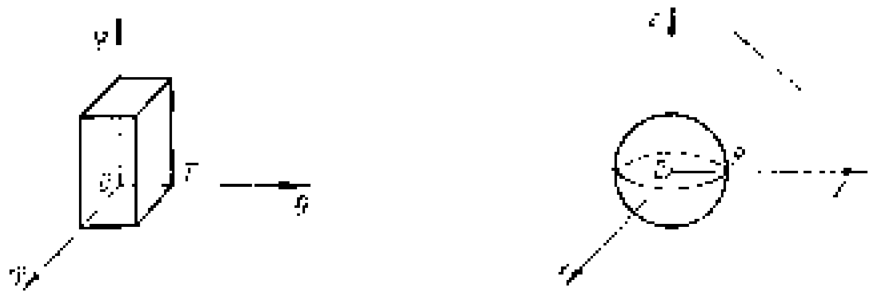

Fig. [illegible]

În acest caz

$$\frac{D(x, y, z)}{D(\rho, \theta, \varphi)} = \begin{vmatrix} \sin\theta\cos\varphi & \sin\theta\sin\varphi & \cos\theta \\ \rho\cos\theta\cos\varphi & \rho\cos\theta\sin\varphi & -\rho\sin\theta \\ -\rho\sin\theta\sin\varphi & \rho\sin\theta\cos\varphi & 0 \end{vmatrix} = \rho^2\sin\theta$$

și deci condiția de bimonotonitate este neîndeplinită doar pe frontiera lui I.

a) Să se calculeze integrala

$I = \iiint_\Omega (x^2 + y^2 + z^2)\, dx\, dy\, dz$, unde $\Omega = \{(x, y, z) ; x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2,$ $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$. Dacă facem schimbarea de variabile în coordonate sferice, avem

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^R \rho^2\rho^2 \sin\theta\, d\rho = \frac{\pi R^5}{10}.$$

b) Să se calculeze integrala $J = \iiint_\Omega \frac{dx\, dy\, dz}{x^2 + y^2 + z^2}$, unde Ω este delimitat de sferele $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, $z \geq 0$ și planul xOy. În acest caz avem $\rho \in [1, 2]$, $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\varphi \in [0, 2\pi]$ și deci avem

$$\iiint_\Omega \frac{dx\, dy\, dz}{x^2 + y^2 + z^2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \int_1^2 \frac{\rho^2}{\rho^2} \sin\theta\, d\rho = 2\pi$$

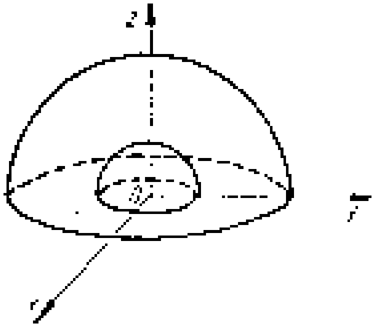

Fig. 97.

Exemplu 2. Să se calculeze integrala

$$I = \iiint_{\Omega} \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \right) dx\, dy\, dz, \text{ unde}$$

$$\Omega = \left\{ (x, y, z) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1 \right\}$$

În acest caz se folosesc coordonatele sferice generalizate definite de $x = a\rho \sin\theta \cos\varphi$, $y = b\rho \sin\theta \sin\varphi$, $z = c\rho \cos\theta$ cu $\rho \in [0, 1]$, $\theta \in [0, \pi]$ și $\varphi \in [0, 2\pi]$. Se arată cu ușurință că $\frac{D(x, y, z)}{D(\rho, \theta, \varphi)} = abc\, \rho^2 \sin\theta$ și deci $I =$ $= abc \int_0^{\pi} d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{1} \rho^4 \sin\theta\, d\rho = \frac{4\pi}{5} abc.$

§ 5. APLICAȚII ALE INTEGRALEI TRIPLE

1) Dacă $\Omega \subset \mathbf{R}^3$ este un domeniu compact care are volum, atunci

$$\mathrm{Vol}(\Omega) = \iiint_{\Omega} dx\, dy\, dz.$$

Exemplu 1. Să se calculeze volumul paralelipipedului Ω mărginit de planele $a_1x + b_1y + c_1z = \pm h_1$, $a_2x + b_2y + c_2z = \pm h_2$, $a_3x + b_3y + c_3z = \pm h_3$, unde presupunem produsul $h_1h_2h_3 \neq 0$ și determinantul

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0$$

În acest caz facem schimbarea de variabile

$$u = a_1x + b_1y + c_1z, \quad v = a_2x + b_2y + c_2z, \quad w = a_3x + b_3y + c_3z$$

cu $u \in [-h_1, h_1]$, $v \in [-h_2, h_2]$, $w \in [-h_3, h_3]$ și avem

$$\frac{D(x, y, z)}{D(u, v, w)} = \frac{1}{\dfrac{D(u, v, w)}{D(x, y, z)}} = \frac{1}{\Delta}$$

deci

$$\text{vol}\ \Omega = \iiint_{\Omega} dx\,dy\,dz = \int_{-h_1}^{h_1} du \int_{-h_2}^{h_2} dv \int_{-h_3}^{h_3} \frac{dw}{\Delta} = \frac{8h_1h_2h_3}{\Delta}.$$

Exemplul 2. Să se calculeze volumul lui $\Omega = \left\{(x, y, z) : \left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{z}{c}\right)^{\frac{2}{3}} \leq 1\right\}$. În acest caz se face schimbarea de variabile $x = a\rho \sin^3\theta \cos^3\varphi$, $y = b\rho \sin^3\theta \sin^3\varphi$, $z = c\rho \cos^3\theta$,

$$\rho \in [0, 1],\ \theta \in [0, \pi],\ \varphi \in [0, 2\pi].$$

În acest caz $\dfrac{D(x, y, z)}{D(\rho, \theta, \varphi)} = 9abc\rho^2 \sin^5\theta \cos^2\theta \sin^2\varphi \cos^2\varphi$ și deci

$$\text{vol}\ \Omega = \iiint_{\Omega} dx\,dy\,dz = 9abc \int_0^{\pi} \sin^5\theta \cos^2\theta\, d\theta \int_0^{2\pi} \sin^2\varphi \cos^2\varphi\, d\varphi \int_0^1 \rho^2\, d\rho =$$

$$= \frac{4}{35}\pi abc.$$

II) Dacă $\rho(x, y, z)$ este densitatea în punctul de coordonate (x, y, z) a unui corp material care ocupă domeniul Ω și ρ este continuă, atunci masa acestui corp este dată de egalitatea

$$\text{masa}\ \Omega = \iiint_{\Omega} \rho(x, y, z)\, dx\,dy\,dz.$$

III) Coordonatele centrului de greutate x_G, y_G, z_G a unui corp material de densitate ρ care ocupă domeniul Ω sînt date de egalitățile

$$x_G = \frac{1}{\text{masa}\ \Omega} \iiint_{\Omega} x\rho(x, y, z)\, dx\,dy\,dz,$$

$$y_G = \frac{1}{\text{masa}\ \Omega} \iiint_{\Omega} y\rho(x, y, z)\, dx\,dy\,dz,$$

$$z_G = \frac{1}{\text{masa}\ \Omega} \iiint_{\Omega} z\rho(x, y, z)\, dx\,dy\,dz.$$

Dacă ρ = constant (corp omogen) atunci

$$x_G = \frac{1}{V(\Omega)} \iiint_\Omega x \, dx \, dy \, dz, \quad y_G = \frac{1}{V(\Omega)} \iiint_\Omega y \, dx \, dy \, dz;$$

$$z_G = \frac{1}{V(\Omega)} \iiint_\Omega z \, dx \, dy \, dz.$$

IV. Momentele de inerție ale unui corp material, de densitate ρ care ocupă domeniul Ω, sînt date de egalitățile:

$$I_{Ox} = \iiint_\Omega (y^2 + z^2) \rho(x, y, z) \, dx \, dy \, dz; \quad I_{Oy} = \iiint_\Omega (x^2 + z^2) \rho(x, y, z) \, dx \, dy \, dz$$

$$I_{Oz} = \iiint_\Omega (x^2 + y^2) \rho(x, y, z) \, dx \, dy \, dz$$

$$I_{xOy} = \iiint_\Omega z^2 \rho(x, y, z) \, dx \, dy \, dz, \quad I_{yOz} = \iiint_\Omega x^2 \rho(x, y, z) \, dx \, dy \, dz$$

$$I_{xOz} = \iiint_\Omega y^2 \rho(x, y, z) \, dx \, dy \, dz$$

$$I_O = \iiint_\Omega (x^2 + y^2 + z^2) \rho(x, y, z) \, dx \, dy \, dz$$

V. Potențialul newtonian sau gravitațional al unui punct material de masă m se definește prin formula

$$U = \frac{m}{r}$$

unde r este distanța de la punctul material pînă la punctul din spațiu în care se calculează potențialul. In cazul unui corp material, care ocupă domeniul Ω, potențialul newtonian în punctul $P_0(x_0, y_0, z_0)$ va fi dat de formula:

$$U(x_0, y_0, z_0) = \iiint_\Omega \frac{\rho(x, y, z) \, dx \, dy \, dz}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}}$$

unde $\rho(x, y, z)$ este densitatea în punctul $(x, y, z) \in \Omega$.

VI. Atracția exercitată de un corp. Să considerăm mai întîi două puncte materiale P_1 și P_2 de mase m_1, respectiv m_2. Notăm cu r_{12} distanța de la P_1 și P_2, mărimea forței de atracție dintre cele două puncte materiale este dată de formula

$$F = \gamma \frac{m_1 \cdot m_2}{r_{12}^2}$$

unde λ este o constantă. Notînd cu $\bar{r}_{12} = \overline{P_1P_2}$ forţa $\bar{F}_{12}$ cu care P_1 este atras de P_2 este dată de formula

$$\bar{F}_{12} = \lambda \frac{m_1 m_2}{r_{12}^3} \bar{r}_{12}$$

Dacă P_1 are coordonatele x_1, y_1, z_1, iar P_2 are coordonatele x_2, y_2, z_2 atunci proiecţiile pe axele de coordonate ale acestei forţe sînt

$$X_{12} = \lambda \frac{m_1 m_2}{r_{12}^3} (x_2 - x_1); \quad Y_{12} = \lambda \frac{m_1 m_2}{r_{12}^3} (y_2 - y_1)$$

$$Z_{12} = \lambda \frac{m_1 m_2}{r_{12}^3} (z_2 - z_1)$$

unde

$$r_{12} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

Să considerăm acum un punct material $P_0(x_0, y_0, z_0)$ de masă m şi un corp material care ocupă domeniul $\Omega \subset \mathbb{R}^3$.
In acest caz, proiecţiile pe axe ale forţei F cu care P_0 este atras de corpul material sînt date de formulele

$$F_x = \lambda m \iiint_\Omega \frac{\rho(x, y, z)}{r^3} (x - x_0)\, dx\, dy\, dz$$

$$F_y = \lambda m \iiint_\Omega \frac{\rho(x, y, z)}{r^3} (y - y_0)\, dx\, dy\, dz$$

$$F_z = \lambda m \iiint_\Omega \frac{\rho(x, y, z)}{r^3} (z - z_0)\, dx\, dy\, dz$$

unde

$$r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}$$

iar $\rho(x, y, z)$ este densitatea în punctul $(x, y, z) \in \Omega$.

PROBLEME

Să se calculeze următoarele integrale triple

1) $\iiint_\Omega (x^2 + y^2)\, dx\, dy\, dz$, unde Ω este mărginit de următoarele suprafeţe $2z = x^2 + y^2$; $z = 2$. R: $\frac{16\pi}{3}$

2) $\iiint\limits_{\Omega} \sqrt{x^2 + y^2}\, dx\, dy\, dz$; unde Ω este mărginit de următoarele suprafețe: $z = \sqrt{x^2 + y^2}$; $z = 1$ $\qquad R: \dfrac{\pi}{6}$

3) $\iiint\limits_{\Omega} x^2\, dx\, dy\, dz$, unde Ω este mărginit de următoarele suprafețe $z = ay^2$; $z = by^2$; $y > 0$; $(0 < a < b)$; $z = \alpha x$; $z = \beta x$; $(0 < \alpha < \beta)$; $z = h > 0$ $\qquad R: \dfrac{2}{27}\left(\dfrac{1}{\alpha^3} - \dfrac{1}{\beta^3}\right)\left(\dfrac{1}{\sqrt{a}} - \dfrac{1}{\sqrt{b}}\right) h^4\sqrt{h}$

4) $\iiint\limits_{\Omega} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\, dx\, dy\, dz$ unde Ω este mărginit de suprafața $x^2 + y^2 + z^2 = z$ $\qquad R: \dfrac{\pi}{10}$

5) $\iiint\limits_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2)\, dx\, dy\, dz$ unde

$$\Omega = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 2az;\ x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 3a^2;\ a > 0\}$$

$R: \dfrac{\pi a^5}{5}\left(18\sqrt{3} - \dfrac{97}{6}\right)$

6) $\iiint\limits_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2)\, dx\, dy\, dz$ unde

$$\Omega = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 \leqslant z^2;\ x^2 + y^2 + z^2 \leqslant a^2;\ z \geqslant 0\}$$

$R: \dfrac{\pi a^5}{5}(2 - \sqrt{2})$.

7) Să se calculeze masa corpului material care ocupă domeniul

$$\Omega = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1;\ x \geqslant 0;\ y \geqslant 0;\ z \geqslant 0\}$$

și are densitatea $\rho(x, y, z) = xyz$;

$R: \dfrac{1}{48}$

Să se calculeze volumele domeniilor mărginite de următoarele suprafețe

8) $z = x^2 + y^2$; $z = 2(x^2 + y^2)$; $y = x$; $y = x^2$; $\qquad R: \dfrac{3}{35}$

9) $az = x^2 + y^2$; $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ $(a > 0)$ $\qquad R: \dfrac{\pi a^3}{6}$

10) $z = 6 - x^2 - y^2$; $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ $\qquad R: \dfrac{32}{3}\pi$

11) $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$; $x^2 + y^2 + z^2 = b^2$; $x^2 + y^2 = z^2$

$(z \geq 0)$; $(0 < a < b)$; $\qquad R: \dfrac{\pi}{3}(2 - \sqrt{2})(b^3 - a^3)$

12) $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^3 z$; $\qquad R: \dfrac{\pi a^3}{3}$

13) Să se calculeze coordonatele centrului de greutate ale corpului material omogen care ocupă domeniul

$$\Omega = \left\{(x, y, z) ;\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1 ;\ x \geq 0 ;\ y \geq 0 ;\ z \geq 0\right\}$$

$R: x_G = \dfrac{3}{8}a$; $y_G = \dfrac{3}{8}b$; $z_G = \dfrac{3}{8}c$;

14) Să se calculeze momentul de inerţie în raport cu axa Oz a corpului material şi omogen care ocupă domeniul mărginit de suprafeţele

$x^2 + y^2 + z^2 = 2$; $x^2 + y^2 = z^2$; $z \geq 0$

$R: I_{Oz} = \dfrac{4\pi}{15}(4\sqrt{2} - 5)$

15) Să se calculeze momentele de inerţie în raport cu planele de coordonate, ale corpului material omogen care ocupă domeniul mărginit de suprafeţele

$z = c$; $z \geq 0$; $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = \dfrac{z^2}{c^2}$

$R: I_{xOy} = \dfrac{\pi abc^3}{5}$; $I_{yOz} = \dfrac{\pi a^3 bc}{20}$; $I_{zOx} = \dfrac{\pi ab^3 c}{20}$

Folosind formula lui Gauss-Ostrogradsky să se calculeze următoarele integrale de suprafaţă de al doilea tip

16) $\displaystyle\oiint_S x^2\,dy\,dz + y^2\,dz\,dx + z^2\,dx\,dy$ pe pagina exterioară a frontierei lui $\Omega = \{(x, y, z) ;\ 0 \leq x \leq a ;\ 0 \leq y \leq a ;\ 0 \leq z \leq a\}$;

$R: 3a^4$

17) $\displaystyle\oiint_S x^3\,dy\,dz + y^3\,dz\,dx + z^3\,dx\,dy$ pe pagina exterioară a sferei

$x^2 + y^2 + z^2 = a^2$; $\qquad R: \dfrac{12}{5}\pi a^5$

CAPITOLUL XI

ECUAȚII DIFERENȚIALE DE ORDINUL ÎNTÎI

§ 1. INTRODUCERE

Rezolvarea unor probleme de analiză, de geometrie, de fizică sau tehnică se reduce la rezolvarea unor ecuații, numite ecuații diferențiale ordinare sau mai simplu, ecuații diferențiale, care leagă între ele o variabilă independentă x, o funcție necunoscută de x, pe care o notăm cu y și derivatele ei succesive $y', y'', \ldots, y^{(n)}$ pînă la un anumit ordin n. Prin urmare o ecuație diferențială are forma

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0 \tag{1}$$

unde funcția reală F, de argumente $x, y, y', \ldots, y^{(n)}$ este definită și continuă într-un domeniu $D \subset \mathbf{R}^{n+2}$. Dacă derivata de indicele cel mai mare $y^{(n)}$ intră efectiv în ecuația diferențială, zicem că ecuația este de ordinul n. Dacă ecuația (1) se poate rezolva în raport cu $y^{(n)}$ avem

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) \tag{2}$$

unde funcția reală f, de argumente $x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}$, este definită și continuă într-un domeniu din $\mathbf{R}^{n+1}$. În cazul particular $n = 1$, ecuația diferențială de ordinul întîi se scrie sub forma

$$y' = f(x, y); \quad (x, y) \in D \tag{3}$$

această formă se numește „normală".

Definiție. Spunem că funcția $\varphi: I \to \mathbf{R}$, unde I este interval, este soluție a ecuației (1) dacă sînt îndeplinite următoarele condiții:

a) funcția φ este derivabilă de n ori pe I,

b) $\{(x, \varphi(x), \varphi'(x), \ldots, \varphi^{(n)}(x));\ x \in I\} \subset D$,

c) $F(x, \varphi(x), \varphi'(x), \ldots, \varphi^{(n)}(x)) = 0; \quad (\forall)\ x \in I$.

În unele cazuri în locul soluției φ se găsește o relație de forma

$$G(x, y) = 0$$

care definește soluția φ ca funcție implicită de x. Graficul unei soluții este o curbă plană, numită curbă integrală. În continuare vom considera două probleme care ne conduc la rezolvarea unor ecuații diferențiale.

1) Notăm cu $R(t)$ cantitatea de radiu existentă la un moment t într-un recipient. Vrem să găsim legea matematică după care radiul se dezintegrează, adică să găsim formula care ne dă cantitatea de radiu la momentul $t > t_0$ dacă la momentul t_0 era o cantitate egală cu R_0. Viteza de dezintegrare a radiului este proporțională cu cantitatea de radiu existentă la momentul t și este egală cu $-R'(t)$.

Prin urmare $R(t)$ verifică ecuația diferențială de ordinul întîi

$$R'(t) = -kR(t) \tag{2}$$

unde k este un factor de proporționalitate. Se verifică imediat că orice funcție de forma

$$R(t) = C\, e^{-k(t-t_0)}$$

unde C este o constantă arbitrară, este soluție a ecuației (2). Ecuația admite o familie de soluții depinzînd de parametrul C.

Se pune în mod natural problema de a alege din această familie, soluția care satisface condiția

$$R(t_0) = R_0$$

numită condiție inițială. Se constată fără greutate că soluția problemei este

$$R(t) = R_0\, e^{-k(t-t_0)}$$

În multe alte probleme de fizică sau tehnică, ce conduc la o ecuație diferențială de ordinul întîi se pune asupra ecuației diferențiale o problemă analogă cu cea pusă mai sus. De aceea trebuie să se dea o atenție deosebită următoarei probleme, numită *problema lui Cauchy*, care se formulează în general în modul următor.

Fiind dată ecuația diferențială de ordinul întîi

$$y' = f(x, y); \quad (x, y) \in D \tag{3}$$

să se determine soluția ei care satisface condiția

$$y(x_0) = y_0$$

numită *condiție inițială* sau *condiția lui Cauchy*.

Din punct de vedere geometric, problema lui Cauchy constă în a determina curba integrală a ecuației diferențiale (3) care să treacă prin punctul (inițial) M_0 de coordonate x_0, y_0.

2) Să studiem mișcarea unui punct material M pe o dreaptă verticală sub acțiunea de atracție a pămîntului. Luăm un sistem de axe în care originea o situăm la suprafața pămîntului iar axa Oy o situăm după dreapta verticală pe care se mișcă punctul M. Sensul pozitiv pe axa Oy va fi considerat de jos în sus. Pentru a cunoaște poziția punctului M la orice moment t după începerea mișcării (corespunzătoare lui $t = 0$) trebuie să cunoaștem valoarea coordonatei y în funcție de t. La momentul $t = 0$ (momentul inițial) presupunem cunoscută poziția y_0 (poziția inițială) a punctului M precum și viteza sa v_0 (viteza inițială).
Din interpretarea mecanică a derivatei de ordinul al doilea, rezultă că accelerația este egală cu $y''(t)$.

Pe de altă parte știm că accelerația forței gravitaționale într-o vecinătate a suprafeței pămîntului este constantă și egală (aproximativ) cu

$$g = 981 \text{ cm/sec}^2$$

În sistemul nostru de coordonate, accelerației gravitaționale îi atașăm semnul − deoarece este dirijată în jos. Egalînd cele două expresii obținute pentru accelerația punctului material M sîntem conduși la următoarea ecuație diferențială de ordinul doi:

$$y'' = -g \tag{5}$$

Să verificăm imediat că orice funcție de forma

$$y(t) = -\frac{g}{2}t^2 + C_1 t + C_2$$

unde C_1 și C_2 sînt constante arbitrare, este soluție a ecuației (5). Ecuația admite astfel o familie de soluții depinzînd de doi parametri C_1 și C_2. Se pune problema de a alege din această familie, soluția care satisface condițiile

$$y(0) = y_0;\quad y'(0) = v_0$$

numite condiții inițiale. Se verifică imediat că funcția

$$y(t) = -\frac{g}{2}t^2 + v_0 t + y_0$$

este soluție a ecuației (5) și că

$$y(0) = y_0;\quad y'(0) = v_0$$

În multe alte probleme de fizică sau tehnică, ce conduc la o ecuație diferențială de ordinul n, se pune asupra ecuației diferențiale o problemă analogă cu cea pusă în acest exemplu. Trebuie acordată o atenție deosebită următoarei probleme numită problema lui Cauchy pentru ecuații diferențiale de ordinul n. În general *problema lui Cauchy pentru ecuații diferențiale de ordinul n*

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) \tag{2}$$

este următoarea:

Să se determine soluția ecuației diferențiale (2) care să satisfacă la condițiile

$$\begin{aligned} y(x_0) &= y_0 \\ y'(x_0) &= y_0' \\ &\ldots\ldots\ldots \\ y^{(n-1)}(x_0) &= y_0^{(n-1)} \end{aligned} \tag{6}$$

numite condiții inițiale sau condițiile lui Cauchy.

În condițiile (6), $x_0, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)}$ sînt numere date.

Exemplele date mai sus sînt suficiente pentru a arăta că diverse probleme de analiză, de geometrie, de fizică sau de tehnică conduc la ecuații diferențiale.

În multe cazuri s-a constatat că asupra ecuațiilor diferențiale se pune o aceeași problemă și anume problema lui Cauchy. Ecuațiile diferențiale astfel legate de fenomene naturale sînt de o deosebită importanță. Astăzi ele se studiază ca o disciplină aparte în matematică, de-sine-stătătoare, fără să se țină seamă de problemele care le-a dat naștere.

În cele ce urmează mai departe ne vom ocupa de două probleme. Una dintre ele este determinarea tuturor soluțiilor unei ecuații diferențiale date. Se spune în acest caz că se face integrarea ecuației diferențiale. A doua problemă este problema lui Cauchy. Se va vedea că există o strînsă legătură între cele două probleme.

În continuare vom considera cîteva ecuații diferențiale de forma $y' = f(x, y)$; $(x, y) \in D \subset \mathbf{R}^2$; D — domeniu; pentru care vom da metode de integrare. Vom arăta că integrarea lor se reduce la calculul unor integrale, adică la efectuarea unor cuadraturi. Din această cauză ecuațiile de care ne vom ocupa se vor numi ecuații diferențiale de ordinul întîi integrabile prin cuadraturi. În unele cazuri metoda de integrare ne va conduce la soluțiile ecuației diferențiale considerate, sub forma $y = \varphi(x, C)$, unde C este o constantă arbitrară. Funcția $\varphi(x, C)$ se numește soluția generală a ecuației diferențiale; cu ajutorul ei obținem toate soluțiile ecuației diferențiale, afară poate de unele soluții. O definiție precisă a noțiunii de soluție generală o vom da după teorema de existență și unicitate a ecuațiilor diferențiale. În alte cazuri, metoda de integrare ne va conduce la o ecuație de forma

$$\Phi(x, y, C) = 0$$

unde C este o constantă arbitrară, care rezolvată în raport cu y ne dă soluția generală a ecuației diferențiale.

§ 2. ECUAȚII CU VARIABILE SEPARABILE

Sînt ecuații de forma

$$y' = f(x) \cdot g(y) \tag{7}$$

unde $f\colon (a, b) \to \mathbf{R}$; $g\colon (c, d) \to \mathbf{R}$; f și g continue.

O soluție a ecuației (7) este o funcție

$$\varphi\colon (\alpha, \beta) \subset (a, b) \to (c, d)$$

derivabilă și astfel încît

$$\varphi'(x) = f(x)\, g(\varphi(x)) \quad (\forall)\ x \in (\alpha, \beta)$$

Presupunem $g(y) \neq 0$; $(\forall)\ y \in (c, d)$. Vrem să aflăm proprietățile funcției φ pentru ca apoi să deducem un procedeu de determinare a sa. Deoarece φ este soluție a ecuației (7) avem

$$f(x) = \frac{\varphi'(x)}{g(\varphi(x))}$$

Fie $G:(c,d)\to\mathbf{R}$ o primitivă a funcţiei $\frac{1}{g}$, deci este derivabilă şi $G' = \frac{1}{g}$.
Funcţia compusă $G(\varphi)$ este derivabilă şi are loc egalitatea

$$(G(\varphi))' = G'(\varphi)\varphi' \text{ adică}$$

$$\frac{d}{dx}G(\varphi(x)) = G'(\varphi(x))\cdot\varphi'(x) = \frac{1}{g(\varphi(x))}\cdot\varphi'(x) = f(x)$$

Cu alte cuvinte are loc egalitatea $(G(\varphi))' = f$. Dacă F este o primitivă a funcţiei f, în intervalul (α, β) avem

$$G(\varphi(x)) = F(x) + C$$

unde C este constantă arbitrară. Deoarece $\frac{1}{g} \neq 0$ funcţia G este monotonă şi prin urmare inversabilă. Deducem că

$$\varphi(x) = G^{-1}(F(x) + C)$$

Am obţinut că dacă φ este soluţie a ecuaţiei (7) atunci

$$\varphi = G^{-1}(F + C) \tag{8}$$

unde F este o primitivă a lui f, G o primitivă a lui $\frac{1}{g}$, iar C o constantă arbitrară. Vom arăta reciproc că orice funcţie de forma (8) este o soluţie a ecuaţiei (7).

În adevăr dacă $\varphi(x) = G^{-1}(F(x) + C)$ atunci $G(\varphi(x)) = F(x) + C$ şi derivînd obţinem $G'(\varphi(x))\varphi'(x) = F'(x)$ de unde

$$\varphi'(x) = \frac{F'(x)}{G'(\varphi(x))}, \text{ adică } \frac{\varphi'(x)}{g(\varphi(x))} = f(x)$$

Din ultima relaţie deducem că $\varphi'(x) = f(x)\,g(\varphi(x))$, cu alte cuvinte funcţia φ considerată mai sus este soluţie a ecuaţiei (7).
Intervalul de definiţie al funcţiei φ este format din mulţimea punctelor $x \in (a, b)$ astfel încît $F(x) + C$ să se afle în domeniul de definiţie al funcţiei G^{-1}, adică în domeniul valorilor funcţiei G, deci între $\lim_{y\to c} G(y)$ şi $\lim_{y\to d} G(y)$.

Observaţie. În condiţiile date mai sus, este justificat acum procedeul care urmează. Se scrie ecuaţia (7) sub forma

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x)\,dx \tag{9}$$

şi integrînd ambii membri ai ecuaţiei (9) obţinem

$$G(y) = F(x) + C$$

unde G este o primitivă a funcţiei $\frac{1}{g}$, iar F o primitivă a funcţiei f. Din ultima egalitate găsim

$$y = G^{-1}(F(x) + C)$$

Exemplu: Să se integreze ecuaţia $y' = (y^2 + 1)(x^2 + 1)$. Scriem ecuaţia sub forma (9):

$$\frac{dy}{y^2 + 1} = (x^2 + 1)\, dx$$

Integrînd obţinem

$$\operatorname{arc\,tg} y = \frac{x^3}{3} + x + C, \text{ de unde}$$

$$y = \operatorname{tg}\left(\frac{x^3}{3} + x + C\right).$$

§ 5. ECUAŢII OMOGENE

Sînt ecuaţii de forma

$$y' = g\left(\frac{y}{x}\right) \tag{10}$$

În general spunem că o funcţie de două variabile $f(x, y)$ este omogenă de gradul m dacă $f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^m f(x, y)$. În cazul nostru membrul drept al ecuaţiei (10) este o funcţie omogenă de gradul zero. Pentru a găsi soluţia ecuaţiei (10) procedăm ca şi în cazul ecuaţiilor cu variabile separabile.

Fie $g : (\alpha, \beta) \to \mathbf{R}$ şi φ o soluţie a ecuaţiei (10) definită pe un interval I care nu conţine pe $x = 0$ şi atunci pentru $x \in I$ avem

$$\frac{\varphi(x)}{x} \in (\alpha, \beta) \text{ şi } \varphi'(x) = g\left(\frac{\varphi(x)}{x}\right).$$

Facem schimbarea de funcţie $u(x) = \dfrac{\varphi(x)}{x}$; $I \to (\alpha, \beta)$.

Funcţia u este derivabilă pe I şi

$$u' = \frac{x\varphi'(x) - \varphi(x)}{x^2} = \frac{1}{x}\left(\varphi'(x) - \frac{\varphi(x)}{x}\right).$$

Folosind faptul că φ a fost presupusă soluţie a ecuaţiei (10) obţinem

$$u'(x) = \frac{1}{x}\left[g\left(\frac{\varphi(x)}{x}\right) - \frac{\varphi(x)}{x}\right] \text{ sau}$$

$$u'(x) = \frac{1}{x}\,[g(u(x)) - u(x)].$$

Rezultă că u este soluţie a ecuaţiei cu variabile separabile

$$u' = \frac{1}{x}\,(g(u) - u) \tag{11}$$

şi deci funcţia u poate fi determinată, pînă la o constantă, ceea ce implică posibilitatea de a determina soluţia φ. Vom arăta că orice soluţie a ecuaţiei cu variabile separabile (11) determină o soluţie a ecuaţiei omogene (10). În adevăr, dacă

$$u'(x) = \frac{1}{x}[g(u(x)) - u(x)] \quad \text{şi} \quad \varphi(x) = x\,u(x), \text{ atunci}$$

$$\varphi'(x) = u(x) + x u'(x) = u(x) + x\,\frac{g(u(x)) - u(x)}{x} = g(u(x)) =$$

$$= g\left(\frac{\varphi(x)}{x}\right); \quad \text{adică} \quad \varphi'(x) = g\left(\frac{\varphi(x)}{x}\right).$$

De aici rezultă că integrarea ecuaţiei diferenţiale omogene (10) s-a redus la integrarea ecuaţiei diferenţiale (11) cu variabile separabile. Se trece de la ecuaţia (10) la ecuaţia (11) făcîndu-se în ecuaţia (10) schimbarea de variabilă

$$y = ux$$

unde u este noua funcţie necunoscută.

Exemplul 1. Să se integreze ecuaţia diferenţială omogenă

$$y' = \frac{y}{x} + \mathrm{tg}\,\frac{y}{x}; \quad \frac{y}{x} \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

Dacă facem schimbarea de variabilă $y = ux$, avem $y' = u + xu'$ şi înlocuind în ecuaţia dată avem

$$u + xu' = u + \mathrm{tg}\, u \quad \text{sau} \quad xu' = \mathrm{tg}\, u$$

care este o ecuaţie cu variabile separabile.

$\frac{\cos u}{\sin u}\,du = \frac{dx}{x}$ care integrată ne conduce la relaţia

$$\ln|\sin u| = \ln|x| + \ln|C| \quad \text{sau} \quad \sin\frac{y}{x} = Cx.$$

Exemplul 2. Să se integreze ecuaţia $y' = \frac{x+y}{x-y}$.

Dacă facem schimbarea de variabilă $y = ux$, obţinem

$$u + xu' = \frac{1+u}{1-u} \quad \text{sau} \quad xu' = \frac{1+u^2}{1-u}; \quad \frac{1-u}{1+u^2}\,du = \frac{dx}{x}.$$

Integrînd ultima ecuaţie obţinem

$$\mathrm{arc\,tg}\, u - \frac{1}{2}\ln(1+u^2) = \ln|x| + \ln|C| \quad \text{sau}$$

$$\mathrm{arc\,tg}\,\frac{y}{x} = \frac{1}{2}\ln\frac{x^2+y^2}{x^2} + \ln|x| + \ln|C|$$

$$C\sqrt{x^2+y^2} = e^{\mathrm{arc\,tg}\frac{y}{x}}.$$

Observaţie. Dacă în ecuaţia cu variabile separabile (11) există un număr u_0 aşa fel încît $g(u_0) - u_0 = 0$ atunci se verifică cu uşurinţă că $y = u_0x$ este soluţie a ecuaţiei (10), care nu intră în soluţia generală. Soluţiile cu această proprietate se numesc soluţii singulare.

§ 4. ECUAȚII REDUCTIBILE LA ECUAȚII OMOGENE

Fie ecuația diferențială

$$y' = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right) \qquad (12)$$

sînt posibile două situații:

a) Dacă $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$, facem schimbarea de variabile

$$X = x - x_0; \quad Y = y - y_0$$

unde (x_0, y_0) este soluția sistemului liniar

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0$$
$$a_2x + b_2y + c_2 = 0$$

Cu această schimbare de variabile ecuația (12) devine

$$\frac{dY}{dX} = f\left(\frac{a_1X + b_1Y}{a_2X + b_2Y}\right) = f\left(\frac{a_1 + b_1\frac{Y}{X}}{a_2 + b_2\frac{Y}{X}}\right) = g\left(\frac{Y}{X}\right) \qquad (13)$$

care este o ecuație omogenă.

Exemplu. Să se integreze ecuația $y' = \frac{x - y + 1}{x + y - 3}$. Rezolvînd sistemul de ecuații $x - y + 1 = 0$, $x + y - 3 = 0$ obținem $x_0 = 1$, $y_0 = 2$. Facem schimbarea de variabile $X = x - 1$; $Y = y - 2$ sau $x = X + 1$; $y = Y + 2$ și înlocuind în ecuația dată, obținem

$$\frac{dY}{dX} = \frac{X - Y}{X + Y}$$

Făcînd schimbarea de variabilă $Y = Xu$, avem

$$u + Xu' = \frac{1 - u}{1 + u} \text{ sau } \frac{1 + u}{1 - 2u - u^2}\,du = \frac{dX}{X}, \text{ de unde}$$

$$-\frac{1}{2}\ln|1 - 2u - u^2| = \ln|X| - \frac{1}{2}\ln C \text{ sau } C = X^2(1 - 2u - u^2)$$

Înlocuind pe u avem $X^2 - 2XY - Y^2 = C$.
Dacă revenim la variabilele x și y obținem

$$x^2 - 2xy - y^2 + 2x + 6y = C_1$$

b) Dacă $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$ atunci $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = k$ și ecuația (12) devine

$$y' = f\left(\frac{k(a_2x + b_2y) + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right) = g(a_2x + b_2y) \qquad (14)$$

În acest caz facem schimbarea de variabilă $a_2x + b_2y = u$ și ecuația (14) devine

$$u' = a_2 + b_2 g(u)$$

Exemplu. Să se integreze ecuația $y' = \frac{2x - 4y + 1}{x - 2y + 3}$. În acest caz facem schimbarea de variabilă $u = x - 2y$, de unde

$$u' = 1 - 2y' = 1 - 2\,\frac{2u + 1}{u + 3} \quad \text{sau} \quad u' = -\frac{3u - 1}{u + 3},$$

ecuație cu variabile separabile.

Integrînd această ecuație obținem

$$C = (1 - 3u)^{10/9}\, e^{\frac{u}{3} + x}$$

$$C = (1 - 3x + 6y)^{10/9}\, e^{\frac{4x - 2y}{3}}$$

§ 5. ECUAȚII LINIARE

Ecuațiile de forma

$$y' = P(x)y + Q(x) \tag{15}$$

unde P și Q sînt două funcții definite și continue pe un interval I, se numesc ecuații diferențiale liniare de ordinul întîi. Cînd funcția Q este identic nulă, ecuația se numește liniară și omogenă (cuvîntul omogen are aici alt sens decît cel dat anterior). Dacă Q nu este identic nulă ecuația se numește liniară neomogenă. Integrarea ecuației liniare neomogene (15) se face în două etape. a) Se integrează mai întîi ecuația liniară și omogenă atașată ecuației (15)

$$y' = P(x)y \tag{16}$$

și soluția ei generală servește apoi la integrarea ecuației neomogene. Ecuația (16) este o ecuație cu variabile separabile

$$\frac{dy}{y} = P(x)\,dx.$$

Integrînd se deduce

$$\ln|y| = \int_{x_0}^{x} P(t)\,dt + \ln|C| \tag{17}$$

de unde rezultă imediat soluția generală

$$y = C e^{\int_{x_0}^{x} P(t)\,dt}.$$

b) Integrarea ecuației diferențiale liniare, neomogene (15). Vom întrebuința metoda variației constantei sau metoda lui Lagrange. În (17), soluția generală a ecuației omogene (16), înlocuim constanta C cu o funcție $C(x)$. Determinăm funcția $C(x)$ astfel încît

$$y = C(x)\, e^{\int_{x_0}^{x} P(t)\,dt} \tag{18}$$

să fie soluție a ecuației neomogene (15).

Punînd condiția ca funcția (18) să verifice ecuația (15) obținem

$$C'(x)\, e^{\int_{x_0}^{x} P(t)\,dt} + C(x)\,P(x)\, e^{\int_{x_0}^{x} P(t)\,dt} - P(x)\,C(x)\, e^{\int_{x_0}^{x} P(t)\,dt} = Q(x)$$

sau

$$C'(x)\, e^{\int_{x_0}^{x} P(t)\,dt} = Q(x);\quad C'(x) = Q(x)\, e^{-\int_{x_0}^{x} P(t)\,dt} \tag{19}$$

Ecuația (19) este cu variabile separabile și soluția ei generală este

$$C(x) = K + \int_{x_0}^{x} Q(s)\, e^{-\int_{x_0}^{s} P(t)\,dt}\, ds$$

unde K este constantă arbitrară. Dacă înlocuim pe $C(x)$ astfel obținut în (18), avem soluția generală a ecuației neomogene (15)

$$y = \left[K + \int_{x_0}^{x} Q(s)\, e^{-\int_{x_0}^{s} P(t)\,dt}\, ds\right] e^{\int_{x_0}^{x} P(t)\,dt} \tag{20}$$

Această ultimă formulă mai poate fi scrisă sub forma următoare

$$y = K\, e^{\int_{x_0}^{x} P(t)\,dt} + \int_{x_0}^{x} Q(s)\, e^{\int_{s}^{x} P(t)\,dt}\, ds \tag{21}$$

Dacă se pune problema aflării soluției care satisface condiția $y(x_0) = y_0$, atunci avem evident, $K = y_0$ și deci

$$y = y_0\, e^{\int_{x_0}^{x} P(t)\,dt} + \int_{x_0}^{x} Q(s)\, e^{\int_{s}^{x} P(t)\,dt}\, ds \tag{22}$$

Această formulă individualizează complet soluția y cu ajutorul valorii ei în punctul x_0.

Exemplu. Să se integreze ecuația $y' = y \operatorname{ctg} x + 2x \sin x$. Integrînd ecuația omogenă atașată: $y' = y \operatorname{ctg} x$ avem:

$$\frac{dy}{y} = \frac{\cos x}{\sin x}\,dx;\ \ln|y| = \ln|\sin x| + \ln C;\ y = C \sin x$$

În locul constantei C considerăm o funcție $C(x)$ și punem condiția ca funcția $y = C(x) \sin x$ să verifice ecuația dată:

$$C'(x) \sin x + C(x) \cos x = C(x) \sin x \operatorname{ctg} x + 2x \sin x;$$

$$C'(x) = 2x, \; C(x) = x^2 + K$$

și deci soluția generală a ecuației va fi

$$y = (x^2 + K) \sin x = x^2 \sin x + K \sin x.$$

§ 6. ECUAȚII DIFERENȚIALE BERNOULLI

Sînt ecuații de forma

$$y' = P(x)y + Q(x)\, y^{\alpha} \tag{23}$$

unde P și Q sînt două funcții reale definite și continue pe un același interval I iar α este un număr real. Pentru $\alpha = 0$ ecuația (23) este o ecuație liniară și neomogenă, iar pentru $\alpha = 1$ este o ecuație cu variabile separabile. Vom presupune mai departe că $\alpha \neq 0$; $\alpha \neq 1$.

Vom demonstra că dacă $\varphi: I \to \mathbf{R}$ este o soluție a ecuației diferențiale (23) a lui Bernoulli, strict pozitivă pe intervalul I, atunci funcția u definită prin

$$u(x) = (\varphi(x))^{1-\alpha}; \quad x \in I,$$

este soluție a unei ecuații diferențiale liniare.

Dacă ținem seama că φ este soluție a ecuației (23) avem

$$u'(x) = (1-\alpha)(\varphi(x))^{-\alpha} \varphi'(x) = (1-\alpha)(\varphi(x))^{-\alpha} [P(x)\,\varphi(x) +$$

$$+ Q(x)\,(\varphi(x))^{\alpha}] = (1-\alpha)\,[P(x)\,(\varphi(x))^{1-\alpha} + Q(x)] =$$

$$= (1-\alpha)\,[P(x)\,u(x) + Q(x)]$$

Adică funcția u este soluție a ecuației liniare

$$u' = (1-\alpha)\,[P(x)u + Q(x)] \tag{24}$$

Reciproc, dacă u este o soluție strict pozitivă a ecuației liniare (24) atunci funcția φ definită prin

$$\varphi(x) = (u(x))^{\frac{1}{1-\alpha}}; \quad x \in I$$

este soluție a ecuației diferențiale a lui Bernoulli. În adevăr, dacă ținem seama că u este soluție a ecuației (24) avem

$$\varphi'(x) = \frac{1}{1-\alpha}(u(x))^{\frac{1}{1-\alpha}-1} u'(x) = \frac{1}{1-\alpha}(u(x))^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}(1-\alpha)\,[P(x)u(x) +$$

$$+ Q(x)] = P(x)\,(u(x))^{\frac{\alpha}{1-\alpha}+1} + Q(x)\,(u(x))^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} =$$

$$= P(x)\,(u(x))^{\frac{1}{1-\alpha}} + Q(x)\,(u(x))^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

Adică

$$\varphi'(x) = P(x)\,\varphi(x) + Q(x)\,(\varphi(x))^{\alpha}$$

şi deci φ este soluţie a ecuaţiei (23). Prin urmare integrarea unei ecuaţii Bernoulli se reduce la integrarea unei ecuaţii liniare în urma schimbării de variabilă $u = y^{1-\alpha}$, unde u este noua funcţie necunoscută.

Exemplu. Să se integreze ecuaţia: $y' = 2xy + x^3\sqrt{y}$. În acest caz avem $\alpha = \frac{1}{2}$; facem schimbarea de variabilă $u = y^{1-\frac{1}{2}} = y^{\frac{1}{2}}$. Atunci

$$u' = \frac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}}y' = \frac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}}(2xy + x^3\sqrt{y}) = xy^{\frac{1}{2}} + \frac{x^3}{2} = xu + \frac{x^3}{2};$$

adică

$$u' = xu + \frac{x^3}{2}.$$

Soluţia generală a ecuaţiei liniare în u este

$$u = C\,e^{\frac{x^2}{2}} - \frac{x^2+2}{2}$$

de unde rezultă soluţia generală a ecuaţiei date

$$y = \left(C\,e^{\frac{x^2}{2}} - \frac{x^2+2}{2}\right)^2$$

§ 7. ECUAŢII DIFERENŢIALE RICATTI

Sînt ecuaţii de forma

$$y' = P(x)y^2 + Q(x)y + R(x) \tag{25}$$

unde P, Q şi R sînt trei funcţii reale, definite şi continue pe un acelaşi interval I.

O ecuaţie Ricatti nu se integrează în general cu metode elementare, prin reducere la cuadratura, aşa cum s-a arătat pentru ecuaţiile diferenţiale tratate pînă acum.

În cazul în care se cunoaşte o soluţie y_1 a ecuaţiei (25) vom arăta că integrarea sa se reduce la cuadraturi. Dacă φ este o soluţie a ecuaţiei Ricatti, diferită de y_1, atunci funcţia $u = \varphi - y_1$ este soluţie a unei ecuaţii diferenţiale Bernoulli. În adevăr, avem

$$u' = \varphi' - y_1'$$

şi dacă ţinem seama că φ şi y_1 verifică ecuaţia (25), avem

$$\begin{aligned} u' &= \varphi' - y_1' = P(x)\varphi^2 + Q(x)\varphi + R(x) - (P(x)y_1^2 + Q(x)y_1 + R(x)) = \\ &= P(x)(\varphi^2 - y_1^2) + Q(x)(\varphi - y_1) = [P(x)(\varphi + y_1) + Q(x)]\cdot(\varphi - y_1) = \\ &= [P(x)(\varphi - y_1 + 2y_1) + Q(x)]\cdot(\varphi - y_1) = (Q(x) + 2y_1P(x))(\varphi - y_1) + \\ &\quad + P(x)(\varphi - y_1)^2 \end{aligned}$$

şi dacă înlocuim pe $y - y_1$ cu z, deducem că z verifică ecuaţia diferenţială Bernoulli, cu $\alpha = 2$,

$$z' = (Q(x) + 2y_1 P(x))z + P(x)z^2 \tag{26}$$

Reciproc, dacă y_1 este o soluţie a ecuaţiei (25) şi z este o soluţie a ecuaţiei (26), atunci funcţia $y = z + y_1$ este soluţie a ecuaţiei (25). În adevăr, avem

$$y' = z' + y_1' = Q(x)(y - y_1) + 2y_1 P(x)(y - y_1) + P(x)(y - y_1)^2 +$$
$$+ P(x)y_1^2 + Q(x)y_1 + R(x) = Q(x)y - Q(x)y_1 + 2P(x)yy_1 -$$
$$- 2P(x)y_1^2 + P(x)y^2 - 2P(x)yy_1 + 2P(x)y_1^2 + Q(x)y_1 +$$
$$+ R(x) = P(x)y^2 + Q(x)y + R(x)$$

şi deci y este soluţie a ecuaţiei (25).

Deci, în cazul că se cunoaşte o soluţie a ecuaţiei Riccati (25), integrarea sa se reduce la integrarea ecuaţiei Bernoulli (26).

Se poate trece de la ecuaţia (25) la ecuaţia (26) făcînd în ecuaţia Riccati schimbarea de variabilă

$$y = y_1 + z$$

unde z este noua funcţie necunoscută.

Exemplu. Să se integreze ecuaţia Riccati

$$y' = -2xy^2 + y + \frac{x - 1}{x^2}$$

ştiind că are soluţia $y_1 = \frac{1}{x}$.

Facem schimbarea de variabilă $y = \frac{1}{x} + u$ şi obţinem

$$u' = -3u - 2xu^2$$

care este o ecuaţie Bernoulli; $\alpha = 2$, cu soluţia generală

$$u = \frac{1}{Ce^{3x} - \frac{2(3x + 1)}{9}}$$

şi deci soluţia generală a ecuaţiei Riccati este

$$y = \frac{1}{x} + \frac{1}{Ce^{3x} - \frac{2(3x + 1)}{9}}$$

Observaţie. Dacă în ecuaţia (25) facem schimbarea de variabilă $y = y_1 + \frac{1}{z}$, unde y_1 este o soluţie a ecuaţiei (25) iar z este noua funcţie necunoscută, obţinem o ecuaţie liniară în z.

§ 8. ECUAŢII CU DIFERENŢIALE TOTALE EXACTE

Să considerăm ecuaţia diferenţială

$$y' = f(x, y);\ (x, y) \in D \text{ (domeniu)} \tag{27}$$

şi să presupunem că

$$f(x, y) = -\frac{P(x, y)}{Q(x, y)}$$

În acest caz ecuaţia (27) se scrie

$$\frac{dy}{dx} + \frac{P(x, y)}{Q(x, y)} = 0 \text{ sau } P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = 0 \tag{28}$$

sau încă sub forma $P(x, y) + Q(x, y)y' = 0$, unde funcţiile reale P şi Q sînt definite şi continue pe un acelaşi domeniu $D \subset \mathbf{R}^2$.

Ecuaţia diferenţială (28) se numeşte cu diferenţiale totale exacte dacă primul ei membru este o diferenţială totală exactă.
Deci în acest caz există o funcţie $F(x, y): D \subset \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, F diferenţiabilă astfel încît

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy = P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy$$

şi prin urmare avem:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = P; \quad \frac{\partial F}{\partial y} = Q \tag{29}$$

La ecuaţia (28) cu diferenţiale totale exacte să ataşăm ecuaţia

$$F(x, y) = C \tag{30}$$

unde C este o constantă arbitrară. Între soluţiile ecuaţiei (28) şi soluţiile ecuaţiei (30) avem următoarea legătură.
Dacă φ este o soluţie a ecuaţiei cu diferenţiale totale exacte (28), atunci $F(x, \varphi(x))$ este identic egală cu o constantă C_1, adică φ este soluţie a ecuaţiei (30) pentru $C = C_1$.

În adevăr deoarece φ este soluţie a ecuaţiei (28) avem

$$P(x, \varphi(x)) + Q(x, \varphi(x))\,\varphi'(x) = 0 \tag{31}$$

Notăm $U(x) = F(x, \varphi(x))$
şi derivînd avem

$$U'(x) = \frac{\partial F(x, \varphi(x))}{\partial x} + \frac{\partial F(x, \varphi(x))}{\partial y}\varphi'(x)$$

Deoarece ecuaţia (28) este o ecuaţie cu diferenţiale totale exacte au loc egalităţile (29) şi deci

$$U'(x) = P(x, \varphi(x)) + Q(x, \varphi(x))\,\varphi'(x)$$

În baza egalităţii (31) avem deci $U'(x) = 0$ şi prin urmare $U(x) = C_1$, adică φ este soluţie a ecuaţiei (30) pentru $C = C_1$.

Reciproc, dacă φ este soluție a ecuației (30), atunci ea este soluție a ecuației diferențiale (28). În adevăr, deoarece φ este soluție a ecuației (30), avem

$$F(x, \varphi(x)) = C$$

Derivînd obținem identitatea

$$\frac{\partial F(x, \varphi(x))}{\partial x} + \frac{\partial F(x, \varphi(x))}{\partial y}\, \varphi'(x) = 0$$

și ținînd cont de egalitățile (29) avem:

$$P(x, \varphi(x)) + Q(x, \varphi(x))\, \varphi'(x) = 0$$

ceea ce înseamnă că φ este soluție a ecuației diferențiale (28).

În concluzie, am dovedit că soluția generală a ecuației cu diferențiale totale exacte (28), este dată (sub formă implicită) de ecuația

$$F(x, y) = C$$

Dacă presupunem că funcțiile P și Q admit derivate parțiale continue pe D și are loc egalitatea

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \quad (\forall)\ (x, y) \in D \tag{31}$$

atunci ecuația (28) este cu diferențiale totale exacte (vezi independența de drum a integralei curbilinii) iar funcția F este dată de egalitatea

$$F(x, y) = \int_{x_0}^{x} P(x, y_0)\, dx + \int_{y_0}^{y} Q(x, y)\, dy,\ (x_0, y_0) \in D;\ (x, y) \in D$$

deci soluția generală a ecuației (28) va fi dată de

$$\int_{x_0}^{x} P(x, y_0)\, dx + \int_{y_0}^{y} Q(x, y)\, dy = C$$

Exemplu. Să se integreze ecuația $(x + y + 1)\, dx + (x - y^2 + 3)\, dy = 0$. În acest caz $P = x + y + 1$; $Q = x - y^2 + 3$ și avem $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = 1$, deci ecuația considerată este cu diferențiale totale exacte. Avem

$$F(x, y) = \int_{x_0}^{x} (x + y_0 + 1)\, dx + \int_{y_0}^{y} (x - y^2 + 3)\, dy$$

Putem alege $(x_0, y_0) = (0, 0)$ și deci

$$F(x, y) = \int_{0}^{x} (x + 1)\, dx + \int_{0}^{y} (x - y^2 + 3)\, dy = \frac{x^2}{2} + x + xy - \frac{y^3}{3} + 3y$$

Soluția generală a ecuației este dată de

$$\frac{x^2}{2} + x + xy - \frac{y^3}{3} + 3y = C$$

Factor integrant. Considerăm ecuaţia diferenţială de ordinul întîi:

$$P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = 0 \tag{28}$$

unde P şi Q sînt două funcţii reale definite pe un acelaşi domeniu $D \subset \mathbb{R}^2$ şi care admit derivate parţiale continue pe D. Dacă ecuaţia (28) nu este cu diferenţiale totale exacte, adică

$$\frac{\partial P}{\partial y} \neq \frac{\partial Q}{\partial x},$$

putem căuta o funcţie μ astfel încît, înmulţind ecuaţia (28) cu μ să devină o ecuaţie cu diferenţiale totale exacte.

Funcţia μ pentru care ecuaţia

$$\mu(x, y)\,P(x, y)\,dx + \mu(x, y)\,Q(x, y)\,dy = 0$$

este o ecuaţie cu diferenţiale totale exacte se numeşte factor integrant. Condiţia pe care trebuie să o satisfacă factorul integrant este

$$\frac{\partial}{\partial y}(\mu P) = \frac{\partial}{\partial x}(\mu Q)$$

adică

$$P\frac{\partial \mu}{\partial y} - Q\frac{\partial \mu}{\partial x} = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mu \tag{33}$$

În general, problema găsirii unui factor integrant revine la rezolvarea ecuaţiei cu derivate parţiale (33), care este o problemă mai dificilă decît integrarea ecuaţiei (28). În anumite cazuri însă se poate determina uşor un factor integrant de formă specială. Dacă cerem ca ecuaţia (28) să admită un factor integrant care să depindă numai de x atunci ecuaţia (33) devine

$$-Q\frac{d\mu}{dx} = \mu\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) \tag{34}$$

sau

$$\frac{d\mu}{\mu} = \frac{\dfrac{\partial P}{\partial y} - \dfrac{\partial Q}{\partial x}}{Q}\,dx \tag{35}$$

Dacă funcţia $\dfrac{\dfrac{\partial P}{\partial y} - \dfrac{\partial Q}{\partial x}}{Q}$ depinde numai de x, atunci ecuaţia (35) este cu variabile separabile şi integrată ne dă

$$\ln|\mu| = \int \frac{\dfrac{\partial P}{\partial y} - \dfrac{\partial Q}{\partial x}}{Q}\,dx + \ln|C|; \quad \mu = C\,e^{\int \frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{Q}\,dx}$$

Luînd $C = 1$ obţinem un factor integrant, suficient pentru a integra ecuaţia (28).

În mod asemănător se procedează și în cazul în care cerem ca ecuația să admită un factor integrant de forma

$$\mu(y);\ \mu(x \pm y);\ \mu(x^2 \pm y^2);\ \mu(x\,y);\ \mu\left(\frac{y}{x}\right) \text{ etc.}$$

Exemplu. Fie dată ecuația diferențială

$$(x - y)\,dx - (x + y)dy = 0$$

Admite ecuația dată un factor integrant de forma $\mu = \mu(x^2 + y^2)$? În caz afirmativ să se integreze ecuația.

Funcția μ trebuie să satisfacă ecuația

$$\frac{\partial}{\partial y}\,[(x - y)\,\mu(x^2 + y^2)] = -\frac{\partial}{\partial x}\,[(x + y)\,\mu(x^2 + y^2)]$$

Notăm $x^2 + y^2 = z$ și avem

$$-\mu(z) + (x - y)\,2y\,\frac{d\mu}{dz} = \mu(z) + (x + y)\,2x\,\frac{d\mu}{dz}$$

sau

$$-2(x^2 + y^2)\,\frac{d\mu}{dz} = 2\mu(z);\quad z\,\frac{d\mu}{dz} = -\mu(z).$$

Din ultima ecuație, cu variabile separabile, obținem

$$\mu(z) = \frac{C}{z}.$$

Luăm $C = 1$ și avem, în acest caz $\mu(x, y) = \dfrac{1}{x^2 + y^2}$.

Înmulțim ecuația cu $\mu = \dfrac{1}{x^2 + y^2}$; avem

$$\frac{x\,dx + y\,dy}{x^2 + y^2} + \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2 + y^2} = 0 \text{ sau}$$

$$\frac{d(x^2 + y^2)}{2(x^2 + y^2)} + \frac{d\left(\frac{y}{x}\right)}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} = 0$$

$$\frac{1}{2}\,d\ln(x^2 + y^2) + d\,\text{arc tg}\,\frac{y}{x} = 0$$

Integrînd, obținem

$$\ln\sqrt{x^2+y^2} = -\operatorname{arctg}\frac{y}{x} + \ln|C|$$

de unde

$$\sqrt{x^2+y^2} = C\,e^{-\operatorname{arctg}\frac{y}{x}}$$

§ 9. ECUAȚII DE FORMA $F(x, y, y') = 0$

Pînă acum ne-am ocupat de ecuații sub forma normală

$$y' = f(x, y) \quad (x, y) \in D$$

adică rezolvate în raport cu y'.

În continuare ne vom ocupa de ecuații de ordinul întîi de forma

$$F(x, y, y') = 0 \tag{36}$$

nerezolvate în raport cu y'.

Pentru o ecuație de forma (36) unde $F: I \times I_1 \times I_2 \to \mathbf{R}$ este o funcție cu derivate parțiale continue, o soluție este o funcție

$$\varphi: I \to I_1$$

derivabilă, cu $\varphi': I \to I_2$ și $F(x, \varphi(x), \varphi'(x)) = 0$ pentru orice $x \in I$. Dacă se dă un punct (x_0, y_0, z_0) astfel încît

$$F(x_0, y_0, z_0) = 0 \quad \frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \neq 0$$

teorema funcțiilor implicite afirmă existența unei funcții f definită într-o vecinătate a punctului (x_0, y_0) cu derivate parțiale continue, astfel încît

$$F(x, y, f(x, y)) = 0; \quad f(x_0, y_0) = z_0$$

Dacă φ este o soluție a ecuației diferențiale

$$y' = f(x, y)$$

definită de funcția f avem $\varphi'(x) = f(x, \varphi(x))$, deci

$$F(x, \varphi(x), \varphi'(x)) = F(x, \varphi(x), f(x, \varphi(x))) = 0$$

și deci φ este soluție a ecuației date. Rezultă că putem reduce, cel puțin local, problema găsirii soluțiilor ecuației (36) cu $F'_z \neq 0$, la problema găsirii soluțiilor unei ecuații sub formă normală. Deoarece această cale presupune rezolvarea prealabilă a unei probleme de funcții implicite, ea nu este în general convenabilă în studiul diverselor ecuații particulare cînd există procedee mai simple pentru găsirea soluțiilor.

Dacă ecuaţia (37) poate fi rezolvată în raport cu x, atunci obţinem

$$x = \varphi(y') \tag{38}$$

Să punem $y' = p$ şi să luăm pe p variabilă independentă. Avem

$$\frac{dy}{dx} = y' \quad \text{sau} \quad dy = p\,dx$$

Din ecuaţia (38) avem $x = \varphi(p)$, de unde $dx = \varphi'(p)\,dp$ şi deci

$$dy = p\varphi'(p)\,dp$$

de unde obţinem pe y printr-o cuadratură

$$y = \int p\varphi'(p)\,dp + C$$

şi deci curbele integrale ale ecuaţiei (38) sînt date parametric:

$$x = \varphi(p)$$

$$y = \int p\varphi'(p)\,dp + C$$

Exemplu. Să se integreze ecuaţia $e^{y'} + y' - x = 0$.
Avem $x = e^{y'} + y'$ şi dacă $y' = p$ şi luăm pe p ca variabilă independentă obţinem

$$x = e^p + p$$

$$dy = p\,dx = p(e^p + 1)\,dp$$

de unde

$$y = \int p(e^p + 1)\,dp = e^p(p - 1) + \frac{p^2}{2} + C$$

Dacă ecuaţia (37) nu poate fi rezolvată (prin metode elementare) în funcţie de x şi dacă curba de ecuaţie $F(u, v) = 0$ se poate reprezenta parametric

$$u = \varphi(t); \quad v = \psi(t); \quad t \in I \ \text{(interval)}$$

integrarea ecuaţiei (37) se face printr-o cuadratură. În adevăr, dacă ψ continuă şi φ are derivata continuă pe I, atunci avem

$$\frac{dy}{dx} = y'; \quad dy = y'\,dx; \quad dy = \psi(t)\varphi'(t)\,dt \quad \text{şi deci}$$

$$y = \int \psi(t)\,\varphi'(t)\,dt + C$$

Curbele integrale ale ecuației (37) sînt date parametric:

$$x = \varphi(t)$$

$$y = \int \psi(t)\, \varphi'(t)\, dt + C$$

Exemplu. Să se integreze ecuația $(y')^3 + 3xy' - 2x^3 = 0$. Pentru a obține o reprezentare parametrică a curbei

$$u^3 - 2v^3 + 3uv = 0$$

luăm $u = tv$ și înlocuind în ecuație, avem

$$v = \frac{3t}{1 - 2t^3}; \quad u = \frac{3t^2}{1 - 2t^3}$$

În acest fel

$$x = \frac{3t}{2 - t^3}; \quad dy = \frac{3t^2}{2 - t^3}\, dx$$

Rezultă că

$$dx = \frac{6(1 + t^3)\, dt}{(2 - t^3)^2} \quad \text{și deci } dy = \frac{6(1 + t^3)\, 3t^2}{(2 - t^3)^3}\, dt$$

de unde

$$y = \int \frac{6(1 + t^3)\, 3t^2}{(2 - t^3)^3}\, dt = \frac{3(2t^3 + 1)}{(2 - t^3)^2} + C$$

Curbele integrale ale ecuației considerate sînt date parametric:

$$x = \frac{3t}{2 - t^3}; \quad y = \frac{3(2t^3 + 1)}{(2 - t^3)^2} + C$$

§ 11. ECUAȚII DE FORMA $F(y, y') = 0$ (39)

Dacă se cunoaște o reprezentare parametrică

$$u = \varphi(t); \; v = \psi(t); \; t \in I$$

a curbei de ecuație $F(u, v) = 0$, integrarea ecuației (39) se reduce la o cuadratură. În adevăr, dacă funcțiile φ și ψ sînt continue iar φ are derivată continuă pe I, avem

$$y = \varphi(t), \; y' = \psi(t)$$

$$\text{dar } y' = \frac{dy}{dx} \text{ de unde } dx = \frac{\varphi'(t)}{\psi(t)} dt; \; \psi(t) \neq 0 \text{ pe } I$$

Curbele integrale ale ecuației (39) sînt date parametric

$$x = \int \frac{\varphi'(t)}{\psi(t)}\, dt + C; \; y = \varphi(t)$$

Exemplu. Să se integreze ecuația $y^2(y'^2+1) = a^2y'^2$.
Curba $u^2(v^2+1) - a^2v^2 = 0$, admite reprezentarea parametrică

$$u = a \sin t; \; v = \operatorname{tg} t$$

Avem

$$y = a \sin t; \; y' = \operatorname{tg} t; \text{ deci } dx = \frac{dy}{y'} = \frac{a \cos t}{\operatorname{tg} t} dt = \frac{a \cos^2 t}{\sin t} dt$$

$$x = \int \frac{a \cos^2 t}{\sin t} dt = a \int \frac{1 - \sin^2 t}{\sin t} dt = a \ln \left| \operatorname{tg} \frac{t}{2} \right| + a \cos t + C$$

Prin urmare

$$x = a\left(\ln \left| \operatorname{tg} \frac{t}{2} \right| + \cos t\right) + C; \; y = a \sin t$$

Ecuația admite și soluția $y = 0$, care nu se obține din soluția generală. O astfel de soluție se numește singulară.

În cazul în care ecuația (39) se poate pune sub forma

$$y = \varphi(y')$$

luăm ca parametru pe $p = y'$ și deci $\frac{dy}{dx} = p$; $dx = \frac{dy}{p}$;

$$dx = \frac{\varphi'(p)}{p} dp; \quad x = \int \frac{\varphi'(p)}{p} dp + C$$

Curbele integrale sînt date parametric:

$$x = \int \frac{\varphi'(p)}{p} dp + C, \quad y = \varphi(p)$$

§ 12. ECUAȚII LAGRANGE

Sînt ecuații de forma: $y = x\varphi(y') + \psi(y')$ (40)

în care membrul al doilea este o funcție liniară de x, cu coeficienți funcție de y'. Presupunem că funcțiile φ și ψ admit derivate continue pe un același interval I. Integrarea unei ecuații a lui Lagrange se reduce la integrarea unei ecuații liniare în modul următor:

În (40) înlocuim pe y' cu p; $(y' = p)$

$$y = x\varphi(p) + \psi(p)$$

apoi derivăm în raport cu x și ținem seama că p este funcție de x.

$$\frac{dy}{dx} = \varphi(p) + x\varphi'(p) \frac{dp}{dx} + \psi'(p) \frac{dp}{dx}$$

În această ultimă ecuaţie înlocuim pe $\frac{dy}{dx}$ cu p şi avem

$$p = \varphi(p) + x\varphi'(p)\frac{dp}{dx} + \psi'(p)\frac{dp}{dx} \text{ ; sau}$$

$$\frac{dp}{dx}[x\varphi'(p) + \psi'(p)] + \varphi(p) - p = 0 \tag{41}$$

Dacă considerăm pe p variabilă independentă şi x necunoscută atunci ecuaţia (41) este o ecuaţie liniară de ordinul întîi în x.

$$(\varphi(p) - p)\frac{dx}{dp} + \varphi'(p)x + \psi'(p) = 0 \tag{42}$$

În cazul $\varphi(p) - p \neq 0$, ecuaţia (42) se mai poate pune sub forma

$$\frac{dx}{dp} = -\frac{\varphi'(p)}{\varphi(p) - p}x - \frac{\psi'(p)}{\varphi(p) - p}$$

a cărei soluţie generală o notăm

$$x = g(p, c)$$

Dacă ţinem seama de ecuaţia (40) obţinem soluţia generală a ecuaţiei lui Lagrange sub formă parametrică

$$x = g(p, c) \text{ ; } y = g(p, c)\,\varphi(p) + \psi(p) \tag{43}$$

În cazul în care p_0 este o rădăcină reală a ecuaţiei

$$\varphi(p) = p$$

atunci ecuaţia (41) admite, evident, soluţia $p = p_0$. Dacă înlocuim în (40) pe p prin p_0, obţinem

$$y = \varphi(p_0)x + \psi(p_0) = p_0 x + \psi(p_0)$$

care este soluţie a ecuaţiei (40). Ea nu este conţinută în soluţia generală (43), dată parametric. O astfel de soluţie se numeşte singulară. În legătură cu comportarea curbelor integrale ale ecuaţiei lui Lagrange faţă de dreapta reprezentată de ecuaţia

$$y = p_0 x + \psi(p_0) \tag{44}$$

putem avea două situaţii

a) dacă $\lim\limits_{p \to p_0} |x| = \lim\limits_{p \to p_0} |g(p, c)| = \infty$

atunci dreapta reprezentată de ecuaţia (44) este o direcţie asimptotică a curbelor integrale date parametric de (43).

b) dacă $\lim\limits_{p \to p_0} |x| = \lim\limits_{p \to p_0} |g(p, c)|$

atunci $y = p_0 x + \psi(p_0)$ este o soluţie (singulară) a ecuaţiei (40).

Exemplu. Să se integreze ecuaţia $y = xy'^2 + y'^2$.
Dacă punem $y' = p$ avem $y = xp^2 + p^2$ şi derivînd în raport cu x, obţinem

$$p - p^2 - 2xp\frac{dp}{dx} - 2p\frac{dp}{dx} = 0 \;\text{ sau }\; p\left[(1-p)\frac{dx}{dp} - 2x - 2\right] = 0.$$

Pentru $p = 0$, găsim soluţia $y = 0$. Egalînd cu zero al doilea factor, obţinem

$$\frac{dx}{dp} = -\frac{2x}{p-1} - \frac{2}{p-1}.$$

Integrînd această ecuaţie obţinem:

$$x = \frac{C}{(p-1)^2} - 1.$$

Din ecuaţia dată rezultă imediat y:

$$y = \frac{Cp^2}{(p-1)^2}.$$

Deci soluţia generală a ecuaţiei considerate este dată parametric

$$x = \frac{C}{(p-1)^2} - 1; \quad y = \frac{Cp^2}{(p-1)^2}.$$

În cazul ecuaţiei date avem $\varphi(p) - p = p^2 - p$ care admite soluţiile reale $p = 0$ şi $p = 1$.

Pentru $p = 0$, obţinem soluţia $y = 0$ care este o soluţie singulară, deoarece $x \to C - 1$ pentru $p \to 0$. Pentru $p = 1$ obţinem soluţia $y = x + 1$. În acest caz $x \to \pm\infty$ pentru $p \to 1$.

§ 13. ECUAŢII CLAIRAUT

Sînt de forma $$y = xy' + \psi(y') \tag{35}$$

Presupunem că ψ admite derivată continuă pe un interval I.
După cum se vede o ecuaţie Clairaut este o ecuaţie Lagrange particulară, anume cînd $\varphi(p) = p$. Pentru integrarea ei procedăm la fel ca pentru ecuaţia Lagrange. Înlocuim pe y' cu p:

$$y = xp + \psi(p)$$

apoi derivăm în raport cu x şi ţinem seama că p este funcţie de x:

$$p = p + x\frac{dp}{dx} + \psi'(p)\frac{dp}{dx} \;\text{ sau }\; [x + \psi'(p)]\frac{dp}{dx} = 0$$

Sînt două posibilități:

a) $\dfrac{dp}{dx} = 0$; deci $p = C$ de unde obținem, înlocuind în (45)

$$y = Cx + \psi(C)$$

care este soluția generală a ecuației (45). Deci soluția generală a ecuației Clairaut reprezintă geometric o familie de drepte a cărei ecuație se obține înlocuind în ecuația diferențială (45) pe y' cu C.

b) $x + \psi'(p) = 0$; de unde $x = -\psi'(p)$ și dacă înlocuim în (45) obținem o curbă integrală a ecuației (45) reprezentată parametric:

$$x = -\psi'(p); \; y = -p\psi'(p) + \psi(p)$$

care este înfășurătoarea dreptelor de la punctul a).

Această ultimă soluție este singulară.

Exemplu. Să se integreze $y = xy' + \sqrt{1 + y'^2}$.

Soluția generală este $y = xC + \sqrt{1 + C^2}$. Soluția singulară este dată parametric:

$$x = -\psi'(p) = -\frac{p}{\sqrt{1+p^2}}; \; y = -p\psi'(p) + \psi(p) =$$

$$= -\frac{p^2}{\sqrt{1+p^2}} + \sqrt{1+p^2} = \frac{1}{\sqrt{1+p^2}}$$

de unde $x^2 + y^2 = 1$. Prin urmare, curbele integrale ale ecuației date sînt: cercul cu centrul în origine și de rază 1 și toate tangentele ce se pot duce la el.

§ 14. PROBLEMA TRAIECTORIILOR ÎN PLAN

Definiție. Fie (Γ) și (Γ') două familii de curbe definite într-un domeniu $D \subset \mathbf{R}^2$ astfel încît prin fiecare punct al domeniului D trece cîte o curbă din fiecare familie și numai una. Spunem că familia de curbe (Γ') este izogonală familiei de curbe (Γ) în D, dacă în fiecare punct al domeniului D cele două curbe ale familiilor care trec prin acest punct se taie sub un unghi constant α. În cazul $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$ spunem că familiile de curbe (Γ) și (Γ') sînt ortogonale. Dacă familia de curbe (Γ) este dată, se pune problema să aflăm familia de curbe (Γ') izogonală familiei (Γ). Presupunem că familia de curbe (Γ), depinzînd de parametrul C, este dată de ecuația

$$F(x, y, C) = 0 \tag{46}$$

Ecuația diferențială a familiei de curbe (Γ) se obține eliminînd parametrul C între ecuația (46) și derivata ei în raport cu x:

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0 \tag{47}$$

Rezultatul este o ecuație diferențială de ordinul întîi

$$f(x, y, y') = 0, \quad (x, y) \in D \tag{48}$$

O curbă γ a familiei (Γ) are în punctul curent (x, y) tangenta geometrică de coeficient unghiular y' definit de ecuația diferențială $f(x, y, y') = 0$. Fie (x_1, y_1) punctul curent al curbei γ' izogonală familiei Γ. În acest punct tangenta geometrică la curba γ' are coeficientul unghiular y_1'. Dacă φ este unghiul pe care îl face tangenta la curba γ în punctul M cu semiaxa pozitivă Ox, iar φ' este unghiul pe care îl face tangenta la curba γ' în punctul M cu semiaxa pozitivă, atunci unghiul α al curbelor γ și γ' este $\alpha = \varphi' - \varphi$ și deci

Fig. 98

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{tg} \varphi' - \operatorname{tg} \varphi}{1 + \operatorname{tg} \varphi' \operatorname{tg} \varphi} = \frac{y_1' - y'}{1 + y_1' y'} = k,$$

$$(k = \operatorname{tg} \alpha)$$

de unde rezolvînd în raport cu y' obținem

$$y' = \frac{y_1' - k}{1 + k y_1'}.$$

Dacă înlocuim pe y' în ecuația diferențială a familiei de curbe obținem

$$f\left(x_1, y_1, \frac{y_1' - k}{1 + k y_1'}\right) = 0$$

care este ecuația diferențială a familiei de curbe Γ'. Dacă înlocuim pe x_1 și y_1 prin x și y avem

$$f\left(x, y, \frac{y' - k}{1 + k y'}\right) = 0 \tag{49}$$

În cazul traiectoriilor ortogonale avem $y' y_1' = -1$ și deci ecuația diferențială a familiei de curbe Γ' este

$$f\left(x, y, -\frac{1}{y'}\right) = 0 \tag{50}$$

Exemplu. Să se afle traiectorii izogonale ale familiei de drepte

$$y = Cx; \quad \alpha = \frac{\pi}{4}.$$

În acest caz, $k = \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 1$. Dacă derivăm în raport cu x în ecuația $y - Cx = 0$, obținem $y' = C$. Eliminăm pe C în ecuațiile $y - Cx = 0$; $y' = C$ și obținem ecuația diferențială a familiei de drepte

$$y = y'x$$

Apoi înlocuim pe y' cu $\frac{y'-1}{1+y'}$ și obținem ecuația diferențială a familiei de curbe izogonale:

$$\frac{y}{x} = \frac{y'-1}{1+y'} \quad \text{sau} \quad y' = \frac{x+y}{x-y}.$$

Integrînd această ecuație obținem

$$\sqrt{x^2+y^2} = Ke^{\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}}$$

și deci traiectoriile izogonale sînt spirale logaritmice.

PROBLEME

Să se integreze următoarele ecuații:

1. $3e^x \operatorname{tg} y\,dx + (1-e^x)\sec^2 y\,dy = 0$ $\qquad R$: $y = \operatorname{arc\,tg} C(1-e^x)^3$

2. $\sec^2 x \operatorname{tg} y\,dx + \sec^2 y \operatorname{tg} x\,dy = 0$; $y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4}$ $\qquad R$: $\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y = 1$.

3. $x(1+y^6)\,dx + y^2(1+x^4)\,dy = 0$; $y(0) = 1$

R: $3 \operatorname{arc\,tg} x^2 + 2 \operatorname{arc\,tg} y^3 = \frac{\pi}{2}$.

4. $y' = \sqrt{\frac{1-\cos 2x}{1+\sin y}}$; $y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$; $\qquad R$: $\sqrt{2}\sin x + \sin y - \cos y = 0$

5. $y' = \frac{\cos y - \sin y - 1}{\cos x - \sin x + 1}$; $\qquad R$: $\operatorname{tg}\frac{y}{2} = C\left(1+\operatorname{tg}\frac{y}{2}\right)\left(1-\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)$

6. $y' = \frac{y}{x} + \sin\frac{y}{x}$; $y(1) = \frac{\pi}{2}$ $\qquad R$: $y = 2x \operatorname{arc\,tg} x$

7. $(2x^2 + xy)\,y' = xy + y^2$ $\qquad R$: $y^2 = Cxe^{-\frac{y}{x}}$

8. $y' = 4 + \frac{y}{x} + \left(\frac{y}{x}\right)^2$; $y(1) = 2$; $\qquad R$: $\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{2x} = 2\ln|x| + \frac{\pi}{4}$

9. $(x^4 - 6x^2y^2 + y^4)\,dx - 4xy(x^2 - y^2)\,dy = 0$; $y(1) = 0$

R: $x^5 - 10x^3y^2 + 5xy^4 = 1$

10. $(2x + y + 1)\,dx + (x + 2y - 1)\,dy = 0$

R: $x^2 + y^2 + xy + x - y = C$.

11. $2(x + y)\,dy + (3x + 3y - 1)\,dx = 0$;

R: $3x + 2y - 4 + 2\ln|x + y - 1| = C$

12. $(x + y + 1)\,dx + (x - e^y)\,dy = 0$. $\quad R: e^y - \frac{1}{2}x^2 - xy - x = C$.

13. $(x + \sin y)\,dx + (x\cos y + \sin y)\,dy = 0$.

$$R: \frac{1}{2}x^2 + x\sin y - \cos y = C.$$

14. $(\ln y - 5y^2\sin 5x)\,dx + \left(\frac{x}{y} + 2y\cos 5x\right)dy = 0$, $y(0) = e$.

$$R: x\ln|y| + y^2\cos 5x = e^2.$$

15. $(x\cos y - y\sin y)\,dy + (x\sin y + y\cos y)\,dx = 0$.

Se caută un factor integrant de forma $\mu = \mu(x)$.

$$R: e^x(x\sin y + y\cos y - \sin y) = C.$$

16. $y\,dx - (x + y^2)\,dy = 0$, $\quad (\mu = \mu(y))$. $\quad R: x = y(C + y)$.

17. $xy^2dx + (x^2y - x)\,dy = 0$, $\quad (\mu = \mu(xy))$. $\quad R: xy - \ln|y| = C$.

18. $(2x^3 + 3x^2y + y^2 - y^3)\,dx + (2y^3 + 3xy^2 + x^2 - x^3)\,dy = 0$,

$(\mu = \mu(x + y))$. $\quad R: x^2 - xy + y^2 = C(x + y)$.

19. $y'\cos^2 x + y = \mathrm{tg}\,x$; $y(0) = 0$. $\quad R: y = -1 + \mathrm{tg}\,x + e^{-\mathrm{tg}\,x}$.

20. $(1 + x^2)y' + y = \mathrm{arc\,tg}\,x$. $\quad R: y = \mathrm{arc\,tg}\,x - 1 + Ce^{-\mathrm{arc\,tg}\,x}$.

21. $y' + \frac{2}{x}y = 3x^2y^{\frac{4}{3}}$. $\quad R: y^{-\frac{1}{3}} = Cx^{\frac{2}{3}} - \frac{3}{7}x^3$.

22. $y' - \frac{y}{\sin x} = \cos^2 x\,\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}$; $\quad R: y = \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{4}\sin 2x + C\right)\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}$.

23. $y' + \frac{3x^2}{x^3 + 1}y = y^2(x^3 + 1)\sin x$; $y(0) = 1$. $\quad R: y = \frac{\sec x}{1 + x^3}$.

24. $y' + y^2\sin x = 2\frac{\sin x}{\cos^2 x}$; $y_1 = \frac{1}{\cos x}$; $\quad R: y = \frac{1}{\cos x} + \frac{3\cos^2 x}{3C - \cos^3 x}$.

25. $x^2y' + x^2y^2 - 4xy + 4 = 0$; $y_1 = \frac{1}{x}$; $\quad R: y = \frac{4Cx^3 - 1}{Cx^4 - x}$.

26. $x = y'\sin y' + \cos y'$. $\quad R: \begin{cases} x = p\sin p + \cos p \\ y = (p^2 - 2)\sin p + 2p\cos p + C \end{cases}$

27. $y = y'^2\,\mathrm{tg}\,y'$. $\quad R: \begin{cases} x = p\,\mathrm{tg}\,p - \ln|\cos p| + C \\ y = p^2\,\mathrm{tg}\,p. \end{cases}$

28. $x = e^{2y'}(2y'^2 - 2y' + 1)$ R: $\begin{cases} x = e^{2p}(2p^2 - 2p + 1) \\ y = e^{2p}(2p^3 - 3p^2 + 3p - 1{,}5) + C \end{cases}$

29. $y = y' \ln y'$ R: $\begin{cases} x = \frac{1}{2} \ln^2 p + \ln p + C \\ y = p \ln p \end{cases}$

30. $y = xy' + y'(1 - y')$ R: Soluția generală este $y = Cx + C(1 - C)$ iar soluția singulară $y = p^2$, $x = 2p - 1$

31. $y = xy' + 1 + y'^2$ R: Soluția generală este $y = Cx + 1 + C^2$ iar soluția singulară $x = -2p$; $y = 1 - p^2$

Să se afle traiectoriile izogonale ale următoarelor familii de curbe.

32. $y^2 = 4Cx$; $\alpha = \frac{\pi}{4}$ R: $\ln(y^2 - xy + 2x^2) - \frac{6}{\sqrt{7}} \operatorname{arctg} \frac{2y - x}{\sqrt{7}x} = k$

33. $x^2 = 2C(y - x\sqrt{3})$; $\alpha = \frac{\pi}{3}$ R: $xy - \frac{\sqrt{3}}{2}(x^2 - y^2) = k$

34. $3x^2 + y^2 = Cx$; $\alpha = \frac{\pi}{2}$ R: $y^3 + k(x^2 - y^2) = 0$.

CAPITOLUL XII

TEOREME DE EXISTENȚĂ

§ 1. TEOREMA DE EXISTENȚĂ PENTRU ECUAȚII DIFERENȚIALE DE ORDINUL ÎNTÎI

Considerăm ecuația diferențială

$$y' = f(x, y) \tag{1}$$

unde f este o funcție continuă pe domeniul $D \subset \mathbf{R}^2$. Fie $(x_0, y_0) \in D$. Reamintim că problema lui Cauchy constă în a determina soluția ecuației (1) care satisface condiția

$$y(x_0) = y_0 \tag{2}$$

Fie φ soluția problemei (1) și (2). Avem

$$\varphi'(x) = f(x, \varphi(x)) \tag{1'}$$

$$\varphi(x_0) = y_0 \tag{2'}$$

Condiția ca pentru $x = x_0$ funcția φ să ia valoarea y_0 se numește condiție inițială și este echivalentă cu următorul fapt geometric: graficul soluției $y = \varphi(x)$ trece prin punctul (x_0, y_0). Pentru ecuațiile diferențiale de ordinul întîi de formă particulară considerate pînă acum, problema lui Cauchy admitea soluție.

Acest lucru rezulta, în anumite ipoteze, din chiar modul de construire a soluției. Pentru ecuații de forma generală (1) trebuie să demonstrăm existența soluției problemei lui Cauchy. Condiții suficiente de existență și unicitate a soluției problemei lui Cauchy sînt date în următoarea

Teorema 1.1. Fie dată ecuația diferențială de ordinul întîi

$$y' = f(x, y) \tag{1}$$

Presupunem:

1) funcția f este continuă pe intervalul închis

$$I = [x_0 - a, x_0 + a] \times [y_0 - b, y_0 + b]; \; a > 0; \; b > 0$$

II) funcţia f satisface pe I condiţia lui Lipschitz în raport cu y: există un număr $N > 0$ astfel încît pentru orice două puncte $(x, y_1) \in I$ şi $(x, y_2) \in I$ are loc inegalitatea

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq N |y_1 - y_2|.$$

În aceste condiţii există o soluţie unică

$$\varphi : [x_0 - h, x_0 + h] \to \mathbf{R}$$

a ecuaţiei (1), care satisface condiţia

$$\varphi(x_0) = y_0.$$

Demonstraţie. Funcţia f a fost presupusă continuă pe compactul I şi deci va fi mărginită pe I. Există un număr $M > 0$ astfel încît să avem

$$|f(x, y)| \leq M, \quad \forall (x, y) \in I \tag{3}$$

Pentru h din enunţul teoremei luăm

$$h = \min\left\{a, \frac{b}{M}\right\}.$$

Rezolvarea problemei (1) — (2) este echivalentă cu rezolvarea următoarei ecuaţii integrale

$$y = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y)\, dt, \quad x \in [x_0 - h, x_0 + h] \tag{4}$$

unde y este funcţia necunoscută. Într-adevăr, prin integrare din (1') şi (2') obţinem

$$\varphi(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, \varphi(t))\, dt.$$

Prin urmare, orice soluţie a problemei (1) — (2) este soluţie a ecuaţiei integrale (4). Reciproc, derivînd ambii membri ai ecuaţiei (4), obţinem

$$\varphi'(x) = f(x, \varphi(x))$$

şi observînd că $\varphi(x_0) = y_0$ deducem că orice soluţie continuă a ecuaţiei integrale (4) este soluţie a problemei (1) — (2). Pentru aflarea soluţiei φ a ecuaţiei (4) vom folosi metoda aproximaţiilor succesive. Această metodă constă în a construi un şir de funcţii

$$y_0,\ y_1(x),\ y_2(x),\ \ldots,\ y_n(x),\ \ldots,\quad x \in [x_0 - h, x_0 + h]$$

şir uniform convergent pe intervalul $[x_0 - h, x_0 + h]$, către o funcţie $\varphi(x)$, funcţie care îndeplineşte condiţiile din enunţul teoremei. Primul termen al şirului îl luăm egal cu y_0 şi se numeşte aproximaţia de ordinul zero. Al doilea termen al şirului, numit şi aproximaţia de ordinul întîi, îl definim prin egalitatea

$$y_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_0)\, dt \tag{5}$$

Al treilea termen al şirului, numit şi aproximaţia de ordinul doi, îl definim prin egalitatea

$$y_2(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_1(t))\,dt$$

În general definim $y_n(x)$, aproximaţia de ordinul n, prin egalitatea

$$y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_{n-1}(t))\,dt \qquad (6)$$

Am construit în acest fel un şir de funcţii

$$y_0,\ y_1,\ y_2, \ldots, y_n, \ldots \qquad (7)$$

Pentru a demonstra existenţa soluţiei φ a ecuaţiei (1) parcurgem trei etape.

1) Demonstrăm că funcţiile şirului (7) sînt definite şi continue pe intervalul $[x_0 - h, x_0 + h]$ şi au graficele conţinute în I. Pentru aceasta folosim metoda inducţiei matematice. Pentru $n = 1$, din formula (4) rezultă că funcţia y_1 este definită şi continuă pe intervalul $[x_0 - h, x_0 + h]$ deoarece funcţia $f(x, y_0)$ este definită şi continuă pe acest interval. Pentru a arăta că funcţia y_1 are graficul conţinut în I trebuie dovedit că

$$|y_1(x) - y_0| \leq b$$

Avem, ţinînd cont de inegalitatea (5),

$$|y_1(x) - y_0| \leq \left|\int_{x_0}^{x} f(t, y_0)\,dt\right| \leq \left|\int_{x_0}^{x} |f(t, y_0)|\,dt\right| \leq M|x - x_0| \qquad (8)$$

Din modul cum a fost ales h deducem

$$|y_1(x) - y_0| \leq b$$

Deci funcţia y_1 este definită şi continuă pe intervalul $[x_0 - h, x_0 + h]$ şi are graficul conţinut în D (fig. 99).

Presupunem că funcţia y_{n-1} este definită şi continuă pe intervalul $[x_0 - h, x_0 + h]$ şi are graficul conţinut în I şi să arătăm că funcţia y_n are aceleaşi proprietăţi.

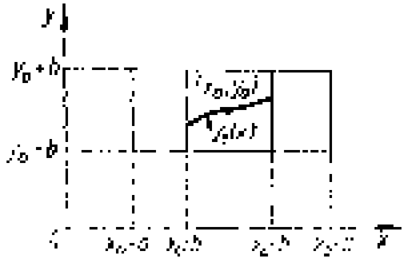

Fig. 99.

Pentru aceasta folosim formula (6). Funcţia y_{n-1} a fost presupusă definită şi continuă pe intervalul $[x_0 - h, x_0 + h]$, cu graficul conţinut în I, deci şi funcţia $f(x, y_{n-1}(x))$ va fi continuă pe intervalul $[x_0 - h, x_0 + h]$ deoarece este o compunere de funcţii continue. Din formula (6) rezultă că funcţia y_n este definită şi continuă pe intervalul $[x_0 - h, x_0 + h]$. Din inegalitatea

$$|y_n(x) - y_0| \leq \left|\int_{x_0}^{x} |f(x, y_{n-1}(x))|\, dx\right| \leq M|x_0 - x| \leq Mh \leq b \qquad (8')$$

deducem că funcţia y_n are graficul conţinut în I.

2) Demonstrăm că şirul de funcţii (7) este uniform convergent pe intervalul $[x_0 - h, x_0 + h]$ către o funcţie φ, continuă şi ea pe acelaşi interval.

Dar convergenţa uniformă a şirului de funcţii (7) este echivalentă cu convergenţa uniformă a următoarei serii de funcţii:

$$y_0 + (y_1 - y_0) + (y_2 - y_1) + \ldots + (y_n - y_{n-1}) + \ldots \qquad (9)$$

deoarece şirul sumelor parţiale ale seriei (9) coincide cu şirul (7). Pentru a arăta că seria de funcţii (9) converge uniform pe intervalul $[x_0 - h, x_0 + h]$ este suficient să arătăm că ea este majorată de o serie numerică de termeni pozitivi şi convergentă. Pentru cel de-al doilea termen al seriei (9) avem, folosind inegalitatea (8),

$$|y_1(x) - y_0| \leq M|x - x_0|, \quad x \in [x_0 - h, x_0 + h].$$

Pentru cel de-al treilea termen al seriei (9) avem

$$|y_2(x) - y_1(x)| \leq \left|\int_{x_0}^{x} [f(x, y_1(x)) - f(x, y_0)]\, dx\right| \leq$$

$$\leq \left|\int_{x_0}^{x} |f(x, y_1(x)) - f(x, y_0)|\, dx\right|$$

şi dacă folosim condiţia lui Lipschitz şi (8), obţinem

$$|y_2(x) - y_1(x)| \leq N\left|\int_{x_0}^{x} |y_1(x) - y_0|\, dx\right| \leq M \cdot N \left|\int_{x_0}^{x} |x - x_0|\, dx\right| =$$

$$= MN\frac{|x - x_0|^2}{2}, \quad (\forall)\ x \in [x_0 - h, x_0 + h].$$

În general, presupunem că are loc inegalitatea

$$|y_n(x) - y_{n-1}(x)| \leq MN^{n-1}\frac{|x - x_0|^n}{n!}; \quad x \in [x_0 - h, x_0 + h] \qquad (10)$$

şi să arătăm că

$$|y_{n+1}(x) - y_n(x)| \leq MN^n \frac{|x - x_0|^{n+1}}{(n + 1)!}; \quad x \in [x_0 - h, x_0 + h]$$

Folosind condiția lui Lipschitz și inegalitatea (10) obținem

$$|y_{n+1}(x) - y_n(x)| \leqslant N \left| \int_{x_0}^{x} |y_n(t) - y_{n-1}(t)|\, dt \right| \leqslant$$

$$\leqslant MN^n \left| \int_{x_0}^{x} \frac{|t - x_0|^n}{n!}\, dt \right| = MN^n \frac{|x - x_0|^{n+1}}{(n+1)!}; \quad x \in [x_0 - h, x_0 + h]$$

Deci inegalitatea (10) este adevărată pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Deoarece $|x - x_0| \leqslant h$, din inegalitatea (10) obținem

$$|y_n(x) - y_{n-1}(x)| \leqslant MN^{n-1} \cdot \frac{h^n}{n!}; \quad (\forall)\ x \in [x_0 - h, x_0 + h]$$

Am arătat că seria de funcții (9) este majorată de o serie numerică având termenul general u_n dat de egalitatea

$$u_n = MN^{n-1} \cdot \frac{h^n}{n!} > 0 \tag{11}$$

Seria de termen general u_n este convergentă. În adevăr, dacă aplicăm criteriul raportului obținem

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{MN^n h^{n+1} n!}{MN^{n-1} h^n (n+1)!} = \frac{Nh}{n+1} \to 0 \quad \text{pentru } n \to \infty$$

Criteriul lui Weierstrass ne garantează convergența uniformă a seriei (9), de unde rezultă convergența uniformă a șirului (6), pe intervalul $[x_0 - h, x_0 + h]$.

Notăm cu φ funcția limită a șirului (6):

$$\varphi(x) = \lim_{n \to \infty} y_n(x); \ x \in [x_0 - h, x_0 + h]$$

Folosind un rezultat stabilit la șirurile de funcții, deducem că funcția limită φ este continuă pe intervalul $[x_0 - h, x_0 + h]$.

3) Demonstrăm că funcția limită φ are graficul conținut în I și că este soluție a ecuației integrale (4). Prima afirmație rezultă imediat dacă trecem la limită în inegalitatea (8'):

$$|\varphi(x) - y_0| \leqslant b$$

Arătăm acum că funcția φ verifică ecuația (4). Pentru aceasta trebuie să dovedim că

$$\lim_{n \to \infty} \int_{x_0}^{x} f(x, y_n(x))\, dx = \int_{x_0}^{x} f(x, \varphi(x))\, dx; \ x \in [x_0 - h, x_0 + h] \tag{12}$$

În adevăr, folosind condiția lui Lipschitz, avem

$$\left|\int_{x_0}^{x} f(t, y_n(t))\,dt - \int_{x_0}^{x} f(t, \varphi(t))\,dt\right| \le$$

$$\le \left|\int_{x_0}^{x} |f(t, y_n(t)) - f(t, \varphi(t))|\,dt\right| \le N \left|\int_{x_0}^{x} |y_n(t) - \varphi(t)|\,dt\right|.$$

Dar șirul de funcții (7) converge uniform pe intervalul $[x_0 - h, x_0 + h]$ către funcția φ și deci,

$$(\forall)\ \varepsilon > 0,\ \exists\ N(\varepsilon) \text{ astfel încît } (\forall)\ n > N(\varepsilon) \text{ avem}$$

$$|y_n(x) - \varphi(x)| < \varepsilon;\ (\forall)\ x \in [x_0 - h, x_0 + h].$$

Dacă în inegalitatea precedentă considerăm $n > N(\varepsilon)$, avem

$$\left|\int_{x_0}^{x} f(t, y_n(t))\,dt - \int_{x_0}^{x} f(t, \varphi(t))\,dt\right| < N\varepsilon|x - x_0| \le Nh\varepsilon.$$

Această ultimă inegalitate ne arată că formula (12) este adevărată. Trecînd la limită în (6), obținem

$$\varphi(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, \varphi(t))\,dt;\ x \in [x_0 - h, x_0 + h]$$

adică funcția φ verifică ecuația integrală (4).

În acest mod, existența soluției s-a fost dovedită. Rămîne să mai demonstrăm că această soluție este unică. Presupunem că ecuația (4) admite și soluția ψ, adică

$$\psi(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, \psi(t))\,dt;\ x \in [x_0 - h, x_0 + h] \qquad (13)$$

Din (13) avem

$$|\psi(x) - y_0| \le \left|\int_{x_0}^{x} |f(t, \psi(t))|\,dt\right| \le M|x - x_0|;\ x \in [x_0 - h, x_0 + h].$$

Folosind condiția lui Lipschitz și formula (6), obținem

$$|y_1(x) - \psi(x)| \le \left|\int_{x_0}^{x} |f(t, y_0) - f(t, \psi(t))|\,dt\right| \le$$

$$\le N \left|\int_{x_0}^{x} |y_0 - \psi(t)|\,dt\right| \le NM \frac{|x - x_0|^2}{2!}.$$

Arătăm prin inducție că are loc inegalitatea

$$|y_n(x) - \psi(x)| \le MN^n \frac{|x - x_0|^{n+1}}{(n+1)!};\ (\forall)\ n \in \mathbb{N} \text{ și}$$

$$(\forall)\ x \in [x_0 - h, x_0 + h] \qquad (14)$$

Pentru $n = 1$ inegalitatea a fost dovedită mai sus.
Presupunem inegalitatea (14) adevărată pentru n şi să arătăm că este adevărată şi pentru $n + 1$. Procedând ca mai înainte, avem

$$|y_{n+2}(x) - y_{n+1}(x)| \le \left|\int_{x_0}^{x} |f(t, y_{n+1}(t)) - f(t, y_n(t))|\, dt\right| \le$$

$$\le N \left|\int_{x_0}^{x} |y_{n+1}(t) - y_n(t)|\, dt\right| \le \frac{MN^{n+1}}{(n+1)!} \left|\int_{x_0}^{x} |t - x_0|^{n+1}\, dt\right| =$$

$$= \frac{MN^{n+1}}{(n+2)!} |x - x_0|^{n+2}, \quad x \in [x_0 - h, x_0 + h]$$

deci inegalitatea (14) este adevărată, de unde deducem

$$|y_n(x) - \varphi(x)| \le M \sum_{k=n}^{\infty} N^{k} \frac{h^{k+1}}{(k+1)!}, \quad x \in [x_0 - h, x_0 + h] \tag{15}$$

Am dovedit că seria de termeni generali u_n este convergentă şi deci $\lim\limits_{n \to \infty} u_n = 0$. Cu această ultimă observaţie, dacă trecem la limită în inegalitatea (15) avem

$$\lim_{n \to \infty} |y_n(x) - \varphi(x)| = 0, \quad x \in [x_0 - h, x_0 + h], \text{ adică}$$

$$y(x) = \varphi(x) = \lim_{n \to \infty} y_n(x).$$

Funcţia φ satisface toate condiţiile din enunţul teoremei.

Observaţie. Dacă funcţia f este derivabilă în raport cu $y \in I$ şi dacă f'_y este continuă pe I, atunci f satisface condiţia lui Lipschitz pe I, în raport cu y.

În adevăr, dacă f'_y este continuă pe intervalul compact

$$I = [x_0 - a, x_0 + a] \times [y_0 - b, y_0 + b],$$

din proprietăţile funcţiilor continue pe un compact deducem:

$$\sup |f'_y(x, y)| \le N, \quad (x, y) \in I.$$

Pentru orice două puncte $(x, y_1) \in I$ şi $(x, y_2) \in I$, aplicăm formula de medie a lui Lagrange şi avem

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| = |(y_1 - y_2) f'_y(x, y_1 + \theta(y_2 - y_1))|, \quad 0 < \theta < 1$$

şi deci

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \le N |y_1 - y_2|.$$

Excepţie.

Pentru o ecuaţie diferenţială de forma

$$y' = f(x, y), \quad (x, y) \in D$$

care nu intră în nici unul din tipurile prezentate mai înainte putem folosi metoda aproximaţiilor succesive pentru integrarea sa aproximativă. Dăm în acest sens un exemplu. Să se determine soluția ecuației Riccati pentru care nu cunoaștem o soluție particulară,

$$y' = x^2 + y^2; \ y(0) = 0; \ (x, y) \in [-1, 1] \times [-1, 1]$$

În acest caz funcția $f(x, y) = x^2 + y^2$ satisface toate condițiile din teorema de existență cu $M = 2$, deci

$$h = \min\left(a, \frac{b}{M}\right) = \frac{1}{2} \quad \text{atunci } x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$$

Aproximația de ordinul zero este $y_0 = 0$. Aproximația de ordinul întîi este

$$y_1(x) = y_0 + \int_0^x f(x, y_0)\,dx = \int_0^x x^2\,dx = \frac{x^3}{3}$$

Aproximația de ordinul doi este

$$y_2(x) = y_0 + \int_0^x f(x, y_1)\,dx = \int_0^x \left(x^2 + \frac{x^6}{9}\right)dx = \frac{x^3}{3} + \frac{x^7}{7 \cdot 9}$$

Aproximația de ordinul trei este

$$y_3(x) = y_0 + \int_0^x f(x, y_2)\,dx = \int_0^x \left[x^2 + \left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^7}{7 \cdot 9}\right)^2\right]dx =$$

$$= \int_0^x \left(x^2 + \frac{x^6}{3^2} + 2\,\frac{x^{10}}{3 \cdot 7 \cdot 9} + \frac{x^{14}}{(7 \cdot 9)^2}\right)dx$$

$$= \frac{x^3}{3} + \frac{x^7}{7 \cdot 9} + 2\,\frac{x^{11}}{3 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11} + \frac{x^{15}}{(7 \cdot 9)^2 \cdot 15}$$

Procedeul continuă în funcție de problema care a condus la ecuația diferențială considerată.

§2. SOLUȚIA GENERALĂ A UNEI ECUAȚII DIFERENȚIALE

Teorema de existență pe care am demonstrat-o are un caracter local. Existența și unicitatea soluției φ este dovedită pe un interval $[x_0 - h, x_0 + h]$, care conține punctul x_0. Se pune în mod firesc problema prelungirii acestei soluții pe un interval cît mai mare. Pentru a preciza mai bine despre ce este vorba, dăm următoarea

Definiție 7.2. Fie $\varphi: I_1 \to \mathbf{R}$ și $\psi: I_2 \to \mathbf{R}$ două soluții ale ecuației diferențiale

$$y' = f(x, y), \quad (x, y) \in D; \ D \text{ domeniu din } \mathbf{R}^2 \tag{1}$$

Spunem că soluția ψ prelungește soluția φ și se scrie $\varphi \subset \psi$ dacă $I_1 \subset I_2$ și dacă restricția lui ψ la I_1 coincide cu φ. Presupunem că f este local lipschitziană pe domeniul D, adică pentru orice punct $(x_0, y_0) \in D$ și orice vecinătate compactă V a lui (x_0, y_0) conținută în D, funcția f satisface condiția lui Lipschitz pe V. În aceste condiții soluția $\varphi : [x_0 - h, x_0 + h] \to \mathbf{R}$ admite

Fig. 108

o prelungire. În adevăr fie $x_1 = x_0 + h$ și $y_1 = \varphi(x_0 + h)$. Din condiția că D este un domeniu, rezultă că putem găsi o vecinătate compactă V a punctului (x_1, y_1) cu $V \subset D$. Este evident că V poate fi aleasă un interval bidimensional

$$I_1 = [x_1 - a_1, x_1 + a_1] \times [y_1 - b_1, y_1 + b_1].$$

Există un număr $M_1 > 0$ astfel încît

$$|f(x, y)| \leqslant M_1, \quad (\forall)\ (x, y) \in I_1$$

și în plus, funcția f satisface condiția lui Lipschitz pe I_1. Vom lua ca date inițiale pe x_1 și y_1. Pe baza teoremei de existență putem afirma că soluția φ_1 a ecuației diferențiale (1) există și este unică pe intervalul $[x_1 - h_1, x_1 + h_1]$;

$$h_1 = \min\left(a_1, \frac{b_1}{M_1}\right).$$

Din modul cum a fost construit intervalul $[x_1 - h_1, x_1 + h_1]$ mijlocul său coincide cu extremitatea dreaptă a intervalului $[x_0 - h, x_0 + h]$. În punctul $x_0 + h$ soluțiile φ și φ_1 iau aceeași valoare y_1. Pe baza unicității, soluțiile φ și φ_1 coincid pe intervalul $[x_1 - h_1, x_0 + h]$. Este evident că funcția ψ definită prin

$$\psi(x) = \begin{cases} \varphi(x) & \text{dacă } x \in [x_0 - h, x_0 + h] \\ \varphi_1(x) & \text{dacă } x \in [x_0 + h, x_1 + h_1] \end{cases}$$

este soluție a ecuației (1) și în plus $\varphi \prec \psi$, adică ψ prelungește pe φ.

Definiția 2.2. O soluție φ a ecuației (1) se numește maximală dacă din $\varphi \prec \psi$ rezultă $\varphi = \psi$.

Pentru soluția maximală care în punctul x_0 ia valoarea y_0 folosim notația

$$y(x) = \varphi(x, x_0, y_0).$$

Definiția 3.2. Fie dată ecuația diferențială

$$y' = f(x, y),\ (x, y) \in D,\ D \text{ domeniu din } \mathbf{R}^2 \tag{1}$$

și presupunem funcția f continuă și local lipschitziană pe D. Prin soluția generală a ecuației diferențiale (1) înțelegem familia tuturor soluțiilor maximale

$$y(x) = \varphi(x, x_0, y_0),\ (x_0, y_0) \in D$$

Cum fiecărui punct $(x_0, y_0) \in D$ îi corespunde o singură soluție

$$y = \varphi(x, x_0, y_0)$$

dacă luăm pe y_0 ca parametru (pe x_0 îl fixăm), obținem soluția generală sub forma

$$y = \varphi(x, C).$$

Observație. O ecuație diferențială de forma

$$F(x, y, y') = 0$$

poate să aibă mai multe soluții generale. De exemplu ecuația

$$y'^2 = f(x)$$

unde f continuă și $f \geq 0$ pe I, are două soluții generale

$$y = \int_{x_0}^{x} \sqrt{f(x)}\, dx + C_1 \quad \text{și} \quad y = -\int_{x_0}^{x} \sqrt{f(x)}\, dx + C_2$$

§ 3. TEOREMA DE EXISTENȚĂ PENTRU SISTEME DE ECUAȚII DIFERENȚIALE DE ORDINUL ÎNTÎI

Un sistem de ecuații diferențiale de ordinul întîi, sub formă normală, se scrie astfel

$$\begin{aligned} y_1' &= f_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \\ y_2' &= f_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \\ &\vdots \\ y_n' &= f_n(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \end{aligned} \tag{16}$$

unde variabila independentă este x iar funcțiile necunoscute sînt

$$y_1, y_2, \ldots, y_n$$

Funcțiile reale $f_1, f_2, \ldots, f_n$ de argumente $x, y_1, \ldots, y_n$ sînt definite și continue pe un domeniu $D \subset \mathbf{R}^{n+1}$.
Spunem că funcțiile reale

$$y_1 = \varphi_1(x),\ y_2 = \varphi_2(x), \ldots, y_n = \varphi_n(x) \tag{17}$$

definite pe un același interval I, este o soluție a sistemului (16) dacă

a) funcțiile $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ sînt derivabile pe I.

b) $\{(x, \varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x));\ x \in I\} \subset D$

c) $\varphi_i'(x) = f_i(x, \varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x))$;

$$i = 1, 2, \ldots, n;\ (\forall)\ x \in I$$

În sistemul de axe $Ox, Oy_1, Oy_2, \ldots, Oy_n$, curba reprezentată de ecuațiile (17) se numește *curbă integrală* a sistemului (16).

Observație. Pot fi considerate sisteme de ecuații diferențiale sub formă normală în care să intervină derivatele de ordin superior ale funcțiilor necunoscute $y_1, \ldots, y_n$. Prin introducerea de noi funcții necunoscute un asemenea sistem se poate reduce la un sistem de ordinul întîi. Vom arăta aceasta pe un caz particular. Fie sistemul

$$\begin{aligned} y'' &= f_1(x, y, z, y', z') \\ z'' &= f_2(x, y, z, y', z') \end{aligned} \tag{18}$$

Dacă notăm $y = y_1$; $y' = y_2$; $z = y_3$; $z' = y_4$ observăm că funcțiile y_1, y_2, y_3, y_4 verifică sistemul

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2 \\ y_2' &= f_1(x, y_1, y_3, y_2, y_4) \\ y_3' &= y_4 \\ y_4' &= f_2(x, y_1, y_3, y_2, y_4) \end{aligned} \tag{19}$$

Invers dacă y_1, y_2, y_3, y_4 este o soluție a sistemului (19), atunci dacă notăm

$$y_1 = y \text{ şi } y_3 = z$$

se vede că funcțiile y şi z sînt de două ori derivabile şi că ele verifică sistemul (18).

Fie dat sistemul de ecuații diferențiale (16). *Problema lui Cauchy* este următoarea:

Să se determine soluția sistemului (16) care să satisfacă la condițiile

$$y_1(x_0) = y_{10},\ y_2(x_0) = y_{20}, \ldots, y_n(x_0) = y_{n0} \tag{20}$$

unde $x_0, y_{10}, y_{20}, \ldots, y_{n0}$ sînt numere date. Condițiile (20) se numesc condiții inițiale sau condițiile lui Cauchy.

Teorema 5.3. Fie dat sistemul de ecuații diferențiale de ordinul întîi

$$\begin{aligned} y_1' &= f_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \\ y_2' &= f_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \\ &\vdots \\ y_n' &= f_n(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \end{aligned} \tag{16}$$

Presupunem că:

1) funcțiile f_i ($i = 1, 2, \ldots, n$) continue pe intervalul închis

$$I = [x_0 - a, x_0 + a] \times [y_{10} - b_1, y_{10} + b_1] \times \ldots \times [y_{n0} - b_n, y_{n0} + b_n];$$

$$a > 0,\ b_i > 0;$$

II) funcțiile $f_i (i = 1, 2, \ldots, n)$ satisfac pe I condiția lui Lipschitz în raport cu $y_1, y_2, \ldots, y_n$: există n numere pozitive $N_1, N_2, \ldots, N_n$ astfel încît pentru orice două puncte

$$(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \in I \text{ și } (x, Y_1, Y_2, \ldots, Y_n) \in I$$

are loc inegalitatea

$$|f_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) - f_i(x, Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)| \leqslant$$
$$\leqslant N_1 |y_1 - Y_1| + N_2 |y_2 - Y_2| + \ldots + N_n |y_n - Y_n|$$

pentru $i = 1, 2, \ldots, n$. În aceste condiții există o soluție unică

$$(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n) : \varphi_i : [x_0 - h, x_0 + h] \to \mathbf{R},$$

$i = 1, \ldots, n$, a sistemului (16) care satisface condițiile:

$$\varphi_1(x_0) = y_{10}, \varphi_2(x_0) = y_{20}, \ldots, \varphi_n(x_0) = y_{n0} \tag{20}$$

Existența soluției sistemului (16), care verifică condiția (20), se face tot prin metoda aproximărilor succesive. Funcțiile $f_i (i = 1, \ldots, n)$ fiind continue pe intervalul compact I, sînt mărginite, $|f_i| \leqslant M_i$ astfel încît $|f_i(x, y_1, \ldots, y_n)| \leqslant M_i$ $(\forall)$ $(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \in I$.

Pentru h din enunțul teoremei luăm

$$h = \min\left(a, \frac{b_1}{M_1}, \frac{b_2}{M_2}, \ldots, \frac{b_n}{M_n}\right).$$

Rezolvarea problemei (16) + (20) este echivalentă cu rezolvarea următorului sistem de ecuații integrale

$$\begin{aligned} y_1(x) &= y_{10} + \int_{x_0}^{x} f_1(t, y_1(t), \ldots, y_n(t))\,dt \\ y_2(x) &= y_{20} + \int_{x_0}^{x} f_2(t, y_1(t), \ldots, y_n(t))\,dt \quad x \in [x_0 - h, x_0 + h] \\ &\vdots \\ y_n(x) &= y_{n0} + \int_{x_0}^{x} f_n(t, y_1(t), \ldots, y_n(t))\,dt \end{aligned} \tag{21}$$

Se iau ca aproximații de ordinul zero, numerele $y_{10}, y_{20}, \ldots, y_{n0}$. Aproximațiile de ordinul întîi le definim prin egalitățile

$$\begin{aligned} y_{11}(x) &= y_{10} + \int_{x_0}^{x} f_1(t, y_{10}, y_{20}, \ldots, y_{n0})\,dt \\ y_{21}(x) &= y_{20} + \int_{x_0}^{x} f_2(t, y_{10}, y_{20}, \ldots, y_{n0})\,dt \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_{n1}(x) &= y_{n0} + \int_{x_0}^{x} f_n(t, y_{10}, y_{20}, \ldots, y_{n0})\,dt \end{aligned} \tag{22}$$

Funcţiile $y_{11}, \ldots, y_{n1}$ sînt continue pe intervalul $[x_0 - h, x_0 + h]$ şi se demonstrează că punctul $(x, y_{11}(x), \ldots, y_{n1}(x))$ aparţine lui I. In general, aproximaţiile de ordinul k se definesc prin egalităţile

$$
\begin{aligned}
y_{1k}(x) &= y_{10} + \int_{x_0}^{x} f_1(x, y_{1,k-1}(x), \ldots, y_{n,k-1}(x))\,dx \\
y_{2k}(x) &= y_{20} + \int_{x_0}^{x} f_2(x, y_{1,k-1}(x), \ldots, y_{n,k-1}(x))\,dx \qquad (23) \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
y_{nk}(x) &= y_{n0} + \int_{x_0}^{x} f_n(x, y_{1,k-1}(x), \ldots, y_{n,k-1}(x))\,dx
\end{aligned}
$$

Funcţiile $y_{1k}, y_{2k}, \ldots, y_{nk}$ sînt continue pe $[x_0 - h, x_0 + h]$, iar punctul $(x, y_{1k}(x), y_{2k}(x), \ldots, y_{nk}(x))$ aparţine lui I.

În acest mod se obţin şirurile de funcţii

$$(y_{1k}(x));\ (y_{2k}(x));\ \ldots;\ (y_{nk}(x))$$

Se demonstrează că în teorema de existenţă pentru ecuaţii diferenţiale de ordinul întîi, că aceste şiruri sînt uniform convergente pe intervalul $[x_0 - h, x_0 + h]$ şi dacă punem

$$\varphi_1(x) = \lim_{k \to \infty} y_{1k}(x), \ldots, \varphi_n(x) = \lim_{k \to \infty} y_{nk}(x)$$

funcţiile $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ formează o soluţie a sistemului (21) şi deci a problemei (16) + (20). Soluţia obţinută este unică.

Definiţie. Fie $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n) : I_1 \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}^n$;

$$\psi = (\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n) : I_2 \subset \mathbf{R} \to \mathbf{R}^n$$

două soluţii ale sistemului (16). Spunem că soluţia ψ prelungeşte soluţia φ şi se scrie $\varphi \prec \psi$, dacă $I_1 \subset I_2$ şi dacă restricţia lui ψ la I_1 coincide cu φ.

O soluţie φ a sistemului (16) se numeşte maximală dacă din $\varphi \prec \psi$ rezultă $\varphi = \psi$.

Pentru soluţia maximală care în punctul x_0 ia valoarea

$$(y_{10}, y_{20}, \ldots, y_{n0})$$

folosim notaţia

$$
\begin{aligned}
y_1 &= \varphi_1(x, x_0, y_{10}, y_{20}, \ldots, y_{n0}) \\
y_2 &= \varphi_2(x, x_0, y_{10}, y_{20}, \ldots, y_{n0}) \qquad (24) \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
y_n &= \varphi_n(x, x_0, y_{10}, y_{20}, \ldots, y_{n0})
\end{aligned}
$$

Definiţia 1.3. Fie dat sistemul de ecuaţii diferenţiale (16) unde funcţiile $f_i (i = 1, \ldots, n)$ sînt continue şi local lipschitziene pe domeniul $D \subset \mathbf{R}^{n+1}$. Prin soluţia generală a sistemului (16) înţelegem familia tuturor soluţiilor maximale (24).

Cum fiecărui punct $(x_0, y_{10}, \ldots, y_{n0}) \in D$ îi corespunde o singură soluţie de forma (24), dacă luăm pe $y_{10}, y_{20}, \ldots, y_{n0}$ ca parametri, obţinem soluţia generală sub forma

$$\begin{aligned} y_1 &= g_1(x, C_1, C_2, \ldots, C_n) \\ y_2 &= g_2(x, C_1, C_2, \ldots, C_n) \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_n &= g_n(x, C_1, C_2, \ldots, C_n) \end{aligned} \tag{25}$$

§ 4. TEOREMA DE EXISTENŢĂ PENTRU ECUAŢII DIFERENŢIALE DE ORDINUL n

Fie dată o ecuaţie diferenţială de ordinul n de forma

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) \tag{26}$$

Prin introducerea de noi funcţii necunoscute, o ecuaţie de forma (26) se poate reduce la un sistem de n ecuaţii diferenţiale de ordinul întîi. Într-adevăr, dacă notăm

$$y_1 = y,\ y_2 = y', \ldots, y_n = y^{(n-1)}$$

şi ţinem seama de ecuaţia (26), obţinem sistemul

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2 \\ y_2' &= y_3 \\ &\vdots \\ y_{n-1}' &= y_n \\ y_n' &= f(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \end{aligned} \tag{27}$$

Din modul cum a fost obţinut sistemul (27) se vede imediat că dacă y este o soluţie a ecuaţiei (26), atunci $y_1, y_2, \ldots, y_n$ este o soluţie a sistemului (27) şi reciproc dacă $y_1, y_2, \ldots, y_n$ este o soluţie a sistemului (27) atunci y_1 este o soluţie a ecuaţiei (26). Rezultă de aici că studiul ecuaţiilor diferenţiale de ordinul n se reduce la studiul sistemelor de ecuaţii diferenţiale de ordinul întîi. Dacă ţinem seama de acest ultim rezultat putem enunţa următoarea

Teorema 1.4. Fie dată ecuaţia diferenţială de ordinul n

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) \tag{28}$$

Presupunem:

1) funcţia f continuă pe intervalul închis

$$I = \{(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) \mid |x - x_0| \leq h, \; |y - y_0| \leq b_0, \; |y' - y_0'| \leq b_1, \ldots,$$
$$|y^{(n-1)} - y_0^{(n-1)}| \leq b_{n-1}\};$$

2) funcţia f satisface pe I condiţia lui Lipschitz în raport cu $y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}$: există n numere pozitive $N_0, N_1, N_2, \ldots, N_{n-1}$ astfel încît pentru orice două puncte

$$(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) \in I \text{ şi } (x, Y, Y', \ldots, Y^{(n-1)}) \in I$$

are loc inegalitatea

$$|f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) - f(x, Y, Y', \ldots, Y^{(n-1)})| \leq$$
$$\leq N_0 |y - Y| + N_1 |y' - Y'| + \ldots + N_{n-1} |y^{(n-1)} - Y^{(n-1)}|.$$

În aceste condiţii există o soluţie unică

$$y : (x_0 - h, x_0 + h) \to \mathbf{R}$$

a ecuaţiei (26) care satisface condiţiile

$$y(x_0) = y_0, \; y'(x_0) = y_0', \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}.$$

Din această teoremă rezultă că soluţia generală a ecuaţiei (26) poate fi pusă sub forma

$$y = g(x, C_1, C_2, \ldots, C_n).$$

§ 5. METODA RUNGE-KUTTA

Este una din metodele cel mai des folosite pentru integrarea numerică a ecuaţiilor diferenţiale.

Fie dată ecuaţia diferenţială de ordinul întîi

$$y' = f(x, y) \tag{1}$$

unde $f : I \to \mathbf{R}$, $I = \{(x, y) \mid |x - x_0| \leq h, \; |y - y_0| \leq b\}$ şi presupunem că funcţia f are derivate parţiale de ordinul patru continue pe I. Condiţiile din teorema de existenţă şi unicitate pentru ecuaţiile diferenţiale de ordinul întîi sînt în acest caz îndeplinite şi deci ecuaţia (1) are o soluţie unică care satisface condiţia

$$y(x_0) = y_0 \tag{2}$$

Această soluţie este definită pe un interval de forma $(x_0 - h, x_0 + h)$. Din formula lui Taylor, pentru $x \in (x_0 - h, x_0 + h)$, avem

$$y(x) = y(x_0) + \frac{x - x_0}{1!} y'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2!} y''(x_0) + \frac{(x - x_0)^3}{3!} y'''(x_0) +$$
$$+ \frac{(x - x_0)^4}{4!} y^{(4)}(x_0 + \theta(x - x_0)), \; \theta \in (0, 1) \tag{29}$$

Dacă ţinem seama că $y(x)$ este soluţie a ecuaţiei (1) atunci coeficienţii $y(x_0)$, $y'(x_0)$, $y''(x_0)$ din formula (29) se calculează cu ajutorul funcţiei f. Avem

$$y' = f, \quad y'' = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y', \quad y''' = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} y' +$$

$$+ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} y'^2 + \frac{\partial f}{\partial y} y''$$

$$y^{IV} = \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} y' + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} y'^2 +$$

$$+ \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} y'^3 + 3\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} y'' + 3\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} y' y'' + \frac{\partial f}{\partial y} y''' \tag{30}$$

Dacă înlocuim pe x cu x_0 şi pe y cu $y_0 = y(x_0)$ obţinem coeficienţii $y'(x_0)$, $y''(x_0)$, $y'''(x_0)$. După cum se vede calculul acestor coeficienţi este în general complicat. De aceea prezintă un interes deosebit următorul procedeu de integrare numerică a ecuaţiei diferenţiale (1) cu condiţia (2), numit procedeul Runge-Kutta.

În punctul $x \in [x_0 - h, x_0 + h]$, valoarea aproximativă $\tilde{y}(x)$ a soluţiei $y(x)$ este dată de formula

$$\tilde{y}(x) = y(x_0) + \frac{x - x_0}{6} k(x) \tag{31}$$

unde $k(x) = k_1(x) + 4k_2(x) + k_3(x)$

şi $\quad k_1(x) = f(x_0, y_0), \quad k_2(x) = f\left(x_0 + \frac{x - x_0}{2}, \; y_0 + \frac{x - x_0}{2} k_1(x)\right)$

$$k_3^*(x) = f(x_0 + (x - x_0), \; y_0 + (x - x_0) k_1(x));$$

$$k_3(x) = f(x_0 + (x - x_0), \; y_0 + (x - x_0) k_3^*(x)).$$

Legătura dintre $y(x)$, soluţia exactă a problemei (1) — (2) şi soluţia aproximativă $\tilde{y}(x)$ dată de formula (31), este dată de următoarea

Teorema 7.8. Primii patru termeni din dezvoltarea lui $\tilde{y}(x)$ după puterile lui $x - x_0$ coincid cu primii patru termeni din formula (29) a lui Taylor.

Demonstraţie. Primii patru termeni din dezvoltarea lui $\tilde{y}(x)$ după puterile lui $x - x_0$ se obţin dezvoltînd pe $k(x)$ cu ajutorul formulei lui Taylor şi mărginindu-ne la primii trei termeni.
Avem

$$\tilde{y}(x) = y(x_0) + \frac{x - x_0}{6}\left[k(x_0) + \frac{x - x_0}{1!} k'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2!} k''(x_0) + \right.$$

$$\left. + \frac{(x - x_0)^3}{3!} k'''(x_0 + \theta(x - x_0))\right], \quad 0 < \theta < 1, \tag{32}$$

Deoarece $\delta_0(x)$ este constant şi egal cu [illegible], avem

$$[illegible]$$

$$[illegible]$$

$$[illegible]$$

iar

$$[illegible]$$

$$[illegible]$$

$$[illegible]$$

$$[illegible]$$

pentru [illegible] obţinem

$$[illegible]$$

$$[illegible]$$

şi

$$[illegible]$$

Pentru derivatele de ordinul doi, avem

$$[illegible]$$

$$[illegible]$$

pentru $x = x_0$ şi $y_0 = y(x_0)$ obţinem

$$k_2'''(x_0) = \frac{1}{4}\left[y'''(x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\, y''(x_0)\right]$$

$$k_3'''(x_0) = y'''(x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\, y''(x_0)$$

şi deci

$$k'''(x_0) = 2y'''(x_0)$$

Dacă revenim la formula (32) şi ţinem seama de calculele făcute obţinem

$$\tilde{y}(x) = y(x_0) + \frac{x - x_0}{1!}y'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2!}y''(x_0) +$$

$$+ \frac{(x - x_0)^3}{3!}y'''(x_0) + \frac{(x - x_0)^4}{36}k^{IV}(x_0) + O((x - x_0)^5)$$

şi se vede imediat că primii patru termeni din această formulă sînt egali cu primii patru termeni din formula (29).

Observaţia 1. Diferenţa dintre valoarea exactă $y(x)$ a problemei (1) – (2) şi valoarea aproximativă $\tilde{y}(x)$ dată de metoda Runge-Kutta este de ordinul lui $(x - x_0)^4$.

Observaţia 2. Metoda Runge-Kutta foloseşte valorile funcţiei f în mai multe puncte din intervalul de existenţă a soluţiei.

PROBLEME

Să se calculeze aproximaţiile de ordinul trei pentru ecuaţia şi sistemul următor

1) $y' = x + y^2$; $y(0) = 0$

$$R: y_3(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{x^5}{20} + \frac{x^8}{160} + \frac{x^{11}}{4400}$$

2) $y' = z$, $z' = x^3(y + z)$; $y(0) = 1$; $z(0) = \frac{1}{2}$

$$R: y_3(x) = 1 + \frac{x}{2} + \frac{3x^5}{40} + \frac{x^6}{60} + \frac{x^9}{192}$$

$$z_3(x) = \frac{1}{2} + \frac{3x^4}{8} + \frac{x^5}{10} + \frac{3x^8}{64} + \frac{7x^9}{360} + \frac{x^{12}}{256}$$

CAPITOLUL XIII

ECUAȚII DIFERENȚIALE DE ORDINUL n INTEGRABILE PRIN CUADRATURI

§ 1. ECUAȚII DIFERENȚIALE DE FORMA $y^{(n)} = f(x)$, (1)

unde f e funcție continuă pe un interval I, se integrează ușor prin cuadraturi. În adevăr, din ecuația (1) obținem prin integrări succesive

$$y^{(n-1)} = \int_{x_0}^{x} f(x)\,dx + C_1;\quad y^{(n-2)} = \int_{x_0}^{x} dx \int_{x_0}^{x} f(x)\,dx + C_1(x - x_0) + C_2;\ \ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$y = \int_{x_0}^{x} dx \int_{x_0}^{x} dx \ldots \int_{x_0}^{x} f(x)\,dx + C_1 \frac{(x - x_0)^{n-1}}{(n-1)!} + C_2 \frac{(x - x_0)^{n-2}}{(n-2)!} + \ldots$$

$$+ C_{n-1}(x - x_0) + C_n \qquad (2)$$

Formula (2) ne dă soluția generală a ecuației (1) și rezolvă următoarea problemă a lui Cauchy: să se găsească soluția ecuației (1) care satisface condițiile inițiale

$$y(x_0) = C_n;\ y'(x_0) = C_{n-1}, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = C_1.$$

Se arată cu ușurință că soluția generală a ecuației (1) poate fi pusă și sub următoarea formă:

$$y = \frac{1}{(n-1)!}\int_{x_0}^{x} (x - t)^{n-1} f(t)\,dt + C_1 \frac{(x - x_0)^{n-1}}{(n-1)!} + \ldots + C_{n-1}(x - x_0) + C_n$$

(3)

Exemplu. Să se afle soluția ecuației

$$y''' = 24x$$

care satisface condițiile $y(0) = 1$; $y'(0) = -1$; $y''(0) = -2$. Prin integrări succesive obținem

$$y = x^4 + C_1 \frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3$$

și deci soluția care satisface condițiile date este

$$y = x^4 - x^2 - x + 1.$$

Dacă ecuaţia (4) poate fi rezolvată în raport cu $y^{(n)}$

$$y^{(n)} = f_k(x) \quad (k = 1, 2, \ldots, m) \tag{5}$$

atunci prin integrarea fiecărei ecuaţiilor (5), obţinem soluţiile ecuaţiei (4). Presupunem că ecuaţia (4) nu poate fi rezolvată în raport cu $y^{(n)}$, dar se cunoaşte o reprezentare parametrică a curbei de ecuaţie $F(u, v) = 0$. Fie

$$u = \varphi(t), \; v = \psi(t), \; t \in I$$

o reprezentare parametrică a curbei de ecuaţie $F(u, v) = 0$ cu φ, φ' şi ψ continue pe I. Avem deci

$$x = \varphi(t); \; y^{(n)} = \psi(t)$$

Dacă folosim egalitatea

$$dy^{(n-1)} = y^{(n)}\, dx$$

obţinem

$$dy^{(n-1)} = \psi(t)\, \varphi'(t)\, dt$$

de unde

$$y^{(n-1)} = \int \psi(t)\, \varphi'(t)\, dt + C_1 = \psi_1(t, C_1)$$

Analog se calculează $y^{(n-2)}, \ldots, y', y$ şi obţinem

$$y = \psi_n(t, C_1, \ldots, C_n) \tag{6}$$

care împreună cu $x = \varphi(t)$ ne dă soluţia generală a ecuaţiei (4), sub formă parametrică.

Exemplu. Să se afle soluţia generală a ecuaţiei

$$y'' + e^{y''} = x$$

Dacă luăm ca parametru pe $t = y''$ obţinem

$$x = e^t + t; \; y'' = t$$

Avem

$$dy' = y''\, dx = t(e^t + 1)\, dt$$

deci

$$y' = \int t(e^t + 1)\, dt + C_1 = (t - 1)\, e^t + \frac{t^2}{2} + C_1$$

$$dy = y'\, dx = \left[(t - 1)\, e^t + \frac{t^2}{2} + C_1\right](e^t + 1)\, dt$$

$$y = \int \left[(t - 1)\, e^t + \frac{t^2}{2} + C_1\right](e^t + 1)\, dt + C_2 = \left(\frac{t}{2} - \frac{3}{4}\right)e^{2t} +$$

$$+ \left(\frac{t^2}{2} + C_1 - 1\right)e^t + \frac{t^3}{6} + C_1 t + C_2$$

Soluția generală este dată parametric:

$$x = e^t + t; \quad y = \left(\frac{t}{2} - \frac{3}{4}\right)e^{2t} + \left(\frac{t^2}{2} + C_1 - 1\right)e^t + \frac{t^3}{6} + C_1 t + C_2$$

§ 3. ECUAȚII DIFERENȚIALE DE FORMA $F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \dots, y^{(n)}) = 0$

$$F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (1 \le k < n) \tag{6}$$

în care lipsesc $y, y', \dots, y^{(k-1)}$.

Prin schimbarea de variabilă $y^{(k)} = z$ ecuația (6) devine

$$F(x, z, z', \dots, z^{(n-k)}) = 0 \tag{7}$$

adică o ecuație de ordinul $n - k$.

Dacă reușim să determinăm soluția generală a ecuației (7)

$$z = \varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_{n-k})$$

atunci integrarea ecuației diferențiale (6) se reduce la integrarea ecuației diferențiale

$$y^{(k)} = \varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_{n-k}) \tag{8}$$

care este de tipul (1).

Exemplu. Să se afle soluția generală a ecuației

$$y^{(5)} - \frac{1}{x} y^{(4)} = 0$$

Facem schimbarea de variabilă $y^{(4)} = z$ și obținem ecuația

$$z' - \frac{1}{x} z = 0$$

care este o ecuație cu variabile separabile cu soluția generală

$$z = C_1 x$$

Integrarea ecuației considerate se reduce la integrarea ecuației

$$y^{(4)} = C_1 x$$

care are soluția generală

$$y = C_1 \frac{x^5}{120} + C_2 \frac{x^3}{6} + C_3 \frac{x^2}{2} + C_4 x + C_5$$

Dacă se cunoaște o reprezentare parametrică a curbei de ecuație $F(u, v) = 0$, $u = \varphi(t)$, $v = \psi(t)$; $t \in I$ cu φ, φ' și ψ continue iar $\psi(t) \neq 0$ pe I atunci soluția generală a ecuației (9) se obține prin o cuadratură. În adevăr, avem

$$y^{(n-1)} = \varphi(t)\,;\; y^{(n)} = \psi(t)\,;\; t \in I$$

și din relația

$$dy^{(n-1)} = y^{(n)}\,dx$$

obținem

$$dx = \frac{dy^{(n-1)}}{y^{(n)}} = \frac{\varphi'(t)\,dt}{\psi(t)}$$

atunci

$$x = \int \frac{\varphi'(t)\,dt}{\psi(t)} + C_1$$

Avem deci

$$x = \int \frac{\varphi'(t)}{\psi(t)}\,dt + C_1\,;\; y^{(n-1)} = \varphi(t).$$

În continuare procedăm la fel ca în cazul ecuațiilor de tipul (2) și obținem soluția generală sub formă parametrică.

Exemplu. Să se afle soluția generală a ecuației

$$y'''y'' = 1$$

O reprezentare parametrică este $y'' = t$, $y''' = \frac{1}{t}$; $t \neq 0$. Din relația

$$dy'' = y'''\,dx$$

deducem $dx = t\,dt$; deci $x = \frac{t^2}{2} + C_1$

Dar $y' = \int y''\,dx = \int t^2\,dt = \frac{t^3}{3} + C_2$

$$y = \int y'\,dx = \int \left(\frac{t^3}{3} + C_2\right) t\,dt = \frac{t^5}{15} + C_2\frac{t^2}{2} + C_3.$$

Soluția generală a ecuației considerate este

$$x = \frac{t^2}{2} + C_1$$

$$y = \frac{t^5}{15} + \frac{t^2}{2} + C_3$$

§ 5. ECUAŢII DIFERENŢIALE DE FORMA $F(y^{(n-2)}, y^{(n)}) = 0$ (10)

Dacă se cunoaşte o reprezentare parametrică a curbei de ecuaţie $F(u, v) = 0$,

$$u = \varphi(t),\quad v = \psi(t),\quad t \in I$$

cu φ, φ' şi ψ continue pe I, atunci integrarea ecuaţiei (10) se face prin cuadraturi. În adevăr, avem

$$y^{(n-2)} = \varphi(t),\quad y^{(n)} = \psi(t)$$

şi dacă ţinem seama de egalităţile

$$dy^{(n-1)} = y^{(n)}\,dx,\quad dy^{(n-2)} = y^{(n-1)}\,dx,$$

obţinem

$$y^{(n-1)}\,dy^{(n-1)} = y^{(n)}\,dy^{(n-2)}$$

de unde deducem

$$y^{(n-1)}\,dy^{(n-1)} = \psi(t)\,\varphi'(t)\,dt$$

deci

$$(y^{(n-1)})^2 = 2\int \psi(t)\,\varphi'(t)\,dt + C.$$

Mai departe obţinem

$$y^{(n-1)} = \pm\sqrt{2\int \psi(t)\,\varphi'(t)\,dt + C}$$

care împreună cu $y^{(n-2)} = \varphi(t)$ permite aflarea soluţiilor ecuaţiei (10) folosind procedeul dat la ecuaţiile de tipul (9).

§ 6. ECUAŢII DIFERENŢIALE DE FORMA $F(y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0$.

$$F(y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0 \tag{11}$$

în care lipseşte variabila independentă x. Ordinul ecuaţiei diferenţiale (11) se reduce cu o unitate dacă facem următoarea schimbare de variabilă: luăm ca funcţie necunoscută pe

$$p = \frac{dy}{dx}$$

iar ca variabilă independentă pe y. Deducem atunci că

$$y'' = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy}\cdot\frac{dy}{dx} = p\,\frac{dp}{dy}$$

$$y''' = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = \frac{d}{dx}\left(p\,\frac{dp}{dy}\right) = \frac{d}{dy}\left(p\,\frac{dp}{dy}\right)\frac{dy}{dx} = \left(p\,\frac{d^2p}{dy^2} + \left(\frac{dp}{dy}\right)^2\right)p$$

În mod asemănător se calculează toate derivatele până la ordinul n.

Introducînd expresiile derivatelor $y'', ..., y^{(n)}$ în ecuația (11) vom obține o nouă ecuație diferențială dar de ordinul $n-1$

$$F_1(y, p, p', ..., p^{(n-1)}) = 0 \qquad (12)$$

Dacă reușim să determinăm soluția generală a ecuației (12)

$p = \varphi(y, C_1, C_2, ..., C_{n-1})$ atunci integrarea ecuației diferențiale (11) se reduce la integrarea ecuației diferențiale

$$\frac{dy}{dx} = \varphi(y, C_1, C_2, ..., C_{n-1}).$$

Exemplu. Să se afle soluția generală a ecuației

$$yy'' - (y')^2 = 0$$

Dacă facem schimbarea de variabilă $p = y'$ avem $y'' = p\frac{dp}{dy}$ și înlocuim în ecuația dată, obținem o ecuație cu variabile separabile

$$yp\frac{dp}{dy} - p^2 = 0$$

cu soluția generală $p = C_1 y$ sau $\frac{dy}{dx} = C_1 y$.

Ultima ecuație este tot cu variabile separabile și are soluția generală

$$y = C_2 e^{C_1 x}$$

§ 7. ECUAȚII DIFERENȚIALE DE FORMA $F(x, y, y', ..., y^{(n)}) = 0$ (13) OMOGENE ÎN ARGUMENTELE $y, y', ..., y^{(n)}$

Sînt ecuații care satisfac egalitatea

$$F(x, ty, ty', ..., ty^{(n)}) = t^m F(x, y, y', ..., y^{(n)}).$$

Prin schimbarea de variabilă $y = e^{\int z\,dx}$, unde z este noua funcție necunoscută, ordinul ecuației se reduce cu o unitate. Prin derivare obținem

$$y' = z e^{\int z\,dx}$$

$$y'' = (z^2 + z') e^{\int z\,dx}$$

$$y''' = (z^3 + 3zz' + z'') e^{\int z\,dx}$$

- -

$$y^{(n)} = \Phi(z, z', ..., z^{(n-1)}) e^{\int z\,dx}$$

Înlocuind derivatele lui y în ecuația (13) și ținând cont de omogenitatea lui F avem:

$$0 = F\left[x, e^{\int z\,dx}, z e^{\int z\,dx}, (z' + z^2) e^{\int z\,dx}, \dots, \Phi(z, z', \dots, z^{(n-1)}) e^{\int z\,dx}\right] =$$

$$= e^{m\int z\,dx} F[x, 1, z, z' + z^2, \dots, \Phi(z, z', \dots, z^{(n-1)})]$$

Obținem deci o ecuație de ordinul $n - 1$

$$F[x, 1, z, z' + z^2, \dots, \Phi(z, z', \dots, z^{(n-1)})] = 0$$

Exemplu. Să se afle soluția generală a ecuației

$$yy'' - (y')^2 = 6xy^2$$

Facem schimbarea de variabilă $y = e^{\int z\,dx}$ și obținem

$$z' = 6x;\; z = 3x^2 + C_1;\; y = e^{\int (3x^2 + C_1)\,dx};\ \text{deci}$$

$$y = e^{x^3 + C_1 x + C_2}$$

Observație. Același rezultat se obține dacă facem schimbarea de variabilă

$$y' = yz$$

unde z este noua necunoscută.

PROBLEME

Să se integreze următoarele ecuații:

1) $y^{IV} = \cos^2 x$; $y(0) = \frac{1}{32}$; $y'(0) = 0$; $y''(0) = \frac{1}{8}$; $y'''(0) = 0$.

R: $y = \frac{1}{48}x^4 + \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{32}\cos 2x$.

2) $y''' \sin^4 x = \sin 2x$; R: $y = \ln|\sin x| + \frac{1}{2}C_1 x^2 + C_2 x - C_3$

3) $xy'' = y' \ln\frac{y'}{x}$; R: $y = \frac{1}{C_1} x e^{1 + C_1 x} - \frac{1}{C_1^2} e^{1 + C_1 x} - C_2$

4) $(1 - x^2)y'' - xy' = 2$; R: $y = (\arcsin x)^2 + C_1 \arcsin x + C_2$

5) $(x - 1)y''' - y'' = 0$; $y(2) = 2$; $y'(2) = 1$; $y''(2) = 1$

R: $y = \frac{1}{6}(x^3 - 3x^2 + 6x + 4)$

6) $1 + y'^2 = 2yy''$ $\qquad$ R: $y = \frac{1}{C_1}[illegible] C_1 [illegible] C_2$

7) $y(1 - \ln y)y'' + (1 + \ln y)y'^2 = 0$ $\qquad$ R: [illegible]

8) $y'^2 + yy'' = yy'$ $\qquad$ R: $\frac{1}{2}y^2 = C_1 e^x + C_2$

9) $3y'^2 = 4yy'' + y^2$ $\qquad$ R: $y = C_2\cos^4\left(C_1 - \frac{x}{4}\right)$

10) $y''' = \sqrt{1 + y''^2}$ $\qquad$ R: $y = \operatorname{ch}(x + C_1) + C_2x + C_3$

11) $y'''^2 + y''^2 = 1$ $\qquad$ R: $y = -\sin(x + C_1) + C_2x + C_3$

CAPITOLUL XIV

ECUAȚII DIFERENȚIALE DE ORDINUL n LINIARE

§ 1. CONSIDERAȚII GENERALE. DEPENDENȚA LINEARĂ.

O ecuație diferențială de ordinul n liniară este o ecuație de forma

$$y^{(n)} + a_1(x)\, y^{(n-1)} + a_2(x)\, y^{(n-2)} + \dots + a_{n-1}(x)\, y' + a_n(x)\, y = f(x) \qquad (1)$$

unde funcțiile reale $a_1, \dots, a_n$ (coeficienții ecuației), și f (termenul liber) sînt definite și continue pe un același interval I.

O ecuație diferențială de ordinul n liniară poate fi pusă sub formă mai generală

$$a_0(x)\, y^{(n)} + a_1(x)\, y^{(n-1)} + a_2(x)\, y^{(n-2)} + \dots + a_{n-1}(x)\, y' + a_n(x)\, y = f(x) \qquad (1')$$

Dacă $a_0(x) \neq 0$ pe I atunci ecuația (1') poate fi adusă la forma (1). Dacă $f(x) \equiv 0$ pe intervalul I, atunci ecuația (1) devine

$$y^{(n)} + a_1(x)\, y^{(n-1)} + a_2(x)\, y^{(n-2)} + \dots + a_{n-1}(x)\, y' + a_n(x)\, y = 0 \qquad (2)$$

și se numește ecuația diferențială de ordinul n liniară și omogenă.

În continuare pentru prescurtarea scrierii, introducem următorul operator diferențial liniar

$$L = \frac{d^n}{dx^n} + a_1(x)\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + \dots + a_{n-1}(x)\frac{d}{dx} + a_n(x)$$

cu ajutorul căruia ecuația (1) devine

$$L(y) = f(x) \qquad (3)$$

iar ecuația (2) devine

$$L(y) = 0 \qquad (4)$$

Din modul cum a fost definit, se vede că operatorul L este complet determinat de coeficienții ecuației (1). Operatorul L are următoarele proprietăți.

Proprietatea 1.1.

$$L(Cy) = C\, L(y)$$

unde C este o constantă arbitrară. În adevăr, avem

$$L(Cy) = (Cy)^{(n)} + a_1(x)(Cy)^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x)(Cy)' +$$
$$+ a_n(x)(Cy) = C[y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x)y'$$
$$+ a_n(x)y] = CL(y).$$

Proprietatea 2.1.

$$L(y_1 + y_2) = L(y_1) + L(y_2).$$

În adevăr avem,

$$L(y_1 + y_2) = (y_1 + y_2)^{(n)} + a_1(x)(y_1 + y_2)^{(n-1)} + a_2(x)(y_1 + y_2)^{(n-2)} + \ldots$$
$$+ \ldots + a_{n-1}(x)(y_1 + y_2)' + a_n(x)(y_1 + y_2) = [y_1^{(n)} + a_1(x)y_1^{(n-1)}$$
$$+ a_2(x)y_1^{(n-2)} + \ldots + a_{n-1}(x)y_1' + a_n(x)y_1] + [y_2^{(n)}$$
$$+ a_1(x)y_2^{(n-1)} + a_2(x)y_2^{(n-2)} + \ldots$$
$$+ a_{n-1}(x)y_2' + a_n(x)y_2] = L(y_1) + L(y_2).$$

Proprietatea 3.1.

$$L(C_1y_1 + C_2y_2 + \ldots + C_ny_n) = C_1L(y_1) + C_2L(y_2) + \ldots + C_nL(y_n)$$

unde $C_1, C_2, \ldots, C_n$ sînt constante arbitrare.
Această proprietate rezultă imediat din proprietățile 1 și 2.

În continuare ne vom ocupa de ecuațiile diferențiale de ordinul n, liniare și omogene adică de ecuații de forma (2) sau (4). Folosind proprietățile operatorului L vom deduce proprietățile pe care le au soluțiile unei ecuații liniare și omogene.

Teorema 1.1. Dacă y_1 este o soluție a ecuației diferențiale omogene (4), atunci și Cy_1 este soluție a ecuației omogene (4), oricare ar fi constanta C.

Demonstrație. Prin ipoteză avem $L(y_1) = 0$. Folosind proprietatea 1 a operatorului L, obținem

$$L(Cy_1) = 0$$

adică Cy_1 este soluție a ecuației (4).

Teorema 2.1. Dacă y_1 și y_2 sînt două soluții ale ecuației diferențiale omogene (4) atunci și $y_1 + y_2$ este soluție a ecuației (4).

Demonstrație. Prin ipoteză avem $L(y_1) = L(y_2) = 0$. Folosind proprietatea 2 a operatorului L, obținem

$$L(y_1 + y_2) = L(y_1) + L(y_2) = 0$$

deci și $y_1 + y_2$ este soluție a ecuației (4).

Teorema 3.1. Dacă $y_1, y_2, \ldots, y_n$ sînt n soluții ale ecuației diferențiale omogene (4) atunci și funcția

$$y = C_1y_1 + C_2y_2 + \ldots + C_ny_n \tag{5}$$

unde $C_1, C_2, \ldots, C_n$ sînt constante arbitrare, este soluție a ecuației (4).

Demonstrație. Prin ipoteză avem $L(y_1) = L(y_2) = \ldots = L(y_n) = 0$ și dacă aplicăm proprietatea 3 a operatorului L obținem

$$L(C_1y_1 + C_2y_2 + \ldots + C_ny_n) = C_1L(y_1) + C_2L(y_2) + \ldots + C_nL(y_n) = 0.$$

Teorema 2.3. Dacă ecuația diferențială omogenă (4) admite ca soluție funcția complexă de variabilă reală

$$y(x) = u(x) + iv(x), \quad x \in I$$

atunci funcțiile reale u și v sînt, fiecare în parte, soluții ale ecuației (4).

Demonstrație. Din proprietatea 3 a operatorului L obținem

$$L(u + iv) = L(u) + iL(v).$$

Prin ipoteză avem $L(u + iv) = 0$ și deci $L(u) + iL(v) = 0$. Din ultima egalitate deducem $L(u) = L(v) = 0$, adică funcțiile u și v sînt soluții ale ecuației (4).

Funcția y dată de (5) este soluție a ecuației (2) și conține n constante arbitrare. Vom studia în continuare condițiile pe care trebuie să le îndeplinească n soluții $y_1, y_2, \ldots, y_n$ ale ecuației (2), astfel încît orice soluție a ecuației (2) să se obțină din (5) prin particularizarea constantelor $C_1, C_2, \ldots, C_n$. În acest scop este necesară următoarea definiție.

Definiția 2.2. Fie $y_1, y_2, \ldots, y_n$ n funcții reale definite și continue pe intervalul $I \subset \mathbf{R}$. Spunem că aceste n funcții sînt liniar independente pe intervalul I dacă nu există n numere $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ nu toate nule astfel încît să avem

$$\lambda_1y_1(x) + \lambda_2y_2(x) + \ldots + \lambda_ny_n(x) = 0$$

pentru orice $x \in I$.

Dacă există n numere $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, nu toate nule, astfel încît să avem

$$\lambda_1y_1(x) + \lambda_2y_2(x) + \ldots + \lambda_ny_n(x) = 0$$

pentru orice $x \in I$, atunci spunem că cele n funcții sînt liniar dependente pe I.

Exemplul 1. Funcțiile $1, x, x^2, \ldots, x^{n-1}$ sînt liniar independente pe $\mathbf{R}$ sau pe orice interval $I \subset \mathbf{R}$. Într-adevăr egalitatea

$$\lambda_1 + \lambda_2x + \lambda_3x^2 + \ldots + \lambda_nx^{n-1} = 0$$

unde nu toate numerele $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ sînt egale cu zero, nu poate avea loc pentru orice $x \in \mathbf{R}$ deoarece este o ecuație algebrică de grad cel mult egal cu $n - 1$ și admite cel mult $n - 1$ rădăcini reale. Egalitatea este adevărată pentru orice $x \in \mathbf{R}$ numai dacă $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$.

Exemplul 2. Funcțiile $y_1 = e^x$ și $y_2 = e^{2x}$ sînt liniar independente pe orice interval $I \subset \mathbf{R}$. Într-adevăr egalitatea $\lambda_1e^x + \lambda_2e^{2x} = 0$, unde λ_1, λ_2 sînt numere diferite de zero, nu poate fi îndeplinită decît într-un punct, așa cum rezultă din egalitatea

$$\frac{e^{x}}{e^{2x}} = e^{-x} = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1}.$$

Exemplul 3. Funcțiile $y_1 = \sin^2 x$, $y_2 = \cos^2 x$, $y_3 = 1$ sînt liniar dependente pe $\mathbf{R}$. În adevăr, avem

$$\sin^2 x + \cos^2 x - 1 = 0, \ (\forall)\ x \in \mathbf{R}$$

În acest caz $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$; $\lambda_3 = -1$.

Exemplul 4. Fie $r_1, r_2, \ldots, r_m$ m numere reale distincte două cîte două și $k_1, k_2, \ldots, k_m$ m numere naturale. Atunci funcțiile

$$e^{r_1 x},\ x e^{r_1 x},\ x^2 e^{r_1 x},\ \ldots,\ x^{k_1} e^{r_1 x}$$

$$e^{r_2 x},\ x e^{r_2 x},\ x^2 e^{r_2 x},\ \ldots,\ x^{k_2} e^{r_2 x}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$e^{r_m x},\ x e^{r_m x},\ x^2 e^{r_m x},\ \ldots,\ x^{k_m} e^{r_m x}$$

sînt liniar independente pe orice interval $I \subset \mathbf{R}$. Funcțiile

$$x^{r_1},\ x^{r_1} \ln x,\ \ldots,\ x^{r_1} (\ln x)^{k_1}$$

$$x^{r_2},\ x^{r_2} \ln x,\ \ldots,\ x^{r_2} (\ln x)^{k_2}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$x^{r_m},\ x^{r_m} \ln x,\ \ldots,\ x^{r_m} (\ln x)^{k_m}$$

sînt liniar independente pe intervalul $(0, +\infty)$.

Definiția 5.1. Fie $y_1, y_2, \ldots, y_n$ n funcții reale definite și derivabile de $n - 1$ ori pe intervalul I. Determinantul

$$W(y_1, y_2, \ldots, y_n) = W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \ldots & y_n \\ y_1' & y_2' & \ldots & y_n' \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \ldots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

se numește determinantul lui Wronski sau Wronskianul funcțiilor $y_1, y_2, \ldots, y_n$.

Importanța Wronskianului va rezulta din teoremele care urmează în legătură cu funcțiile liniar independente sau liniar dependente, cît și în legătură cu integrarea ecuațiilor diferențiale omogene (2).

Teorema 5.1. Dacă funcțiile reale $y_1, y_2, \ldots, y_n$ definite pe intervalul $I \subset \mathbf{R}$ admit derivate de ordinul $n - 1$ și sînt liniar dependente pe intervalul I, atunci

$$W(y_1, y_2, \ldots, y_n) = 0, \ (\forall)\ x \in I$$

Demonstrație. Funcțiile $y_1, y_2, \ldots, y_n$ fiind presupuse în dependență liniară pe intervalul I, există numerele $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ nu toate nule, astfel încît

$$\lambda_1 y_1(x) + \lambda_2 y_2(x) + \ldots + \lambda_n y_n(x) = 0 \tag{6}$$

pentru orice $x \in I$.

Derivînd relația de două ori, ..., de $n-1$ ori pe (6) obținem

$$\lambda_1 y_1'(x) + \lambda_2 y_2'(x) + \ldots + \lambda_n y_n'(x) = 0$$

$$\lambda_1 y_1''(x) + \lambda_2 y_2''(x) + \ldots + \lambda_n y_n''(x) = 0 \tag{7}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\lambda_1 y_1^{(n-1)}(x) + \lambda_2 y_2^{(n-1)}(x) + \ldots + \lambda_n y_n^{(n-1)}(x) = 0$$

Ecuațiile (6) și (7) formează un sistem omogen de n ecuații cu necunoscutele $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Dar numerele $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ au fost presupuse nu toate nule și deci sistemul (7) + (6) admite, pentru orice $x \in I$, o soluție diferită de cea banală. Conform teoremei lui Rouché determinantul sistemului, care este Wronskianul funcțiilor $y_1, y_2, \ldots, y_n$, trebuie să fie nul în fiecare punct $x \in I$ și teorema este demonstrată.

Observație. Condiția ca $W(y_1, y_2, \ldots, y_n) = 0$, $(\forall)$ $x \in I$, apare ca o condiție necesară ca funcțiile $y_1, y_2, \ldots, y_n$ să fie liniar dependente pe I, nu și ca o condiție suficientă. Se poate să avem $W(y_1, y_2, \ldots, y_n) = 0$ pe I fără ca funcțiile $y_1, y_2, \ldots, y_n$ să fie liniar dependente. Este suficient să considerăm următorul exemplu:

$$y_1(x) = \begin{cases} 0 & \text{dacă } x \leq 0 \\ x^2 & \text{dacă } x > 0 \end{cases} \qquad y_2(x) = \begin{cases} x^2 & \text{dacă } x < 0 \\ 0 & \text{dacă } x \geq 0 \end{cases}$$

Se verifică imediat că $W(y_1, y_2) = 0$ pe $\mathbf{R}$, fără ca funcțiile y_1 și y_2 să fie liniar dependente pe $\mathbf{R}$.

§ 2. SOLUȚIA GENERALĂ A ECUAȚIEI $L(y) = 0$

Fie ecuația diferențială de ordinul n liniară și omogenă

$$L(y) = y^{(n)} + a_1(x)\, y^{(n-1)} + a_2(x)\, y^{(n-2)} + \ldots + a_{n-1}(x)\, y' + a_n(x)\, y = 0 \tag{8}$$

unde funcțiile reale $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sînt continue pe intervalul $I \subset \mathbf{R}$. În aceste condiții ecuației (8) i se poate aplica teorema de existență și unicitate. Se poate determina soluția unică a ecuației (8) care satisface condițiile

$$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_0', \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} \tag{9}$$

unde $x_0 \in I$ iar $y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)}$ sînt numere date.
Este evident că funcția $y = 0$ este unica soluție a ecuației (8) care satisface condițiile

$$y(x_0) = 0,\ y'(x_0) = 0, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = 0 \tag{10}$$

unde $x_0 \in I$.

Teorema 2.2. Dacă $y_1, y_2, \ldots, y_n$ sînt n soluții liniar independente ale ecuației omogene (8) cu coeficienții $a_1, a_2, \ldots, a_n$ funcții continue pe intervalul I, atunci Wronskianul $W(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ este diferit de zero pe intervalul I.

Demonstrație. Presupunem că wronskianul $W(y_1, y_2, ..., y_n)$ se anulează într-un punct $x_0 \in I$. Considerăm sistemul algebric de ecuații liniare și omogene

$$C_1 y_1(x_0) + C_2 y_2(x_0) + \dots + C_n y_n(x_0) = 0$$

$$C_1 y_1'(x_0) + C_2 y_2'(x_0) + \dots + C_n y_n'(x_0) = 0 \qquad (11)$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$C_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + C_2 y_2^{(n-1)}(x_0) + \dots + C_n y_n^{(n-1)}(x_0) = 0$$

Determinantul sistemului (11) este nul, deoarece el este tocmai wronskianul funcțiilor $y_1, y_2, ..., y_n$ presupus nul în punctul x_0. În acest caz sistemul (11) admite soluții diferite de cea banală. Fie $C_1, C_2, ..., C_n$ o astfel de soluție, deci numerele $C_1, C_2, ..., C_n$ nu sînt toate nule și cu ajutorul lor formăm funcția

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \dots + C_n y_n(x). \qquad (12)$$

În baza teoremei 3.1. deducem că și funcția y este soluție a ecuației (8). Datorită relațiilor (11), soluția (12) satisface condițiile inițiale (10). Dar singura soluție a ecuației (8) care satisface condițiile inițiale (10) este $y = 0$ și deci

$$C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \dots + C_n y_n(x) = 0. \qquad (13)$$

Numerele $C_1, C_2, ..., C_n$ nefiind toate nule, relația (13) arată că funcțiile $y_1, y_2, ..., y_n$ sînt liniar dependente pe I, fapt care contrazice ipoteza. Deci $W(y_1, y_2, ..., y_n) \neq 0$ pe I și teorema este demonstrată.

Observația 1. Dacă $y_1, y_2, ..., y_n$ sînt n soluții ale ecuației (8), atunci ele sînt liniar independente pe intervalul I dacă și numai dacă $W(y_1, y_2, ..., y_n) \neq 0$ pe I.

În adevăr, dacă $y_1, y_2, ..., y_n$ sînt n soluții ale ecuației (8), liniar independente pe I atunci din teorema 4.2. deducem

$$W(y_1, y_2, ..., y_n) \neq 0 \text{ pe } I.$$

Invers, dacă $W(y_1, y_2, ..., y_n) \neq 0$ pe I atunci soluțiile $y_1, y_2, ..., y_n$ sînt liniar independente pe I, căci dacă ar fi liniar dependente pe I, din teorema 5.1. am deduce că $W(y_1, y_2, ..., y_n) = 0$ pe I.

Observația 2. Dacă wronskianul a n soluții ale ecuației (8) este nul într-un punct $x_0 \in I$ atunci el este nul pe tot intervalul I.

În adevăr, dacă wronskianul a n soluții $y_1, y_2, ..., y_n$ este nul într-un punct $x_0 \in I$, atunci din demonstrația teoremei 4.2. rezultă că funcțiile $y_1, y_2, ..., y_n$ sînt liniar dependente pe I și conform teoremei 5.1. deducem că $W(y_1, y_2, ..., y_n) = 0$ pe I.

Observația 3. Dacă wronskianul a n soluții $y_1, y_2, ..., y_n$ ale ecuației (8) este diferit de zero într-un punct $x_0 \in I$ atunci el este diferit de zero pe tot intervalul I.

În adevăr, dacă wronskianul a n soluții ale ecuației (8) ar fi nul într-un punct x_1, atunci conform observației 2 ar fi nul și în punctul x_0.

Definiția 2.2. Spunem că n soluții $y_1, y_2, \ldots, y_n$ ale ecuației (8) formează un sistem fundamental de soluții pe intervalul I dacă ele sînt liniar independente pe I.

Din teorema 1.2. rezultă că dacă $y_1, y_2, \ldots, y_n$ este un sistem fundamental de soluții ale ecuației (8) atunci $W(y_1, y_2, \ldots, y_n) \neq 0$ pe I.

Din observațiile de mai înainte deducem că, dacă $y_1, y_2, \ldots, y_n$ sînt n soluții ale ecuației (8), cu Wronskianul diferit de zero într-un punct $x_0 \in I$, atunci ele formează un sistem fundamental de soluții pe intervalul I.

Teorema 2.2. Fie ecuația diferențială de ordinul n liniară și omogenă

$$L(y) = y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + a_2(x)y^{(n-2)} + \ldots + a_{n-1}(x)y' +$$

$$+ a_n(x)y = 0 \qquad (8)$$

unde funcțiile $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sînt continue pe intervalul I. Dacă $y_1, y_2, \ldots, y_n$ sînt n soluții ale ecuației (8) și ele formează un sistem fundamental de soluții pe intervalul I, atunci soluția generală a ecuației (8) este dată de egalitatea

$$y = C_1y_1 + C_2y_2 + \ldots + C_ny_n \qquad (14)$$

unde $C_1, C_2, \ldots, C_n$ sînt constante arbitrare.

Demonstrație. Cînd $x_0 \in I$ ecuația (8) satisface condițiile din teorema de existență și unicitate. Deci există și este unică o soluție a ecuației (8), care satisface condițiile inițiale:

$$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y'_0, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)},\ x_0 \in I \qquad (15)$$

Pentru a deduce că soluția (14) este soluția generală a ecuației (8) trebuie să arătăm că putem determina constantele $C_1, C_2, \ldots, C_n$ astfel încît condițiile inițiale (15) să fie îndeplinite. Pentru determinarea lor avem sistemul de ecuații liniare în $C_1, C_2, \ldots, C_n$:

$$\begin{aligned} &C_1y_1(x_0) + C_2y_2(x_0) + \ldots + C_ny_n(x_0) = y_0 \\ &C_1y'_1(x_0) + C_2y'_2(x_0) + \ldots + C_ny'_n(x_0) = y'_0 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &C_1y_1^{(n-1)}(x_0) + C_2y_2^{(n-1)}(x_0) + \ldots + C_ny_n^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} \end{aligned}$$

Determinantul sistemului (16) este tocmai Wronskianul $W(y_1, \ldots, y_n)$ calculat din punctul x_0 care prin ipoteză este diferit de zero și deci sistemul (16) are soluție unică. Teorema este demonstrată.

Exemplul 1. Ecuația $y'' - y = 0$ are două soluții liniar independente $y_1 = e^x$ și $y_2 = e^{-x}$. Soluția generală este $y = C_1e^x + C_2e^{-x}$.

Exemplul 2. Ecuația $y''' + y' = 0$ are trei soluții liniar independente $y_1 = 1$, $y_2 = \cos x$, $y_3 = \sin x$ și deci soluția generală este

$$y = C_1 + C_2 \cos x + C_3 \sin x.$$

Observația 1. Din teorema 2 rezultă că numărul maxim de soluții liniar independente pe I pentru ecuația diferențială liniară și omogenă (8) este egal cu n.

Observaţia 2. Tot din teorema 2.2 rezultă că problema integrării unei ecuaţii diferenţiale liniare şi omogene (8) se reduce la găsirea a n soluţii ale ecuaţiei (8) care să formeze un sistem fundamental de soluţii pe I.

Observaţia 3. Dacă se cunoaşte o soluţie $y_1 \neq 0$ a ecuaţiei diferenţiale (8) atunci prin schimbarea de variabilă

$$y = y_1 \int u(x)\, dx$$

ordinul ecuaţiei (8) se reduce cu o unitate.

Exemplu. Să se afle soluţia ecuaţiei generală a ecuaţiei

$$xy'' - xy' + y = 0$$

ştiind că $y_1 = x$ este o soluţie a acestei ecuaţii.

Facem schimbarea de variabilă

$$y = x\int u\, dx; \text{ deci } y' = xu + \int u\, dx;$$

$$y'' = xu' + 2u$$

După înlocuire în ecuaţia dată obţinem

$$x^2u' + (2 - x)\,xu = 0 \text{ sau}$$

$$\frac{du}{u} = \frac{x - 2}{x}\, dx;\; u = C_1 \frac{e^x}{x^2};$$

$$y = x\int u\, dx = x\left(C_1 \int \frac{e^x}{x^2}\, dx + C_2\right)$$

§ 3. SOLUŢIA GENERALĂ A ECUAŢIEI $L(y) = f(x)$

Fie ecuaţia diferenţială de ordinul n liniară şi neomogenă

$$L(y) = y^{(n)} + a_1(x)\, y^{(n-1)} + a_2(x)\, y^{(n-2)} + \ldots +$$

$$+ a_{n-1}(x)\, y' + a_n(x)\, y = f(x) \qquad (1)$$

unde funcţiile reale $a_1, a_2, \ldots, a_n$ (coeficienţii ecuaţiei) şi funcţia f (termenul liber) sînt definite şi continue pe un acelaşi interval $I \subseteq \mathbf{R}$. În aceste condiţii avem

Teorema 3.1. Soluţia generală a ecuaţiei (1) se obţine adăugind la soluţia generală a ecuaţiei omogene $L(y) = 0$ o soluţie particulară, oarecare a ecuaţiei neomogene (1).

Demonstrație. Fie y_p o soluție particulară a ecuației neomogene (1), deci

$$L(y_p) = f(x), \quad x \in I$$

Facem schimbarea de variabilă $y = z + y_p$. Ținînd cont de liniaritatea operatorului L

$$L(z) + L(y_p) = f(x)$$

și de faptul că

$$L(y_p) = f(x)$$

avem

$$L(z) = 0$$

Ecuația $L(y) = 0$ (sau $L(z) = 0$) se numește ecuația omogenă atașată ecuației neomogene (1).

Dacă $y_1, y_2, \ldots, y_n$ este un sistem fundamental de soluții ale ecuației omogene $L(y) = 0$, pe intervalul I, atunci soluția generală a ecuației neomogene (1) este

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n + y_p \qquad (17)$$

În adevăr, dacă ținem seama de definiția soluției generale pentru o ecuație diferențială de ordinul n și dacă folosim procedeul dat în demonstrația teoremei 1.2, rezultă că funcția y dată la (17) este soluția generală a ecuației (1).

Observație. Dacă membrul drept al ecuației (1) este de forma

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x),$$

dacă y_{1p} și y_{2p} sînt, respectiv, soluții particulare ale ecuațiilor

$$L(y) = f_1(x); \quad L(y) = f_2(x)$$

atunci funcția $y_{1p} + y_{2p}$ este o soluție particulară a ecuației

$$L(y) = f(x) \qquad (1)$$

În adevăr, avem

$$L(y_{1p}) = f_1(x) \text{ și } L(y_{2p}) = f_2(x)$$

Dar

$$L(y_{1p} + y_{2p}) = L(y_{1p}) + L(y_{2p})$$

și deci

$$L(y_{1p} + y_{2p}) = f_1(x) + f_2(x)$$

Ultima egalitate arată că $y_{1p} + y_{2p}$ este o soluție a ecuației (1). Un rezultat asemănător se obține în cazul în care

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_k(x)$$

Din teorema 1.3 rezultă că pentru aflarea soluției generale a ecuației neomogene

$$L(y) = y^{(n)} + a_1(x) y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x) y' + a_n(x) y = f(x) \qquad (1)$$

este soluţia, dacă cunoaştem un sistem fundamental de soluţii ale ecuaţiei omogene

$$L(y) = 0$$

şi o soluţie particulară a ecuaţiei neomogene (1).

Aflarea unei soluţii particulare a ecuaţiei neomogene (1) este o problemă în general dificilă. În unele cazuri, pe care le vom vedea mai departe o astfel de soluţie se poate obţine destul de simplu. Dacă nu cunoaştem o soluţie particulară a ecuaţiei (1) dar cunoaştem soluţia generală a ecuaţiei omogene $L(y) = 0$, atunci se poate afla soluţia generală a ecuaţiei neomogene (1) prin metoda variaţiei constantelor a lui Lagrange. Vom arăta că soluţia generală a ecuaţiei neomogene (1) se obţine cu ajutorul acestei metode prin n cuadraturi.

Fie $y_1, y_2, \ldots, y_n$ un sistem fundamental de soluţii ale ecuaţiei omogene $L(y) = 0$, atunci soluţia ei generală este

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \ldots + C_n y_n(x) \tag{18}$$

Vom căuta soluţia generală a ecuaţiei neomogene (1) de aceeaşi formă cu soluţia generală a ecuaţiei omogene înlocuind constantele $C_1, C_2, \ldots, C_n$ cu funcţii derivabile depinzînd de x. Notăm aceste funcţii cu

$$C_1(x), C_2(x), \ldots, C_n(x), \; x \in I$$

Prin urmare soluţia generală a ecuaţiei (1) o căutăm de forma

$$y = C_1(x) y_1(x) + C_2(x) y_2(x) + \ldots + C_n(x) y_n(x) \tag{19}$$

Vom impune funcţiei dată de (19) să verifice ecuaţia (1). Pentru aflarea funcţiilor $C_i(x)$ $(i = 1, \ldots, n)$ mai trebuie impuse încă $n - 1$ condiţii. Aceste condiţii constau în aceea că primele $n - 1$ derivate ale funcţiei (19) să nu conţină pe $C_1'(x), C_2'(x), \ldots, C_n'(x)$;
atunci avem

$$y = \sum_{i=1}^{n} C_i(x) y_i$$

$$y' = \sum_{i=1}^{n} C_i(x) y_i' + \underbrace{\sum_{i=1}^{n} C_i'(x) y_i}_{0}$$

$$y'' = \sum_{i=1}^{n} C_i(x) y_i'' + \underbrace{\sum_{i=1}^{n} C_i'(x) y_i'}_{0} \tag{20}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$y^{(n-1)} = \sum_{i=1}^{n} C_i(x) y_i^{(n-1)} + \underbrace{\sum_{i=1}^{n} C_i'(x) y_i^{(n-2)}}_{0}$$

Atunci

$$y^{(n)} = \sum_{i=1}^{n} C_i y_i^{(n)} + \sum_{i=1}^{n} C_i'(x) y_i^{(n-1)}.$$

Înlocuim aceste valori ale lui $y, y', \ldots, y^{(n)}$ în ecuația (1) și obținem

$$\sum_{i=1}^{n} C_i \left[y_i^{(n)} + a_1 y_i^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} y_i' + a_n y_i\right] + \sum_{i=1}^{n} C_i'(x) y_i^{(n-1)} = f(x)$$

sau

$$\sum_{i=1}^{n} C_i L(y_i) + \sum_{i=1}^{n} C_i'(x) y_i^{(n-1)} = f(x).$$

Am presupus pe $y_1, y_2, \ldots, y_n$ soluții ale ecuației omogene $L(y) = 0$, și deci $L(y_i) = 0$, $i = 1, \ldots, n$; atunci din ultima egalitate obținem

$$\sum_{i=1}^{n} C_i'(x) y_i^{(n-1)} = f(x). \tag{21}$$

Condițiile impuse la (20) împreună cu ecuația (21) ne dau pentru funcțiile $C_i'(x)$ $(i = 1, \ldots, n)$ un sistem de n ecuații diferențiale de ordinul întîi

$$\begin{aligned} &C_1'(x) y_1 + C_2'(x) y_2 + \ldots + C_n'(x) y_n = 0 \\ &C_1'(x) y_1' + C_2'(x) y_2' + \ldots + C_n'(x) y_n' = 0 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &C_1'(x) y_1^{(n-2)} + C_2'(x) y_2^{(n-2)} + \ldots + C_n'(x) y_n^{(n-2)} = 0 \\ &C_1'(x) y_1^{(n-1)} + C_2'(x) y_2^{(n-1)} + \ldots + C_n'(x) y_n^{(n-1)} = f(x) \end{aligned} \tag{22}$$

Sistemul (22) poate fi considerat ca un sistem algebric liniar și neomogen de n ecuații cu necunoscutele $C_i'(x)$, $i = 1, \ldots, n$. Determinantul acestui sistem este $W(y_1, y_2, \ldots, y_n) \neq 0$ pe I, deci sistemul (22) are soluție unică și fie

$$C_i'(x) = \varphi_i(x), \quad i = 1, \ldots, n, \quad x \in I \tag{23}$$

soluția acestui sistem. Din (23) obținem

$$C_i(x) = \int \varphi_i(x)\,dx + A_i; \quad A_i \text{ constante.}$$

Dacă înlocuim pe $C_i(x)$ în (19) obținem soluția generală a ecuației (1),

$$y = \sum_{i=1}^{n}\left(A_i + \int \varphi_i(x)\,dx\right) y_i = \sum_{i=1}^{n} A_i y_i + \sum_{i=1}^{n} y_i \int \varphi_i(x)\,dx. \tag{24}$$

Exemplul 1. Să se afle soluția generală a ecuației

$$y'' + y = \frac{1}{\cos x}, \quad x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$$

știind că $y_1 = \cos x$ și $y_2 = \sin x$ sînt două soluții ale ecuației omogene $y'' + y = 0$.

Soluţia generală a ecuaţiei $y'' + y = 0$ este

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$$

Sistemul (22) devine în acest caz

$$C_1'(x) \cos x + C_2'(x) \sin x = 0$$

$$-C_1'(x) \sin x + C_2'(x) \cos x = \frac{1}{\cos x}$$

de unde obţinem:

$$C_1'(x) = -\operatorname{tg} x; \; C_2'(x) = 1$$

deci

$$C_1(x) = k_1 + \ln |\cos x|; \; C_2(x) = k_2 + x.$$

Soluţia generală a ecuaţiei date este

$$y = k_1 \cos x + k_2 \sin x + (\cos x) \ln |\cos x| - x \sin x$$

Exemplu 2. Să se afle soluţia generală a ecuaţiei

$$y'' + a^2 y = f(x), \; x \in I, \; a \neq 0$$

ştiind că $y_1 = \cos ax$ şi $y_2 = \sin ax$ sînt două soluţii ale ecuaţiei omogene $y'' + a^2 y = 0$.

Soluţia generală a ecuaţiei omogene este

$$y = C_1 \cos ax + C_2 \sin ax$$

În acest caz sistemul (22) devine

$$C_1'(x) \cos ax + C_2'(x) \sin ax = 0$$

$$-aC_1'(x) \sin ax + aC_2'(x) \cos ax = f(x)$$

de unde obţinem:

$$C_1'(x) = -\frac{1}{a} f(x) \sin ax; \; C_2'(x) = \frac{1}{a} f(x) \cos ax$$

deci

$$C_1(x) = k_1 - \frac{1}{a} \int f(x) \sin ax \, dx;$$

$$C_2(x) = k_2 + \frac{1}{a} \int f(x) \cos ax \, dx$$

Soluţia generală a ecuaţiei date este

$$y = k_1 \cos ax + k_2 \sin ax - \frac{\cos ax}{a} \int f(x) \sin ax \, dx +$$

$$+ \frac{\sin ax}{a} \int f(x) \cos ax \, dx$$

care se mai poate pune şi sub forma

$$y = k_1 \cos ax + k_2 \sin ax + \frac{1}{a}\int_{x_0}^{x} f(t)\sin a(x-t)\,dt;\ x_0 \in I$$

§ 4. ECUAŢII DIFERENŢIALE LINIARE OMOGENE CU COEFICIENŢI CONSTANŢI

Sînt ecuaţii de forma

$$L(y) = y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = 0 \tag{25}$$

unde $a_i (i = 1, \ldots, n)$ sînt constante reale. Este evident că teoremele generale asupra ecuaţiilor liniare se aplică şi în acest caz. În particular, teorema de existenţă şi unicitate se aplică întocmai dacă ţinem seama de faptul că a_i sînt funcţii constante şi deci continue pe $\mathbf{R}$. Putem deci afirma că oricare ar fi $x_0 \in \mathbf{R}$ şi oricare ar fi $y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)}$, există o singură soluţie y a ecuaţiei (25) care satisface condiţiile iniţiale:

$$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_0', \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$$

Am văzut în teorema 2.2. că rezolvarea unei ecuaţii diferenţiale de ordinul n liniară şi omogenă revine la aflarea unui sistem fundamental de soluţii. În continuare vom arăta cum se face acest lucru în cazul unei ecuaţii cu coeficienţi constanţi. În acest scop folosim metoda lui Euler. Căutăm pentru ecuaţia (25) soluţii de forma

$$y = e^{rx},\ r \text{ constant} \tag{26}$$

Avem

$$y^{(k)} = r^k e^{rx}$$

şi dacă înlocuim în ecuaţia (25) obţinem

$$L(e^{rx}) = e^{rx}(r^n + a_1 r^{n-1} + \ldots + a_{n-1} r + a_n) = 0 \tag{27}$$

deoarece $e^{rx} \neq 0$ $(\forall)\ x \in \mathbf{R}$, din (27) deducem

$$r^n + a_1 r^{n-1} + \ldots + a_{n-1} r + a_n = 0 \tag{28}$$

Prin urmare numărul r trebuie să fie rădăcină a ecuaţiei algebrice (28) care se numeşte ecuaţia caracteristică a ecuaţiei diferenţiale (25).

Polinomul

$$k(r) = r^n + a_1 r^{n-1} + \ldots + a_{n-1} r + a_n \tag{29}$$

se numeşte polinomul caracteristic al ecuaţiei (25) şi este evident că are loc egalitatea

$$L(e^{rx}) = e^{rx} k(r) \tag{30}$$

Deci pentru integrarea unei ecuaţii diferenţiale liniare cu coeficienţi (reali) constanţi, trebuie să ţinem seama de natura rădăcinilor ecuaţiei caracteristice $k(r) = 0$.

a) Ecuaţia caracteristică are rădăcini reale şi distincte. Fie $r_1, r_2, \ldots, r_n$ aceste rădăcini, atunci

$$y_1 = e^{r_1 x},\ y_2 = e^{r_2 x}, \ldots, y_n = e^{r_n x}$$

formează un sistem fundamental de soluţii. În adevăr, avem

$$W(y_1, \ldots, y_n) = \begin{vmatrix} e^{r_1 x} & e^{r_2 x} & \ldots & e^{r_n x} \\ r_1 e^{r_1 x} & r_2 e^{r_2 x} & \ldots & r_n e^{r_n x} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ r_1^{n-1} e^{r_1 x} & r_2^{n-1} e^{r_2 x} & \ldots & r_n^{n-1} e^{r_n x} \end{vmatrix} =$$

$$= e^{(r_1 + \ldots + r_n)x} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ r_1 & r_2 & \ldots & r_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ r_1^{n-1} & r_2^{n-1} & \ldots & r_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

Ultimul determinant este determinantul lui Vandermonde şi este diferit de zero deoarece numerele r_i $(i = 1, \ldots, n)$ au fost presupuse distincte. În acest caz soluţia generală a ecuaţiei (25) este:

$$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x} + \ldots + C_n e^{r_n x}$$

Exemplul 1. Să se afle soluţia generală a ecuaţiei

$$y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0$$

Ecuaţia caracteristică este

$$r^3 - 6r^2 + 11r - 6 = 0$$

şi are rădăcinile $r_1 = 1$, $r_2 = 2$, $r_3 = 3$. Soluţia generală este

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + C_3 e^{3x}$$

Exemplul 2.

$$y''' - 3y'' + 2y' = 0$$

În acest caz ecuaţia caracteristică este

$$r^3 - 3r^2 + 2r = 0$$

şi are rădăcinile $r_1 = 0$, $r_2 = 1$, $r_3 = 2$. Soluţia generală este

$$y = C_1 + C_2 e^x + C_3 e^{2x}$$

b) Ecuaţia caracteristică are rădăcini reale multiple. În acest caz are loc

Teorema 7.7. Dacă ecuaţia caracteristică $K(r) = 0$ are o rădăcină reală $r = \alpha$ multiplă cu ordinul de multiplicitate p, atunci funcţiile

$$e^{\alpha x},\ x e^{\alpha x},\ x^2 e^{\alpha x}, \ldots, x^{p-1} e^{\alpha x},\ x \in \mathbf{R}$$

sînt soluţii liniar independente ale ecuaţiei (25).

Demonstrație. Vom demonstra mai întîi următoarea identitate

$$L(e^{r_1x}z) = e^{r_1x}\left[K(r_1)z + \frac{K'(r_1)}{1!}z' + \dots + \frac{K^{(n)}(r_1)}{n!}z^{(n)}\right] \qquad (30)$$

unde z este o funcție derivabilă de n ori și $K(r)$ este polinomul caracteristic. Derivatele succesive ale produsului $e^{r_1x}z$ se calculează cu ajutorul formulei lui Leibniz pentru derivata de ordinul n a unui produs de funcții și obținem

$$y = e^{r_1x}z,\quad y' = e^{r_1x}(r_1z + z'),\quad y'' = e^{r_1x}(r_1^2z + 2r_1z' + z''),\ \dots,$$

$$y^{(n)} = e^{r_1x}(r_1^nz + C_n^1r_1^{n-1}z' + C_n^2r_1^{n-2}z'' + \dots + C_n^nz^{(n)}).$$

Avem

$$L(e^{r_1x}z) = (e^{r_1x}z)^{(n)} + a_1(e^{r_1x}z)^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(e^{r_1x}z)' + a_ne^{r_1x}z =$$

$$= e^{r_1x}(r_1^nz + C_n^1r_1^{n-1}z' + C_n^2r_1^{n-2}z'' + \dots + C_n^nz^{(n)}) +$$

$$+ a_1e^{r_1x}(r_1^{n-1}z + C_{n-1}^1r_1^{n-2}z' + C_{n-1}^2r_1^{n-3}z'' + \dots + C_{n-1}^{n-1}z^{(n-1)}) +$$

$$+ a_2e^{r_1x}(r_1^{n-2}z + C_{n-2}^1r_1^{n-3}z' + C_{n-2}^2r_1^{n-4}z'' + \dots + C_{n-2}^{n-2}z^{(n-2)}) +$$

. . . .

$$+ a_{n-1}e^{r_1x}(r_1z + z') + a_ne^{r_1x}z,$$

și dacă ordonăm după $z, z', z'', \dots, z^{(n-1)}, z^{(n)}$ obținem

$$L(e^{r_1x}z) = e^{r_1x}(r_1^n + a_1r_1^{n-1} + a_2r_1^{n-2} + \dots + a_{n-1}r_1 + a_n)z +$$

$$+ \frac{1}{1!}e^{r_1x}[nr_1^{n-1} + a_1(n-1)r_1^{n-2} + \dots + 1\cdot a_{n-1}]z' +$$

$$+ \frac{1}{2!}e^{r_1x}[n(n-1)r_1^{n-2} + a_1(n-1)(n-2)r_1^{n-3} + \dots + 2\cdot 1a_{n-2}]z'' +$$

. . . .

$$+ \frac{1}{n!}e^{r_1x}n(n-1)\dots 2\cdot 1z^{(n)} = e^{r_1x}\left[K(r_1)z + \frac{K'(r_1)}{1!}z' + \dots + \frac{K^{(n)}(r_1)}{n!}z^{(n)}\right]$$

Deoarece $r = r_1$ a fost presupusă rădăcină multiplă de ordinul p a ecuației $K(r) = 0$ rezultă

$$K(r_1) = K'(r_1) = \dots = K^{(p-1)}(r_1) = 0 \text{ și } K^{(p)}(r_1) \neq 0$$

și identitatea (30) devine

$$L(e^{r_1x}z) = e^{r_1x}\left[\frac{K^{(p)}(r_1)}{p!}z^{(p)} + \dots + \frac{K^{(n)}(r_1)}{n!}z^{(n)}\right] \qquad (31)$$

Dacă înlocuim pe z cu $1, x, \dots, x^{p-1}$ avem evident

$$L(e^{r_1x}) = 0,\quad L(xe^{r_1x}) = 0,\ \dots,\ L(x^{p-1}e^{r_1x}) = 0$$

adică funcțiile din enunțul teoremei sînt soluții ale ecuației (25). Ele sînt liniar independente pe $\mathbf{R}$ căci dacă egalitatea

$$\lambda_1 e^{rx} + \lambda_2 x e^{rx} + \ldots + \lambda_p x^{p-1} e^{rx} = 0 \tag{32}$$

are loc pentru orice $x \in \mathbf{R}$ atunci are loc și egalitatea

$$\lambda_1 + \lambda_2 x + \ldots + \lambda_p x^{p-1} = 0$$

pentru orice $x \in \mathbf{R}$. Am arătat că funcțiile

$$1, x, x^2, \ldots, x^{p-1}$$

sînt liniar independente pe $\mathbf{R}$ și deci $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_p = 0$. Prin urmare egalitatea (32) are loc pentru orice $x \in \mathbf{R}$, numai dacă $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_p = 0$, adică funcțiile considerate sînt liniar independente și teorema este demonstrată.

Exemplu. Să se afle soluția generală a ecuației diferențiale

$$y''' + 3y'' + 3y' + y = 0.$$

În acest caz ecuația caracteristică este

$$r^3 + 3r^2 + 3r + 1 = 0 \text{ sau } (r + 1)^3 = 0, \text{ deci}$$

$$r_1 = r_2 = r_3 = -1.$$

Avem $r = -1$ rădăcină triplă, $p = 3$. Soluțiile

$$y_1 = e^{-x}, \; y_2 = xe^{-x} \text{ și } y_3 = x^2 e^{-x}$$

formează un sistem fundamental, soluția generală este

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x} + C_3 x^2 e^{-x}.$$

În cazul în care ecuația caracteristică $K(r) = 0$ are toate rădăcinile reale, problema aflării soluției generale a ecuației diferențiale (25) se rezolvă cu ajutorul rezultatelor stabilite la cazurile a) și b). Să presupunem că ecuația caracteristică are m rădăcini distincte:

$$r_1 \text{ multiplă de ordinul } p_1$$

$$r_2 \text{ multiplă de ordinul } p_2$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$r_m \text{ multiplă de ordinul } p_m$$

unde $p_1 + p_2 + \ldots + p_m = n$ și $p_i \geq 1$ $(i = 1, \ldots, m)$.

În baza teoremei 1.4. ecuația (25) are soluțiile

$$e^{r_1 x}, \; xe^{r_1 x}, \ldots, x^{p_1 - 1} e^{r_1 x}$$

$$e^{r_2 x}, \; xe^{r_2 x}, \ldots, x^{p_2 - 1} e^{r_2 x}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$e^{r_m x}, \; xe^{r_m x}, \ldots, x^{p_m - 1} e^{r_m x}$$

pe prima linie am scris soluțiile care corespund rădăcinii r_1, pe linia a doua am scris soluțiile corespunzătoare rădăcinii r_2 ș.a.m.d. Dacă ținem seama de exercițiul 5 de la §1 cap. XIV rezultă că aceste soluții sînt liniar independente pe $\mathbf{R}$ și deci soluția generală se află imediat.

Exemplu. Să se afle soluția generală a ecuației diferențiale

$$y''' - 7y'' + 16y' - 12y = 0$$

Ecuația caracteristică

$$r^3 - 7r^2 + 16r - 12 = 0$$

și are rădăcinile $r_1 = 3$; $r_2 = 2 = r_3$. În acest caz $m = 2$.

$$r_1 = 3 \text{ rădăcină simplă}; \ p_1 = 1$$

$$r_2 = 2 \text{ rădăcină dublă}; \ p_2 = 2$$

Funcțiile e^{3x}, e^{2x}, xe^{2x} formează un sistem fundamental de soluții pentru ecuația dată și deci soluția generală este

$$y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{2x} + C_3 x e^{2x}$$

c) Ecuația caracteristică are rădăcini complexe. În acest caz are loc

Teorema 2.5. Dacă $r_1 = \alpha + i\beta$ este o rădăcină complexă a ecuației caracteristice $k(r) = 0$, multiplă de ordinul p, (eventual simplă) atunci ecuația diferențială (25) are soluțiile liniar independente

$$\begin{array}{ll} e^{\alpha x} \cos \beta x & e^{\alpha x} \sin \beta x \\ x e^{\alpha x} \cos \beta x & x e^{\alpha x} \sin \beta x \\ \dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots \\ x^{p-1} e^{\alpha x} \cos \beta x & x^{p-1} e^{\alpha x} \sin \beta x \end{array}$$

Demonstrație. Într-adevăr, dacă ecuația $k(r) = 0$ cu coeficienți reali, are o rădăcină complexă $r_1 = \alpha + i\beta$ multiplă de ordinul p atunci și $r_2 = \alpha - i\beta$ este o rădăcină multiplă de ordinul p a ecuației $k(r) = 0$. Se arată exact ca și în cazul rădăcinilor reale multiple că celor două rădăcini complexe le corespund pentru ecuația diferențială (25) următoarele soluții (funcții complexe)

$$\begin{array}{ll} e^{(\alpha+i\beta)x} & e^{(\alpha-i\beta)x} \\ x e^{(\alpha+i\beta)x} & x e^{(\alpha-i\beta)x} \\ \dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots \\ x^{p-1} e^{(\alpha+i\beta)x} & x^{p-1} e^{(\alpha-i\beta)x} \end{array}$$

sau dacă folosim formulele lui Euler, obținem

$$\begin{array}{ll} e^{\alpha x}(\cos \beta x + i \sin \beta x); & e^{\alpha x}(\cos \beta x - i \sin \beta x) \\ x e^{\alpha x}(\cos \beta x + i \sin \beta x); & x e^{\alpha x}(\cos \beta x - i \sin \beta x) \\ \dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots \\ x^{p-1} e^{\alpha x}(\cos \beta x + i \sin \beta x); & x^{p-1} e^{\alpha x}(\cos \beta x - i \sin \beta x) \end{array}$$

Avem deci

$$L(x^k e^{\alpha x}\cos\beta x) + iL(x^k e^{\alpha x}\sin\beta x) = 0, \quad k = 0, 1, \ldots, p-1.$$

Dacă folosim teorema 4.1. rezultă că funcțiile reale

$$x^k e^{\alpha x}\cos\beta x;\ x^k e^{\alpha x}\sin\beta x, \quad k = 0, 1, \ldots, p-1$$

sînt soluții ale ecuației (25). Se arată că aceste soluții sînt liniar independente.

Exemplu 1. Să se afle soluția generală a ecuației

$$y'' - 4y' + 5y = 0.$$

În acest caz ecuația caracteristică este

$$r^2 - 4r + 5 = 0$$

și are rădăcini simple ($p = 1$) $r_1 = 2 + i$; $r_2 = 2 - i$; deci $\alpha = 2$; $\beta = 1$ și soluția generală este

$$y = C_1 e^{2x}\cos x + C_2 e^{2x}\sin x.$$

Exemplu 2.

$$y'' + a^2 y = 0.$$

În acest caz ecuația caracteristică este

$$r^2 + a^2 = 0$$

cu $r_1 = ia$; $r_2 = -ia$; avem $\alpha = 0$, $\beta = a$ și soluția generală este

$$y = C_1\cos ax + C_2\sin ax.$$

Exemplu 3.

$$y^{(IV)} + 8y'' + 16y = 0.$$

Ecuația caracteristică atașată este

$$r^4 + 8r^2 + 16 = 0 \text{ sau } (r^2 + 4)^2 = 0.$$

Rădăcinile ei sînt

$$r_1 = r_2 = 2i;\ r_3 = r_4 = -2i.$$

Deci $\alpha = 0$; $\beta = 2$; $p = 2$. Soluția generală este

$$y = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x + C_3 x\cos 2x + C_4 x\sin 2x.$$

d) În cazul în care ecuația caracteristică $K(r) = 0$ are și rădăcini reale și rădăcini complexe, simple sau multiple, atunci soluția generală a ecuației diferențiale (25) se află în felul următor: pentru fiecare rădăcină a ecuației caracteristice construim soluțiile corespunzătoare ecuației diferențiale (25) așa cum s-a arătat în cazurile a), b) și c).

Obținem în acest mod pentru ecuația diferențială (25) n soluții

$$y_1, y_2, \ldots, y_n$$

liniar independente pe $\mathbf{R}$ și deci soluția sa generală va fi

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n.$$

Exemplul 1. Să se afle soluția generală a ecuației diferențiale

$$y^{IV} - 4y''' + 5y'' - 4y' + 4y = 0.$$

Ecuația caracteristică

$$r^4 - 4r^3 + 5r^2 - 4r + 4 = 0$$

are rădăcinile $r_1 = r_2 = 2$, $r_3 = i$, $r_4 = -i$ și deci funcțiile

$$y_1 = e^{2x},\ y_2 = xe^{2x},\ y_3 = \cos x,\ y_4 = \sin x$$

formează un sistem fundamental de soluții. Soluția generală este

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 xe^{2x} + C_3 \cos x + C_4 \sin x.$$

Exemplul 2. Să se afle soluția generală a ecuației diferențiale

$$y^{V} - 2y^{IV} + 8y''' - 16y'' + 16y' - 32y = 0.$$

Ecuația caracteristică

$$r^5 - 2r^4 + 8r^3 - 16r^2 + 16r - 32 = 0$$

are rădăcinile

$$r_1 = 2;\ r_2 = r_3 = 2i,\ r_4 = r_5 = -2i$$

și deci funcțiile

$$y_1 = e^{2x},\ y_2 = \sin 2x,\ y_3 = \cos 2x,$$

$$y_4 = x\cos 2x,\ y_5 = x\sin 2x$$

formează un sistem fundamental de soluții. Soluția generală este

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 \sin 2x + C_3 \cos 2x + C_4 x\cos 2x + C_5 x\sin 2x.$$

§ 5. ECUAȚII DIFERENȚIALE LINIARE CU COEFICIENȚI CONSTANȚI, NEOMOGENE

Sînt de forma

$$L(y) = y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = f(x) \qquad (33)$$

unde $a_i (i = 1, \ldots, n)$ sînt constante reale iar f este o funcție reală definită și continuă pe un interval $I \subseteq \mathbf{R}$.

Am văzut că soluţia generală a unei astfel de ecuaţii este egală cu suma dintre soluţia generală a ecuaţiei omogene $L(y) = 0$ şi o soluţie particulară y_p.

O soluţie particulară se poate găsi prin metoda variaţiei constantelor, metodă care se aplică şi în acest caz. În anumite cazuri se poate găsi o soluţie particulară printr-un simplu calcul algebric. Menţionăm în continuare câteva dintre ele.

a) Funcţia f este un polinom de gradul m, adică

$$f(x) = b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \ldots + b_m \tag{34}$$

Dacă $a_n \neq 0$ ecuaţia diferenţială (33) are o soluţie particulară de forma

$$y_p = \lambda_0 x^m + \lambda_1 x^{m-1} + \ldots + \lambda_m \tag{35}$$

coeficienţii $\lambda_i (i = 0, 1, \ldots, m)$ determinându-se prin identificare. În adevăr, dacă înlocuim soluţia (35) în ecuaţia

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \ldots + b_m$$

şi identificăm, obţinem sistemul

$$\begin{aligned} &a_n \lambda_0 = b_0 \\ &a_n \lambda_1 + m a_{n-1} \lambda_0 = b_1 \\ &a_n \lambda_2 + (m-1) a_{n-1} \lambda_1 + m(m-1) a_{n-2} \lambda_0 = b_2 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

care permite aflarea coeficienţilor $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_m$.

Exemplu. Să se afle soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale

$$y'' + y = x^2 + x$$

Soluţia particulară este de forma

$$y_p = \lambda_0 x^2 + \lambda_1 x + \lambda_2$$

Înlocuim în ecuaţia dată şi obţinem

$$\lambda_0 x^2 + \lambda_1 x + 2\lambda_0 + \lambda_2 = x^2 + x$$

Prin identificare obţinem

$$\lambda_0 = 1, \lambda_1 = 1, \lambda_2 = -2$$

Soluţia generală a ecuaţiei omogene

$$y'' + y = 0$$

este $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$ şi deci soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale date este

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + x^2 + x - 2$$

b) Funcţia f este un polinom de gradul m, adică

$$f(x) = b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \ldots + b_m$$

și dacă $a_n = a_{n-1} = \dots = a_{n-p+1} = 0$ iar $a_{n-p} \neq 0$, atunci ecuația diferențială (35) are o soluție particulară de forma

$$y_p = x^p(\lambda_0 x^m + \lambda_1 x^{m-1} + \dots + \lambda_m) \tag{36}$$

coeficienții $\lambda_i\,(i = 0, 1, \dots, m)$ determinîndu-se prin identificare. În adevăr, dacă luăm ca nouă funcție necunoscută pe

$$z = y^{(p)}$$

atunci ecuația (35) devine

$$z^{(n-p)} + a_1 z^{(n-p-1)} + \dots + a_{n-p} z = b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \dots + b_m \tag{37}$$

Aplicăm rezultatul stabilit la cazul a) și deci ecuația (37) admite o soluție particulară de forma

$$z_p = \nu_0 x^m + \nu_1 x^{m-1} + \dots + \nu_m$$

Integrînd aici de p ori și neglijînd constanta de integrare de fiecare dată, obținem (36).

Exemplu. Să se afle soluția generală a ecuației diferențiale

$$y'' + y' = x - 2$$

Soluția particulară este de forma

$$y_p = x(\lambda_0 x + \lambda_1)$$

Dacă înlocuim în ecuația dată și identificăm, obținem

$$\lambda_0 = \frac{1}{2} \text{ și } \lambda_1 = -3,$$

deci soluția generală este

$$y = C_1 + C_2 e^{-x} + x\left(\frac{x}{2} - 3\right)$$

c) Funcția f este de forma

$$f(x) = e^{\alpha x}(b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \dots + b_m) \tag{38}$$

Dacă α nu este rădăcină a ecuației caracteristice $F(r) = 0$ atunci ecuația diferențială (35) are o soluție particulară de forma

$$y_p = e^{\alpha x}(\lambda_0 x^m + \lambda_1 x^{m-1} + \dots + \lambda_m)$$

Dacă α este o rădăcină multiplă de ordinul p a ecuației caracteristice $F(r) = 0$, atunci ecuația diferențială (35) are o soluție particulară de forma

$$y_p = x^p e^{\alpha x}(\lambda_0 x^m + \lambda_1 x^{m-1} + \dots + \lambda_m)$$

Coeficienții $\lambda_i\,(i = 0, 1, \dots, m)$ se determină prin identificare. În adevăr, în acest caz ecuația (35) devine

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = e^{\alpha x}(b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \dots + b_m) \tag{39}$$

În ecuația (39) facem schimbarea de variabilă

$$y = z e^{\alpha x}$$

unde z este noua funcție necunoscută și ținem seama de identitatea (50).
Simplificăm cu $e^{\alpha x}$ și obținem ecuația

$$z^{(n)} + \frac{f^{(n-1)}(\alpha)}{(n-1)!} z^{(n-1)} + \ldots + \frac{f'(\alpha)}{1!} z' + f(\alpha) z = A_0 x^m + \ldots + A_m$$

Dacă aplicăm rezultatele stabilite la punctele a) și b) obținem rezultatele enunțate la acest punct.

Exemplu 1. Să se afle soluția generală a ecuației

$$y'' - y = x e^{2x}$$

Ecuația caracteristică este

$$r^2 - 1 = 0$$

și are rădăcinile $r_1 = 1$, $r_2 = -1$, deci $\alpha = 2$ nu este rădăcină a ecuației caracteristice. Soluția particulară este de forma

$$y_p = (\lambda_0 x + \lambda_1) e^{2x}$$

Dacă înlocuim în ecuația dată și identificăm obținem,

$$\lambda_0 = \frac{1}{3} \text{ și } \lambda_1 = -\frac{4}{9}$$

soluția generală este

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + \left(\frac{x}{3} - \frac{4}{9}\right) e^{2x}$$

Exemplu 2.

$$y'' - y = x e^x$$

În acest caz $\alpha = 1$ este rădăcină a ecuației caracteristice.
Soluția particulară este de forma

$$y_p = x e^x(\lambda_0 x + \lambda_1) = e^x(\lambda_0 x^2 + \lambda_1 x)$$

Dacă înlocuim în ecuația dată obținem

$$\lambda_0 = \frac{1}{4}, \quad \lambda_1 = -\frac{1}{4}$$

și deci soluția generală a ecuației considerate este

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + x e^x\left(\frac{x}{4} - \frac{1}{4}\right)$$

d) Funcţia f are una din următoarele două forme:

$$f(x) = e^{\alpha x}(C_0x^m + C_1x^{m-1} + \dots + C_m)\cos\beta x;\quad \beta\neq 0$$

sau

$$f(x) = e^{\alpha x}(C_0x^m + C_1x^{m-1} + \dots + C_m)\sin\beta x;\quad \beta\neq 0$$

Dacă $\alpha + i\beta$ nu este rădăcină a ecuaţiei caracteristice $k(r) = 0$ atunci ecuaţia diferenţială (33) are o soluţie particulară de forma

$$y_p = e^{\alpha x}\,(Q_1(x)\cos\beta x + Q_2(x)\sin\beta x), \tag{40}$$

unde $Q_1(x)$ şi $Q_2(x)$ sînt polinoame de gradul m ai căror coeficienţi se determină prin identificare.

Dacă $\alpha + i\beta$ este rădăcină multiplă de ordinul p a ecuaţiei caracteristice $k(r) = 0$, atunci ecuaţia diferenţială (33) are o soluţie particulară de forma

$$y_p = x^p e^{\alpha x}\,(Q_1(x)\cos\beta x + Q_2(x)\sin\beta x), \tag{41}$$

unde $Q_1(x)$ şi $Q_2(x)$ sînt polinoame de gradul m ai căror coeficienţi se determină prin identificare.

În adevăr, considerăm ecuaţiile diferenţiale

$$L(y) = y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}y' + a_ny = e^{\alpha x}(C_0x^m + \dots + C_m)\cos\beta x$$

$$L(z) = z^{(n)} + a_1z^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}z' + a_nz = e^{\alpha x}(C_0x^m + \dots + C_m)\sin\beta x$$

Dacă ţinem seama de proprietăţile operatorului L şi de formula lui Euler, avem

$$L(y) + iL(z) = e^{\alpha x}(C_0x^m + C_1x^{m-1} + \dots + C_m)\,e^{i\beta x}$$

sau

$$L(y + iz) = e^{(\alpha+i\beta)x}(C_0x^m + C_1x^{m-1} + \dots + C_m)$$

Aplicînd rezultatele stabilite la punctul c) obţinem rezultatele enunţate la acest punct.

Exemplu 1. Să se afle soluţia generală a ecuaţiei

$$y'' - 7y' + 6y = \sin x$$

Ecuaţia caracteristică este

$$r^2 - 7r + 6 = 0$$

şi are rădăcinile $r_1 = 1$ şi $r_2 = 6$. În acest caz $\alpha = 0$ şi $\beta = 1$ deci $\alpha + i\beta = i$ nu este rădăcină a ecuaţiei caracteristice. Ecuaţia diferenţială dată are o soluţie particulară de forma

$$y_p = A\cos x + B\sin x$$

Scriind că y_p verifică ecuaţia dată, obţinem:

$$-A\cos x - B\sin x - 7(-A\sin x + B\cos x) + 6(A\cos x + B\sin x) = \sin x$$

$$5B + 7A = 1;\ 5A - 7B = 0 \text{ deci } A = \frac{7}{74};\ B = \frac{5}{74}$$

Soluția generală a ecuației date este

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + \frac{7}{74}\cos x + \frac{5}{74}\sin x$$

Exemplul 2. Să se afle soluția generală a ecuației

$$y'' + 4y = x \sin 2x$$

Ecuația caracteristică este

$$r^2 + 4 = 0$$

și are rădăcinile $r_1 = 2i$; $r_2 = -2i$. În acest caz $\alpha = 0$ și $\beta = 2$, deci $\alpha + i\beta = 2i$, este rădăcină simplă a ecuației caracteristice. Ecuația diferențială dată are o soluție particulară de forma

$$y_p = x[(Ax + B)\cos 2x + (Cx + D)\sin 2x]$$

Scriind că y_p verifică ecuația dată și făcînd indentificarea, obținem

$$y_p = -\frac{x^2}{8}\cos 2x + \frac{x}{16}\sin 2x$$

Soluția generală căutată este

$$y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x - \frac{x^2}{8}\cos 2x + \frac{x}{16}\sin 2x$$

§ 6. ECUAȚIA DIFERENȚIALĂ A LUI EULER

Este o ecuație diferențială liniară de forma

$$x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} x y' + a_n y = f(x) \qquad (41)$$

unde a_i $(i = 1, \ldots, n)$ sînt constante reale iar f este o funcție reală, definită și continuă pe un interval $I \subset \mathbb{R}$; $x \neq 0$.

Prin schimbarea de variabilă

$$x = e^t$$

ecuația diferențială (41) se transformă într-o ecuație diferențială cu coeficienți constanți.

În adevăr, pentru $x > 0$, avem

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt}e^{-t}$$

$$y'' = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{1}{e^t}\cdot\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt}e^{-t}\right) = e^{-2t}\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right)$$

$$y''' = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = \frac{1}{e^t}\cdot\frac{d}{dt}\left[e^{-2t}\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right)\right] = e^{-3t}\left(\frac{d^3y}{dt^3} - 3\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt}\right)$$

În general obținem

$$y^{(n)} = e^{-nt}\Phi\left(\frac{dy}{dt}, \frac{d^2y}{dt^2}, \dots, \frac{d^ny}{dt^n}\right)$$

unde Φ este o funcție liniară.

Observăm că:

$$xy' = \frac{dy}{dt};\quad x^2y'' = \frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt};\quad x^3y''' = \frac{d^3y}{dt^3} - 3\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt}$$

și în general

$$x^ny^{(n)} = \Phi\left(\frac{dy}{dt}, \frac{d^2y}{dt^2}, \dots, \frac{d^ny}{dt^n}\right)$$

Dacă înlocuim produsele xy', x^2y'', x^3y''', ..., $x^ny^{(n)}$ în ecuația diferențială (41) obținem o ecuație diferențială liniară cu coeficienți constanți, de forma

$$\frac{d^ny}{dt^n} + b_1\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} + \dots + b_{n-1}\frac{dy}{dt} + b_ny = f(e^t) \qquad (42)$$

Folosind rezultatele stabilite pentru ecuațiile diferențiale liniare cu coeficienți constanți, putem găsi soluția generală a ecuației diferențiale (42). În soluția generală a ecuației (42), înlocuim pe $t = \ln x$ și obținem soluția generală a ecuației diferențiale (41). Același rezultat se obține dacă $x < 0$.

Observația 1. Ecuația diferențială (41) poate fi integrată căutînd direct soluția de forma

$$y = x^r.$$

Observația 2. Ecuația diferențială

$$(ax+b)^n y^{(n)} + a_1(ax+b)^{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(ax+b)y' + a_ny = f(x)$$

unde a, b și a_i $(i = 1, \dots, n)$ sînt constante reale, poate fi transformată într-o ecuație diferențială cu coeficienți constanți dacă facem schimbarea de variabilă,

$$ax + b = e^t.$$

Exemplu. Să se afle soluția generală a ecuației

$$x^2y'' - xy' - 3y = -\frac{16\ln x}{x}, \quad x > 0$$

Dacă facem schimbarea de variabilă $x = e^t$, avem

$$xy' = \frac{dy}{dt};\quad x^2y'' = \frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}.$$

şi dacă înlocuim în ecuaţia dată, obţinem ecuaţia

$$\frac{d^2y}{dt^2} - 2\frac{dy}{dt} - 3y = -16te^{-t}$$

a cărei soluţie generală este

$$y = C_1e^{-t} + C_2e^{3t} + 2t^2e^{-t} + te^{-t}$$

În această soluţie înlocuim pe $t = \ln x$ şi obţinem soluţia generală a ecuaţiei date

$$y(x) = \frac{C_1}{x} + C_2x^3 + 2\frac{(\ln x)^2}{x} + \frac{\ln x}{x}$$

PROBLEME

Să se integreze ecuaţiile următoare, folosind soluţia particulară indicată:

1) $y'' + \frac{2}{x}y' + y = 0$; $y_1 = \frac{\sin x}{x}$; $(x \neq 0)$

$$R: \; y = C_1\frac{\sin x}{x} + C_2\frac{\cos x}{x}$$

2) $y''\sin^2 x = 2y$; $y_1 = \operatorname{ctg} x$; $\qquad R: \; y = C_2 + (C_1 - C_2x)\operatorname{ctg} x$

3) $y'' - \frac{y'}{x} + \frac{y}{x^2} = 0$; $y_1 = x$; $(x \neq 0)$;

$$R: \; \frac{1}{2}x\ln^2|x| + C_1x\ln|x| + C_2x = y$$

4) $y'' + \frac{2}{x}y' + y = \frac{\operatorname{ctg} x}{x}$; $y_1 = \frac{\sin x}{x}$ $(x \neq 0)$

$$R: \; y = C_1\frac{\sin x}{x} + C_2\frac{\cos x}{x} + \frac{\sin x}{x}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|$$

Să se integreze ecuaţiile următoare

5) $y'' + y = \operatorname{tg} x$; $R: y = C_1\cos x + C_2\sin x - \cos x \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right|$

6) $y'' + 4y = \operatorname{ctg} 2x$;

$$R: \; y = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x + \frac{1}{4}\sin 2x \ln|\operatorname{tg} 2x|$$

7) $y'' + y' - 2y = \cos x - 3\sin x$; $y(0) = 1$; $y'(0) = 2$.

В: $y = e^x + \sin x$.

8) $y'' - y = \mathrm{ch}\,2x$; $y(0) = y'(0) = 0$.

В: $y = \frac{1}{3} e^{x} + \frac{1}{3}\,\mathrm{ch}\,x + \frac{1}{6}\,\mathrm{sh}\,2x$.

9) $y'' + y = x e^x + 2e^{-x}$.

В: $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \frac{1}{2}(x - 1)e^x + e^{-x}$.

10) $y''' + y'' - 2y' = x + e^x$;

В: $y = C_1 + C_2 e^x + C_3 e^{-2x} - \frac{1}{4} x(x + 1) + \frac{1}{3} x e^x$.

11) $y'' - y = x\cos^2 x$;

В: $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} - \frac{1}{2} x - \frac{1}{10} x \cos 2x + \frac{2}{25} \sin 2x$.

12) $y'' + 4y = x \sin 2x$;

В: $y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x - \frac{x^2}{8} \cos 2x + \frac{x}{16} \sin 2x$.

13) $y^{IV} - 16y = 4e^{-2x}\cos 2x$.

В: $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x} + C_3 \cos 2x + C_4 \sin 2x - \frac{1}{20} e^{-2x} \cos 2x$.

14) $y'' - 2y' + 2y = 2e^x \cos x - 4x e^x \sin x$.

В: $y = C_1 e^x \cos x + C_2 e^x \sin x + x^2 e^x \cos x$.

15) $y''' - 3y'' + 3y' - y = x e^x$.

В: $y = C_1 e^x + C_2 x e^x + C_3 x^2 e^x + \frac{x^4}{24} e^x$.

16) $y^{IV} + 2y'' + y = \sin x$;

В: $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + C_3 x \cos x + C_4 x \sin x - \frac{1}{8} x^2 \sin x$.

17) $x^2 y'' - 3xy' + 3y = 3\ln^2 x$; $(x > 0)$.

В: $y = C_1 x + C_2 x^3 + \frac{1}{9}(9\ln^2 x + 24 \ln x + 26)$.

18) $x^2 y'' + xy' + y = \sin(2 \ln x)$; $(x > 0)$

$$R:\ y = C_1 \cos(\ln x) + C_2 \sin(\ln x) - \frac{1}{3} \sin(2 \ln x)$$

19) $(4x - 1)^2 y'' - 2(4x - 1) y' + 8y = 0$; $(4x > 1)$

$$R:\ y = C_1(4x - 1) + C_2 \sqrt{4x - 1}$$

20) $x^3 y''' - x^2 y'' + 2xy' - 2y = x^3 + 2x$; $(x \neq 0)$

$$R:\ y = C_1 |x| + C_2 |x| \ln|x| + C_3 x^2 - x \ln^2|x| + \frac{x^3}{4}$$

21) $(x + 1)^3 y'' + 3(x + 1)^2 y' + (x + 1) y = 6 \ln(x + 1)$; $(x > -1)$

$$R:\ y = \frac{C_1}{x + 1} + C_2 \frac{\ln(x + 1)}{x + 1} + \frac{\ln^3(x + 1)}{x + 1}$$

CAPITOLUL XV

SISTEME DE ECUAŢII DIFERENŢIALE

§ 1. CONSIDERAŢII GENERALE

Am arătat la §3. cap. XII că studiul unui sistem de ecuaţii diferenţiale de ordin superior, sub formă normală, se poate reduce la studiul unui sistem de ordinul întîi. Vom considera în continuare numai sisteme de ecuaţii diferenţiale de ordinul întîi sub forma normală,

$$\begin{aligned} y_1' &= f_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \\ y_2' &= f_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_n' &= f_n(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \end{aligned} \tag{1}$$

unde variabila independentă este x iar funcţiile necunoscute sînt

$$y_1, y_2, \ldots, y_n.$$

Funcţiile reale f_i $(i = 1, \ldots, n)$ de argumente $x, y_1, \ldots, y_n$ sînt definite şi continue pe un domeniu $D \subset \mathbf{R}^{n+1}$.

La §4. cap. XII am arătat că studiul unei ecuaţii diferenţiale de ordinul n, sub formă normală

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) \tag{2}$$

se poate reduce la studiul unui sistem de n ecuaţii diferenţiale de ordinul întîi. Se poate afirma că în general şi reciproc este adevărat: studiul unui sistem de ecuaţii diferenţiale de forma (1) se poate reduce la studiul unei ecuaţii diferenţiale de forma (2).
Demonstrăm această afirmaţie în cazul $n = 3$. Fie dat sistemul

$$\begin{aligned} y_1' &= f_1(x, y_1, y_2, y_3) \\ y_2' &= f_2(x, y_1, y_2, y_3) \\ y_3' &= f_3(x, y_1, y_2, y_3) \end{aligned} \tag{3}$$

Derivăm prima ecuaţie din (3), în raport cu x,

$$y_1'' = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial y_1} y_1' + \frac{\partial f_1}{\partial y_2} y_2' + \frac{\partial f_1}{\partial y_3} y_3'$$

şi dacă ţinem seama de sistemul (3), obţinem

$$y_1'' = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial y_1} f_1 + \frac{\partial f_1}{\partial y_2} f_2 + \frac{\partial f_1}{\partial y_3} f_3$$

sau

$$y_1'' = F_2(x, y_1, y_2, y_3) \tag{4}$$

Dacă derivăm ecuaţia (4) şi ţinem seama de sistemul (3) obţinem

$$y_1''' = \frac{\partial F_2}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y_1} f_1 + \frac{\partial F_2}{\partial y_2} f_2 + \frac{\partial F_2}{\partial y_3} f_3$$

sau

$$y_1''' = F_3(x, y_1, y_2, y_3) \tag{5}$$

Din prima ecuaţie a sistemului (3) şi din ecuaţia (4) se pot afla, în general, y_2 şi y_3 în funcţie de x, y_1, y_1' şi y_1''. Înlocuind apoi pe y_2 şi y_3 în ecuaţia (5) obţinem o ecuaţie diferenţială de forma

$$y_1''' = F(x, y_1, y_1', y_1'')$$

Exemplu. Să se afle soluţia generală a sistemului:

$$y' = z; \quad z' = -y$$

Derivăm prima ecuaţie:

$$y'' = z'$$

Folosim ecuaţia a doua şi obţinem:

$$y'' + y = 0$$

de unde

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$$

Din prima ecuaţie găsim:

$$z = -C_1 \sin x + C_2 \cos x.$$

§ 2. SISTEME DE ECUAŢII DIFERENŢIALE LINIARE

Sînt sisteme de ecuaţii diferenţiale de forma

$$\begin{cases} y_1' = a_{11}(x)\, y_1 + a_{12}(x)\, y_2 + \ldots + a_{1n}(x)\, y_n + f_1(x) \\ y_2' = a_{21}(x)\, y_1 + a_{22}(x)\, y_2 + \ldots + a_{2n}(x)\, y_n + f_2(x) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n' = a_{n1}(x)\, y_1 + a_{n2}(x)\, y_2 + \ldots + a_{nn}(x)\, y_n + f_n(x) \end{cases} \tag{6}$$

unde funcţiile reale a_{ij} (coeficienţii sistemului) şi f_i (termenii liberi) sînt definite şi continue pe un acelaşi interval $I \subset \mathbf{R}$. Pentru a uşura scrierea şi a pune mai bine în evidenţă ideile, este util să adoptăm pentru aceste sisteme scrierea matricială.

Notăm prin

$$A(x) = \begin{pmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & a_{1n}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & a_{2n}(x) \\ & & \\ a_{n1}(x) & a_{n2}(x) & a_{nn}(x) \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad \mathrm{f}(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{pmatrix}.$$

Prin definiție

$$y' = \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ \vdots \\ y_n' \end{pmatrix}$$

Dacă ținem seama de rezultatele generale ale algebrei liniare și ale calculului cu matrice, sistemul (6) poate fi scris sub forma

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ \vdots \\ y_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) \dots a_{1n}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) \dots a_{2n}(x) \\ \dots & \dots \\ a_{n1}(x) & a_{n2}(x) \dots a_{nn}(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{pmatrix}$$

sau

$$y' = A(x)y + \mathrm{f}(x) \tag{7}$$

Dacă

$f_1(x) = f_2(x) = \dots = f_n(x) \equiv 0$ pe intervalul I, atunci sistemul (6) devine

$$\begin{cases} y_1' = a_{11}(x)\, y_1 + a_{12}(x)\, y_2 + \dots + a_{1n}(x)\, y_n \\ y_2' = a_{21}(x)\, y_1 + a_{22}(x)\, y_2 + \dots + a_{2n}(x)\, y_n \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_n' = a_{n1}(x)\, y_1 + a_{n2}(x)\, y_2 + \dots + a_{nn}(x)\, y_n \end{cases} \tag{8}$$

și se numește sistem omogen. Dacă folosim scrierea matricială sistemul (8) se poate pune sub forma

$$y' = A(x)y \tag{9}$$

În continuare ne vom ocupa de sistemele omogene.

Teorema 1.2. Dacă

$$z_1 = \begin{pmatrix} y_{11} \\ y_{12} \\ \vdots \\ y_{1n} \end{pmatrix}, \quad z_2 = \begin{pmatrix} y_{21} \\ y_{22} \\ \vdots \\ y_{2n} \end{pmatrix}, \dots, z_n = \begin{pmatrix} y_{n1} \\ y_{n2} \\ \vdots \\ y_{nn} \end{pmatrix}$$

sînt n soluţii ale sistemului liniar şi omogen (9), atunci şi

$$y = C_1 z_1 + C_2 z_2 + \dots + C_n z_n = \begin{pmatrix} C_1 y_{11} + C_2 y_{21} + \dots + C_n y_{n1} \\ C_1 y_{12} + C_2 y_{22} + \dots + C_n y_{n2} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ C_1 y_{1n} + C_2 y_{2n} + \dots + C_n y_{nn} \end{pmatrix} \tag{10}$$

este soluţie a sistemului (9), unde $C_1, C_2, \dots, C_n$ sînt n constante reale arbitrare.

Demonstraţie. Prin ipoteză, avem

$$z_1' = A(x) z_1;\ z_2' = A(x) z_2, \dots, z_n' = A(x) z_n \tag{11}$$

dar

$$y' = C_1 z_1' + C_2 z_2' + \dots + C_n z_n'$$

şi dacă ţinem seama de egalităţile (11) obţinem

$$y' = C_1 A(x) z_1 + C_2 A(x) z_2 + \dots + C_n A(x) z_n.$$

Ţinînd seama de regula de înmulţire a unei matrice cu un scalar, avem

$$y' = A(x)(C_1 z_1 + C_2 z_2 + \dots + C_n z_n),$$

adică

$$y' = A(x) y,$$

şi teorema este demonstrată.

Teorema 2.2. Dacă sistemul liniar şi omogen (9), cu coeficienţii a_{ij} funcţii reale are o soluţie complexă

$$z = u(x) + i v(x), \qquad x \in I$$

atunci partea reală u şi partea imaginară v

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix},\quad v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

sînt, fiecare în parte, soluţii ale sistemului (9).

Demonstraţie. Prin ipoteză, avem

$$z' = A(x) z \tag{11'}$$

dar

$$z' = u' + i v' \text{ şi } A(x)(u + iv) = A(x) u + i A(x) v.$$

Dacă înlocuim în (11'), obţinem

$$u' + i v' = A(x) u + i A(x) v$$

de unde deducem

$$u' = A(x) u \text{ şi } v' = A(x) v$$

şi teorema este demonstrată.

Funcţia y dată de (10) este soluţie a sistemului (9) şi conţine n constante arbitrare. Vom stabili în continuare condiţiile pe care trebuie să le îndeplinească n soluţii $z_1, z_2, \ldots, z_n$ ale sistemului (9) astfel încît orice soluţie a sistemului (9) să se obţină din (10) prin particularizarea constantelor $C_1, C_2, C_3, \ldots, C_n$.

În acest scop este necesară următoarea

Definiţie 1.1. Fie $z_1, z_2, \ldots, z_n$, n funcţii vectoriale

$$z_i = \begin{pmatrix} y_{i1} \\ y_{i2} \\ \vdots \\ y_{in} \end{pmatrix}, \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{12}$$

definite şi continue pe intervalul I.

Spunem că aceste n funcţii sînt liniar independente pe intervalul I dacă nu există n numere $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ nu toate nule, astfel încît să avem

$$\lambda_1 z_1(x) + \lambda_2 z_2(x) + \ldots + \lambda_n z_n(x) = 0$$

pentru orice $x \in I$.

Dacă există n numere $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ nu toate nule astfel încît să avem

$$\lambda_1 z_1(x) + \lambda_2 z_2(x) + \ldots + \lambda_n z_n(x) = 0$$

pentru orice $x \in I$, atunci spunem că cele n funcţii sînt liniar dependente pe I.

Teoremă 1.7. Dacă funcţiile vectoriale $z_1, z_2, \ldots, z_n$ date la (12), definite şi continue pe intervalul $I \subset \mathbf{R}$, sînt în dependenţă liniară pe I atunci determinantul

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_{11}(x) & y_{21}(x) & \ldots & y_{n1}(x) \\ y_{12}(x) & y_{22}(x) & \ldots & y_{n2}(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_{1n}(x) & y_{2n}(x) & \ldots & y_{nn}(x) \end{vmatrix}, \quad x \in I$$

este nul pe intervalul I.

Demonstraţie. Funcţiile $z_1, z_2, \ldots, z_n$ fiind presupuse în dependenţă liniară pe I, există numerele $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ nu toate nule, astfel încît

$$\lambda_1 z_1(x) + \lambda_2 z_2(x) + \ldots + \lambda_n z_n(x) = 0 \tag{13}$$

pentru orice $x \in I$. Egalitatea (13) se poate pune sub forma

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} y_{11}(x) \\ y_{12}(x) \\ \vdots \\ y_{1n}(x) \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} y_{21}(x) \\ y_{22}(x) \\ \vdots \\ y_{2n}(x) \end{pmatrix} + \ldots + \lambda_n \begin{pmatrix} y_{n1}(x) \\ y_{n2}(x) \\ \vdots \\ y_{nn}(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ultima egalitate vectorială este echivalentă cu următoarele n egalități

$$\begin{aligned} &\lambda_1 y_{11}(x) + \lambda_2 y_{21}(x) + \ldots + \lambda_n y_{n1}(x) = 0 \\ &\lambda_1 y_{12}(x) + \lambda_2 y_{22}(x) + \ldots + \lambda_n y_{n2}(x) = 0 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\lambda_1 y_{1n}(x) + \lambda_2 y_{2n}(x) + \ldots + \lambda_n y_{nn}(x) = 0 \end{aligned} \tag{14}$$

Deoarece numerele $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ au fost presupuse nu toate nule, sistemul algebric (14) admite pentru orice $x \in I$ soluție diferită de cea banală. Conform teoremei lui Rouché determinantul sistemului, care este tocmai $W(x)$, trebuie să fie nul în fiecare punct $x \in I$.

§ 3. SOLUȚIA GENERALĂ A SISTEMULUI OMOGEN $y' = A(x)\,y$

Fie sistemul de ecuații diferențiale de ordinul întîi

$$y' = A(x)y \tag{9}$$

în care funcțiile reale a_{ij}, elementele matricei $A(x)$ sînt definite și continue pe intervalul $I \subset \mathbf{R}$. În aceste condiții sistemului (9) i se poate aplica teorema de existență și unicitate. Se poate determina soluția unică a sistemului omogen (9) care satisface condițiile

$$y_1(x_0) = y_{10},\; y_2(x_0) = y_{20}, \ldots, y_n(x_0) = y_{n0} \tag{15}$$

unde $x_0 \in I$ iar $y_{10}, y_{20}, \ldots, y_{n0}$ sînt numere date. Este evident că sistemul (9) are soluția

$$y = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

adică $y_1 = 0,\; y_2 = 0, \ldots, y_n = 0$ și este unica soluție a sistemului (9) care satisface condițiile

$$y_1(x_0) = 0,\; y_2(x_0) = 0, \ldots, y_n(x_0) = 0 \tag{16}$$

Teorema 1.3. **Dacă funcțiile vectoriale $y_1, y_2, \ldots, y_n$ date la (12) sînt n soluții liniar independente ale sistemului (9) pe intervalul I și dacă funcțiile a_{ij} elementele matricei $A(x)$ sînt continue pe intervalul I, atunci determinantul $W(x)$ este diferit de zero pe intervalul I.**

Demonstrație. Presupunem că determinantul

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_{11}(x) & y_{21}(x) \ldots y_{n1}(x) \\ y_{12}(x) & y_{22}(x) \ldots y_{n2}(x) \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_{1n}(x) & y_{2n}(x) \ldots y_{nn}(x) \end{vmatrix}$$

se anulează într-un punct $x_0 \in I$. Considerăm sistemul algebric de ecuații liniare și omogene

$$\begin{aligned} &C_1 y_{11}(x_0) + C_2 y_{21}(x_0) + \dots + C_n y_{n1}(x_0) = 0 \\ &C_1 y_{12}(x_0) + C_2 y_{22}(x_0) + \dots + C_n y_{n2}(x_0) = 0 \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &C_1 y_{1n}(x_0) + C_2 y_{2n}(x_0) + \dots + C_n y_{nn}(x_0) = 0 \end{aligned} \qquad (17)$$

Determinantul sistemului (17) este nul, deoarece el este tocmai $W(x_0)$. În acest caz sistemul (17) admite soluții diferite de cea banală. Fie $C_1, C_2, \dots, C_n$ o astfel de soluție și deci numerele $C_1, C_2, \dots, C_n$ nu sînt toate nule, cu ajutorul lor formăm funcția vectorială

$$y = C_1 z_1 + C_2 z_2 + \dots + C_n z_n \qquad (18)$$

sau

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 y_{11} + C_2 y_{21} + \dots + C_n y_{n1} \\ C_1 y_{12} + C_2 y_{22} + \dots + C_n y_{n2} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ C_1 y_{1n} + C_2 y_{2n} + \dots + C_n y_{nn} \end{pmatrix}$$

În baza teoremei 1.2 deducem că funcția y este soluție a sistemului (9). Datorită sistemului (17) deducem că componentele lui y, adică $y_1, y_2, \dots, y_n$ verifică condițiile inițiale

$$y_1(x_0) = 0, \quad y_2(x_0) = 0, \dots, y_n(x_0) = 0$$

Dar singura soluție a sistemului (9) care satisface condițiile inițiale (16) este $y = 0$ și deci

$$C_1 z_1 + C_2 z_2 + \dots + C_n z_n = 0 \qquad (19)$$

Numerele $C_1, C_2, \dots, C_n$ nefiind toate nule, relația (19) arată că funcțiile $z_1, z_2, \dots, z_n$ sînt liniar dependente pe I, fapt care contrazice ipoteza. Deci $W(x) \neq 0$ pe I și teorema este demonstrată.

Observația 1. Dacă $z_1, z_2, \dots, z_n$ sînt n soluții ale sistemului (9) atunci ele sînt liniar independente pe I dacă și numai dacă determinantul $W(x) \neq 0$ pe I.

Observația 2. Dacă determinantul $W(x)$ a n soluții $z_1, z_2, \dots, z_n$ ale sistemului (9) este nul într-un punct $x_0 \in I$, atunci el este nul pe tot intervalul I.

Observația 3. Dacă determinantul $W(x)$ a n soluții $z_1, z_2, \dots, z_n$ ale sistemului (9) este diferit de zero într-un punct $x_0 \in I$, atunci el este diferit de zero pe tot intervalul I.

Definiția 1.3. Spunem că n soluții $z_1, z_2, \dots, z_n$ ale sistemului omogen (9), formează un sistem fundamental de soluții pe intervalul I dacă ele sînt liniar independente pe I.

Din teorema 1.3 rezultă că dacă $z_1, z_2, \dots, z_n$ este un sistem fundamental de soluții ale sistemului (9), atunci $W(x) \neq 0$ pe I. Din observațiile de mai sus deducem că dacă $z_1, z_2, \dots, z_n$ sînt n soluții ale sistemului (9) cu $W(x_0) \neq 0$, atunci ele formează un sistem fundamental de soluții pe intervalul I.

Teorema 3.3. Fie dat sistemul omogen

$$y' = A(x)y \tag{9}$$

unde funcţiile a_{ij}, elementele matricei $A(x)$, sînt continue pe intervalul I. Dacă $z_1, z_2, \ldots, z_n$ sînt n soluţii ale sistemului (9) şi dacă ele formează un sistem fundamental de soluţii pe intervalul I, atunci soluţia generală a sistemului (9) este dată de egalitatea

$$y = C_1 z_1 + C_2 z_2 + \ldots + C_n z_n \tag{20}$$

unde $C_1, C_2, \ldots, C_n$ sînt constante arbitrare.

Demonstraţie. Cînd $x \in I$ sistemul (9) satisface condiţiile din teorema de existenţă şi unicitate. Deci există şi este unică soluţia sistemului (9) care satisface condiţiile iniţiale:

$$y_1(x_0) = y_{10},\ y_2(x_0) = y_{20},\ \ldots,\ y_n(x_0) = y_{n0},\quad x_0 \in I \tag{21}$$

Dacă notăm

$$y_0 = \begin{pmatrix} y_{10} \\ y_{20} \\ \vdots \\ y_{n0} \end{pmatrix}$$

atunci condiţiile iniţiale (21) pot fi scrise sub formă vectorială

$$y(x_0) = y_0 \tag{22}$$

Pentru a dovedi că soluţia (20) este soluţia generală a sistemului (9) trebuie să arătăm că putem determina constantele $C_1, C_2, \ldots, C_n$ astfel încît condiţia (22) să fie îndeplinită. Dacă punem condiţia

$$C_1 z_1(x_0) + C_2 z_2(x_0) + \ldots + C_n z_n(x_0) = y_0$$

şi ţinem seama de (2.1) obţinem

$$C_1 \begin{pmatrix} y_{11}(x_0) \\ y_{12}(x_0) \\ \vdots \\ y_{1n}(x_0) \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} y_{21}(x_0) \\ y_{22}(x_0) \\ \vdots \\ y_{2n}(x_0) \end{pmatrix} + \ldots + C_n \begin{pmatrix} y_{n1}(x_0) \\ y_{n2}(x_0) \\ \vdots \\ y_{nn}(x_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_{10} \\ y_{20} \\ \vdots \\ y_{n0} \end{pmatrix}$$

de unde obţinem sistemul

$$\begin{aligned} C_1 y_{11}(x_0) + C_2 y_{21}(x_0) + \ldots + C_n y_{n1}(x_0) &= y_{10} \\ C_1 y_{12}(x_0) + C_2 y_{22}(x_0) + \ldots + C_n y_{n2}(x_0) &= y_{20} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ C_1 y_{1n}(x_0) + C_2 y_{2n}(x_0) + \ldots + C_n y_{nn}(x_0) &= y_{n0} \end{aligned} \tag{23}$$

Determinantul sistemului (23) este tocmai $W(x_0)$ care prin ipoteză este diferit de zero şi deci sistemul are soluţie unică. Teorema este demonstrată.

Observaţia 1. Din teorema 3.3 rezultă că numărul maxim de soluţii liniar independente pe I, pentru sistemul (9), este egal cu n.

Observația 2. Tot din teorema 3.3 rezultă că problema integrării sistemelor liniare și omogene (9) se reduce la găsirea a n soluții care să formeze un sistem fundamental de soluții.

Exemplu. Să se afle soluția generală a sistemului

$$\frac{dy_1}{dx} = y_2; \quad \frac{dy_2}{dx} = -y_1$$

Dacă eliminăm pe y_2 obținem ecuația

$$y_1'' + y_1 = 0$$

deci

$$z_1 = \begin{pmatrix} \cos x \\ -\sin x \end{pmatrix}, \quad z_2 = \begin{pmatrix} \sin x \\ \cos x \end{pmatrix}$$

$$W(x) = \begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

$$y = C_1 z_1 + C_2 z_2 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} \cos x \\ -\sin x \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} \sin x \\ \cos x \end{pmatrix}$$

Obținem soluția generală

$$y_1 = C_1 \cos x + C_2 \sin x; \quad y_2 = -C_1 \sin x + C_2 \cos x$$

§ 4. SOLUȚIA GENERALĂ A SISTEMULUI $y' = A(x)y + f(x)$

Fie sistemul de ecuații diferențiale de ordinul întîi

$$y' = A(x)y + f(x) \tag{7}$$

unde funcțiile a_{ij} (elementele matricei $A(x)$) și f_i (componentele funcției f) sînt definite și continue pe un același interval $I \subset \mathbb{R}$. În aceste condiții are loc

Teorema 4.1. Soluția generală a sistemului (7) se obține adăugînd la soluția generală a sistemului omogen

$$y' = A(x)y \tag{9}$$

o soluție particulară, oarecare, a sistemului neomogen (7).

Demonstrație. Fie y_p o soluție particulară a sistemului (7); deci

$$y_p' = A(x)y_p + f(x), \quad x \in I$$

Facem schimbarea de variabilă

$$y = z + y_p$$

unde z este noua funcție (vectorială) necunoscută, avem

$$(z + y_p)' = A(x)(z + y_p) + f(x)$$

sau

$$z' + y_p' = A(x)z + A(x)y_p + f$$

Dacă ţinem seama că y_p este soluţie a sistemului (7), obţinem

$$z' = A(x)z$$

Sistemul $y' = A(x)y$ (sau $z' = A(x)z$) se numeşte sistemul omogen ataşat sistemului neomogen (7). Dacă $z_1, z_2, \dots, z_n$ este un sistem fundamental de soluţii ale sistemului omogen (9) atunci soluţia generală a sistemului neomogen (7) este

$$y = C_1z_1 + C_2z_2 + \dots + C_nz_n + y_p \tag{24}$$

Într-adevăr, dacă ţinem seama de definiţia soluţiei generale pentru un sistem de ecuaţii diferenţiale şi dacă folosim procedeul dat în demonstraţia teoremei 3.3, rezultă că funcţia dată la (24) este soluţia generală a sistemului (7).

Din teorema 1.4. rezultă că pentru a afla soluţia generală a sistemului neomogen

$$y' = A(x)y + f(x) \tag{7}$$

este suficient să cunoaştem un sistem fundamental de soluţii ale sistemului omogen

$$y' = A(x)y$$

şi o soluţie particulară a sistemului neomogen (9). Aflarea unei soluţii particulare a sistemului neomogen (7) este o problemă în general dificilă. Dacă nu cunoaştem o soluţie particulară a sistemului (7) dar cunoaştem soluţia generală a sistemului omogen (9) se poate afla soluţia generală a sistemului (7) prin metoda variaţiei constantelor. Vom arăta că soluţia generală a sistemului (7) se obţine cu ajutorul acestei metode prin cuadraturi. Fie $z_1, z_2, \dots, z_n$ un sistem fundamental de soluţii ale sistemului omogen (9) atunci soluţia sa generală este

$$y = C_1z_1 + C_2z_2 + \dots + C_nz_n \tag{25}$$

Vom căuta soluţia generală a sistemului neomogen (7) de aceeaşi formă cu soluţia generală (25) a sistemului omogen (9) înlocuind constantele arbitrare $C_1, C_2, \dots, C_n$ cu funcţii reale derivabile, depinzând de x. Notăm aceste funcţii cu $C_1(x), C_2(x), \dots, C_n(x)$. Prin urmare soluţia generală a sistemului neomogen (7) o căutăm de forma

$$y = C_1(x)z_1(x) + C_2(x)z_2(x) + \dots + C_n(x)z_n(x) = \sum_{i=1}^{n} C_i(x)z_i(x) \tag{26}$$

Punem condiţia ca y să verifice sistemul (7); obţinem

$$\sum_{i=1}^{n} C_i'(x)z_i(x) + \sum_{i=1}^{n} C_i(x)z_i'(x) = A(x)\sum_{i=1}^{n} C_i(x)z_i(x) + f(x)$$

sau

$$\sum_{i=1}^{n} C_i'(x)z_i(x) + \sum_{i=1}^{n} C_i(x)z_i'(x) = \sum_{i=1}^{n} C_i(x)A(x)z_i(x) + f(x)$$

sau

$$\sum_{i=1}^{n} C_i'(x)\, z_i(x) + \sum_{i=1}^{n} C_i(x)\,[z_i'(x) - A(x)\, z_i(x)] = f(x) \tag{26}$$

Deoarece $z_1, z_2, \dots, z_n$ sînt soluții ale sistemului omogen (9) avem

$$z_i' - A(x)\, z_i = 0; \quad i = 1, 2, \dots, n$$

și din (26) obținem

$$\sum_{i=1}^{n} C_i'(x)\, z_i(x) = f(x)$$

sau

$$C_1'(x) z_1(x) + C_2'(x) z_2(x) + \dots + C_n'(x)\, z_n(x) = f(x)$$

Dacă ținem seama de notațiile făcute, avem

$$C_1'(x)\begin{pmatrix} y_{11}(x) \\ y_{21}(x) \\ \vdots \\ y_{n1}(x) \end{pmatrix} + C_2'(x)\begin{pmatrix} y_{12}(x) \\ y_{22}(x) \\ \vdots \\ y_{n2}(x) \end{pmatrix} + \dots + C_n'(x)\begin{pmatrix} y_{1n}(x) \\ y_{2n}(x) \\ \vdots \\ y_{nn}(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{pmatrix}$$

de unde obținem sistemul

$$\begin{aligned}
&C_1'(x)\, y_{11}(x) + C_2'(x)\, y_{12}(x) + \dots + C_n'(x)\, y_{1n}(x) = f_1(x) \\
&C_1'(x)\, y_{21}(x) + C_2'(x)\, y_{22}(x) + \dots + C_n'(x)\, y_{2n}(x) = f_2(x) \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
&C_1'(x)\, y_{n1}(x) + C_2'(x)\, y_{n2}(x) + \dots + C_n'(x)\, y_{nn}(x) = f_n(x)
\end{aligned} \tag{27}$$

Determinantul sistemului (27) este $W(x)$ care prin ipoteză este diferit de zero pe I și deci sistemul are soluție unică.
Fie

$$C_1'(x) = \varphi_1(x),\ C_2'(x) = \varphi_2(x), \dots, C_n'(x) = \varphi_n(x)$$

această soluție. Obținem atunci

$$C_1(x) = \int \varphi_1(x)\,dx + K_1, \dots,$$

$$C_2(x) = \int \varphi_2(x)\,dx + K_2, \dots, C_n(x) = \int \varphi_n(x)\,dx + K_n$$

unde $K_1, K_2, \dots, K_n$ sînt n constante arbitrare. Dacă revenim la (25) obținem soluția generală a sistemului (7)

$$y = K_1 z_1 + K_2 z_2 + \dots + K_n z_n + y_0$$

unde

$$y_p = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} y_{1i}(x) \int \varphi_i(x)\,dx \\ \sum_{i=1}^{n} y_{2i}(x) \int \varphi_i(x)\,dx \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{n} y_{ni}(x) \int \varphi_i(x)\,dx \end{pmatrix}$$

Exemplu. Să se afle soluţia generală a sistemului

$$\frac{dy_1}{dx} = y_2; \quad \frac{dy_2}{dx} = -y_1 + \frac{1}{\cos x}.$$

În acest caz

$$z_1 = \begin{pmatrix} \cos x \\ -\sin x \end{pmatrix}; \quad z_2 = \begin{pmatrix} \sin x \\ \cos x \end{pmatrix}; \quad f = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\cos x} \end{pmatrix}$$

sistemul (27) devine

$$C_1'(x)\cos x + C_2'(x)\sin x = 0$$

$$-C_1'(x)\sin x + C_2'(x)\cos x = \frac{1}{\cos x} \Rightarrow C_1'(x) = -\frac{\sin x}{\cos x};\ C_2'(x) = 1$$

deci

$$C_1(x) = \ln|\cos x| + K_1;\ C_2(x) = x + K_2.$$

Soluţia generală este

$$y = C_1(x) z_1 + C_2(x) z_2;$$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = (K_1 + \ln|\cos x|)\begin{pmatrix} \cos x \\ -\sin x \end{pmatrix} + (K_2 + x)\begin{pmatrix} \sin x \\ \cos x \end{pmatrix}$$

deci

$$y_1(x) = K_1\cos x + K_2 \sin x + \cos x \ln|\cos x| + x\sin x$$

$$y_2(x) = -K_1 \sin x + K_2 \cos x - \sin x \ln|\cos x| + x\cos x.$$

§ 8. SISTEME DE ECUAŢII DIFERENŢIALE LINIARE CU COEFICIENŢI CONSTANŢI ŞI OMOGENI

Un sistem de forma

$$\begin{aligned} y_1' &= a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \ldots + a_{1n}y_n \\ y_2' &= a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{2n}y_n \qquad (28) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n' &= a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \ldots + a_{nn}y_n \end{aligned}$$

unde a_{ij} sînt constante reale, se numeşte sistem de n ecuaţii diferenţiale liniare cu n necunoscute, cu coeficienţi constanţi, omogen. Dacă reducem studiul sistemului (28) la studiul unei ecuaţii diferenţiale de ordinul n se vede că se obţine o ecuaţie liniară cu coeficienţi constanţi. Este deci firesc să căutăm soluţiile sistemului (28) de forma

$$y_1 = \alpha_1 e^{rx},\ y_2 = \alpha_2 e^{rx},\ \ldots,\ y_n = \alpha_n e^{rx} \tag{29}$$

unde $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ şi r sînt constante. Dacă punem condiţia ca sistemul (28) să aibă o soluţie de forma (29) obţinem, în urma simplificării cu e^{rx}, un sistem algebric omogen cu necunoscutele $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$:

$$\begin{aligned} (a_{11} - r)\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \ldots + a_{1n}\alpha_n &= 0 \\ a_{21}\alpha_1 + (a_{22} - r)\alpha_2 + \ldots + a_{2n}\alpha_n &= 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}\alpha_1 + a_{n2}\alpha_2 + \ldots + (a_{nn} - r)\alpha_n &= 0 \end{aligned} \tag{30}$$

Ne interesează soluţiile nebanale ale sistemului (30). Din teorema lui Rouché rezultă că sistemul (30) admite soluţii diferite de cea banală dacă şi numai dacă determinantul sistemului (30) este zero:

$$D(r) = \begin{vmatrix} a_{11} - r & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - r & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} - r \end{vmatrix} = 0 \tag{31}$$

Ecuaţia $D(r) = 0$ se numeşte ecuaţia caracteristică a sistemului (28). În afară de determinantul $D(r)$ considerăm şi matricea $M(r)$ formată din aceleaşi elemente

$$M(r) = \begin{pmatrix} a_{11} - r & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - r & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} - r \end{pmatrix} \tag{32}$$

Ecuaţia caracteristică (31), $D(r) = 0$, este o ecuaţie de gradul n în r. În legătură cu rădăcinile ecuaţiei caracteristice (31) considerăm două cazuri:

a) Ecuaţia caracteristică $D(r) = 0$ are toate rădăcinile distincte. Fie $r_1, r_2, \ldots, r_n$ aceste rădăcini şi deci $D(r_i) = 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$. În acest caz cel puţin unul dintre minorii de ordinul $n - 1$ ai determinantului $D(r_i)$ este diferit de zero. În adevăr, deoarece r_i este rădăcină simplă a ecuaţiei (31), avem $D'(r_i) \neq 0$. Dar

$$D'(r) = -\begin{vmatrix} a_{22} - r & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ a_{32} & a_{33} - r & \ldots & a_{3n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n2} & a_{n3} & \ldots & a_{nn} - r \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{11} - r & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ a_{31} & a_{33} - r & \ldots & a_{3n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n3} & \ldots & a_{nn} - r \end{vmatrix} -$$

$$\ldots\ldots - \begin{vmatrix} a_{11} - r & a_{12} & \ldots & a_{1,n-1} \\ a_{21} & a_{22} - r & \ldots & a_{2,n-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \ldots & a_{n-1,n-1} - r \end{vmatrix} \tag{33}$$

Dacă înlocuim pe r cu r_1 în (33) și ținem cont că $D'(r_1) \neq 0$ rezultă că cel puțin unul dintre determinanții, de ordinul $n-1$, care apar în membrul drept al egalității (33) este diferit de zero. Revenim la sistemul (30) unde înlocuim pe rînd pe r cu $r_i (i = 1, \ldots, n)$. Obținem în acest fel n sisteme. Notăm cu $\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \ldots, \alpha_{in}$ necunoscutele sistemului (30) corespunzătoare lui $r = r_i$. Obținem

$$\begin{aligned} &(a_{11} - r_i)\,\alpha_{i1} + a_{12}\alpha_{i2} + \ldots + a_{1n}\alpha_{in} = 0 \\ &a_{21}\alpha_{i1} + (a_{22} - r_i)\,\alpha_{i2} + \ldots + a_{2n}\alpha_{in} = 0 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &a_{n1}\alpha_{i1} + a_{n2}\alpha_{i2} + \ldots + (a_{nn} - r_i)\,\alpha_{in} = 0 \end{aligned} \tag{34}$$

Determinantul sistemului (34) este $D(r_i) = 0$ și deci sistemul admite soluții diferite de cea banală. Din cele demonstrate mai sus rezultă că rangul matricei $M(r_i)$, formată cu coeficienții sistemului (34), este egal cu $n - 1$. Prin urmare necunoscutele sistemului (34), $\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \ldots, \alpha_{in}$ se determină în afara unui coeficient de proporționalitate, pe care îl notăm cu A_i și deci

$$\alpha_{i1} = A_i k_{i1},\ \alpha_{i2} = A_i k_{i2}, \ldots, \alpha_{in} = A_i k_{in}.$$

Dacă luăm $A_i = 1$, rădăcinii $r = r_i$ îi corespunde soluția particulară a sistemului (28)

$$z_i = \begin{pmatrix} k_{i1}\, e^{r_i x} \\ k_{i2}\, e^{r_i x} \\ \vdots \\ k_{in}\, e^{r_i x} \end{pmatrix} \quad (i = 1, \ldots, n)$$

Soluțiile z_i $(i = 1, \ldots, n)$ sînt liniar independente pe R și dacă folosim scrierea vectorială, soluția generală a sistemului (28) este

$$y = C_1 z_1 + C_2 z_2 + \ldots + C_n z_n$$

adică

$$\begin{aligned} &y_1 = C_1 k_{11}\, e^{r_1 x} + C_2 k_{21}\, e^{r_2 x} + \ldots + C_n k_{n1}\, e^{r_n x} \\ &y_2 = C_1 k_{12}\, e^{r_1 x} + C_2 k_{22}\, e^{r_2 x} + \ldots + C_n k_{n2}\, e^{r_n x} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &y_n = C_1 k_{1n}\, e^{r_1 x} + C_2 k_{2n}\, e^{r_2 x} + \ldots + C_n k_{nn}\, e^{r_n x} \end{aligned}$$

Observație

Dacă ecuația caracteristică $D(r) = 0$ admite o rădăcină simplă și complexă $r_1 = \alpha + i\beta$, atunci ea admite și rădăcina $r_2 = \alpha - i\beta$. Soluțiile sistemului (28) corespunzătoare celor două rădăcini complexe vor fi

$$z_1 = \begin{pmatrix} k_{11}\, e^{(\alpha + i\beta)x} \\ k_{12}\, e^{(\alpha + i\beta)x} \\ \vdots \\ k_{1n}\, e^{(\alpha + i\beta)x} \end{pmatrix}, \quad z_2 = \begin{pmatrix} k_{21}\, e^{(\alpha - i\beta)x} \\ k_{22}\, e^{(\alpha - i\beta)x} \\ \vdots \\ k_{2n}\, e^{(\alpha - i\beta)x} \end{pmatrix}$$

unde coeficienții k_{1j} și k_{2j} ($j = 1, \ldots, n$) sînt numere complexe conjugate:

$$k_{1j} = l_{1j} + il_{2j}, \quad k_{2j} = l_{1j} - il_{2j}.$$

Soluția z_1 a sistemului (28), devine

$$z_1 = e^{(\alpha + i\beta)x}\begin{pmatrix} l_{11} + il_{21} \\ l_{12} + il_{22} \\ \cdots\cdots \\ l_{1n} + il_{2n} \end{pmatrix} = e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x)\begin{pmatrix} l_{11} + il_{21} \\ l_{12} + il_{22} \\ \cdots\cdots \\ l_{1n} + il_{2n} \end{pmatrix} =$$

$$= e^{\alpha x}\begin{pmatrix} l_{11}\cos\beta x - l_{21}\sin\beta x \\ l_{12}\cos\beta x - l_{22}\sin\beta x \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ l_{1n}\cos\beta x - l_{2n}\sin\beta x \end{pmatrix} + ie^{\alpha x}\begin{pmatrix} l_{11}\sin\beta x + l_{21}\cos\beta x \\ l_{12}\sin\beta x - l_{22}\cos\beta x \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ l_{1n}\sin\beta x + l_{2n}\cos\beta x \end{pmatrix}$$

Dacă notăm $z_1 = \bar{z}_1 + i\bar{z}_2$ și aplicăm teorema 2.2 rezultă că $\bar{z}_1$ și $\bar{z}_2$ sînt soluții reale ale sistemului (28). Același rezultat se obține dacă lucrăm cu z_2.

b) Ecuația caracteristică $D(r) = 0$ are și rădăcini multiple.

Fie r_1 o rădăcină multiplă de ordinul p a ecuației caracteristice (31). În acest caz $D^{(p)}(r_1) \neq 0$. Un raționament asemănător cu cel de la cazul a) ne duce la concluzia că printre minorii de ordinul $n - p$ ai determinantului $D(r_1)$ cel puțin unul este diferit de zero. Dacă notăm cu m rangul matricei $M(r_1)$ atunci deducem că $m \geq n - p$. Sistemul de ecuații (30), unde $r = r_1$, are m ecuații independente și deci $n - m$ necunoscute rămîn arbitrare. Fie

$$x_1 = C_1, \; x_2 = C_2, \ldots, x_{n-m} = C_{n-m}.$$

Celelalte m necunoscute ale sistemului (30) se exprimă liniar funcție de $C_1, C_2, \ldots, C_{n-m}$:

$$x_j = k_{1j}C_1 + k_{2j}C_2 + \ldots + k_{n-m,j}C_{n-m} \quad (j = n - m + 1, \ldots, n).$$

Dacă luăm $C_i = 1$ pentru $i = 1, 2, \ldots, n - m$, iar $C_j = 0$ pentru $j \neq i$ obținem pentru sistemul de ecuații diferențiale (28), următoarele $n - m$ soluții:

$$z_1 = e^{r_1 x}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ k_{1,n-m+1} \\ \vdots \\ k_{1,n} \end{pmatrix}, \; z_2 = e^{r_1 x}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ k_{2,n-m+1} \\ \vdots \\ k_{2,n} \end{pmatrix}, \ldots, z_{n-m} = e^{r_1 x}\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ k_{n-m,n-m+1} \\ \vdots \\ k_{n-m,n} \end{pmatrix}$$

Se vede imediat că aceste $n - m$ soluții sînt liniar independente.

Dacă $m = n - p$, adică rangul matricei $M(r_1)$ are valoarea minimă, obținem pentru sistemul (28) un număr de soluții liniar independente egal cu p (ordinul de multiplicitate al rădăcinii r_1). În acest caz se obțin toate soluțiile corespunzătoare acestei rădăcini. Dacă $m > n - p$, numărul $n - m$ de soluții obținute prin metoda de mai sus va fi mai mic decît p (ordinul de multiplicitate al rădăcinii r_1). Pentru a găsi toate soluțiile corespunzătoare lui r_1, căutăm pentru sistemul (28) soluţii sub formă de combinaţii liniare ale funcţiilor

$$e^{r_1 x},\ x e^{r_1 x},\ \ldots,\ x^{p-1} e^{r_1 x}$$

adică de forma

$$y_1 = P_1(x) e^{r_1 x},\ y_2 = P_2(x) e^{r_1 x},\ \ldots,\ y_n = P_n(x) e^{r_1 x}$$

unde $P_1(x), P_2(x), \ldots, P_n(x)$ sînt polinoame de gradul $p-1$ ai căror coeficienţi se determină prin identificare.

Exemplul 1. Să se afle soluţia generală a sistemului

$$y_1' = 3y_1 - y_2 + y_3$$

$$y_2' = -y_1 + 5y_2 - y_3$$

$$y_3' = y_1 - y_2 + 3y_3$$

În acest caz ecuaţia caracteristică este

$$\begin{vmatrix} 3-r & -1 & 1 \\ -1 & 5-r & -1 \\ 1 & -1 & 3-r \end{vmatrix} = 0 \text{ sau } (r-2)(r-3)(r-6) = 0$$

şi deci rădăcinile ecuaţiei sînt $r_1 = 2$, $r_2 = 3$, $r_3 = 6$.

În cazul $r_1 = 2$, sistemul algebric (30), devine

$$\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 = 0$$

$$-\alpha_1 + 3\alpha_2 - \alpha_3 = 0$$

$$\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 = 0$$

şi putem lua $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 0$, $\alpha_3 = -1$.

În cazul $r_2 = 3$, sistemul (30) devine

$$-\alpha_2 + \alpha_3 = 0$$

$$-\alpha_1 + 2\alpha_2 - \alpha_3 = 0$$

$$\alpha_1 - \alpha_2 = 0$$

şi putem lua $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 1$, $\alpha_3 = 1$.

În cazul $r_3 = 6$ sistemul (30) devine

$$-3\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 = 0$$

$$-\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 = 0$$

$$\alpha_1 - \alpha_2 - 3\alpha_3 = 0$$

şi putem lua $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = -2$, $\alpha_3 = 1$.

Obţinem în acest fel trei soluţii ale sistemului considerat

$$z_1 = \begin{pmatrix} e^{2x} \\ 0 \\ -e^{2x} \end{pmatrix}; \quad z_2 = \begin{pmatrix} e^{3x} \\ e^{3x} \\ e^{3x} \end{pmatrix}; \quad z_3 = \begin{pmatrix} e^{5x} \\ -2e^{5x} \\ e^{5x} \end{pmatrix}$$

şi deci soluţia generală este

$$y = C_1 z_1 + C_2 z_2 + C_3 z_3$$

sau

$$y_1 = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x} + C_3 e^{5x}$$

$$y_2 = C_2 e^{3x} - 2C_3 e^{5x}$$

$$y_3 = -C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x} + C_3 e^{5x}$$

Exemplul 2. Să se afle soluţia generală a sistemului

$$y_1' = -2y_1 + 2y_2 + 2y_3$$

$$y_2' = -10y_1 + 6y_2 + 8y_3$$

$$y_3' = 3y_1 - y_2 - 2y_3$$

În acest caz ecuaţia caracteristică este

$$r^3 - 2r^2 + 2r = 0$$

şi are rădăcinile $r_1 = 0$, $r_2 = 1 + i$, $r_3 = 1 - i$.

Dacă înlocuim pe $r_1 = 0$ în sistemul (30), obţinem

$$-2\alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3 = 0$$

$$-10\alpha_1 + 6\alpha_2 + 8\alpha_3 = 0$$

$$3\alpha_1 - \alpha_2 - 2\alpha_3 = 0$$

Putem lua $\alpha_1 = \frac{1}{2}$, $\alpha_2 = -\frac{1}{2}$; $\alpha_3 = 1$.

Dacă înlocuim $r_2 = 1 + i$ în sistemul (30), obţinem

$$(-3 - i)\alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3 = 0$$

$$-10\alpha_1 + (5 - i)\alpha_2 + 8\alpha_3 = 0$$

$$3\alpha_1 - \alpha_2 + (-3 - i)\alpha_3 = 0$$

Putem lua $\alpha_1 = -1 + i$; $\alpha_2 = -2i$; $\alpha_3 = i$ şi atunci

$$z_2 = e^{(1+i)x}\begin{pmatrix} -1 + i \\ -2i \\ i \end{pmatrix} = e^x(\cos x + i \sin x)\begin{pmatrix} -1 + i \\ -2i \\ i \end{pmatrix} =$$

$$= e^x\begin{pmatrix} -\cos x - \sin x \\ -2 \cos x \\ -\sin x \end{pmatrix} + ie^x\begin{pmatrix} \cos x - \sin x \\ -2 \sin x \\ \cos x \end{pmatrix} = \bar{z}_2 + i\bar{z}_3$$

Avem

$$z_1 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

şi deci soluţia generală a sistemului este

$$y = C_1 z_1 + C_2 Z_2 + C_3 Z_3$$

sau

$$y_1 = -\frac{C_1}{2} + C_2 e^x (\cos x - \sin x) + C_3 e^x (\cos x + \sin x)$$

$$y_2 = -\frac{C_1}{2} - 2C_2 e^x \cos x - 2C_3 e^x \sin x$$

$$y_3 = C_1 + C_2 e^x \sin x - C_3 e^x \cos x$$

Exemplul 5. Să se afle soluţia generală a sistemului

$$y_1' = y_2 + y_3$$

$$y_2' = y_3 + y_1$$

$$y_3' = y_1 + y_2$$

În acest caz ecuaţia caracteristică (31) este

$$D(r) = \begin{vmatrix} -r & 1 & 1 \\ 1 & -r & 1 \\ 1 & 1 & -r \end{vmatrix} = -(r^3 - 3r - 2) = 0; \ r_1 = 2, \ r_2 = r_3 = -1$$

Dacă înlocuim pe r_1 în sistemul (30) obţinem

$$2\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 = 0; \ -\alpha_1 + 2\alpha_2 - \alpha_3 = 0; \ -\alpha_1 - \alpha_2 + 2\alpha_3 = 0$$

şi putem lua $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 1$.

Rădăcina $r_2 = -1$ este dublă pentru ecuaţia caracteristică $D(r) = 0$. În acest exemplu $n = 3$, $p = 2$ şi evident $m = 1$ (rangul matricei $M(r_2)$). Dacă înlocuim r_2 în sistemul (30) obţinem trei ecuaţii identice

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0$$

Dacă luăm $\alpha_2 = -1$ şi $\alpha_3 = 0$ obţinem $\alpha_1 = 1$. Dacă luăm $\alpha_2 = 0$ şi $\alpha_3 = -1$ obţinem $\alpha_1 = 1$. Avem deci soluţiile

$$z_1 = \begin{pmatrix} e^{2x} \\ e^{2x} \\ e^{2x} \end{pmatrix}; \ z_2 = \begin{pmatrix} e^{-x} \\ -e^{-x} \\ 0 \end{pmatrix}; \ z_3 = \begin{pmatrix} e^{-x} \\ 0 \\ -e^{-x} \end{pmatrix}$$

și deci soluția generală, scrisă vectorial, este

$$y = C_1 z_1 + C_2 z_2 + C_3 z_3$$

sau

$$y_1 = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x} + C_3 e^{-x}$$

$$y_2 = C_1 e^{2x} - C_2 e^{-x}$$

$$y_3 = C_1 e^{2x} - C_3 e^{-x}$$

Exemplul 4. Să se afle soluția generală a sistemului

$$\begin{aligned} y_1' &= -y_1 + y_2 \\ y_2' &= -y_2 + 4y_3 \\ y_3' &= y_1 - 4y_3 \end{aligned} \tag{30}$$

În acest caz ecuația caracteristică (31) este

$$D(r) = \begin{vmatrix} -1-r & 1 & 0 \\ 0 & -1-r & 4 \\ 1 & 0 & -4-r \end{vmatrix} = -r(r+3)^2 = 0 ; \quad r_1 = 0 ;$$

$$r_2 = r_3 = -3$$

Dacă înlocuim pe r_1 în sistemul (30) obținem

$$-\alpha_1 + \alpha_2 = 0 ; \quad -\alpha_2 + 4\alpha_3 = 0 ; \quad \alpha_1 - 4\alpha_3 = 0$$

și putem lua

$$\alpha_1 = 4 ; \ \alpha_2 = 4 ; \ \alpha_3 = 1$$

Rădăcina $r_2 = -3$ este dublă pentru ecuația caracteristică $D(r) = 0$. Avem

$$M(-3) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

și se vede imediat că $m = 2$ (rangul matricei $M(-3)$). În acest caz, căutăm pentru sistemul dat soluții de forma

$$y_1 = e^{-3x}(A_1 + A_2 x) ; \ y_2 = e^{-3x}(B_1 + B_2 x) ;$$

$$y_3 = e^{-3x}(C_1 + C_2 x)$$

Dacă înlocuim pe y_1, y_2, y_3 în sistemul dat și simplificăm cu e^{-3x} obținem

$$-3A_1 - 3A_2 x + A_2 + A_1 + A_2 x - B_1 - B_2 x = 0$$

$$-3B_1 - 3B_2 x + B_2 + B_1 + B_2 x - 4C_1 - 4C_2 x = 0$$

$$-3C_1 - 3C_2 x + C_2 + 4C_1 + 4C_2 x - A_1 - A_2 x = 0$$

Prin identificare obţinem

$$-2A_1 + A_2 - B_1 = 0 \qquad -2A_2 - B_2 = 0$$

$$-2B_1 + B_2 - 4C_1 = 0 \qquad -2B_2 - 4C_2 = 0$$

$$C_1 + C_2 - A_2 = 0 \qquad C_2 - A_2 = 0$$

În sistemul al doilea putem lua $A_2 = 1$; $B_2 = -2$; $C_2 = 1$. Înlocuind aceste valori în primul sistem şi putem lua $A_1 = 1$, $B_1 = -1$, $C_1 = 0$. Am obţinut în acest fel, pentru sistemul dat următoarele soluţii:

$$z_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad z_2 = \begin{pmatrix} e^{2x} \\ -e^{2x} \\ 0 \end{pmatrix}; \quad z_3 = \begin{pmatrix} xe^{2x} \\ -2xe^{2x} \\ xe^{2x} \end{pmatrix}$$

Soluţia generală, scrisă vectorial, este

$$y = C_1z_1 + C_2z_2 + C_3z_3$$

sau

$$y_1 = 4C_1 + C_2e^{2x} + C_3xe^{2x}$$

$$y_2 = 4C_1 - C_2e^{2x} - 2C_3xe^{2x}$$

$$y_3 = C_1 + C_3xe^{2x}$$

§ 6. STUDIUL SISTEMELOR CU AJUTORUL FUNCŢIILOR DE MATRICE

Şiruri şi serii de matrice

Notăm cu M_n mulţimea matricelor pătratice de ordinul n, cu elemente reale sau complexe. Se verifică imediat că M_n este un spaţiu liniar (vectorial) faţă de operaţiile obişnuite de adunare a matricelor şi de înmulţire a unei matrice cu un scalar (real sau complex).

Fie $A \in M_n$; $E \in M_n$; $0 \in M_n$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots a_{2n} \\ \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} \dots a_{nn} \end{pmatrix} = (a_{ij});$$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \dots 0 \\ 0 & 1 \dots 0 \\ \dots & \dots \\ 0 & 0 \dots 1 \end{pmatrix} = (\delta_{ij}) \text{ matricea unitate}$$

unde $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$; $\quad 0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \dots 0 \\ 0 & 0 \dots 0 \\ \dots & \dots \\ 0 & 0 \dots 0 \end{pmatrix}$ matricea zero

Definiție 1.6. Prin norma unei matrice $A \in M_n$ și o notăm cu $\|A\|$, înțelegem numărul real dat de egalitatea

$$\|A\| = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|.$$

Norma introdusă pe M_n verifică proprietățile generale ale unei norme. În adevăr, are loc

Teorema 1.6. Dacă A și $B \in M_n$ atunci au loc

1) $\|A\| \geq 0$; $\|A\| = 0 \Leftrightarrow A = 0 \in M_n$

2) $\|\lambda A\| = |\lambda| \, \|A\|$, λ scalar (real sau complex)

3) $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$

și

4) $|a_{ij}| \leq \|A\|$;

5) $\|AB\| \leq \|A\| \, \|B\|$ (35)

Demonstrație

1) Rezultă imediat din definiția normei.

2) $\|\lambda A\| = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} |\lambda a_{ij}| = |\lambda| \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| = |\lambda| \, \|A\|$

3) $\|A + B\| = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} |a_{ij} + b_{ij}| \leq \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} |b_{ij}| =$

$= \|A\| + \|B\|$.

4) Rezultă imediat.

5) $\|AB\| = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \left|\sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}\right| \leq \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} |a_{ik}| \sum_{j=1}^{n} |b_{kj}| \leq$

$\leq \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} |a_{ik}| \, \|B\| = \|A\| \, \|B\|$.

Dacă în inegalitatea (35) luăm $A = B$, atunci $\|A^2\| \leq \|A\|^2$. Se arată imediat, prin inducție, că

$$\|A^m\| \leq \|A\|^m \; (\forall) \, m \in \mathbb{N} \qquad (36)$$

Fie $(A^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ un șir de matrice din M_n și $A \in M_n$:

$$A^{(k)} = (a_{ij}^{(k)}); \; A = (a_{ij})$$

Definiție 2.6. Spunem că șirul de matrice $(A^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ este convergent și are limita A, dacă

$$\lim_{k \to \infty} a_{ij}^{(k)} = a_{ij} \; (\forall) \, i, j = 1, 2, \ldots, n$$

În acest caz scriem $\lim_{k \to \infty} A^{(k)} = A$.

Definiție 3.6. Spunem că seria de matrice

$$\sum_{k=0}^{\infty} A^{(k)} \tag{37}$$

este convergentă și are suma A, dacă șirul sumelor parțiale

$$S_m = \sum_{k=0}^{m} A^{(k)}$$

este convergent și are limita A. În acest caz scriem

$$\sum_{k=0}^{\infty} A^{(k)} = A$$

Definiție 4.6. Spunem că seria de matrice (37) este absolut convergentă dacă seria numerică

$$\sum_{k=0}^{\infty} \| A^{(k)} \| \tag{38}$$

este convergentă.

Teorema 2.6. Dacă seria de matrice (37) este absolut convergentă ea este convergentă.

Demonstrație. Din inegalitatea 4) dată de teorema 1.6. rezultă

$$|a_{ij}^{(k)}| \leq \| A^{(k)} \|; \ (\forall)\ k \in \mathbf{N} \text{ și } (\forall)\ i, j = 1, 2, \ldots, n.$$

Dar convergența seriei numerice (38) atrage după sine convergența seriilor

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_{ij}^{(k)}|; \ (\forall)\ i, j = 1, \ldots, n.$$

Deci fiecare serie $\sum_{k=0}^{\infty} a_{ij}^{(k)}$ $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$ este convergentă și dacă ținem seama de definiția dată convergenței unei serii de matrice, rezultă convergența seriei (37).

Exponențiala unei matrice

Fie A o matrice oarecare pătratică, de ordinul n cu elemente reale sau complexe. Considerăm seria de matrice

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}; \ (A^0 = E) \tag{39}$$

Arătăm că seria (39) este convergentă. În adevăr, dacă ținem seama de inegalitatea (36) avem

$$\left\| \frac{A^k}{k!} \right\| \leq \frac{\| A \|^k}{k!}; \ (\forall)\ k \in \mathbf{N}$$

Seria numerică $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{k!}$ este convergentă $(\forall)\ a \in \mathbf{R}$. În particular și seria numerică

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\|A\|^k}{k!}$$

este convergentă. Prin simpla aplicare a teoremei 2.6. deducem că seria (39) este convergentă oricare ar fi $A \in M_n$.

Definiție 2.6. Suma seriei (39) se notează cu e^A și se numește exponențiala matricei A, deci

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} \qquad (40)$$

Observație. Dacă matricea A are toate elementele reale, atunci matricea e^A are toate elementele reale.

Proprietățile exponențialei

1) Se vede imediat că $e^O = E$, $e^E = eE$; (O și $E \in M_n$).

2) Matricea $A \in M_n$ (fixată) poate fi înmulțită cu un număr real x, deoarece fiecare element al matricei

$$e^{Ax} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(Ax)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} x^k$$

este o serie de puteri convergentă pe toată axa reală.

Dacă ținem seama de proprietățile seriilor de puteri și de definiția derivatei unei matrice: dacă $A(x) = (a_{ij}(x))$, atunci $A'(x) = (a'_{ij}(x))$ rezultă că funcția matricială

$$x \to e^{Ax};\ x \in \mathbf{R}$$

este derivabilă și avem

$$(e^{Ax})' = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A^k}{(k-1)!} x^{k-1} = A\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{A^{k-1}}{(k-1)!} x^{k-1}\right) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{A^{k-1}}{(k-1)!} x^{k-1}\right)A$$

adică

$$(e^{Ax})' = Ae^{Ax} = e^{Ax}A$$

Se arată imediat, prin inducție că au loc egalitățile

$$(e^{Ax})^{(m)} = A^m e^{Ax} = e^{Ax} A^m;\ m \in \mathbf{N} \qquad (41)$$

3) Fie matricea $A \in M_n$ (fixată) și două numere reale x_1 și x_2 atunci

$$e^{A(x_1+x_2)} = e^{Ax_1} e^{Ax_2}$$

Dacă dezvoltăm funcția e^{Ax} în serie Taylor în jurul punctului x_1 obținem

$$e^{Ax} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{Ax_1}A^k}{k!}(x - x_1)^k = e^{Ax_1}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}(x - x_1)^k = e^{Ax_1}e^{A(x-x_1)}$$

Înlocuind pe $x - x_1$ cu x_2 obținem

$$e^{A(x_1+x_2)} = e^{Ax_1}e^{Ax_2} \tag{42}$$

4) Pentru orice matrice $A \in M_n$, matricea e^A este nesingulară și are loc egalitatea $(e^A)^{-1} = e^{-A}$.
Această proprietate rezultă imediat dacă în egalitatea (42) luăm $x_1 = 1$ și $x_2 = -1$. Avem:

$$e^Ae^{-A} = e^0 = E \text{ și la fel } e^{-A}e^A = e^0 = E.$$

Deci

$$(e^A)^{-1} = e^{-A}$$

5) Fie $A \in M_n$ și $B \in M_n$ o matrice nesingulară (det. $B \neq 0$), atunci are loc egalitatea

$$B^{-1}e^AB = e^{B^{-1}AB} \tag{43}$$

Dacă A_1, A_2 și $B \in M_n$ iar B este o matrice nesingulară, atunci avem

$$B^{-1}(A_1A_2)B = (B^{-1}A_1B)(B^{-1}A_2B) \tag{44}$$

Din egalitatea (44), pentru $A_1 = A_2$, obținem

$$B^{-1}A^2B = (B^{-1}AB)^2$$

și în general, se deduce prin inducție, are loc egalitatea

$$B^{-1}A^kB = (B^{-1}AB)^k, \quad k \in N \tag{45}$$

Folosind ultima egalitate obținem

$$e^{B^{-1}AB} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(B^{-1}AB)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B^{-1}A^kB}{k!} = B^{-1}\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}\right)B = B^{-1}e^AB$$

Soluția generală a unui sistem de ecuații diferențiale liniare cu coeficienți constanți și omogeni

Fie dat sistemul

$$\begin{aligned} y_1' &= a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \dots + a_{1n}y_n \\ y_2' &= a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \dots + a_{2n}y_n, \quad a_{ij} \in R \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_n' &= a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \dots + a_{nn}y_n \end{aligned} \tag{46}$$

și condițiile inițiale

$$y_1(x_0) = y_1^0, \quad y_2(x_0) = y_2^0, \quad \dots, \quad y_n(x_0) = y_n^0 \tag{47}$$

dacă considerăm matricele

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots a_{2n} \\ \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} \dots a_{nn} \end{pmatrix};\quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix};\quad y_0 = \begin{pmatrix} y_{10} \\ y_{20} \\ \vdots \\ y_{n0} \end{pmatrix},$$

atunci sistemul (46) şi condiţiile iniţiale (47) se scriu prescurtat

$$y' = Ay; \text{ respectiv } y(x_0) = y_0$$

Teorema 3.6. Funcţia

$$y(x) = e^{(x-x_0)A}y_0 \tag{48}$$

este soluţia sistemului (46) care satisface condiţiile iniţiale (47).

Demonstraţie. În adevăr, din

$$y' = Ay$$

rezultă

$$y'' = Ay' = A^2y$$

şi în general

$$y^{(k)} = A^ky$$

dacă ţinem seama de condiţia $y(x_0) = y_0$, deducem

$$y^{(k)}(x_0) = A^ky(x_0) = A^ky_0$$

şi scriind dezvoltarea în serie Taylor a lui y în jurul punctului x_0, avem

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x-x_0)^k}{k!}\, y^{(k)}(x_0) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x-x_0)^k}{k!}\, A^ky_0 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(A(x-x_0))^k}{k!}\, y_0$$

adică

$$y(x) = e^{A(x-x_0)}y_0$$

Dacă ţinem seama de proprietatea 1, avem

$$y(x_0) = e^0y_0 = Ey_0 = y_0$$

deci funcţia $y(x)$ dată la (48) este soluţie a sistemului (46) şi ea satisface condiţiile iniţiale date.

Observaţie. Dacă considerăm matricea

$$C = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_n \end{pmatrix}$$

unde $C_1, C_2, \dots, C_n$ sînt constante reale şi arbitrare atunci soluţia generală, sub formă matricială, a sistemului (46) este

$$y = e^{Ax}C \tag{48'}$$

Pentru $x = 0$ obținem $y(0) = e^0 C = EC = C$ și deci

$$y(x) = e^{Ax} y(0)$$

Teorema 4.6. Fie $A, B \in M_n$ două matrici cu toate elementele reale cu proprietatea că $AB = BA$, atunci

$$e^{A+B} = e^A e^B$$

Demonstrație. Din condiția $AB = BA$ rezultă

$$A^2 B = A(AB) = A(BA) = (AB)A = BA^2,$$

deci B permută cu A^2.
Rezultă imediat, prin inducție, că $A^k B = BA^k$ și deci

$$e^A B = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}\right) B = B\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}\right) = Be^A$$

considerăm funcția

$$F(x) = e^{(A+B)x} - e^{Ax}e^{Bx}; \quad x \in \mathbf{R}$$

Avem

$$F'(x) = (A + B)\, e^{(A+B)x} - A\, e^{Ax}e^{Bx} - e^{Ax} B\, e^{Bx}$$

$$= (A + B)\, e^{(A+B)x} - A\, e^{Ax}e^{Bx} - B\, e^{Ax}e^{Bx} = (A + B)\, F(x)$$

În acest fel am dedus că funcția F este soluție a sistemului

$$y' = (A + B)\, y$$

Din observația precedentă rezultă că

$$F(x) = e^{(A+B)x} F(0)$$

dar $F(0) = E - EE = 0$ și deci $F(x) = 0$; $(\forall)\ x \in \mathbf{R}$. În particular

$$F(1) = 0, \text{ deci } e^{A+B} = e^A e^B$$

Calculul matricei e^A

Se pune problema calculării matricei e^A. Calculul pe baza definiției este, în general, destul de dificil. Folosind unele rezultate din algebra liniară vom arăta că aflarea matricei e^A revine la efectuarea unor operațiuni algebrice.

Dacă B este o matrice pătratică de ordinul n cu toate elementele reale și nesingulară (det. $B \neq 0$) am arătat că are loc egalitatea

$$B^{-1} e^A B = e^{B^{-1}AB} \tag{45}$$

de unde obținem

$$e^A = B\, e^{B^{-1}AB} B^{-1}$$

Vom căuta matricea B astfel încît matricea

$$e^{B^{-1}AB}$$

să aibă o formă cît mai simplă.

Amintim că valorile proprii ale matricei A sînt date de ecuaţia

$$\det(A - rE) = 0$$

În legătură cu valorile proprii ale matricei A distingem două cazuri

a) dacă matricea A are valorile proprii distincte, există o matrice B nesingulară astfel ca matricea

$$B^{-1}AB = A^* \text{ (notaţie)}$$

să aibă forma diagonală:

$$A^* = \begin{pmatrix} r_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & r_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & r_n \end{pmatrix}$$

Pentru prescurtarea scrierii, folosim notaţia

$$A^* = [r_1, r_2, \dots, r_n]$$

Avem, evident

$$(A^*)^k = \begin{pmatrix} r_1^k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & r_2^k & \dots & 0 \\ 0 & & \dots & r_n^k \end{pmatrix} = [r_1^k, r_2^k, \dots, r_n^k]$$

Obţinem

$$e^{A^*} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(A^*)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{r_1^k}{k!}, \frac{r_2^k}{k!}, \dots, \frac{r_n^k}{k!}\right] =$$

$$= \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{r_1^k}{k!}, \sum_{k=0}^{\infty} \frac{r_2^k}{k!}, \dots, \sum_{k=0}^{\infty} \frac{r_n^k}{k!}\right] = [e^{r_1}, e^{r_2}, \dots, e^{r_n}] =$$

$$= \begin{pmatrix} e^{r_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{r_2} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & e^{r_n} \end{pmatrix}$$

Deci soluţia $y(x)$ este, în acest caz, dată de egalitatea

$$y(x) = e^{A(x-x_0)}y(x_0) = Be^{B^{-1}AB(x-x_0)}B^{-1}y(x_0) =$$

$$= Be^{A^*(x-x_0)}B^{-1}y(x_0) = B[e^{r_1(x-x_0)}, e^{r_2(x-x_0)}, \dots, e^{r_n(x-x_0)}]B^{-1}y(x_0) =$$

$$= B\begin{pmatrix} e^{r_1(x-x_0)} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{r_2(x-x_0)} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & e^{r_n(x-x_0)} \end{pmatrix}B^{-1}y(x_0)$$

b) Dacă matricea A are valorile proprii $r_1, r_2, \dots, r_s$ multiple, respectiv de ordinul $n_1, n_2, \dots, n_s$ ($n_1 + n_2 + \dots + n_s = n$) atunci, dacă matricea

$$B^{-1}AB = A^*$$

are formă canonică Jordan

$$A^* = \begin{pmatrix} J_1 & 0 & \dots 0 \\ 0 & J_2 & \dots 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots J_s \end{pmatrix}$$

unde fiecare matrice J_k ($k = 1, 2, \dots, s$) este de ordinul n_k şi are forma

$$J_k = \begin{pmatrix} r_k & 1 & 0 & \dots 0 \\ 0 & r_k & 1 & 0 \dots 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots r_k \end{pmatrix}$$

atunci procedăm în felul următor.

Orice celulă Jordan J_k ($k = 1, 2, \dots, s$) se scrie

$$J_k = r_k E_k + I_k$$

unde E_k este matricea unitate de ordinul n_k, iar

$$I_k = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 \dots 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \dots 0 & 0 \end{pmatrix}$$

este o matrice tot de ordinul n_k şi are toate elementele

$a_{r, r+1} = 1$; ($r = 1, 2, \dots, n_k - 1$) iar celelalte egale cu zero.

Mai observăm că suma şi produsul a două matrice diagonale de forma

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

sînt matrice de aceeaşi formă

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & B_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A + A_1 & 0 \\ 0 & B + B_1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & B_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AA_1 & 0 \\ 0 & BB_1 \end{pmatrix}$$

dacă A şi A_1 respectiv B şi B_1 sînt matrice de acelaşi ordin.

Din această ultimă observaţie rezultă

$$e^{A^*} = \begin{pmatrix} e^{J_1} & 0 & \dots 0 \\ 0 & e^{J_2} & \dots 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots e^{J_s} \end{pmatrix} \tag{49}$$

Pentru a calcula matricea $e^{J_k(x-x_0)}$ este deci suficient să calculăm matricea $e^{I_k(x-x_0)}$. Printr-un calcul simplu obținem

$$I_k^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots 0 & 0 \end{pmatrix}; \dots$$

$$I_k^{n_k-1} = \begin{pmatrix} 0 \dots 0 & 1 \\ 0 \dots 0 & 0 \\ \dots & \dots \\ 0 \dots 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad I_k^{n_k} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \dots 0 \\ 0 & 0 \dots 0 \\ \dots & \dots \\ 0 & 0 \dots 0 \end{pmatrix}$$

Deoarece E_k și I_k sînt permutabile, avem

$$e^{J_k(x-x_0)} = e^{\lambda_k(x-x_0)} e^{I_k(x-x_0)} =$$

$$= e^{\lambda_k(x-x_0)}\left[E_k + \frac{x-x_0}{1!} I_k + \frac{(x-x_0)^2}{2!} I_k^2 + \dots + \frac{(x-x_0)^{n_k-1}}{(n_k-1)!} I_k^{n_k-1}\right] \tag{50}$$

care scrisă sub formă dezvoltată, devine

$$e^{J_k(x-x_0)} = e^{\lambda_k(x-x_0)} \begin{pmatrix} 1 & \frac{x-x_0}{1!} & \frac{(x-x_0)^2}{2!} & \dots & \frac{(x-x_0)^{n_k-1}}{(n_k-1)!} \\ 0 & 1 & \frac{x-x_0}{1!} & \dots & \frac{(x-x_0)^{n_k-2}}{(n_k-2)!} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \frac{x-x_0}{1!} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Dacă notăm $f(z) = e^{z(x-x_0)}$, atunci formula (50) devine

$$e^{J_k(x-x_0)} = f(\lambda_k)E_k + \frac{f'(\lambda_k)}{1!} I_k + \frac{f''(\lambda_k)}{2!} I_k^2 + \dots + \frac{f^{(n_k-1)}(\lambda_k)}{(n_k-1)!} I_k^{n_k-1} \tag{51}$$

Matricea $e^{J(x-x_0)}$ poate fi considerată ca o sumă a s matrice care se obțin din formula (49) dacă se lasă neschimbată matricea $e^{J_k(x-x_0)}$ (în locul pe care-l ocupă în matrice) iar ceilalți termeni se înlocuiesc cu zero.

Cu această convenţie, obţinem

$$e^{A^*(x-x_0)} = \sum_{k=1}^{s}\left[f(r_k)E_k + \frac{f'(r_k)}{1!}I_k + \dots + \frac{f^{(m_k-1)}(r_k)}{(m_k-1)!}I_k^{m_k-1}\right]$$

Şi dacă ţinem seama că

$$y(x) = Be^{A^*(x-x_0)}B^{-1}y(x_0)$$

obţinem soluţia sistemului.

Exemplul 1.

Să se afle soluţia sistemului

$$y_1' = 5y_1 + 4y_2,\quad y_2' = y_1 + 2y_2;\quad y_1(0) = 2;$$
$$y_2(0) = 3$$

Ecuaţia caracteristică $D(r) = \begin{vmatrix} 5-r & 4 \\ 1 & 2-r \end{vmatrix} = 0$ are două rădăcini reale şi distincte $r_1 = 6$; $r_2 = 1$.

În acest caz avem

$$A^* = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};\quad B = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\quad B^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}\text{ şi } y(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

şi atunci, dacă ţinem seama de rezultatul stabilit la cazul a), avem

$$y(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix} = B\begin{pmatrix} e^{6x} & 0 \\ 0 & e^{x} \end{pmatrix}B^{-1}y(0) = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{6x} & 0 \\ 0 & e^{x} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}y(0)$$

$$y(x) = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 4e^{6x} + e^{x} & 4e^{6x} - 4e^{x} \\ e^{6x} - e^{x} & e^{6x} + 4e^{x} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

de unde obţinem

$$y_1(x) = 4e^{6x} - 2e^{x};\quad y_2(x) = e^{6x} + 2e^{x}$$

Exemplul 2. Să se afle soluţia sistemului

$$y_1' = y_1 - 3y_2 + 3y_3$$
$$y_2' = -2y_1 - 6y_2 + 13y_3$$
$$y_3' = -y_1 - 4y_2 + 8y_3$$
$$y_1(1) = 1;\ y_2(1) = 2;\ y_3(1) = 3$$

Ecuaţia caracteristică

$$D(r) = \begin{vmatrix} 1-r & -3 & 3 \\ -2 & -6-r & 13 \\ -1 & -4 & 8-r \end{vmatrix} = 0$$

are trei rădăcini reale şi egale ($r_1 = r_2 = r_3 = 1$)

În acest caz avem

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 13 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix};$$

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2 & -7 & 13 \\ 1 & 3 & -6 \end{pmatrix}; \qquad y(1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Avem

$$y(x) = B e^{A^*(x-1)} B^{-1} y(1)$$

Pentru a calcula $e^{A^*(x-1)}$ folosim rezultatul stabilit la cazul b). Considerăm funcția

$$f(z) = e^{z(x-1)}, \text{ avem } f'(z) = (x-1)\, e^{z(x-1)};$$

$$f''(z) = (x-1)^2 e^{z(x-1)}$$

și deci, pe baza formulei (51), obținem

$$e^{A^*(x-1)} = f(1) E_0 + \frac{f'(1)}{1!} E_1 + \frac{f''(1)}{2!} E_2 =$$

$$= e^{x-1}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + (x-1)e^{x-1}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} +$$

$$+ \frac{(x-1)^2}{2} e^{x-1}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = e^{x-1}\begin{pmatrix} 1 & x-1 & \frac{(x-1)^2}{2} \\ 0 & 1 & x-1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Soluția căutată este

$$\begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \\ y_3(x) \end{pmatrix} = e^{x-1}\begin{pmatrix} 3 & 6 & 13 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & x-1 & \frac{(x-1)^2}{2} \\ 0 & 1 & x-1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2 & -7 & 13 \\ 1 & 3 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

PROBLEME

Să se integreze sistemele următoare:

1. $y_1' = 2y_1 + y_2$; $y_2' = y_1 + 2y_2$; $y_1(0) = 1$; $y_2(0) = 3$

R: $y_1 = 2e^{3x} - e^{x}$; $y_2 = 2e^{3x} + e^{x}$

2. $y_1' = 4y_1 + 6y_2;\ y_2' = 2y_1 + 3y_2 + x$

$$R:\ y_1 = C_1 + C_2 e^{7x} - \frac{3}{49}x(7x+2)$$

$$y_2 = -\frac{2}{3}C_1 + \frac{1}{2}C_2 e^{7x} + \frac{1}{49}(14x^2 - 3x + 1)$$

3. $y_1' = -y_2 + e^x;\ y_2' = y_1 + e^{-x}$

$$R:\ y_1 = C_1\cos x + C_2\sin x + \operatorname{sh} x;$$

$$y_2 = C_1\sin x - C_2\cos x + \operatorname{sh} x.$$

4. $y_1' = y_2 + x;\ y_2' = y_1 + e^x;\ y_1(0) = 1;\ y_2(0) = 0$

$$R:\ y_1 = \frac{1}{4}(3e^x + 5e^{-x}) + \frac{1}{2}xe^x - 1$$

$$y_2 = \frac{5}{4}(e^x - e^{-x}) + \frac{1}{2}xe^x - x$$

5. $y_1'' + m^2 y_2 = 0;\ y_2'' - m^2 y_1 = 0$

$$R:\ y_1 = e^{\frac{m\sqrt{2}}{2}x}\left(C_1\cos\frac{m\sqrt{2}}{2}x + C_2\sin\frac{m\sqrt{2}}{2}x\right) + e^{-\frac{m\sqrt{2}}{2}x}\left(C_3\cos\frac{m\sqrt{2}}{2}x + C_4\sin\frac{m\sqrt{2}}{2}x\right)$$

$$y_2 = e^{\frac{m\sqrt{2}}{2}x}\left(C_1\sin\frac{m\sqrt{2}}{2}x - C_2\cos\frac{m\sqrt{2}}{2}x\right) + e^{-\frac{m\sqrt{2}}{2}x}\left(C_4\cos\frac{m\sqrt{2}}{2}x - C_3\sin\frac{m\sqrt{2}}{2}x\right)$$

6. $y_1' = 6y_1 - 12y_2 - y_3;\ y_2' = y_1 - 3y_2 - y_3;\ y_3' = -4y_1 + 12y_2 + 3y_3$

$$R:\ y_1 = 2C_1e^x + 7C_2e^{2x} + 3C_3e^{3x}$$

$$y_2 = C_1e^x + 3C_2e^{2x} + C_3e^{3x}$$

$$y_3 = -2C_1e^x - 8C_2e^{2x} - 3C_3e^{3x}$$

7. $y_1' = 4y_1 + 3y_2;\ y_2' = -3y_1 + 4y_2$

$$R:\ y_1 = e^{4x}(C_1\cos 3x + C_2\sin 3x);$$

$$y_2 = e^{4x}(-C_1\sin 3x + C_2\cos 3x)$$

8. $y_1' = y_1 - y_3;\ y_2' = y_3;\ y_3' = y_1 - y_2$

$$R:\ y_1 = C_1e^x + C_2\cos x + C_3\sin x$$

$$y_2 = C_1e^x - C_2\sin x + C_3\cos x$$

$$y_3 = C_2(\cos x + \sin x) + C_3(\sin x - \cos x)$$

9. $y_1' = -15y_1 - 6y_2 + 16y_3;\ y_2' = -15y_1 - 7y_2 + 18y_3;$

$y_3' = -19y_1 - 8y_2 + 21y_3$

$R:\ y_1 = 2C_1e^{x} + 2(4C_2 - C_3)\cos x + 2(4C_3 + C_2)\sin x$

$y_2 = 2C_1e^{x} + 3(5C_2 + 3C_3)\cos x + 3(5C_3 - 3C_2)\sin x$

$y_3 = C_1e^{x} + (7C_2 - 3C_3)\cos x + (7C_3 + 3C_2)\sin x$

10. $y_1' = y_2 + y_3;\ y_2' = y_1 + y_2 - y_3;\ y_3' = y_2 + y_3$

$R:\ y_1 = 2C_1 + C_2x + C_3e^{x}$

$y_2 = -C_1 + C_3e^{x}$

$y_3 = C_1 + C_2x + C_3e^{x}$

11. $y_1' = -y_1 + y_2 + y_3;\ y_2' = y_1 - y_2 + y_3;\ y_3' = y_1 + y_2 - y_3$

$R:\ y_1 = C_1e^{x} + C_2e^{-2x}$

$y_2 = C_1e^{x} + C_3e^{-2x}$

$y_3 = C_1e^{x} - C_2e^{-2x} - C_3e^{-2x}$

12. $xy_1' - y_2 = 0;\ xy_2' + y_1 = 0;\ (x \neq 0)\ y_1(1) = 2,\ y_2(1) = 1$

(Dacă se face schimbarea de variabilă $|x| = e^t$ se obţine un sistem cu coeficienţi constanţi)

$R:\ y_1 = 2\cos(\ln|x|) + \sin(\ln|x|)$

$y_2 = -2\sin(\ln|x|) + \cos(\ln|x|)$

CAPITOLUL XVI

ÎNTEGRALE PRIME

§ 1. CONSIDERAŢII GENERALE

Fie dat sistemul de ecuaţii diferenţiale

$$\begin{aligned} y_1' &= f_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \\ y_2' &= f_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_n' &= f_n(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \end{aligned} \tag{1}$$

unde funcţiile reale $f_i (i = 1, 2, \ldots, n)$ sînt definite şi continue pe un domeniu $D \subset \mathbf{R}^{n+1}$ iar derivatele parţiale $\frac{\partial f_i}{\partial y_j}$ $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$ există şi sînt continue pe D.

Definiţie 1.1. O funcţie $F: D \subset \mathbf{R}^{n+1} \to \mathbf{R}$ se numeşte integrală primă a sistemului de ecuaţii diferenţiale (1) dacă pentru orice soluţie

$$y_1 = \varphi_1(x),\ y_2 = \varphi_2(x), \ldots, y_n = \varphi_n(x), \quad x \in I$$

a sistemului (1), funcţia $\Phi: I \to \mathbf{R}$ definită prin

$$\Phi(x) = F(x, \varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x))$$

este constantă pe I.

Observaţie. Valoarea constantei depinde de soluţie. Teorema care urmează are o importanţă deosebită deoarece permite verificarea faptului că o funcţie este integrală primă fără să fie necesară cunoaşterea soluţiei sistemului.

Teoremă 1.1. Condiţia necesară şi suficientă ca funcţia $F: D \subset \mathbf{R}^{n+1} \to \mathbf{R}$, cu derivate parţiale continue pe D, să fie integrală primă a sistemului (1) este ca în orice punct $(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \in D$ să aibă loc egalitatea

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y_1} f_1 + \frac{\partial F}{\partial y_2} f_2 + \ldots + \frac{\partial F}{\partial y_n} f_n = 0 \tag{2}$$

Demonstrație. Să demonstrăm necesitatea condiției. Fie

$$(x_0, y_{10}, y_{20}, \ldots, y_{n0}) \in D$$

Din teorema de existență și unicitatea pentru sisteme de ecuații diferențiale știm că există o soluție a sistemului (1)

$$y_1 = \varphi_1(x),\ y_2 = \varphi_2(x), \ldots, y_n = \varphi_n(x), \quad x \in I$$

astfel încît

$$y_{10} = \varphi_1(x_0),\ y_{20} = \varphi_2(x_0), \ldots, y_{n0} = \varphi_n(x_0)$$

Deoarece F este integrală primă a sistemului (1), atunci

$$F(x, \varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x)), \qquad x \in I$$

este constantă, deci are derivata nulă. Dar F are derivate parțiale continue și deci derivata poate fi calculată cu ajutorul teoremei de derivare a funcțiilor compuse, obținem

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y_1}\varphi_1'(x) + \frac{\partial F}{\partial y_2}\varphi_2'(x) + \ldots + \frac{\partial F}{\partial y_n}\varphi_n'(x) = 0$$

Ținînd seama că $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ este soluție a sistemului (1) obținem

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y_1} f_1 + \frac{\partial F}{\partial y_2} f_2 + \ldots + \frac{\partial F}{\partial y_n} f_n = 0$$

și deoarece punctul $(x_0, y_{10}, y_{20}, \ldots, y_{n0})$ este arbitrar în D necesitatea condiției este demonstrată.

Să demonstrăm suficiența condiției. Presupunem că F satisface egalitatea (2) și dacă $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ este o soluție a sistemului (1), avem

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y_1}\varphi_1'(x) + \frac{\partial F}{\partial y_2}\varphi_2'(x) + \ldots + \frac{\partial F}{\partial y_n}\varphi_n'(x) = 0$$

sau

$$\frac{d}{dx} F(x, \varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x)) = 0$$

deci $F(x, \varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x))$ este constantă.

Teorema 2.1. Fie $F_1, F_2, \ldots, F_n$; n integrale prime ale sistemului de ecuații diferențiale (1). Presupunem:

1) funcțiile F_i; $(i = 1, 2, \ldots, n)$ admit derivate parțiale de ordinul întîi continue pe D.

2) determinantul funcțional

$$\frac{D(F_1, F_2, \ldots, F_n)}{D(y_1, y_2, \ldots, y_n)}$$

este diferit de zero în fiecare punct $(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \in D$. Atunci, pentru $(x_0, y_{10}, y_{20}, \ldots, y_{n0}) \in D$, găsirea soluţiei sistemului (1) care verifică condiţiile

$$\varphi_1(x_0) = y_{10},\ \varphi_2(x_0) = y_{20},\ \ldots,\ \varphi_n(x_0) = y_{n0}$$

se reduce la o problemă de funcţii implicite.

Demonstraţie. Avem sistemul

$$F_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) - F_i(x_0, y_{10}, y_{20}, \ldots, y_{n0}) = 0$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n)$$

Condiţiile din teorema de existenţă de la sisteme de funcţii implicite sînt îndeplinite. Există atunci funcţiile reale $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ definite şi cu derivate continue într-o vecinătate a punctului x_0, avînd următoarele proprietăţi:

a) $\varphi_i(x_0) = y_{i0}$, $i = 1, 2, \ldots, n$

b) $F_i(x, \varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x)) - F_i(x_0, y_{10}, y_{20}, \ldots, y_{n0}) = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$

Vom arăta că funcţiile $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ formează o soluţie a sistemului (1), cu

$$\varphi_1(x_0) = y_{10},\ \varphi_2(x_0) = y_{20},\ \ldots,\ \varphi_n(x_0) = y_{n0}.$$

În adevăr, din proprietatea a) a funcţiilor φ_i, avem

$$\varphi_i(x_0) = y_{i0}, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Vom calcula derivatele $\frac{d\varphi_i}{dx}$, $i = 1, \ldots, n$ derivînd identităţile b). Avem

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_1}{\partial y_1}\frac{d\varphi_1}{dx} + \frac{\partial F_1}{\partial y_2}\frac{d\varphi_2}{dx} + \ldots + \frac{\partial F_1}{\partial y_n}\frac{d\varphi_n}{dx} = 0\\
&\frac{\partial F_2}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y_1}\frac{d\varphi_1}{dx} + \frac{\partial F_2}{\partial y_2}\frac{d\varphi_2}{dx} + \ldots + \frac{\partial F_2}{\partial y_n}\frac{d\varphi_n}{dx} = 0\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\frac{\partial F_n}{\partial x} + \frac{\partial F_n}{\partial y_1}\frac{d\varphi_1}{dx} + \frac{\partial F_n}{\partial y_2}\frac{d\varphi_2}{dx} + \ldots + \frac{\partial F_n}{\partial y_n}\frac{d\varphi_n}{dx} = 0
\end{aligned}
\qquad (3)
$$

derivatele parţiale fiind calculate în punctul $(x, \varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x))$. Din sistemul (3), pe baza regulii lui Cramer, obţinem

$$\frac{d\varphi_i}{dx} = -\frac{\dfrac{D(F_1, F_2, \ldots, F_n)}{D(y_1, \ldots, y_{i-1}, x, y_{i+1}, \ldots, y_n)}}{\dfrac{D(F_1, F_2, \ldots, F_n)}{D(y_1, y_2, \ldots, y_i, \ldots, y_n)}}, \qquad i = 1, 2, \ldots, n \qquad (4)$$

Dacă utilizăm acum relaţia (2) care exprimă faptul că F_i, $i = 1, \dots, n$, sînt integrale prime ale sistemului (1), avem:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_1}{\partial y_1} f_1 + \frac{\partial F_1}{\partial y_2} f_2 + \dots + \frac{\partial F_1}{\partial y_n} f_n = 0\\
&\frac{\partial F_2}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y_1} f_1 + \frac{\partial F_2}{\partial y_2} f_2 + \dots + \frac{\partial F_2}{\partial y_n} f_n = 0\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&\frac{\partial F_n}{\partial x} + \frac{\partial F_n}{\partial y_1} f_1 + \frac{\partial F_n}{\partial y_2} f_2 + \dots + \frac{\partial F_n}{\partial y_n} f_n = 0
\end{aligned}
\tag{5}
$$

derivatele parţiale fiind calculate în punctul $(x, y_1, y_2, \dots, y_n)$, din sistemul (5), pe baza regulii lui Cramer, obţinem

$$
f_i = -\frac{\dfrac{D(F_1, F_2, \dots, F_n)}{D(y_1, \dots, y_{i-1}, x, y_{i+1}, \dots, y_n)}}{\dfrac{D(F_1, F_2, \dots, F_n)}{D(y_1, y_2, \dots, y_i, \dots, y_n)}}, \quad i = 1, 2, \dots, n \tag{6}
$$

adică funcţiile y_i, $i = 1, \dots, n$ formează o soluţie a sistemului (1). Teorema este demonstrată.

Observaţie. Din această teoremă rezultă că dacă sînt date n integrale prime cu

$$\frac{D(F_1, F_2, \dots, F_n)}{D(y_1, y_2, \dots, y_n)} \neq 0 \text{ pe } D$$

atunci rezolvarea sistemului (1) se reduce la o problemă de funcţii implicite. Reciproc, cunoscînd soluţia sistemului (1) se pot forma n integrale prime cu proprietatea de mai sus (vezi [16]).

§ 2. SISTEME SIMETRICE

Sînt sisteme de ecuaţii diferenţiale scrise sub forma

$$\frac{dx_1}{P_1(x_1, x_2, \dots, x_n)} = \frac{dx_2}{P_2(x_1, x_2, \dots, x_n)} = \dots = \frac{dx_n}{P_n(x_1, x_2, \dots, x_n)} \tag{7}$$

unde funcţiile reale $P_1, P_2, \dots, P_n$ sînt definite pe un domeniu $D \subset \mathbf{R}^n$, admit derivate parţiale de ordinul întîi continue pe D şi în plus

$$\sum_{i=1}^{n} P_i^2(x_1, x_2, \dots, x_n) \neq 0; \ \forall (x_1, x_2, \dots, x_n) \in D; \tag{8}$$

adică funcțiile P_i, $i = 1, ..., n$ nu se anulează simultan pe D. Orice sistem de ecuații diferențiale de forma (1) poate fi scris sub formă simetrică și anume

$$\frac{dy_1}{f_1(x, y_1, ..., y_n)} = \frac{dy_2}{f_2(x, y_1, y_2, ..., y_n)} = ... = \frac{dy_n}{f_n(x, y_1, y_2, ..., y_n)} = \frac{dx}{1} \tag{9}$$

și reciproc, orice sistem de ecuații diferențiale scris sub forma simetrică (7) se poate scrie și sub forma (1), anume (dacă $P_n \neq 0$ pe D)

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dx_n} &= \frac{P_1(x_1, x_2, ..., x_n)}{P_n(x_1, x_2, ..., x_n)} \\ \frac{dx_2}{dx_n} &= \frac{P_2(x_1, x_2, ..., x_n)}{P_n(x_1, x_2, ..., x_n)} \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{dx_{n-1}}{dx_n} &= \frac{P_{n-1}(x_1, x_2, ..., x_n)}{P_n(x_1, x_2, ..., x_n)} \end{aligned} \tag{10}$$

din teorema 2.1 rezultă că rezolvarea sistemului simetric (7) (echivalent cu (10)) se reduce la o problemă de funcții implicite dacă sînt cunoscute $n-1$ integrale prime independente funcțional. În acest scop este utilă teorema care urmează:

Teorema 2.2. Dacă $\mu_1, \mu_2, ..., \mu_n$ sînt n funcții reale definite și continue pe $D \subset \mathbf{R}^n$ cu următoarele proprietăți

1) $\mu_1 P_1 + \mu_2 P_2 + ... + \mu_n P_n = 0$ pe D

2) $\mu_1 dx_1 + \mu_2 dx_2 + ... + \mu_n dx_n = dF$ pe D (11)

atunci funcția $F: D \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ este o integrală primă a sistemului (7).

Demonstrație. În adevăr, dacă $\varphi_1(x_n), \varphi_2(x_n), ..., \varphi_{n-1}(x_n)$ este o soluție a sistemului (10) (echivalent cu (7)), atunci

$$d\varphi_1 = \frac{P_1}{P_n}dx_n, ..., d\varphi_{n-1} = \frac{P_{n-1}}{P_n}dx_n$$

Dacă înlocuim în identitatea (11) obținem

$$dF(\varphi_1(x_n), ..., \varphi_{n-1}(x_n), x_n) = \frac{1}{P_n}(\mu_1 P_1 + \mu_2 P_2 + ... + \mu_n P_n)dx_n$$

și dacă ținem seama de proprietatea 1) avem

$$dF(\varphi_1(x_n), ..., \varphi_{n-1}(x_n), x_n) = 0$$

deci $F(\varphi_1(x_n), ..., \varphi_{n-1}(x_n), x_n)$ este constantă.

Dacă ținem seama de definiția integralei prime, rezultă că funcția F este o integrală primă a sistemului (7).

Observaţie. Funcţiile $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ se găsesc cu ajutorul sistemului (7), folosind regulile obişnuite ale proporţiilor:

$$\frac{dx_1}{P_1} = \dots = \frac{dx_n}{P_n} = \frac{\mu_1 dx_1}{\mu_1 P_1} = \dots = \frac{\mu_n dx_n}{\mu_n P_n} = \frac{\mu_1 dx_1 + \dots + \mu_n dx_n}{\mu_1 P_1 + \dots + \mu_n P_n}$$

Alegem funcţiile $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$ astfel încît să avem

$$\mu_1 P_1 + \mu_2 P_2 + \dots + \mu_n P_n = 0$$

iar

$$\mu_1 dx_1 + \mu_2 dx_2 + \dots + \mu_n dx_n$$

să fie o diferenţială totală exactă. Atunci, dacă folosim teorema 1.2 putem găsi o integrală primă.

Exemplul 1. Fie sistemul

$$\frac{dy}{dx} = \frac{z-x}{y-z}, \quad \frac{dz}{dx} = \frac{x-y}{y-z}$$

Scriem sistemul sub formă simetrică

$$\frac{dx}{y-z} = \frac{dy}{z-x} = \frac{dz}{x-y}$$

dacă luăm $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = 1$, avem

$\dfrac{dx}{y-z} = \dfrac{dy}{z-x} = \dfrac{dz}{x-y} = \dfrac{dx+dy+dz}{0}$ şi deci $dx + dy + dz = 0$ de unde

$$F_1(x, y, z) = x + y + z$$

este o integrală primă a sistemului dat.

Dacă luăm pe $\mu_1 = x$, $\mu_2 = y$, $\mu_3 = z$, avem

$\dfrac{x\,dx}{x(y-z)} = \dfrac{y\,dy}{y(z-x)} = \dfrac{z\,dz}{z(x-y)} = \dfrac{x\,dx + y\,dy + z\,dz}{0}$, şi, deci $x\,dx + y\,dy + z\,dz = 0$

de unde

$$F_2(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$$

este o integrală primă a sistemului dat.

Rezolvarea sistemului dat se reduce la rezolvarea următorului sistem de funcţii implicite

$$x + y + z = C_1$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = C_2$$

Exemplul 2. Fie sistemul

$$\frac{dx}{x^2 - y^2 - z^2} = \frac{dy}{2xy} = \frac{dz}{2xz}.$$

dacă luăm $\mu_1 = 0$, $\mu_2 = z$, $\mu_3 = -y$, obținem ecuația

$$\frac{dy}{y} = \frac{dz}{z}; \quad d\ln\frac{y}{z} = 0 \text{ și deci } F_1(x, y, z) = \frac{y}{z}.$$

Dacă luăm $\mu_1 = x$, $\mu_2 = y$, $\mu_3 = z$, obținem

$$\frac{x\,dx + y\,dy + z\,dz}{x(x^2 + y^2 + z^2)} = \frac{dy}{2xy} \Rightarrow \frac{2(x\,dx + y\,dy + z\,dz)}{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{dy}{y}.$$

Din ultima ecuație obținem

$$\frac{d(x^2 + y^2 + z^2)}{x^2 + y^2 + z^2} - \frac{dy}{y} = 0 \text{ sau } d\ln(x^2 + y^2 + z^2) - d\ln y = 0$$

și deci

$$F_2(x, y, z) = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{y}.$$

Rezolvarea sistemului se reduce la rezolvarea următorului sistem de funcții implicite.

$$\frac{y}{z} = C_1; \quad \frac{x^2 + y^2 + z^2}{y} = C_2.$$

§ 3. ECUAȚII CU DERIVATE PARȚIALE DE ORDINUL ÎNTÎI, LINIARE ȘI OMOGENE

Fie ecuații de forma

$$P_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)\frac{\partial u}{\partial x_1} + P_2(x_1, x_2, \ldots, x_n)\frac{\partial u}{\partial x_2} + \ldots +$$
$$+ P_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)\frac{\partial u}{\partial x_n} = 0 \tag{12}$$

unde u este funcția necunoscută iar funcțiile reale P_i; $i = 1, 2, \ldots, n$; sînt definite pe un domeniu $D \subset \mathbf{R}^n$, admit derivate parțiale de ordinul întîi continue pe D și în plus

$$\sum_{i=1}^{n} P_i^2(x_1, x_2, \ldots, x_n) \neq 0, \ (\forall)\ (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in D.$$

Vom presupune în continuare că $P_n \neq 0$.

Definiţia 1.3. Spunem că funcţia $F: D_1 \subset D \to \mathbf{R}$ este o soluţie a ecuaţiei (12) dacă F admite derivate parţiale de ordinul întîi continue pe D_1 şi în toate punctele $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in D_1$ este verificată identitatea

$$\sum_{i=1}^{n} P_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \frac{\partial F}{\partial x_i}(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \tag{13}$$

Vom arăta că problema aflării soluţiilor ecuaţiei (12) se reduce în fond la problema rezolvării unui sistem de ecuaţii diferenţiale. În acest scop considerăm sistemul

$$\frac{dx_1}{P_1(x_1, x_2, \dots, x_n)} = \frac{dx_2}{P_2(x_1, x_2, \dots, x_n)} = \dots = \frac{dx_n}{P_n(x_1, x_2, \dots, x_n)} \tag{14}$$

care se numeşte sistemul caracteristic al ecuaţiei (12) iar curbele integrale ale sistemului (14) se numesc curbe caracteristice ale ecuaţiei (12).

Teorema 1.3. O funcţie $F: D_1 \subset D \to \mathbf{R}$ este soluţie a ecuaţiei cu derivate parţiale (12) dacă şi numai dacă funcţia F este o integrală primă a sistemului caracteristic (14).

Demonstraţie. În adevăr, dacă F este o integrală primă a sistemului caracteristic (14), atunci pe baza teoremei 1.1 are loc egalitatea

$$\frac{\partial F}{\partial x_n} + \frac{P_1}{P_n}\frac{\partial F}{\partial x_1} + \frac{P_2}{P_n}\frac{\partial F}{\partial x_2} + \dots + \frac{P_{n-1}}{P_n}\frac{\partial F}{\partial x_{n-1}} = 0$$

Dacă înmulţim cu P_n, obţinem

$$P_1 \frac{\partial F}{\partial x_1} + P_2 \frac{\partial F}{\partial x_2} + \dots + P_{n-1} \frac{\partial F}{\partial x_{n-1}} + P_n \frac{\partial F}{\partial x_n} = 0$$

şi deci funcţia F este o soluţie a ecuaţiei (12).

Invers, dacă $F: D_1 \subset D \to \mathbf{R}$ este o soluţie a ecuaţiei (12) avem

$$P_1 \frac{\partial F}{\partial x_1} + P_2 \frac{\partial F}{\partial x_2} + \dots + P_{n-1} \frac{\partial F}{\partial x_{n-1}} + P_n \frac{\partial F}{\partial x_n} = 0$$

de unde obţinem

$$\frac{P_1}{P_n}\frac{\partial F}{\partial x_1} + \frac{P_2}{P_n}\frac{\partial F}{\partial x_2} + \dots + \frac{P_{n-1}}{P_n}\frac{\partial F}{\partial x_{n-1}} + \frac{\partial F}{\partial x_n} = 0$$

şi pe baza teoremei 1.1 rezultă că funcţia F este o integrală primă a sistemului caracteristic (14).

Teorema 2.3. Dacă funcţia reală Φ definită pe domeniul $D \subset \mathbf{R}^k$, are derivate parţiale continue şi dacă $F_1, F_2, \dots, F_k$ sînt k integrale prime ale sistemului caracteristic (14), atunci funcţia compusă

$$u = \Phi(F_1, F_2, \dots, F_k)$$

este o soluţie a ecuaţiei cu derivate parţiale (12).

Demonstraţie. Dacă folosim teorema de derivare a funcţiilor compuse, avem

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = \frac{\partial \Phi}{\partial F_1}\frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \Phi}{\partial F_2}\frac{\partial F_2}{\partial x_1} + \ldots + \frac{\partial \Phi}{\partial F_k}\frac{\partial F_k}{\partial x_1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_2} = \frac{\partial \Phi}{\partial F_1}\frac{\partial F_1}{\partial x_2} + \frac{\partial \Phi}{\partial F_2}\frac{\partial F_2}{\partial x_2} + \ldots + \frac{\partial \Phi}{\partial F_k}\frac{\partial F_k}{\partial x_2}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_n} = \frac{\partial \Phi}{\partial F_1}\frac{\partial F_1}{\partial x_n} + \frac{\partial \Phi}{\partial F_2}\frac{\partial F_2}{\partial x_n} + \ldots + \frac{\partial \Phi}{\partial F_k}\frac{\partial F_k}{\partial x_n}$$

Dacă înmulţim prima egalitate cu P_1, a doua cu P_2, ş.a.m.d., ultima egalitate cu P_n şi apoi adunăm pe coloane, obţinem

$$P_1\frac{\partial u}{\partial x_1} + P_2\frac{\partial u}{\partial x_2} + \ldots + P_n\frac{\partial u}{\partial x_n} =$$

$$= \frac{\partial \Phi}{\partial F_1}\left(P_1\frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \ldots + P_n\frac{\partial F_1}{\partial x_n}\right) +$$

$$+ \frac{\partial \Phi}{\partial F_2}\left(P_1\frac{\partial F_2}{\partial x_1} + P_2\frac{\partial F_2}{\partial x_2} + \ldots + P_n\frac{\partial F_2}{\partial x_n}\right) +$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+ \frac{\partial \Phi}{\partial F_k}\left(P_1\frac{\partial F_k}{\partial x_1} + P_2\frac{\partial F_k}{\partial x_2} + \ldots + P_n\frac{\partial F_k}{\partial x_n}\right).$$

Dacă ţinem seama de teorema 1.3 rezultă imediat că parantezele de mai sus sînt egale cu zero şi deci pentru funcţia compusă considerată, are loc egalitatea

$$P_1\frac{\partial u}{\partial x_1} + P_2\frac{\partial u}{\partial x_2} + \ldots + P_n\frac{\partial u}{\partial x_n} = 0$$

adică ea este soluţie a ecuaţiei cu derivate parţiale (12). Teorema care urmează are o importanţă deosebită pentru problema aflării tuturor soluţiilor ecuaţiei cu derivate parţiale (12).

Teorema 3.3. Orice soluţie a ecuaţiei cu derivate parţiale (12) este de forma

$$u = \Phi(F_1, F_2, \ldots, F_{n-1}) \tag{15}$$

unde Φ este o funcţie reală, definită pe domeniul $D \subset R^{n-1}$, cu derivate parţiale continue iar $F_1, F_2, \ldots, F_{n-1}$ sînt $n-1$ integrale prime, independente funcţional ale sistemului caracteristic (14).

Demonstrație. Fie $u: D_1 \subset D \to \mathbf{R}$ o soluție a ecuației cu derivate parțiale (12) și dacă ținem seama de teorema 1.5 avem egalitățile

$$P_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + P_2 \frac{\partial u}{\partial x_2} + \dots + P_n \frac{\partial u}{\partial x_n} = 0$$

$$P_1 \frac{\partial F_1}{\partial x_1} + P_2 \frac{\partial F_1}{\partial x_2} + \dots + P_n \frac{\partial F_1}{\partial x_n} = 0;$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$P_1 \frac{\partial F_{n-1}}{\partial x_1} + P_2 \frac{\partial F_{n-1}}{\partial x_2} + \dots + P_n \frac{\partial F_{n-1}}{\partial x_n} = 0$$

$$(\forall)\ (x_1, x_2, \dots, x_n) \in D_1$$

Am obținut în acest fel un sistem algebric omogen în $P_1, P_2, \dots, P_n$. Acest sistem are o soluție nebanală în D_1 deoarece cel puțin una din funcțiile $P_1, P_2, \dots, P_n$ este diferită de zero și conform teoremei lui Rouche rezultă că determinantul sistemului

$$\frac{D(u, F_1, F_2, \dots, F_{n-1})}{D(x_1, x_2, \dots, x_n)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x_1} & \frac{\partial u}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial u}{\partial x_n} \\ \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \frac{\partial F_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial F_{n-1}}{\partial x_1} & \frac{\partial F_{n-1}}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial F_{n-1}}{\partial x_n} \end{vmatrix}$$

este egal cu zero în orice punct $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in D_1$.

Deoarece integralele prime $F_1, F_2, \dots, F_{n-1}$ sînt independente funcțional rezultă că matricea

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \frac{\partial F_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial F_{n-1}}{\partial x_1} & \frac{\partial F_{n-1}}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial F_{n-1}}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

are rangul $n-1$. Dacă folosim un rezultat stabilit referitor la dependența funcțională (2.4 cap. [11]), rezultă că există o funcție $\Phi: D_1 \subset D \to \mathbf{R}$ astfel încît să avem

$$u = \Phi(F_1, F_2, \dots, F_{n-1})$$

Definiție 1.3. Funcția $u = \Phi(F_1, F_2, \dots, F_{n-1})$ se numește soluția generală a ecuației cu derivate parțiale (12).

Din rezultatele stabilite mai sus rezultă că pentru aflarea soluției generale a ecuației cu derivate parțiale

$$P_1(x_1, x_2, \dots, x_n)\frac{\partial u}{\partial x_1} + P_2(x_1, x_2, \dots, x_n)\frac{\partial u}{\partial x_2} + \dots +$$

$$+ P_n(x_1, x_2, \dots, x_n)\frac{\partial u}{\partial x_n} = 0 \tag{12}$$

trebuie parcurse următoarele etape:

a) scriem sistemul caracteristic al ecuației (12)

$$\frac{dx_1}{P_1(x_1, x_2, \dots, x_n)} = \frac{dx_2}{P_2(x_1, x_2, \dots, x_n)} = \dots = \frac{dx_n}{P_n(x_1, x_2, \dots, x_n)} \tag{14}$$

b) determinăm cu ajutorul teoremei 1.2, $n-1$ integrale prime independente funcțional ale sistemului (14);

c) soluția generală a ecuației cu derivate parțiale (12) este

$$u = \Phi(F_1, F_2, \dots, F_{n-1}),$$

unde $F_1, F_2, \dots, F_{n-1}$ sînt integralele prime aflate la punctul b).

Exemplu. Să se afle soluția generală a ecuației

$$x_1\frac{\partial u}{\partial x_1} + x_2\frac{\partial u}{\partial x_2} + \dots + x_n\frac{\partial u}{\partial x_n} = 0.$$

Sistemul caracteristic al ecuației date este

$$\frac{dx_1}{x_1} = \frac{dx_2}{x_2} = \dots = \frac{dx_n}{x_n}$$

și se vede imediat că

$$F_1 = \frac{x_1}{x_n}; \quad F_2 = \frac{x_2}{x_n}, \dots, F_{n-1} = \frac{x_{n-1}}{x_n}$$

sînt $n-1$ integrale prime independente funcțional. Soluția generală este

$$u = \Phi\left(\frac{x_1}{x_n}, \frac{x_2}{x_n}, \dots, \frac{x_{n-1}}{x_n}\right).$$

§ 4. PROBLEMA LUI CAUCHY PENTRU ECUAȚII CU DERIVATE PARȚIALE DE ORDINUL ÎNTÎI, LINIARE ȘI OMOGENE

De cele mai multe ori în problemele care conduc la ecuații cu derivate parțiale de forma (12) ne interesează o anumită soluție a ecuației obținute. Această soluție îndeplinește anumite condiții inițiale.

Problema lui Cauchy pentru ecuaţia

$$P_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)\frac{\partial u}{\partial x_1} + P_2(x_1, x_2, \ldots, x_n)\frac{\partial u}{\partial x_2} + \ldots +$$

$$+ P_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)\frac{\partial u}{\partial x_n} = 0 \qquad (12)$$

este următoarea:
să se determine soluţia u a ecuaţiei (12) care pentru $x_n = x_{n0}$ satisface egalitatea

$$u(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_{n0}) = \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}), (\forall)(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_{n0}) \in D \qquad (15)$$

unde φ este o funcţie dată care admite derivate parţiale continue.

Pentru rezolvarea problemei lui Cauchy fie $F_1, F_2, \ldots, F_{n-1}$; $n-1$ integrale prime ale sistemului caracteristic (14) şi presupunem că determinantul

$$\frac{D(F_1, F_2, \ldots, F_{n-1})}{D(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})}$$

este diferit de zero în punctul $x_0 = (x_{10}, x_{20}, \ldots, x_{n0}) \in D$.

Rezolvarea problemei lui Cauchy revine în fond la determinarea funcţiei Φ astfel încît funcţia compusă

$$u = \Phi(F_1, F_2, \ldots, F_{n-1})$$

să satisfacă condiţia (15).

Deoarece $F_1, F_2, \ldots, F_{n-1}$ sînt integrale prime ale sistemului caracteristic, avem

$$F_i(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n) = C_i,\ i = 1, 2, \ldots, n-1 \qquad (16)$$

unde $C_1, C_2, \ldots, C_{n-1}$ sînt constante reale.

Fie D_1 o vecinătate a punctului x_0 în care sistemul (16) poate fi rezolvat în raport cu $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$. Dacă în (16) luăm $x_n = x_{n0}$, obţinem sistemul

$$\begin{aligned} &F_1(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_{n0}) = C_1 \\ &F_2(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_{n0}) = C_2 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &F_{n-1}(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_{n0}) = C_{n-1} \end{aligned} \qquad (17)$$

care rezolvat în raport cu $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ ne dă

$$\begin{aligned} &x_1 = \varphi_1(C_1, C_2, \ldots, C_{n-1}) \\ &x_2 = \varphi_2(C_1, C_2, \ldots, C_{n-1}) \\ &x_{n-1} = \varphi_{n-1}(C_1, C_2, \ldots, C_{n-1}) \end{aligned} \qquad (18)$$

Considerăm funcţia compusă

$$u = \varphi(\varphi_1(F_1, F_2, \ldots, F_{n-1}), \varphi_2(F_1, F_2, \ldots, F_{n-1}), \ldots,$$

$$\varphi_{n-1}(F_1, F_2, \ldots, F_{n-1})) \qquad (19)$$

Din teorema 3.3 rezultă imediat că funcția u dată la (19) este soluție a ecuației (12) și din modul cum a fost construită rezultă că

$$u(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_{n0}) = \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$$

adică ea satisface și condiția (13). Deci funcția (19) este soluția problemei lui Cauchy.

§ 5. ECUAȚII CU DERIVATE PARȚIALE DE ORDINUL ÎNTÎI CVASILINIARE

Sînt ecuații de forma

$$P_1(x_1, \ldots, x_n, u)\frac{\partial u}{\partial x_1} + P_2(x_1, \ldots, x_n, u)\frac{\partial u}{\partial x_2} + \ldots +$$

$$+ P_n(x_1, \ldots, x_n, u)\frac{\partial u}{\partial x_n} = P_{n+1}(x_1, \ldots, x_n, u) \tag{20}$$

unde u este funcția necunoscută iar funcțiile reale $P_i: D \to \mathbf{R}$, $i = 1, 2, \ldots, n+1$ sînt definite pe un domeniu $D \subset \mathbf{R}^{n+1}$, admit derivate parțiale de ordinul întîi continue pe D și în plus

$$\sum_{i=1}^{n} P_i^2(x_1, x_2, \ldots, x_n, u) \neq 0;\ \forall\ (x_1, x_2, \ldots, x_n, u) \in D.$$

Studiul unei ecuații de forma (20) se reduce la studiul unei ecuații de forma (12). Acest fapt rezultă din

Teorema 7.5. Integrarea ecuației (20) se reduce la integrarea ecuației cu derivate parțiale de ordinul întîi, liniară și omogenă

$$P_1(x_1, \ldots, x_n, u)\frac{\partial V}{\partial x_1} + P_2(x_1, \ldots, x_n, u)\frac{\partial V}{\partial x_2} + \ldots +$$

$$+ P_n(x_1, \ldots, x_n, u)\frac{\partial V}{\partial x_n} + P_{n+1}(x_1, \ldots, x_n, u)\frac{\partial V}{\partial u} = 0 \tag{21}$$

Demonstrație. În adevăr, să căutăm o soluție u, a ecuației (20), sub formă implicită

$$V(x_1, x_2, \ldots, x_n, u) = 0 \tag{22}$$

unde V este o funcție necunoscută ce trebuie determinată. Presupunem că funcția V are derivate parțiale continue pe domeniul $D \subset \mathbf{R}^{n+1}$ și în plus $\frac{\partial V}{\partial u} \neq 0$ pe D. Din ecuația (22) obținem

$$\frac{\partial V}{\partial x_i} + \frac{\partial V}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x_i} = 0;\ i = 1, 2, \ldots, n$$

sau

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = -\frac{\partial F}{\partial x_i} : \frac{\partial F}{\partial u}$$

dacă înlocuim aceste derivate parțiale în (20) rezultă

$$P_1 \frac{\partial F}{\partial x_1} + P_2 \frac{\partial F}{\partial x_2} + \dots + P_n \frac{\partial F}{\partial x_n} + P_{n+1}\frac{\partial F}{\partial u} = 0$$

care este o ecuație liniară și omogenă în F. Soluția generală a acestei ecuații este

$$F = \Phi(F_1, F_2, \dots, F_n)$$

unde $F_1, F_2, \dots, F_n$ sînt n integrale prime independente funcțional ale sistemului

$$\frac{dx_1}{P_1} = \frac{dx_2}{P_2} = \dots = \frac{dx_n}{P_n} = \frac{du}{P_{n+1}}. \qquad (23)$$

Deci soluțiile ecuației (20) sînt definite implicit de ecuația de forma

$$\Phi(F_1(x_1, \dots, x_n, u), F_2(x_1, \dots, x_n, u), \dots, F_n(x_1, \dots, x_n, u)) = 0$$

unde Φ satisface condiții evidente.

Exemplu. Să se afle soluțiile ecuației

$$x_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial u}{\partial x_2} + \dots + x_n \frac{\partial u}{\partial x_n} = ku$$

În acest caz sistemul caracteristic (23) devine

$$\frac{dx_1}{x_1} = \frac{dx_2}{x_2} = \dots = \frac{dx_n}{x_n} = \frac{du}{ku}$$

și se vede imediat că

$$F_1 = \frac{x_1}{x_n}; \dots; F_{n-1} = \frac{x_{n-1}}{x_n}; \quad F_n = \frac{u}{x_n^k}$$

sînt n integrale prime independente funcțional pentru acest sistem. Soluțiile ecuației sînt date implicit de ecuația

$$\Phi\left(\frac{x_1}{x_n}, \frac{x_2}{x_n}, \dots, \frac{x_{n-1}}{x_n}, \frac{u}{x_n^k}\right) = 0$$

Pentru ecuații de forma (20) *problema lui Cauchy* este următoarea:

Să se determine soluția u a ecuației (20) care pentru $x_n = x_{n0}$ satisface egalitatea

$$u(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_{n0}) = \varphi(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) \qquad (24)$$

unde φ este o funcție dată care admite derivate parțiale continue.

Problema lui Cauchy pentru o ecuație de forma (20) se rezolvă în mod analog cu problema lui Cauchy relativă la o ecuație liniară și omogenă.

Fie $F_1, F_2, \ldots, F_n$ n integrale prime ale sistemului caracteristic (23) și presupunem că determinantul

$$\frac{D(F_1, F_2, \ldots, F_n)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, u)}$$

este diferit de zero în punctul $(x_{10}, x_{20}, \ldots, x_{n0}, u_0) \in D$. Deoarece $F_1, F_2, \ldots, F_n$ sînt integrale prime ale sistemului caracteristic (23), avem

$$F_i(x_1, x_2, \ldots, x_n, u) = C_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{25}$$

unde $C_1, C_2, \ldots, C_n$ sînt constante reale. Fie D_1 o vecinătate a punctului $(x_{10}, x_{20}, \ldots, x_{n0})$ în care sistemul (25) poate fi rezolvat în raport cu $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, u$. Dacă în (25) luăm $x_n = x_{n0}$, obținem sistemul

$$\begin{aligned} F_1(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_{n0}, u) &= C_1 \\ F_2(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_{n0}, u) &= C_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ F_n(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_{n0}, u) &= C_n \end{aligned} \tag{26}$$

care rezolvat în raport cu $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ și u ne dă

$$\begin{aligned} x_1 &= \psi_1(C_1, C_2, \ldots, C_n) \\ \ldots\ldots&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{n-1} &= \psi_{n-1}(C_1, C_2, \ldots, C_n) \\ u &= \psi_n(C_1, C_2, \ldots, C_n) \end{aligned} \tag{27}$$

Considerăm ecuația

$$\psi_n(F_1, F_2, \ldots, F_n) = \varphi(\psi_1(F_1, F_2, \ldots, F_n), \psi_2(F_1, F_2, \ldots, F_n), \ldots$$

$$\ldots, \psi_{n-1}(F_1, F_2, \ldots, F_n)) \tag{28}$$

Din teorema 1.5 rezultă imediat că funcția u definită implicit de ecuația (28) (nu trebuie uitat faptul că funcțiile F_i depind de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ și u) este soluție a ecuației (20) și din modul cum a fost construită rezultă imediat că

$$u(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_{n0}) = \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$$

adică că satisface condiția (24). Deci funcția u definită implicit de ecuația (28) este soluție a problemei lui Cauchy relativ la ecuația (20).

Observație. În cazul a două variabile independente problema lui Cauchy are o interpretare geometrică simplă. Dacă $z = \varphi(x, y)$ este o soluție a ecuației

$$P(x, y, z)\frac{\partial z}{\partial x} + Q(x, y, z)\frac{\partial z}{\partial y} = R(x, y, z) \qquad (29)$$

suprafața de ecuație $z = \varphi(x, y)$ se numește suprafață integrală a ecuației (29). Problema lui Cauchy revine la a determina suprafața integrală care trece prin curba definită de ecuațiile

$$y = y_0;\ z = \psi(x) \qquad (30)$$

Dacă F_1 și F_2 sînt două integrale prime independente funcțional ale sistemului caracteristic

$$\frac{dx}{P(x, y, z)} = \frac{dy}{Q(x, y, z)} = \frac{dz}{R(x, y, z)} \qquad (31)$$

problema lui Cauchy se reduce la găsirea legăturii între C_1 și C_2 din sistemul

$$F_1(x, y, z) = C_1;\ F_2(x, y, z) = C_2;\ y = y_0;\ z = \psi(x) \qquad (32)$$

Rezultatul este o relație de forma $\Phi(C_1, C_2) = 0$ în care dacă înlocuim pe C_1 și C_2 cu F_1 și respectiv F_2, obținem soluția problemei lui Cauchy.
Curba definită de ecuațiile (30) poate fi înlocuită cu orice curbă definită de ecuațiile

$$G(x, y, z) = 0;\ H(x, y, z) = 0$$

Dacă $G = \lambda(F_1, F_2)$ și $H = \mu(F_1, F_2)$ soluția problemei lui Cauchy nu este determinată.

Exemplu. Să se determine soluția ecuației

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = z$$

care trece prin curba definită de ecuațiile

$$x^2 + y^2 = 1;\ z = 2$$

Sistemul caracteristic corespunzător este

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z}$$

Se vede imediat că $F_1(x, y, z) = \frac{x}{y}$ şi $F_2(x, y, z) = \frac{x}{z}$ sînt integrale prime independente. În acest caz sistemul (32) devine

$$x^2 + y^2 + 1 ; z = 2 ; \frac{x}{y} = C_1 ; \frac{x}{z} = C_2$$

de unde obţinem $x^2(C_1^2 + C_2^2) = \frac{C_2^2}{4}$.

Dacă eliminăm pe C_1 şi C_2 obţinem

$$z^2 = 4(x^2 + y^2)$$

PROBLEME

Să se integreze următoarele sisteme

1) $\frac{dx}{1 + x^2 - x [illegible] y} = \frac{dy}{1} = \frac{dz}{2}$;

R: $y + 2x = x + y^2 + C_1$; $z - 2y = C_2$

2) $y' = \frac{x}{y + z}$; $z' = \frac{x}{y + z}$; $y(0) = 2$; $z(0) = 4$

R: $y = \frac{2}{3}x + 2$; $z = \frac{2}{3}x + 4$

3) $y' = y^2$; $z' = yz$;

R: $y = \frac{1}{(1 + C_1)x + C_2}$; $z = \frac{C_1}{(1 + C_1)x + C_2}$

4) $\frac{dx}{dt} = \frac{x}{x^2 + y^2 + z^2}$; $\frac{dy}{dt} = \frac{y}{x^2 + y^2 + z^2}$; $\frac{dz}{dt} = \frac{z}{x^2 + y^2 + z^2}$

R: $x^2 = \frac{2t + C_1}{1 + C_2^2 + C_3^2}$; $y^2 = \frac{C_2^2(2t + C_1)}{1 + C_2^2 + C_3^2}$; $z^2 = \frac{C_3^2(2t + C_1)}{1 + C_2^2 + C_3^2}$

Să se afle soluţiile următoarelor ecuaţii cu derivate parţiale

5) $xy\frac{\partial u}{\partial x} + y\sqrt{1 - y^2}\frac{\partial u}{\partial y} + (z\sqrt{1 - y^2} - axy)\frac{\partial u}{\partial z} = 0$

R: $u = \Phi(2yz - a(y + \sqrt{1 - y^2}), xe^{\arcsin y})$

6) $\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y - x}{z}$; să se afle suprafața integrală ce conține curba $x = 1$; $y^2 = z$

R: $z^2 = (x + y - 1)^4 + 2xy - 2(x + y - 1)$

7) $2y^4 \frac{\partial z}{\partial x} - xy\frac{\partial z}{\partial y} = x\sqrt{z^2 + 1}$

R: $\Phi(x^2 + y^4, yz + y\sqrt{z^2 + 1}) = 0$

8) $y\frac{\partial z}{\partial x} - yz\frac{\partial z}{\partial y} = 1$; $z^2 = 0$;

R: $\Phi(x + yz, y^2 - x^2 - 2xyz) = 0$

9) $(xy^3 - 2x^4)\frac{\partial z}{\partial x} + (2y^4 - x^3y)\frac{\partial z}{\partial y} = 9z(x^3 - y^3)$

R: $\Phi\left(zx^3y^3, \frac{y}{x^2} + \frac{x}{y^2}\right) = 0$

10) $2y(2a - x)\frac{\partial z}{\partial x} + (x^2 + z^2 - y^2 - 4ax)\frac{\partial z}{\partial y} + 2yz = 0$

R: $\Phi\left(\frac{z}{2a - x}, \frac{x^2 + y^2 + z^2}{z}\right) = 0$

CAPITOLUL XVII

STABILITATEA SOLUŢIILOR ECUAŢIILOR DIFERENŢIALE

§ 1. CONSIDERAŢII GENERALE

Fie

$$\begin{aligned} y_1' &= \Phi_1(t, y_1, y_2, \ldots, y_n) \\ y_2' &= \Phi_2(t, y_1, y_2, \ldots, y_n) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n' &= \Phi_n(t, y_1, y_2, \ldots, y_n) \end{aligned} \tag{1}$$

un sistem de ecuaţii diferenţiale unde variabila independentă este t şi o interpretăm ca reprezentînd timpul variind de la t_0 la ∞, iar $y_1, y_2, \ldots, y_n$ sînt funcţiile necunoscute. Presupunem că funcţiile Φ_i, $i = 1, \ldots, n$ satisfac condiţiile din teorema de existenţă pentru sisteme de ecuaţii diferenţiale. Fie

$$y_1 = \varphi_1(t),\ y_2 = \varphi_2(t), \ldots, y_n = \varphi_n(t) \tag{2}$$

soluţia sistemului (1) care satisface următoarele condiţii iniţiale

$$\varphi_1(t_0) = y_{10},\ \varphi_2(t_0) = y_{20}, \ldots, \varphi_n(t_0) = y_{n0} \tag{3}$$

Definiţie 1.1. Soluţia

$$y_1 = \varphi_1(t),\ y_2 = \varphi_2(t), \ldots, y_n = \varphi_n(t)$$

a sistemului (1) se numeşte stabilă (în sensul lui Liapunov) dacă pentru orice $\varepsilon > 0$, există $\delta(\varepsilon) > 0$ astfel încît orice altă soluţie

$$y_1 = \psi_1(t),\ y_2 = \psi_2(t), \ldots, y_n = \psi_n(t) \tag{4}$$

a sistemului (1), care la momentul iniţial satisface condiţiile

$$|\psi_i(t_0) - \varphi_i(t_0)| < \delta(\varepsilon),\ i = 1, 2, \ldots, n$$

satisface şi condiţiile

$$|\psi_i(t) - \varphi_i(t)| < \varepsilon,\ i = 1, 2, \ldots, n$$

pentru orice $t \geq t_0$.

Observația 1. Pentru ca definiția să aibă sens trebuie ca soluția (2) să fie prelungibilă pentru orice $t > t_0$.

Observația 2. Condițiile de stabilitate cer ca toate soluțiile de forma (4), cu condiții inițiale suficient de apropiate de cele ale soluției (2), să fie de asemenea prelungibile pentru orice $t > t_0$ și în plus să rămînă tot timpul în apropierea soluției (2).

Definiție 2.2. Soluția (2) a sistemului (1) se numește asimptotic stabilă dacă este stabilă și dacă există $\delta_0 > 0$ astfel încît condițiile

$$|\varphi_i(t_0) - y_i(t_0)| < \delta_0, \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

să implice

$$\lim_{t \to \infty} |\varphi_i(t) - y_i(t)| = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

Exemplu 1. Să se studieze stabilitatea soluției φ a ecuației diferențiale

$$\frac{dy}{dt} = -a^2 y; \qquad a \neq 0$$

care satisface condiția $\varphi(t_0) = y_0$.
Se vede imediat că avem

$$\varphi(t) = y_0 e^{-a^2(t-t_0)}$$

Soluția φ este asimptotic stabilă. În adevăr, dacă

$$y(t) = \bar{y}_0 e^{-a^2(t-t_0)}$$

este o altă soluție care satisface condiția $y(t_0) = \bar{y}_0$, atunci

$$|\varphi(t) - y(t)| = e^{-a^2(t-t_0)} |y_0 - \bar{y}_0| < \varepsilon$$

pentru orice $t > t_0$, dacă

$$|y_0 - \bar{y}_0| < \varepsilon,$$

și deci

$$\lim_{t \to \infty} |\varphi(t) - y(t)| = 0$$

Exemplu 2. Să se studieze stabilitatea soluției φ a ecuației

$$\frac{dy}{dt} = a^2 y; \quad a \neq 0$$

care satisface condiția $\varphi(t_0) = y_0$.
Se vede imediat că avem

$$\varphi(t) = y_0 e^{a^2(t-t_0)}$$

Soluția φ este instabilă. În adevăr, fie

$$y(t) = \bar{y}_0 e^{a^2(t-t_0)}$$

o altă soluție a ecuației care satisface condiția $\bar{y}(t_0) = \bar{y}_0$. Nu putem găsi $\delta(\varepsilon) > 0$ astfel încît din inegalitatea

$$|y_0 - \bar{y}_0| < \delta(\varepsilon)$$

să rezulte

$$|y(t) - \bar{y}(t)| = e^{a(t-t_0)}|y_0 - \bar{y}_0| < \varepsilon$$

pentru orice $t > t_0$.

Pentru a studia stabilitatea soluției (2) este convenabil să facem o schimbare de funcții necunoscute în sistemul de ecuații diferențiale (1). Luăm ca noi funcții necunoscute pe $x_i (i = 1, 2, \ldots, n)$, unde

$$x_i = y_i - \varphi_i(t) \tag{5}$$

În urma acestei schimbări de funcții se obține sistemul

$$\frac{dx_i}{dt} = \Phi_i(t, x_1 + \varphi_1, \ldots, x_n + \varphi_n) - \Phi_i(t, \varphi_1, \ldots, \varphi_n); \ (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{6}$$

Dacă ținem seama de faptul că $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ sînt funcții cunoscute care depind de t, sistemul (6) este un sistem de forma

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(t, x_1, x_2, \ldots, x_n); \ (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{7}$$

Se vede imediat că soluției

$$y_1 = \varphi_1(t), \ldots, y_n = \varphi_n(t)$$

a sistemului (1) îi corespunde soluția banală

$$x_1 = 0, \ldots, x_n = 0$$

pentru sistemul (7). În acest fel studiul stabilității soluției (2) a sistemului (1) se reduce la studiul stabilității soluției banale a sistemului (7). Vom considera în continuare sisteme de ecuații diferențiale de forma

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(t, x_1, \ldots, x_n); \ (i = 1, \ldots, n) \tag{7}$$

și presupunem că admit soluția banală $x_1 = 0, \ldots, x_n = 0$.

Definiție 3.1. Soluția banală a sistemului (7) se numește stabilă dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta(\varepsilon) > 0$ astfel încît orice soluție

$$x_1 = x_1(t), x_2 = x_2(t), \ldots, x_n = x_n(t) \tag{8}$$

a sistemului (7), care în momentul inițial satisface condițiile

$$|x_i(t_0)| < \delta(\varepsilon); \ (i = 1, \ldots, n)$$

satisface și condițiile

$$|x_i(t)| < \varepsilon; \ (i = 1, \ldots, n)$$

pentru orice $t > t_0$.

Dacă în plus, există $\delta_0 > 0$ astfel încît condiţiile

$$|x_i(t_0)| < \delta_0, \quad i = 1, \dots, n$$

să implice

$$\lim_{t \to \infty} x_i(t) = 0, \quad i = 1, \dots, n$$

atunci soluţia banală se numeşte asimptotic stabilă.

Definiţia stabilităţii soluţiei banale mai poate fi formulată şi sub o altă formă echivalentă. Pentru aceasta reamintim că, dacă $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n$ atunci

$$\|x\| = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2}.$$

Definiţia 1.1. Soluţia banală a sistemului (7) se numeşte stabilă dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta(\varepsilon) > 0$ astfel încît orice soluţie

$$x_1 = x_1(t), \dots, x_n = x_n(t)$$

a sistemului (7) care în momentul iniţial satisface condiţia

$$\|x(t_0)\| < \delta(\varepsilon)$$

satisface şi condiţia

$$\|x(t)\| < \varepsilon$$

pentru orice $t > t_0$.

§ 2. TEOREMA DE STABILITATE A LUI LIAPUNOV

Pentru studiul stabilităţii soluţiei banale vom utiliza metoda funcţiei lui Liapunov. În acest scop sînt necesare cîteva noţiuni pregătitoare.

1) O funcţie reală $W(x) = W(x_1, x_2, \dots, x_n)$ definită şi continuă într-o vecinătate a originii din $\mathbf{R}^n$, cu $W(0) = 0$, se numeşte pozitiv definită (negativ definită) dacă există un număr $h > 0$ astfel încît pentru orice punct din sfera

$$S_h(0) = \{x \in \mathbf{R}^n;\ \|x\| < h\}$$

funcţia W ia numai valori pozitive (negative).

2) Dacă $W(x)$, fără să schimbe semnul, se poate anula şi în afara originii spunem că W este de semn constant.

Exemplu. Funcţia

$$W(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2$$

este pozitiv definită, iar funcţia

$$W(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (x_1 + x_2 + \ldots + x_n)^2$$

este de semn constant.

Fie dată funcţia reală $V(t, x) = V(t, x_1, \ldots, x_n)$ definită pe domeniul

$$D = \{(t, x) : t \geq t_0, \|x\| \leq h\} \subset \mathbf{R}^{n+1}$$

Presupunem că funcţia V are derivate parţiale continue pe D şi că $V(t, 0, 0, \ldots, 0) = 0$.

3) Dacă pentru orice $\lambda > 0$ există $\mu > 0$ astfel încît pentru orice $t \geq t_0$ şi x cu $\|x\| < \mu$ să avem

$$|V(t, x)| \leq \lambda$$

spunem că funcţia V are limită superioară infinit mică.

Exemplu. Funcţia

$$V(t, x_1, \ldots, x_n) = (x_1^2 + \ldots + x_n^2) \sin t$$

are limită superioară infinit mică.

4) Funcţia reală $V(t, x)$ definită pe domeniul D se numeşte pozitiv definită dacă există o funcţie reală $W(x)$ pozitiv definită astfel încît

$$V(t, x) \geq W(x); \; t \geq t_0; \; \|x\| \leq h$$

Analog, funcţia V se numeşte negativ definită dacă

$$V(t, x) \leq -W(x).$$

Exemplu. Funcţia

$$V(t, x_1, \ldots, x_n) = e^t(x_1^2 + \ldots + x_n^2)$$

este pozitiv definită deoarece

$$V(t, x_1, \ldots, x_n) \geq x_1^2 + \ldots + x_n^2$$

Funcţia

$$V(t, x_1, \ldots, x_n) = e^{-t}(x_1^2 + \ldots + x_n^2)$$

nu este pozitiv definită.

5) Dacă $V(t, x_1, \ldots, x_n)$ fără să schimbe semnul, se poate anula şi în afara punctului $(t, 0, \ldots, 0)$ spunem că V este de semn constant.

În enunţul teoremei lui Liapunov intervine pe lîngă funcţia V şi derivata sa în raport cu timpul luată în virtutea sistemului (7). Această derivată are expresia

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_i} f_i \qquad (8)$$

Teorema 1.2. Fie dat sistemul de ecuaţii diferenţiale

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(t, x_1, x_2, \ldots, x_n), \quad i = 1, 2, \ldots, n \qquad (7)$$

care admite soluţia banală. Dacă se poate găsi o funcţie $V(t, x)$ de semn definit, astfel încît derivata sa în virtutea sistemului (7) să fie o funcţie de semn constant opus semnului lui V sau identic nulă, atunci soluţia banală este stabilă.

Demonstraţie. Pentru fixarea ideilor presupunem că V este o funcţie pozitiv definită. Din ipotezele teoremei rezultă că există o funcţie $W(x)$, pozitiv definită, astfel încît

$$V(t, x) \geq W(x) \text{ pentru } t \geq t_0, \ |x| < h; \qquad (9)$$

Fie $\qquad \Sigma = \{x \in \mathbf{R}^n, \ |x| = \varepsilon\}$ unde $0 < \varepsilon < h$.

Ţinînd seama de proprietăţile funcţiei W rezultă că

$$l = \inf_{x \in \Sigma} W(x)$$

există şi în plus $l > 0$.

Din inegalitatea (9) deducem că

$$V(t, x) \geq l \text{ pentru } t \geq t_0 \text{ şi } x \in \Sigma \qquad (9')$$

Fie $\delta \in (0, \varepsilon)$ şi $x_0 = (x_{10}, \ldots, x_{n0})$ un punct cu proprietatea că $\|x_0\| < \delta$. Deoarece $V(t_0, 0, \ldots, 0) = 0$ şi $V(t_0, x_1, \ldots, x_n)$ este o funcţie continuă rezultă că

$$V(t_0, x_{10}, \ldots, x_{n0}) < l$$

Dacă $x(t) = (x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t))$ este soluţia sistemului (7), care satisface condiţia

$$x(t_0) = x_0, \text{ adică } x_i(t_0) = x_{i0}, \ i = 1, \ldots, n$$

atunci are loc inegalitatea

$$|x(t)| < \varepsilon \text{ pentru } t \geq t_0 \qquad (10)$$

În adevăr, dacă pentru un anumit $t > t_0$ am avea

$$|x(t)| \geq \varepsilon \tag{11}$$

atunci ar exista $t' > t_0$ astfel încît

$$|x(t')| = \varepsilon$$

adică $x(t') \in \Sigma$ şi dacă ţinem seama de inegalitatea (9') rezultă că

$$V(t', x(t')) \geq l \tag{12}$$

Din ultima ipoteză a teoremei, rezultă că funcţia

$$V(t, x(t)),\ t \geq t_0$$

are derivata negativă şi deci este descrescătoare, avem

$$V(t', x(t')) \leq V(t_0, x(t_0)) < l \tag{13}$$

Inegalitatea (12) arată că inegalitatea (13) nu este posibilă pentru nici o valoare a lui t. Deducem de aici că inegalitatea (10) are loc pentru orice $t \geq t_0$; din inegalităţile

$$|x(t_0)| < \delta \text{ şi } |x(t)| < \varepsilon;\ t \geq t_0$$

rezultă că soluţia banală este stabilă.

§ 3. TEOREMA DE STABILITATE ASIMPTOTICĂ A LUI LIAPUNOV

Teorema 3. Fie dat sistemul de ecuaţii diferenţiale

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(t, x_1, x_2, \ldots, x_n),\ i = 1, \ldots, n \tag{7}$$

care admite soluţia banală. Dacă se poate găsi o funcţie $V(t, x)$ de semn definit care admite o limită superioară infinit mică şi dacă derivata lui V în virtutea sistemului (7) este o funcţie de semn constant, opus semnului lui V, atunci soluţia banală este asimptotic stabilă.

Demonstraţie. Presupunem că V este o funcţie pozitiv definită. Din ipotezele teoremei rezultă că

$$V(t, x) \leq W(x) \text{ pentru } t \geq t_0;\ |x| < h$$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_i} f_i \leq -W_1(x) \text{ pentru } t \geq t_0;\ |x| < h$$

unde W și W_1 sînt două funcții pozitiv definite. Condițiile teoremei precedente sînt evident îndeplinite și deci soluția banală a sistemului (7) este stabilă, adică $(\forall)\ \varepsilon > 0;\ (\exists)\ \delta(\varepsilon) > 0$ astfel încît pentru orice soluție

$$x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t)) \tag{14}$$

a sistemului (7) care la momentul inițial satisface condiția

$$\|x(t_0)\| < \delta(\varepsilon)$$

satisface și condiția

$$\|x(t)\| < \varepsilon$$

pentru orice $t > t_0$. Rămîne să arătăm că

$$x(t) \to 0 \text{ pentru } t \to \infty$$

Să observăm că nu putem avea $x(t) = 0$. În adevăr, dacă ar exista un anumit număr $t' > t_0$ pentru care am avea $x(t') = 0$ atunci prin punctul $(t', 0, \dots, 0)$ ar trece două curbe integrale ale sistemului (7) și anume cea corespunzătoare soluției banale și cea corespunzătoare soluției (14). Din teorema de existență și unicitate pentru sisteme de ecuații diferențiale știm că acest lucru nu este posibil și deci $x(t') \neq 0$. Din inegalitatea

$$\|x(t)\| < \varepsilon \quad \text{cu} \quad x(t) \neq 0,$$

și din faptul că derivata lui V în virtutea sistemului este negativ definită rezultă că funcția $V(t, x(t))$ este strict descrescătoare și deci următoarea limită există și este finită.

$$\lim_{t\to\infty} V(t, x(t)) = \alpha \geq 0 \text{ și } V(t, x(t)) > \alpha$$

Să arătăm că $\alpha = 0$. Presupunem $\alpha > 0$. Cum V admite o limită superioară infinit mică urmează că există $\beta > 0$ astfel încît dacă $\|x\| < \beta$ să avem $V(t, x) < \alpha$. Deci din inegalitatea

$$V(t, x(t)) > \alpha \text{ rezultă } \|x(t)\| \geq \beta;\ (\forall)\ t > t_0$$

Deoarece $\frac{dV}{dt}$ este negativ definită, există $\gamma > 0$ astfel încît

$$\frac{dV}{dt} < -\gamma \text{ pentru } \|x(t)\| \geq \beta$$

Dar

$$V(t, x(t)) = V(t_0, x(t_0)) + \int_{t_0}^{t} \frac{dV}{dt}\, dt \leq V(t_0, x(t_0)) - \gamma(t - t_0)$$

de mare rezultă că pentru t suficient de mare, V ar putea deveni negativă, ceea ce contrazice faptul că $V(t, x(t)) \geq 0$. Prin urmare $\alpha = 0$ şi deci

$$\lim_{t \to \infty} V(t, x(t)) = 0.$$

Din caracterul pozitiv definit a lui V rezultă că

$$\lim_{t \to \infty} x(t) = 0$$

şi deci $x_i(t) \to 0$ pentru $t \to \infty$
adică soluţia banală este asimptotic stabilă şi teorema este demonstrată.

În unele aplicaţii este util să avem la dispoziţie un criteriu de instabilitate. Dăm fără demonstraţie următoarea teoremă dată de Cetaev:

Teorema 2.3. Fie dat sistemul de ecuaţii diferenţiale

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(t, x_1, \ldots, x_n), \quad i = 1, \ldots, n \tag{7}$$

care admite soluţia banală. Dacă se poate găsi o funcţie $V(t, x)$ care admite limită superioară infinit mică şi dacă $\frac{dV}{dt}$, derivata lui V în virtutea sistemului, este de semn definit iar funcţia V ia valori de acelaşi semn ca şi $\frac{dV}{dt}$, atunci soluţia banală este instabilă.

Demonstraţia acestei teoreme se găseşte în [14] sau [16].

Exemplul 1. Să se studieze stabilitatea soluţiei banale pentru sistemul

$$\frac{dx}{dt} = -xy^4; \quad \frac{dy}{dt} = yx^4.$$

Funcţia $V(x, y) = x^4 + y^4$ satisface condiţiile din teorema de stabilitate a lui Liapunov. În adevăr, avem

a) $V(x, y) = x^4 + y^4 \geq 0$, $V(0, 0) = 0$

b) $\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x} f_1 + \frac{\partial V}{\partial y} f_2 = 4x^3(-xy^4) + 4y^3(yx^4) = -4x^4y^4 + 4x^4y^4 = 0$

şi deci soluţia banală este stabilă.

Exemplul 2. Să se studieze stabilitatea soluţiei banale pentru sistemul

$$\frac{dx}{dt} = -y - x^3; \quad \frac{dy}{dt} = x - y^3$$

Funcţia $V(x, y) = x^2 + y^2$ satisface condiţiile din teorema de stabilitate asimptotică a lui Liapunov. În adevăr,

a) $V(x, y) = x^2 + y^2 > 0$ şi $V(0, 0) = 0$;

b) $$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x} f_1 + \frac{\partial V}{\partial y} f_2 = 2x(-y - x^3) + 2y(x - y^3) = -2(x^4 + y^4) < 0.$$

Funcţia V admite, evident, o limită superioară infinit mică şi deci soluţia banală a sistemului dat este asimptotic stabilă.

§ 4. STABILITATEA ÎN PRIMA APROXIMAŢIE

Fie dat sistemul de ecuaţii diferenţiale

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(t, x_1, x_2, \dots, x_n), \quad i = 1, \dots, n \tag{14}$$

care admite soluţia banală. Presupunem că funcţiile f_i admit derivate parţiale continue în raport cu x_j şi că aceste derivate sînt constante de-a lungul soluţiei banale, adică

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(t, 0, \dots, 0) = a_{ij} = \text{constant}; \quad (i, j = 1, 2, \dots, n).$$

Deoarece $f_i(t, 0, 0, \dots, 0) = 0$, urmează că funcţiile f_i pot fi scrise sub forma

$$f_i(t, x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + \varphi_i(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \tag{15}$$

unde φ_i sînt funcţii cu proprietatea că pentru $t > 0$ există o vecinătate U a originii astfel încît

$$|\varphi_i(t, x_1, x_2, \dots, x_n)| < \varepsilon, \quad (\forall)\, x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in U;$$

$$\lim_{r \to 0} \frac{\varphi_i(t, x_1, \dots, x_n)}{r} = 0; \quad r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}.$$

În aceste condiţii sistemul (14) poate fi scris sub forma

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + \varphi_i(t, x_1, \dots, x_n) \tag{16}$$

Dacă în acest sistem se neglijează funcţiile φ_i se obţine *sistemul primei aproximaţii*

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \tag{17}$$

Se pune întrebarea în ce condiţii stabilitatea dovedită de sistemul (17) este valabilă şi pentru sistemul (7). Răspunsul la această întrebare este dat de următoarea

Teorema 1.4. Dacă:

a) funcţiile f_i satisfac condiţiile din teorema de existenţă şi unicitate pentru sistemele de ecuaţii diferenţiale

b) sînt satisfăcute condiţiile

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(t, 0, \dots, 0) = a_{ij}; \; i, j = 1, \dots, n$$

c) rădăcinile ecuaţiei caracteristice $\det (A - \lambda E) = 0$ au părţile reale negative

d) funcţiile φ_i satisfac inegalitatea

$$|\varphi_i(t, x_1, \dots, x_n)| \le M r^{1+\alpha}; \; M > 0, \; \alpha > 0,$$

atunci soluţia banală a sistemului (7) este stabilă. Nu dăm demonstraţia acestei teoreme, ea poate fi găsită în [38]. În aplicaţii este util să avem la dispoziţie un criteriu pentru a decide dacă rădăcinile ecuaţiei

$$\det (A - \lambda E) = 0$$

scrisă sub forma

$$a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0, \; (a_0 > 0) \qquad (18)$$

au sau nu partea reală negativă (fără a rezolva ecuaţia).

Teorema lui Hurwitz şi Routh

Teoremă. Pentru ca toate rădăcinile ecuaţiei (18), cu coeficienţi reali, să aibă partea reală negativă este necesar şi suficient ca toţi determinanţii

$$D_1 = a_1; \; D_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix}, \dots, D_n = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \dots \\ a_0 & a_2 & a_4 & \dots \\ 0 & a_1 & a_3 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & a_n \end{vmatrix}$$

(pentru toţi se spune $a_p = 0$ dacă $p > n$) să fie pozitivi.
Demonstraţia acestei teoreme poate fi găsită în [15].

Exemplu. Fie dat sistemul

$$\frac{dx}{dt} = 2x + 8\sin y; \quad \frac{dy}{dt} = 2 - e^x - 3y - \cos y$$

care admite, evident, soluţia banală. Condiţiile din teoremă sînt îndeplinite şi deci putem pune sistemul dat sub forma

$$\frac{dx}{dt} = 2x + 8y + \varphi_1; \quad \frac{dy}{dt} = -x - 3y + \varphi_2$$

unde φ_1 şi φ_2 satisfac condiţia d). Sistemul primei aproximaţii este

$$\frac{dx}{dt} = 2x + 8y; \quad \frac{dy}{dt} = -x - 3y$$

şi are ecuaţia caracteristică $\lambda^2 + \lambda + 2 = 0$, deci

$$\lambda_{1,2} = \frac{-1 \pm i\sqrt{7}}{2}$$

de unde deducem că soluţia banală este stabilă pentru sistemul considerat.

BIBLIOGRAFIE

1. Apostol T. — *Calculus*, vol. II, MASSACHUSETTS, TORONTO, LONDON, 1969.
2. Arnold V. — *Équations différentielles ordinaires*, MOSCOU, 1974.
3. Budak B., Fomin S. — *Multiple integrals, field theory and series*, MOSCOW, 1973.
4. Colojoară I. — *Elemente de analiză matematică*, BUCUREȘTI, 1975.
5. Chilov G. — *Analyse mathématique*, MOSCOU, 1973.
6. Craiu M. — *Elemente de analiză matematică*, BUCUREȘTI, 1976.
7. Craiu M., Roșculeț M. — *Ecuații diferențiale aplicative*, BUCUREȘTI, 1971.
8. J. Dieudonné — *Bazele analizei moderne*, BUCUREȘTI, 1966.
9. Dobrescu E. — *Analiză matematică*, BUCUREȘTI, 1974.
10. Dragoș L. — *Principiile mecanicii analitice*, București, 1976.
11. Elsgolts L. — *Differential equations and the calculus of variations*, MOSCOW, 1970.
12. Fihtenholț G.M. — *Curs de calcul diferențial și integral*, București, 1964.
13. Grauert H., Fischer W., Lieb I. — *Differential- und Integralrechnung*, Berlin, Heidelberg, New-York, 1967–1968.
14. Haimovici A. — *Ecuații diferențiale și ecuații integrale*, București, 1965.
15. Halanay A. — *Introducere în teoria calitativă a ecuațiilor diferențiale*, București, 1956.
16. Halanay A. — *Ecuații diferențiale*, București, 1972.
17. Ionescu D.V. — *Ecuații diferențiale și integrale*, București, 1964.
18. Ionescu D.V., Rado C. — *Ecuații diferențiale ordinare și cu derivate parțiale*, București, 1965.
19. Lelong-Ferrand J., Arnaudiès M. — *Cours de mathématiques*, Paris.
20. Marinescu Gh. — *Teoria ecuațiilor diferențiale și integrale*, București, 1963.
21. Matveev N. — *Metode de integrare a ecuațiilor diferențiale ordinare* (în limba rusă), Minsk, 1974.
22. Meghea C. — *Bazele analizei matematice*, Ed. științifică, 1977.
23. Myskis A. — *Introductory mathematics for engineers*, MOSCOW, 1975.
24. Nicolescu Miron — *Manual de analiză matematică*, București, 1964.
25. Nicolski S. — *Curs de analiză matematică* (în limba rusă), Moscova, 1974.
26. Pisot Ch., Zamansky M. — *Mathématiques générales*, Paris, 1966.
27. Piskunov N. — *Differential and integral calculus*, MOSCOW, 1969.
28. Pavel P., Rus A.I. — *Ecuații diferențiale și integrale*, București, 1975.
29. Pontriaghin L. — *Ecuații diferențiale ordinare* (în limba rusă), Moscova, 1974.
30. Roșculeț M. — *Analiză matematică*, București, 1966.

51. Roșculeț M. și alții — *Metode aproximative și numerice în algebră și analiză*, București, 1976 (pag. 175-185).

52. [illegible] — *Spații liniare*, București, 1973.

53. [illegible] — *Exerciții și probleme de calcul diferențial, serii și integrale*, București, 1965.

54. Rudin W. — *Principles of mathematical analysis*, McGraw Hill 1964.

55. Sabac I. — *Matematici speciale*, București, 1965.

56. [illegible] — [illegible], Moskva, 1969.

57. Stănășilă O. — *Analiză matematică (note de curs)*, București, 1976.

58. Stepanov V.V. — *Curs de ecuații diferențiale*, București, 1955.

59. Schwartz L. — *Analyse mathématique*, Paris, 1967.

60. Teodorescu N. — [illegible] *ecuații diferențiale*, București, 1964.

61. [illegible] — *Elemente de analiză funcțională*, [illegible], 1957.

62. Gh. Sirețchi — *Analiză matematică* Vol. II, București 1977.

63. B. P. Demidovici — Culegere de probleme și exerciții de analiză matematică, Ed. [illegible], Moscova, 1977.

CUPRINS

Coli tipar [illegible] Nr. 5755 Coli de tipar [illegible] [illegible] de tipar [illegible] [illegible]

Tiparul executat sub comanda
nr. [illegible]
Întreprinderea poligrafică
„13 Decembrie 1918",
str. Grigore Alexandrescu nr. 89–97
București,
Republica Socialistă România