Matematica

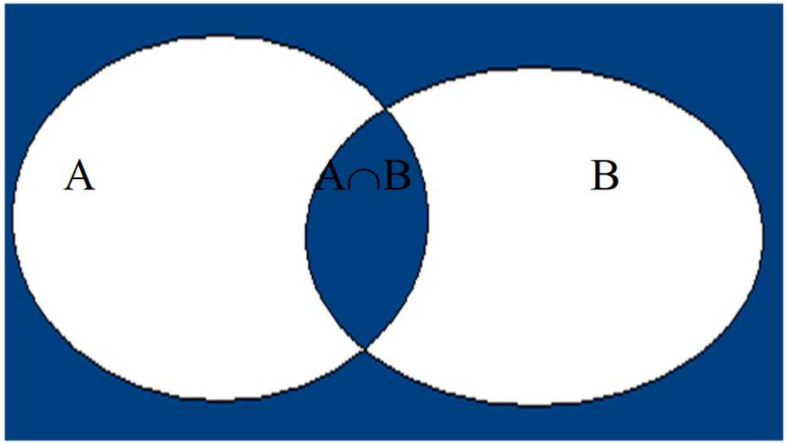
- MULTIMI
- NUMERE NATURALE
- NUMERE INTREGI
- NUMERE RATIONALE
- NUMERE IRATIONALE
- ECUATII/INECUATII SI SISTEME DE ECUATII
- ELEMENTE DE ORGANIZAREA DATELOR
- UNITATI DE MASURA

Multimi, submultimi

Se noteaza $A \cap B$ si se citeste "A *intersectat* cu B"

$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ si } x \in B\}$

Intersectia este comutativa, $A \cap B = B \cap A$.



Exemplu: $A=\{1,2, 5, 7, 9\}$ $B=\{1, 5, 9, 10, 15\}$

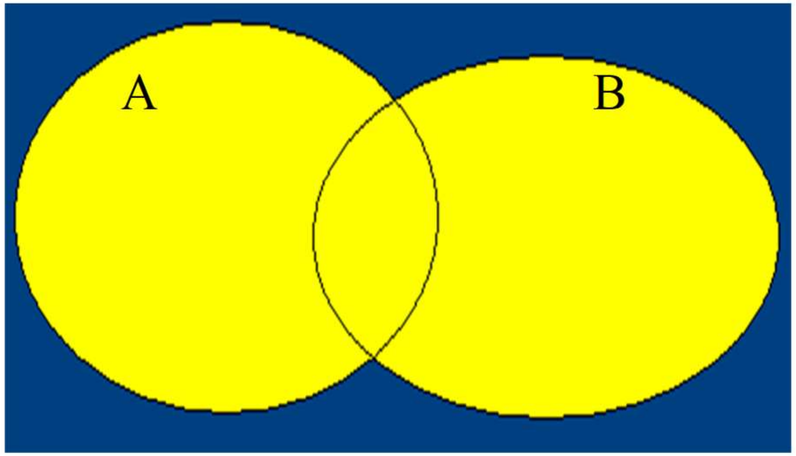
$A \cap B=\{1, 5, 9\}$

Se noteaza $A \cup B$ si se citeste “A *reunit* cu B”

$A \cup B = \{x \,/\, x \in A \text{ sau } x \in B\}$

Reuniunea este comutativa, $A \cup B = B \cup A$.

$A \cup B$



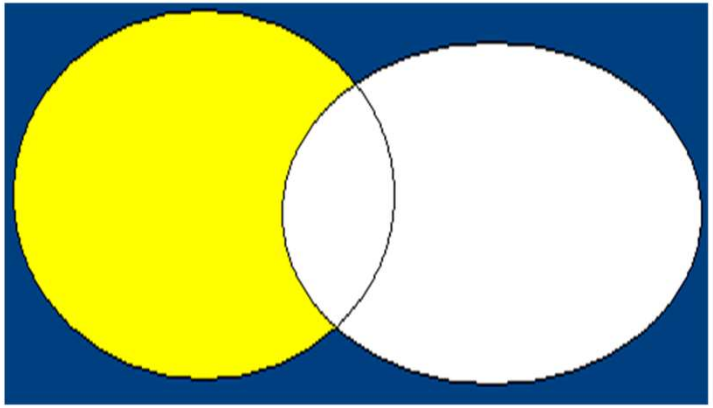
Exemplu: $A=\{1, 3, 5, 7\}$ $B=\{0, 4, 8, 12\}$

$A \cup B=\{0, 1, 3, 4, 5, 7, 8, 12\}$

Se noteaza A\B si se citeste “A *minus* cu B”

$$A \setminus B = \{x \,/\, x \in A \text{ si } x \notin B\}$$

Diferenta nu este comutativa, $A\setminus B \neq B\setminus A$.



A \ B

Exemplu: $A=\{1, 2, 5, 7, 9\}$ $B=\{1, 5, 9, 10, 15\}$

$A \setminus B=\{2, 7\}$

Produsul cartezian	x	AxB={luam perechi de forma (a;b) unde a $\in$ A si b $\in$ B}

*E*x: Fie A={1,2,3} si B={a,b,3}.

A $\cup$ B={1,2,3,a,b}

A $\cap$ B={3}

A\B={1,2}

B\A={a,b}

AxB={(1;a),(1;b),(1;3),(2;a),(2;b),(2;3),(3;a),(3;b),(3;3)}

Obs: Numarul elementelor produsului cartezian AxB este egal cu produsul dintre numarul elementelor multimii A si numarul elementelor multimii B. In cazul exemplului anterior 3x3= 9 elemente are produsul cartezian.

Aflarea elementelor a doua multimi pornind de la conditii date

Sa se afle multimile A si B stiind ca sunt indeplinite simultan conditiile:

a) $A \cup B=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$
b) $A \cap B=\{2, 6, 7\}$
c) $A \setminus B=\{1, 4\}$

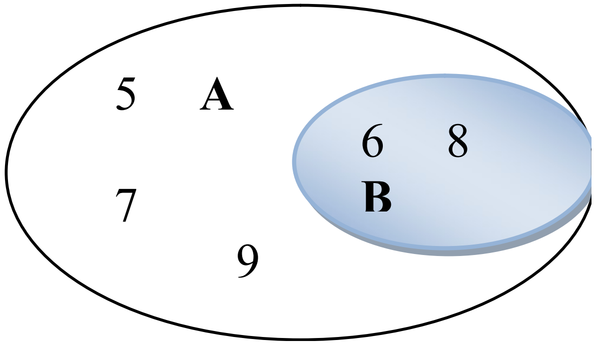
R: $A=\{1, 2, 4, 6, 7\}$
$B=\{2, 3, 5, 6, 7\}$

SUBMULTIMI

Cand intre doua multimi exista relatia de incluziune B$\subseteq$A sau A$\supseteq$B, se mai spune ca “B este *submultime* a lui A” sau ca “B este o parte a lui A”.

Exemplu: A={5; 6; 7; 8; 9} si B={6; 8}

B$\subseteq$A



- **Exercitii rezolvate**
- **1. Se dau mulţimile:**
- **A=$\{$1, 2, 3, 5$\}$;**
- **B=$\{$0, 1, 2, 4, 6$\}$;**
- **C=$\{$2, 3, 4, 6, 7$\}$.**
- Operatiile cu aceste multimi sunt:
- **a**) **B$\cup$C**={0,1,2,3,4,6,7}
- **b) A$\cap$B**={1,2}
- **c) A \ C**={1,5}
- **d) (A$\cup$B) \ C**={0,1,2,3,4,5,6}\C={0,1}
- **e) Card B**=5

- 2**. Să se scrie toate submulţimile mulţimii M={3, 4,5}**
- Multimea partilor (a submultimilor)multimii M, este P(M)={Ø,[3},{4},{5},{3,4},{4,5},{3,5},{3,4,5}}

- $\leq$ - mai mic sau egal $x \leq 8$
- $\geq$ - mai mare sau egal $y \geq 4$
- < - mai mic $x<8$
- > - mai mare $y>4$
- $\neq$ - diferit
- ϵ – apartine

Exrcitii de rezolvat

Exercitiul 1

a) A=$\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$;

b) B=$\{x/x\epsilon N$, $1\leq x \leq 11\}$;

Aflati elementele multimii B, apoi determinati AUB, A∩B A\B, B\A

Exercitiul 2

Să se determine mulţimile A şi B ştiind că sunt îndeplinite simultan condiţiile:

a) $A\cup B=\{1, 2, 4, 6, 7\}$;

b) $A\cap B=\{1, 7\}$;

c) $B \setminus A=\{2, 4\}$.

Exercitiul 3

Să se determine elementele mulţimilor:

$A=\{x\in \mathbf{N}^* \,/\, x\leq 3\}$

$B=\{x\in \mathbf{N} \,/\, 3 \leq x < 7\}$

$C=\{x\in \mathbf{N} \,/\, x$ cifră pară, $x \leq 4\}$.

$D=\{x\in \mathbf{N} \,/\,$ $x=3\cdot n$, $n\in \mathbf{N}^*, n \leq 3\}$

$E=\{x\in \mathbf{N} \,/\, 3^x \leq 27\}$

$F=\{x\in \mathbf{N} \,/\,$ $x=2n-1$, $4 < n < 8\}$

Exercitiul 4 (Examen Definitivat)REZOLVAT

Se considera multimile:A={$x/x\epsilon N$,a< x $\leq$15, aϵN},B={y, y este divizor al lui 12}

a)Pentru a=3, calculati A $\cap$B;

b)Pentru a=0, determinati numarul elementelor multimii AUB; precizati explicit elmentele multimii A ;

c)Daca multimea A are 10 elemente, determinati numarul elementelor multimii C, obtinute prin intersectia multimii A cu multimea numerelor naturale pare si precizati explicit elementele multimii C.

Rezolvare:

a)pentru a=3, A={$x/x\epsilon N$,3< x $\leq$15}, deci A={4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15}, iar B={1,2,3,4,6,12}, rezulta A $\cap$B={4,6,12}

b)Pentru a=0, A={$x/x\epsilon N$,0< x $\leq$15}, deci A={1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15}, iar AUB={1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15}.Nr.de elemente este15

c)daca multimea A are 10 elemente, atunci A={15,14,13,12,11,10,9,8,7,6},

numerele naturale pare sunt: 0,2,4,6,8,10,12,14,16,18,20….

Multimea C={6,8,10,12,14},cu cardC=5

Exercitiul 5

Se considera multimile:A={$x/x\epsilon N$,a $\leq$ x<21, aϵN},B={y, y este divizor al lui 18}

a)Pentru a=0, calculati A $\cap$B;

b)Pentru a=6, determinati numarul elementelor multimii A-B; precizati explicit elementele multimii A ;

c)Daca multimea A are 10 elemente, determinati numarul elementelor multimii C, obtinute prin intersectia multimii A cu multimea numerelor naturale impare si precizati explicit elementele multimii C

Denumire	Notatie	Elemente
Naturale	N	0, 1, 2, 3, . . .
Intregi	Z	. . . , -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, . . .
Rationale	Q	$= \left\{ \frac{a}{b}, a \in Z, b \in Z, b \neq 0 \right\}$
Irationale	I	$\sqrt{3}$; π, 1,010010001...
Reale	R	$Q \cup I$

$N = \{0; 1; 2; 3; ...; n...\}$
Obs: N^* este multimea numerelor naturale fara zero si o definim ca:
$N^* = \{1; 2; 3; 4; ...n; ...\}$.
Obsrevam ca $N^* \subset N$.
Multimea numerelor intregi (Z) se defineste astfel:
$Z = \{...; -n; ...; -2; -1; 0; 1; 2; ...; n\}$
La fel ca si la multimea numerelor naturale definim multimea numerelor intregi fara zero
$Z^* = \{...; -n; ...; -2; -1; 1; 2; ...; n; ...\}$.
Astfel $Z^* \subset Z$, dar stim si ca $N \subset Z$.
Multimea numerelor rationale (Q) se defineste astfel:
$Q = \left\{\frac{a}{b} | a \in Z, b \in Z^*\right\}$
Deoarece daca b=0, atunci fractia nu ar mai avea sens.
La fel cum exista N^*, Z^* asa exista si $Q^* = Q - 0$ numita multimea numerelor rationale fara zero.
Multimea numerelor irationale ($R - Q$) este multimea numerelor care se scrie de obicei sub forma de radical.
Multimea numerelor reale(R) este reuniunea multimii numerelor rationale cu multimea numerelor irationale.

Axiomele lui Peano

- 1. 0 este numar natural;
- 2. Orice numar natural n are un singur sucesor n'.
- 3. 0 nu este succesorul nici unui numar.
- 4. Doua numere distincte au succesori distincti.
- 5. Multimea numerelor naturale este o multime minimala N, cu proprietatile:
- a) $0 \in N$; b) daca $n \in N$, atunci $n' \in N$.
- Pe baza acestor axiome se obtin toate consecintele logice asupra numerelor naturale.

BAZA DE NUMERATIE ZECE

Daca a, b, c, d, e sunt cifre in baza 10 si a≠0, atunci putem scrie, in aceasta baza, numere naturale:

- de doua cifre: $\overline{ab} = a \cdot 10 + b$

- de trei cifre: $\overline{abc} = a \cdot 100 + b \cdot 10 + c,$

- de patru cifre: $\overline{abcd} = a \cdot 1000 + b \cdot 100 + c \cdot 10 + d = a \cdot 10^3 + b \cdot 10^2 + c \cdot 10 \ + d$

- de cinci cifre: $\overline{abcde} = a \cdot 10000 + b \cdot 1000 + c \cdot 100 + d \cdot 10 + e$

$$= a \cdot 10^4 + b \cdot 10^3 + c \cdot 10^2 + d \cdot 10 + e$$

In general,

$$\overline{a_n a_{n-1} ... a_2 a_1 a_0} = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + ... + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10^1 + a_0 \cdot 10^0$$

$$\overline{ab}+\overline{ba}= 10a+b+10b+a=11a+11b=11\cdot(a+b)$$

ca sa avem patrat perfecte trebuie ca $a+b=11$

$$\text{adica: } \left| \begin{array}{l} a=1 \rightarrow b=10 \text{ (nu ne convine, b-este cifra)} \\ a=2 \rightarrow b=9 \quad \surd \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a=9 \rightarrow b=2 \quad \surd \end{array} \right.$$

$\overline{abc} = 5 \cdot \overline{bc} + a$

$100 \cdot a + \overline{bc} = 5 \cdot \overline{bc} + a$

$100 \cdot a - a = 5 \cdot \overline{bc} - \overline{bc}$

$99 \cdot a = 4 \cdot \overline{bc}$

$\Rightarrow$ Cum 99 nu se divide cu 4, trebuie neapărat ca $\overline{bc}$ sa fie multiplu de 99

$\Rightarrow \overline{bc} = 99$ (singura posibilitate)

$\Rightarrow 99 \cdot a = 99 \Rightarrow a = 4$

$\Rightarrow \overline{abc} = 499$

B. MATEMATICĂ (30 de puncte)

1. Se dă numărul 147.

a) Aproximați acest număr la ordinul sutelor. **2 puncte**

b) Determinați toate numerele $\overline{ab}$ și $\overline{ac}$, cu a,b și c cifre distincte, care verifică relația: $\overline{ab} + \overline{ac} = 147$. **4 puncte**

1.Aflati cifrele a,b,c, stiind ca indeplinesc conditiile

1.

$$\overline{abc} = 5\overline{bc} + 4 \Leftrightarrow 100a + \overline{bc} = 5\overline{bc} + 4 \Leftrightarrow 100a = 4\overline{bc} + 4 \Leftrightarrow 25a = \overline{bc} + 1, a - cifra \Rightarrow a \in \{1, 2, 3, 4\}$$

$1) a = 1, \overline{bc} = 25 - 1 = 24, \overline{abc} = 124$

$2) a = 2, \overline{bc} = 49, \overline{abc} = 249$

$3) a = 3, \overline{bc} = 74, \overline{abc} = 374$

$4) a = 4, \overline{bc} = 99, \overline{abc} = 499$

$5) a = 5, \overline{bc} = 124 - imposibil$

2.Aflati perichile de cifre a si b, stiind ca expresia de mai jos este patrat perfect

2.

$$\overline{ab} + \overline{ba} - 4(a + b) = 10a + b + 10b + a - 4a - 4b = 7(a + b) = p.p \Rightarrow a + b = 7 \cdot k^2, k \in \mathbb{N}$$

$Daca\ k = 1 \Rightarrow a + b = 7, a \neq 0, b \neq 0$

$(a, b) \in \{(1,6); (6,1); (2,5); (5,2); (3,4); (4,3)\}$

$Dacak = 2 \Rightarrow a + b = 28 - imposibil, deoarece\ (a + b)_{\max} = 9 + 9 = 18$

Cifre romane

Simbol	Valoare
I	1
V	5
X	10
L	50
C	100
D	500
M	1000

- Scrierea se face de la stanga la dreapta.
- Simbolurile I, X, C pot fi consecutive de maximum trei ori, iar V, L, D doar o data.
- Orice semn pus la dreapta altuia de valoare mai mare sau egala cu el, se aduna.

  Exemplu: XX = 10 + 10, XII = 10 + 1 + 1
- Daca un simbol mic se afla in fata unui simbol mare, atunci cel mic se scade din cel mare. In acest caz, in fata unui simbol mare se poate afla doar un singur simbol cu valoare mai mica.

  Exemplu: IX = 10 – 1 = 9, XCII = 100 – 10 + 2 = 92

Cel mai simplu mod de a scrie cifre romane se poate face prin divizarea numarului in mii, sute, zeci si unitati:

Exemplu: numarul 1988

1000 = M, 900 = CM, 80 = LXXX, 8 = VIII

Punandu-le impreuna: MCMLXXXVIII.

a) Aproximați, la zeci de mii, numărul 2 826 455. **2 puncte**

b) Scrieți, sub formă de fracție zecimală, câtul împărțirii numărului 449 la numărul 27. **2 puncte**

c) Aflați, utilizând metoda de 3 simplă, câți elevi din învățământul primar au participat la acest concurs. **6 puncte**

2. Pentru fiecare cerință de mai jos, scrieți rezolvările complete.

a) Știind că $A = x + y - 2, B = x - y + 2$ și $C = x + y + 2$, unde $x, y \in Q$, calculați $A + 2(B - C)$. **3 puncte**

b) Efectuați calculele, prin transformarea cifrelor romane în cifre arabe, iar rezultatul exprimându-l în cifre romane: (MMDCCCXVII – MCMIX) : IV. **4 puncte**

c) Un monument de formă cubică cu latura de 160 cm este vopsit pe toată suprafața vizibilă. Aflați câți metri pătrați are suprafața vopsită a monumentului. **3 puncte**

- **TEOREMA IMPARTIRII CU REST:**
- $D=I\cdot C+R$, $0\leq R<I$, unde:
- D=deimpartit, I=impartitor, C=cat, R=rest.
- Asadar pentru orice doua numere naturale D si I cu $I\neq 0$, exista doua numere naturale C si R, astfel incat sa aiba loc relatia de mai sus.
- **EXEMPLU** 23:4=5rest3 unde D=23, I=4,C=5,R=3, $0<3<4 \Rightarrow 23=4\cdot 5+3$ (adevarat)

- Folosind teorema împărţirii cu rest : **D=Î·C+R, R<Î, D=deîmpărţit, Î=împărţitor, C=cât, R=rest,** rezolvaţi următoarele probleme:
- **1**.Aflaţi deîmpărţitul, ştiind că împărţitorul este 20, câtul este 5 iar restul este 18
- ***Rezolvare***:*D=20•5+18=100+18=118.*
- **2**.Să se afle toate numerele naturale care împărţite la 3 dau câtul 8.
- ***Rezolvare:****daca I=3, atunci restul poate fi:0,1,2, deci numerele sunt:3•8,*
- *3•8+1, 3•8+2. Adica24,25,26*
- **3**.Aflaţi toate numerele naturale nenule care împărţite la 5 dau câtul egal cu restul
- ***Rezolvare***:*I=5, atunci restul poate fi 0,1,2,3,4.Numerele sunt5•1+1,*
  5•2+2,
- *5•3+3, 5•4+4.Adica 6,12,18,24.*
- **4.**Aflaţi cel mai mic număr natural de patru cifre care împărţit la un număr natural format din două cifre dă restul 98.
- ***Rezolvare*** *: Daca restul este 98, atunci impartitorul este mai mare, iar daca are doua cifre, singurul numar poate fi 99.Numarul cautat este 99•10+98=1088*

OPERAȚII CU PUTERI

$$a^1 = a$$

$$1^n = 1$$

$$0^n = 0$$

$$a^0 = 1$$

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

$$a^m : a^n = a^{m-n}$$

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

$$a^m \cdot b^m = (a \cdot b)^m$$

$$a^m : b^m = (a : b)^m$$

$$a^m = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{\text{m ori}}$$

PUTERI, OPERATII CU PUTERI (exercitii rezolvate)

1. Exponentul puterii 12^{456} este 456

2. Baza puterii 123^{278} este123

3. Pătratul numărului 13 este13 $\cdot 13=169$

4. Valoarea de adevăr a propoziției: ”Numărul 187 este pătrat perfect”este....(F)

5. Valoarea lui $2^7=128$

6. Calculati $3^{40} : [3^{20} \cdot 3^{18} + (3^5 \cdot 3^{14})^2 + (4^{20} : 4^{19} - 1)^{38}]$

$=3^{40}:(3^{38}+3^{38}+3^{38})=3^{40}:(3^{38}\bullet 3)=3^{40}:(3^{39})=3$

1.Efectuaţi: a) 34^2; b)9^3.

2.Efectuaţi: a) $7^{81} \cdot 7^5$; b)$5^{11}: 5^5$; c) $(6^2)^{10}$.

3.Calculati: $(25-3^2)^4:4^6$.

4.Comparaţi numerele: a) 25^3 şi 21^3;
b) 13^{11}şi 13^9; c)27^5 şi 9^8.

5.Arataţi că numerele 9^{51} şi 4^{55} sunt pătrate perfecte.

6.Efectuaţi: a) $2^3 + 5^2 + 11^0 + 1^{42} + 0^{10}$.

b) $4^5 : 32^2 - (17+11)^0$;

Criterii de divizibilitate

- **Criteriul de divizibilitate cu 2**
- Un numar natural este divizibil cu 2 daca ultima cifra este para (0,2,4,6,8).
- Ex :{ 30 , 34 ,66 , 38 }
- **Criteriul de divizibilitate cu 3 (ori 9)**
- Un numar natural este divizibil cu 3 (ori 9) daca suma cifrelor sale se divide la 3 (ori 9).
  ex. pentru 3: 12372/3=4124; 1+2+3+7+2=15
- *ex. pentru 9*: 1234566/9=137174; 1+2+3+4+5+6+6=27
- **Criteriul de divizibilitate cu 5**
- Un numar natural se divide cu 5 daca ultima sa cifra este 0 sau 5,
- **Criteriul de divizibilitate cu 10, 100, 1000 etc**.
- Un numar natural este divizibil cu 10 daca ultima cifra a sa este 0, cu 100 daca ultimele doua cifre ale sale sunt 00, cu 1000 daca ultimele trei cifre ale sale sunt 000

- **Divizori comuni**
- **Cel mai mare divizor comun.** Date fiind doua sau mai multe numere naturale, nu toate nule, multimea divizorilor comuni este nevida, deoarece contine cel putin un element, si anume pe 1.
- **Definitie**
  Numarul natural d este **cel mai mare divizor comun** al numerelor naturale a si b, nu ambele nule, daca satisface simultan conditiile:
  a) d divide pe a si d divide pe b ;
  b) d este divizibil cu orice divizor comun al numerelor a si b.
- Cel mai mare divizor comun al numerelor a si b se noteaza c.m.m.d.c.(a,b) sau (a,b).
- (a,b)=d daca si numai daca $d|a$ si $d|b$
  daca $i|a$ si $i|b$, atunci $i|d$

- **Numere prime intre ele** Doua numere naturale a si b se numesc prime intre ele, daca cel mai mare divizor comun al lor este egal cu 1. Doua numere prime intre ele se mai numesc si relativ prime sau coprime.
- **Multipli comuni**
- **Cel mai mic multiplu comun** Multimea multiplilor unui numar natural nenul este infinita. Multimea multiplilor comuni a doua numere naturale, nenule, este si ea infinita, deoarece contine cel putin produsul numerelor si toti multiplii acestuia.
- **Definitie**
  Numarul natural m este **cel mai mic multiplu comun** al numerelor naturale a si b daca satisface simultan conditiile
  a) m este divizibil cu a si b ;
  b) orice alt multiplu al numerelor a si b este divizibil cu m.
- Cel mai mic multiplu comun al numerelor a si b se noteaza c.m.m.m.c.[a,b] sau [a,b].
- [a,b] = m daca si numai daca:
  $a|m$ si $b|m$
  $a|M$ si $b|M$, atunci $m|M$

b) 54; 81; 270.

$$\begin{array}{r|l} 54 & 2 \\ 27 & 3 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 81 & 3 \\ 27 & 3 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 270 & 5 \\ 54 & 2 \\ 27 & 3 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

$$54 = 2 \cdot 3^3$$
$$81 = 3^4$$
$$270 = 2 \cdot 3^3 \cdot 5$$

$$(54; 81; 270) = 3^3 = 27$$

C. m. m. d. c. al unor numere se calculeză astfel:

- descompunem numerele în produs de factori primi;
- înmulțim *factorii primi* ***comuni,*** *luați o singură dată,* la *puterea cea mai* ***mică*** la care îi găsim în descompuneri.

CMMDC

$(4725,2250) = 3^2 \cdot 5^2 = 9 \cdot 25 = 225$

$$\begin{array}{r|l} 4725 & 3 \\ 1575 & 3 \\ 525 & 3 \\ 175 & 5 \\ 35 & 5 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 2250 & 2 \cdot 5 \\ 225 & 3 \\ 75 & 3 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

$4725 = 3^3 \cdot 5^2 \cdot 7$

$2250 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5^3$

CMMMC

$$[2520, 2100] = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7 =$$

$$2520 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \qquad 2100 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7$$

$$\begin{array}{r|l} 2520 & 2 \cdot 5 \\ 252 & 2 \\ 126 & 2 \\ 63 & 3 \\ 21 & 3 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 2100 & 2^2 \cdot 5^2 \\ 21 & 3 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

- **DIVIZORI SI MULTIPLII**
- **EXERCTII REZOLVATE**

- **1**. Multiplii lui 4 cuprinși între 6 si 26 sunt…*8,12,16,20,24*
- **2.** Divizorii numărului 14 sunt :*1,2,7,14*
- **3**.Numerele prime cuprinse între 6 si 22 sunt:*7,11,13,17,19*
- **4** Numerele de forma $\overline{25x} \vdots 2$ sunt*:250,252,254,256,258*
- **5.** Divizorii proprii a numărului 10 sunt :*2 si 5, iar cei improprii sunt 1 si 10*
- **6**. Cel mai mare număr natural de forma $\overline{16xy} \vdots 5$ *este 1695.*
- **7.** Cel mai mare număr natural de două cifre divizibil cu 2 este *98..*
- **8.** Fie numerele 14,75,35,89,700,77, 27,84
- *numerele de mai sus care sunt multiplii lui 7 sunt:14,35,700,77,84*
- *numerele de mai sus care sunt divizibile cu 5 sunt75,35,700.*
- *numerele de mai sus care sunt divizibile cu 2 sunt14,700,84.*

- Un divizor al numarului 24 este egal cu.......
- Cel mai mic număr natural de 3 cifre divizibil cu 3 este numărul.......
- Numărul prim din mulțimea M = { 33, 35, 37, 39 } este.........
- Dintre numerele 756 , 447 , 2041 cel divizibil cu 2 este numărul......
- Un multiplu al numărului 7 este egal cu......
- Cel mai mare număr de forma $\overline{32x}$,scris în baza 10 ,divizibil cu 3 este egal cu........
- Fie numerele: 6, 45, 603, 2004, 230, 135, 108, 552, 700, 2790, 405.

Numerele divizibile cu 2 sunt:

Numerele divizibile cu 3 sunt:

Numerele divizibile cu 5 sunt:

Numerele divizibile cu 9 sunt:

Numerele divizibile cu 10 sunt:

Numerele divizibile cu 3 și care nu sunt divizibile cu 5 sunt

Precizați valoarea de adevăr a propozițiilor:

$131 \vdots 11$ b. $6 \mid 30$ c. $0 \vdots 71$ d. $1 \nmid 33$

e. orice număr divizibil cu 3 este divizibil cu 9

f. orice număr divizibil cu 8 este divizibil cu 4.

Scrieți toate numerele prime mai mari decât 10 și mai mici decât 30.

Scrieți divizorii numerelor 30 și 24 și aflați cel mai mare divizor comun.

Scrieți multiplii numerelor 8 și 6 și aflați cel mai mic multiplu comun nenul.

Scrieți toate numerele de forma $\overline{13x}$ divizibile cu: 2;5:10;3.

Arătați că numărul $n = \overline{1a3} + \overline{2a} + \overline{a12}$ este divizibil cu 3.

Aflați numerele prime x și y știind că 5x + 3y = 21.

Regula semnelor
Numere intregi

Înmulțirea și împărțirea numerelor. Regula semnelor

x	y	$x \cdot y \,/\, x : y$
+	+	+
–	–	+
–	+	–
+	–	–

Exemple:

$+2 \cdot (+3) = +6$
$(-2) \cdot (-3) = +6$
$(-4) \cdot (+2) = -8$
$(+2) \cdot (-5) = -10$

$+4 : (+1) = +4$
$(-4) : (+2) = -2$
$4 : (-1) = -4$
$(-4) : (-2) = 2$

Compararea numerelor intregi Ex : -3 > -6; 0>-2; -7<5
Exercitii : 2-7= ; -8-10=; -9+27=

CALCULE CU NUMERE REALE REPREZENTATE PRIN LITERE

- $A=4x+5y-z$
- $B=3x+7y-2z$
- $C=x-4y-3z$

- Calculati $(A+C)-B$
- $(A+C)-B=(4x+5y-z+x-4y-3z)-(3x+7y-2z)$
- $=5x+y-4z-3x-7y+2z$
- $=2x-6y-2z$

Numere rationale

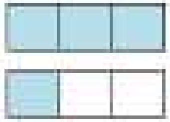
FRACTII SUBUNITARE

$$\frac{2}{3}$$

Intregul este impartit in 3 parti egale, din care partea colorata reprezinta 2 parti, adica 2/3, deci mai putin decat 1 intreg

FRACTII SUPRAUNITARE

$$\frac{4}{3}$$



Intregul este impartit in 3 parti egale, iar partea colorata reprezinta 4 parti, adica 4 / 3, deci mai mult decat 1 intreg

FRACTII ECHIUNITARE

$$\frac{3}{3}$$

Intregul este impartit in 3 parti egale, iar partea colorata reprezinta 3 parti, adica 3/3, adica 1 intreg

subunitare $\frac{a}{b}$, $a < b$; $b \neq 0$

echiunitare $\frac{a}{b}$, $a = b$; $b \neq 0$

supraunitare $\frac{a}{b}$, $a > b$; $b \neq 0$

P R O C E N T E

Rapoartele de forma $\frac{p}{100}$ **se noteaza cu** $p\%$ **si se numesc rapoarte procentuale.**

EXEMPLE:

$$25\% = \frac{25}{100} = \frac{1}{4} \qquad 40\% = \frac{40}{100}^{(20} = \frac{2}{5} \qquad 125\% = \frac{125}{100}^{(25} = \frac{5}{4}$$

Din propozitia $p\%$ **din** $a = b$ **rezulta urmatoarele tipuri de probleme:**

1. Daca se cunosc p **si** a **atunci** $b = p\% \cdot a$

$$60\% din\, 55 = \frac{60}{100} \cdot 55 = \frac{3300}{100} = 33$$

2. Daca se cunosc p **si** b**, atunci a este:** **Aplicatie: 30% din cat este egal cu 18?**

$$30\% din\, a = 18; \qquad \frac{30}{100} \cdot a = 18; \qquad a = 18 \cdot \frac{100}{30} = \frac{1800}{30}^{(30} = 60.$$

3. Daca se cunosc a **si** b**, atunci** p **este:**

Aplicatie: Cat % din 64 este 16 ?

$$\frac{p}{100} \cdot 64 = 16; \quad p = 16 \cdot \frac{100}{64} = \frac{1600}{64}^{(64} = 25.$$

Scoaterea întregilor dintr-o fracție:

$$\frac{17}{3} = 17:3 = 5\ \boldsymbol{rest}\ 2 = 5\frac{2}{3}$$

Introducerea întregilor într-o fracție:

$$5\frac{2}{3} = \frac{5 \cdot 3 + 2}{3} = \frac{15 + 2}{3} = \frac{17}{3}$$

www.profesorjitaruionel.com

EXERCITII

AFLAREA UNEI FRACȚII DINTR-UN NUMĂR NATURAL

Exercițiu : Calculați jumătate din 30 .

Jumătate din 30 = 30 : 2 = 15 sau

Jumătate = $\frac{1}{2}$ din 30 = $\frac{1 \cdot 30}{2} = 15$

Pentru a afla o fracție dintr-un număr, înmulțim numărul cu numărătorul fracției și împărțim rezultatul la numitor .

$$\boldsymbol{\frac{a}{b}\ din\ n = (\,n \cdot a): b} \quad \text{sau}$$

$$\boldsymbol{\frac{a}{b}\ din\ n = \frac{a \cdot n}{b}}$$

Exemple : a) $\frac{2}{7}\ din\ 42 = \frac{2 \cdot 42}{7} = \frac{84}{7} = 12$

b) $\frac{2}{13}\ din\ 91 = \frac{2 \cdot 91}{13} = \frac{182}{13} = 14$

c) $\frac{1}{6}\ din\ 300 = \frac{1 \cdot 300}{6} = \frac{300}{6} = 50$

ADUNAREA ȘI SCĂDEREA FRACȚIILOR

$$\frac{3}{7}+\frac{8}{7}=\frac{3+8}{7}=\frac{11}{7}$$

$$\frac{1}{10}+{}^{5)}\frac{1}{2}-{}^{2)}\frac{2}{5}=\frac{1}{10}+\frac{5}{10}-\frac{4}{10}=\frac{1+5-4}{10}=\frac{2}{10}^{(2}=\frac{1}{5}$$

$$^{36)}\frac{3}{10}+{}^{20)}\frac{5}{18}-{}^{15)}\frac{1}{24}=\frac{108}{360}+\frac{100}{360}-\frac{15}{360}=\frac{108+100-15}{360}=\frac{193}{360}$$

$$\begin{array}{r|l} 10 & 2 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 18 & 2 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 24 & 2 \\ 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

$\boxed{10=2\cdot 5}$ $\boxed{18=2\cdot 3^2}$ $\boxed{24=2^3\cdot 3}$

Aflăm cel mai mic multiplu comun al numitorilor:

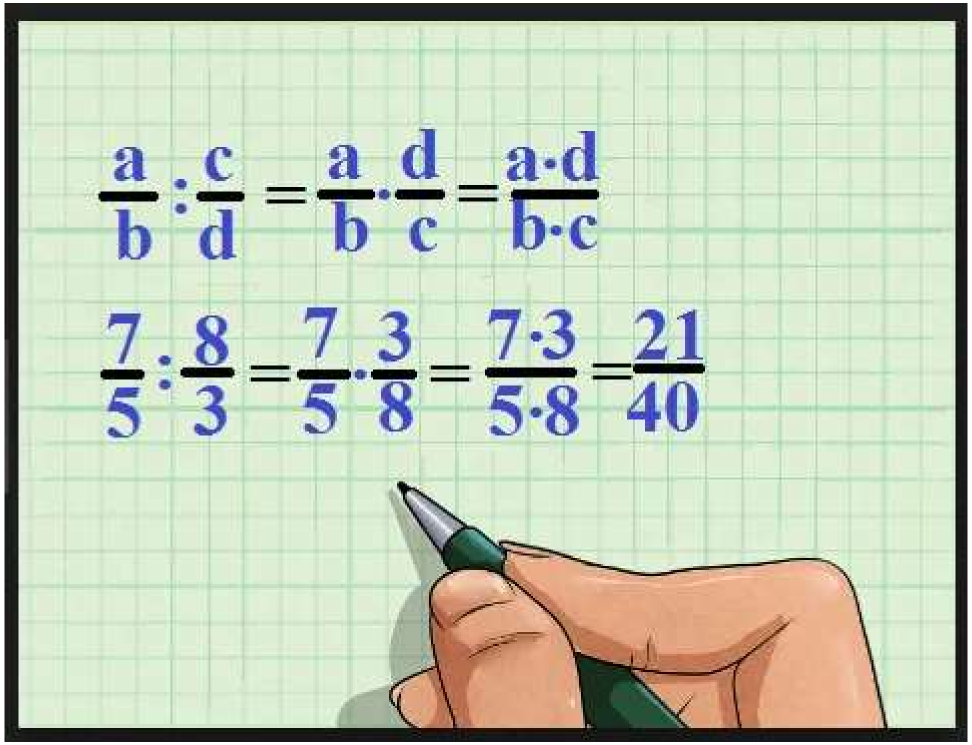
$$[10,18,24]=2^3\cdot 3^2\cdot 5=8\cdot 9\cdot 5=360$$

Numitorul comun = 360

360 : 10 = 36 (amplificăm prima fracție cu 36)

360 : 18 = 20 (amplificăm a doua fracție cu 20)

360 : 24 = 15 (amplificăm a treia fracție cu 15).



$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$
$\frac{7}{5} : \frac{8}{3} = \frac{7}{5} \cdot \frac{3}{8} = \frac{7 \cdot 3}{5 \cdot 8} = \frac{21}{40}$

1. $\frac{2}{5}+\frac{7}{5}-\frac{3}{5}$

2. $\frac{7}{12}+\frac{5}{6}-\frac{1}{2}$

3. $\frac{3}{5}\cdot\frac{25}{9}$

4. $\frac{7}{150}:\frac{49}{25}$

5. $\left(\frac{5}{18}+\frac{1}{24}\right):\frac{23}{6}+\frac{8}{9}\cdot\frac{3}{16}$

--finite (la numărător se copie cifrele fără virgulă iar la numitor se pune cifra 1 urmată de atâtea zerouri câte cifre sunt după virgulă);

$$0{,}7 = \frac{7}{10};\quad 1{,}36 = \frac{136}{100};\quad 23{,}697 = \frac{23697}{1000};$$

--periodice simple (la numărător se copie toate cifrele fără virgulă şi se scad cifrele aflate înaintea perioadei, la numitor se adaugă atâția de 9 câte cifre sunt în perioadă);

$$0,(3) = \frac{3}{9};\quad 2,(4) = \frac{24-2}{9} = \frac{22}{9};$$

$$4,(16) = \frac{416-4}{99} = \frac{412}{99};$$

--periodice mixte (la numărător se copie toate cifrele fără virgulă şi se scad cifrele aflate înaintea perioadei, la numitor se adaugă atâția de 9 câte cifre sunt în perioadă şi 0 câte cifre sunt între perioadă şi virgulă);

$$1{,}2(3) = \frac{123-12}{90} = \frac{111}{90};$$

$$2{,}58(936) = \frac{258936-258}{99900} = \frac{258678}{99900};$$

FRACTII ZECIMALE-TRANSFORMARI
EXEMPLE

$$0,7=\frac{7}{10};\ 1,5=\frac{15}{10}=\frac{3}{2};\ 2,37=\frac{237}{100}$$

$$0,(4)=\frac{4}{9}\quad 2,(3)=\frac{23-2}{9}=\frac{21}{9}=\frac{7}{3}$$

$$0,1(24)=\frac{124-1}{990}=\frac{123}{990}=\frac{41}{330}$$

$$3,42(01)=\frac{34201-342}{9900}=\frac{33859}{9900}$$

FRACTII ZECIMALE-TRANSFORMARI

1,.Transformati fractiile zecimale in fractii ordinare

a) 0,3=

b) 6,56=

c) 0,(3)=

d)1,(24)=

e) 0,1(6)=

d)21,8(2)=

2.Scrieti cate 3 numere zecimale **:**

a) mai mici decat 1,46;

b) cuprinse intre 4,2 si 4,3;

c) cuprinse intre 9,1 si 9,2;

3. Ordonati crescator numerele zecimale:

8,411 ; 8,21 ; 8,412 ; 8,4(2); 8,3 ; 8,45 ; 8,42 ; 8,(4);

Operatii cu fractii zecimale

1. Calculaţi:

a) $0,84 + 3,573=4,313$

b)$4,56 - 1,2 =4,56-1,20=3,36$

c) $5,4 \bullet 10=54$

d)$0,23 \quad \bullet 10=2,3$

e) $8,5 : 0,15 =(8,5\bullet 100):(0,15\bullet 100)=850:15=70$

Exercitii

$3,01 + 4,51 =$

$45,007 + 5,02 =$

$6,78 - 5,07 =$

$45,82 - 34,5 =$

a) $2,3 \cdot 10 =$

b) $2,356 \cdot 100 =$

c) $7,358 \cdot 1000 =$

d) $0,3 \cdot 0,4=$

APROXIMĂRI ROTUNJIRI

1.Completaţi spaţiile punctate cu aproximările prin lipsă, respectiv adaos până la zeci ale următoarelor numere naturale, după model:

a) 60…< 64 < 70… ;

b) … < 259 < … ;

c) … < 892 < … ;

d) …45000 < 45008 < 45010 ;

e) … < 67504 < …

model: 30<36<40 ; 4520<4521<4530.

2.Un zugrav foloseşte numai vopsea în cutii a 10 litri cutia. Câte cutii trebuie să cumpere pentru a avea: a) 17 litri ? ; b) 352 litri ? c) 5 litri ? ; d) 3691 litri ?

Socotiţi, în fiecare caz, câţi litri îi vor rămâne de rezervă.

Numărul	Aproximarea până la zeci		rotunjire până la zeci	Aproximarea până la sute		rotunjire până la sute	Aproximarea până la mii		rotunjire până la mii
	Prin lipsă	Prin adaos		Prin lipsă	Prin adaos		Prin lipsă	Prin adaos	
1258	1250	1260	1260	1200	1300	1300	1000	2000	**1000**
7554									
53819									
263759									
5873164									

Aproximari la zecimi 47,23
prin lipsa 47,20
Prin adaos 47,30

Aproximari la unitati 47,23
prin lipsa 47
prin adaos 48

MEDIA ARITMETICĂ

-2 termeni: $m_a = \frac{a+b}{2}$ unde a,b$\in$R

-n termeni: $m_a = \frac{X1+X2+\cdots.+Xn}{n}$ unde n$\geq$2 și $x_1, x_2, \ldots, x_n \in$R

MEDIA GEOMETRICĂ (MEDIA PROPORȚIONALĂ)

$m_g = \sqrt{a \cdot b}$ unde a,b$\geq$0

Media aritmetică ponderată

$$m_p = \frac{p_1 \cdot a_1 + p_2 \cdot a_2 + \ldots + p_n \cdot a_n}{p_1 + p_2 + \ldots + p_n}$$

Unde
p reprezinta ponderile si
a reprezinta numerele

Exemplu: media clasei, unde se repeta anumite note

Radicali

$$\sqrt{a^2} = |\,a\,|, (a \in \mathbb{R})$$

$$\sqrt{a^2} = a, (a \in \mathbb{R}, a \geq 0)$$

$$(\sqrt{a})^2 = a, (a \in \mathbb{R}, a \geq 0)$$

$$\sqrt{a} * \sqrt{b} = \sqrt{ab}, (a, b \in \mathbb{R}, a \geq 0, b \geq 0)$$

$$\sqrt{a} : \sqrt{b} = \sqrt{a : b}, (a, b \in \mathbb{R}, a \geq 0, b > 0)$$

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}, (a, b \in \mathbb{R}, a \geq 0, b > 0)$$

$$\sqrt{a^n} = (\sqrt{a})^n, (a > 0, n \in \mathbb{Z})$$

se înmulțește cu radicalul. Opusul unei sume algebrice de numere reale este suma algebrică a opușilor termenilor ce o alcătuiesc.

Exemple: a) $4\sqrt{2}+5\sqrt{2}+3\sqrt{2}=(4+5+3)\sqrt{2}=12\sqrt{2}$;

b) $4\sqrt{3}+3\sqrt{5}+7\sqrt{3}+8\sqrt{5}=(4+7)\sqrt{3}+(3+8)\sqrt{5}=11\sqrt{3}+11\sqrt{5}=11(\sqrt{3}+\sqrt{5})$.

- **Scăderea numerelor reale.** Diferența a două numere reale se efectuează adunând descăzutul cu opusul scăzătorului.

Exemple: a) $4\sqrt{7}-3\sqrt{7}=4\sqrt{7}+(-3)\sqrt{7}=[4+(-3)]\sqrt{7}=\sqrt{7}$;

b) $4\sqrt{7}-3\sqrt{5}+5\sqrt{7}-6\sqrt{5}=(4+5)\sqrt{7}-(3+6)\sqrt{5}=9\sqrt{7}-9\sqrt{5}=9(\sqrt{7}-\sqrt{5})$.

- **Produsul numerelor reale.** Produsul numerelor $a\sqrt{b}$ și $c\sqrt{d}$ ($b, d \geq 0$) este un număr real $ac\sqrt{bd}$. De asemenea, sunt valabile următoarele cazuri particulare:

a) $a\sqrt{b}\cdot\sqrt{d}=a\sqrt{b\cdot d}$, $b, d\geq 0$; b) $n\cdot a\sqrt{b}=na\sqrt{b}$, $b\geq 0$.

Exemple: a) $3\sqrt{5}\cdot 2\sqrt{3}=6\sqrt{15}$; $3\sqrt{2}(-4\sqrt{7})=-12\sqrt{14}$;

b) $7\sqrt{6}\cdot\sqrt{3}=7\sqrt{18}=7\cdot 3\sqrt{2}=21\sqrt{2}$; $-3\sqrt{3}\cdot\sqrt{39}=-3\sqrt{117}=-3\cdot 3\sqrt{13}=-9\sqrt{13}$.

- **Împărțirea numerelor reale.** Împărțirea a două numere reale $a\sqrt{b}$ și $c\sqrt{d}$ ($c\neq 0$, $b\geq 0, d>0$) se efectuează înmulțind deîmpărțitul cu inversul împărțitorului:

$$a\sqrt{b} : c\sqrt{d} = a\sqrt{b}\cdot\frac{1}{c\sqrt{d}}=\frac{a}{c}\sqrt{\frac{b}{d}}.$$

Exemple: a) $3\sqrt{5}:6\sqrt{2}=\frac{3}{6}\sqrt{\frac{5}{2}}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{2}}$; b) $-3\sqrt{10}:\left[\left(\frac{1}{3}\right)\sqrt{\frac{1}{10}}\right]=-3\cdot 3\sqrt{10\cdot 10}=-90$.

- **Ridicarea la putere întreagă a numerelor reale.** Ridicând un număr real de forma $a\sqrt{b}$ ($a\neq 0, b>0$) la o putere n, obținem $\left(a\sqrt{b}\right)^n=a^n\sqrt{b^n}$, $n\in\mathbb{Z}$.

Exemple: a) $\left(3\sqrt{7}\right)^3=3^3\sqrt{7^3}=27\cdot 7\sqrt{7}=189\sqrt{7}$; b) $\left(-2\sqrt{5}\right)^4=(-2)^4\sqrt{5^4}=16\cdot 25=400$.

1. Scoateți factori de sub radical:

a) $\sqrt{24}$ b) $\sqrt{45}$ c) $\sqrt{18}$

d) $\sqrt{125}$ e) $\sqrt{80}$ f) $\sqrt{300}$

g) $\sqrt{450}$ h) $\sqrt{1008}$ i) $\sqrt{1350}$

j) $\sqrt{3x^2}$ k) $\sqrt{25a^2b}$ l) $\sqrt{5x^4}$

2. Introduceți factorii sub radical după modelul dat:

a) $5\sqrt{2} = \sqrt{5^2 \cdot 2} = \sqrt{25 \cdot 2} = \sqrt{50}$

b) $3\sqrt{5}$ c) $12\sqrt{2}$ d) $4\sqrt{3}$ e) $2\sqrt{3}$

f) $3\sqrt{3}$ g) $-2\sqrt{2}$ h) $-6\sqrt{7}$ i) $1{,}5\sqrt{2}$

j) $-0{,}2\sqrt{3}$ k) $1{,}(3)\sqrt{21}$ l) $2^2\sqrt{3}$ m) $3^{-1}\sqrt{12}$

n) $-7^{-1}\sqrt{14}$ o) $-9^0\sqrt{23}$ p) $x\sqrt{5}$ q) $x^2\sqrt{15}$

e) $\sqrt{a^n} = \left(\sqrt{a}\right)^n$, $\forall a \in \mathbb{R},\ a > 0,\ n \in \mathbb{Z}$

Rețineți!

a) $\sqrt{a^2 b} = a\sqrt{b},\ a, b \in \mathbb{R},\ a, b \geq 0$

b) $\sqrt{a^2 b} = |a| \cdot b,\ \forall a \in \mathbb{R},\ b \geq 0$

Exemple:

a) $\sqrt{4} = \sqrt{2^2} = 2$

b) $\sqrt{(x-1)^2} = |x-1|$

c) $\sqrt{9 \cdot 4} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{4} = 3 \cdot 2 = 6$

d) $\sqrt{25:16} = \sqrt{\dfrac{25}{16}} = \dfrac{\sqrt{25}}{\sqrt{16}} = \dfrac{5}{4}$

e) $\sqrt{4^k} = \left(\sqrt{4}\right)^k = 2^k,\ k \in \mathbb{Z}$

f) $\sqrt{27} = \sqrt{9 \cdot 3} = 3\sqrt{3}$

g) $\sqrt{x^2 y} = |x|\sqrt{y},\ \forall x, y \in \mathbb{R},\ y \geq 0$

$$\sqrt{5} + 2\sqrt{45} - 3\sqrt{80} = \sqrt{5} + 2\sqrt{5\cdot 3\cdot 3} - 3\sqrt{8\cdot 10} =$$

$$= \sqrt{5} + 2\sqrt{5\cdot 3\cdot 3} - 3\sqrt{2^4\cdot 5} = \sqrt{5} + 6\sqrt{5} - 3\cdot 2^2\sqrt{5} =$$

$$= \sqrt{5} + 6\sqrt{5} - 12\sqrt{5} = 7\sqrt{5} - 12\sqrt{5} = -5\sqrt{5}$$

$$\sqrt{a\cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$$

$$\sqrt{5\cdot 3^2} = \sqrt{5} \cdot \sqrt{3^2} = \sqrt{5} \cdot 3$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(5\sqrt{20}:\sqrt{10}+\sqrt{32}\right)+2\sqrt{8}\cdot\left(-3\sqrt{2}\right)=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(5\sqrt{2}+4\sqrt{2}\right)-6\sqrt{16}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot 9\sqrt{2}-6\cdot 4=$$

$$=\frac{9\sqrt{2}}{\sqrt{2}}-24=$$

$$=9-24=-15.$$

1. Rădăcina pătrată a numărului 81 este …..

2. Rezultatul calculului $5\sqrt{2}+3\sqrt{2}$ este ….

3. Rezultatul calculului $\sqrt{0,49}+\sqrt{1,69}$ este….

4. Rezultatul calculului $\sqrt{4}+\sqrt{121}$ este…

5. Dintre numerele $a=5\sqrt{2}\ si\ b=4\sqrt{3}$ mai mare este….

6. Media geometrică a numerelor 2 şi 50 este ….

7.Efectuaţi: $\sqrt{9^2+12^2}-\sqrt{169}$.

8.Efectuaţi: $\sqrt{300}+3\sqrt{27}-5\sqrt{48}+\sqrt{75}$.

9..Efectuaţi: $\left(6\sqrt{15}-4\sqrt{18}\right):2\sqrt{3}$.

10..Să se calculeze media aritmetică şi media geometrică a numerelor a = $5\sqrt{75}$ şi b=$3\sqrt{27}$.

1. Efectuaţi: $\sqrt{6^2+8^2}-\sqrt{225}$.

2. Efectuaţi: $\sqrt{200}+2\sqrt{8}-3\sqrt{32}+\sqrt{50}$.

3. Efectuaţi: $\left(2\sqrt{20}-3\sqrt{45}\right):5\sqrt{5}$.

4. Să se calculeze media aritmetică şi media geometrică a numerelor a = $2\sqrt{24}$ şi b=$9\sqrt{6}$.

5. Efectuaţi: $\left(\frac{\sqrt{3}}{6}\right)^2\cdot\left(\frac{10}{\sqrt{75}}+\sqrt{\frac{50}{486}}\right):\frac{23}{9\sqrt{3}}$.

• Ecuatii si inecuatii de gr. I

- **Rezolvati ecuatiile de gradul I:**
- Metoda de lucru: Se separa necunoscuta, trecand termenii dintr-o parte in alta cu semn schimbat, apoi ecuatia se imparte la coeficientul lui x.
- a) $3x-5=10 \Rightarrow 3x = 10+5 \Rightarrow 3x= 15 \Rightarrow x= 5$
- b) $7x+80= 10 \Rightarrow 7x = 10-80 \Rightarrow 7x = - 70 \Rightarrow x = -10$
- c) $3(x+4)=15 \Rightarrow 3x + 12 = 15 \Rightarrow 3x = 15-12 \Rightarrow 3x = 3 \Rightarrow x=1$
- d) $7(8 - x) = 2(x + 2) \Rightarrow 56 - 7x = 2x + 4 \Rightarrow -7x - 2x = 4 - 56 \Rightarrow -9x = -52 \Rightarrow x=52/9$
- **Rezolvati inecuatiile de gradul I:**
  - $3x-5 > 10 \Rightarrow 3x > 10+5 \Rightarrow 3x > 15 \Rightarrow x> 5$
  - $- 7x + 80 <10 \Rightarrow -7x < 10-80 \Rightarrow -7x < - 70 \Rightarrow x >10$

Observatie:la impartirea unei inecuatii cu un numar negativ, sensul acesteia se schimba,adica din a>b devine -a<-b.

Sisteme de 2 ecuatii

METODA REDUCERII

EXERCITII

1. $$\begin{cases} 2x+3y-5=0 \rightarrow \bullet(-2) \\ 5x+2y+2=0 \rightarrow \bullet 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -4x-6y+10=0 \\ 15x+6y+6=0 \\ \end{cases} \Rightarrow 11x+16=0 \Rightarrow x=\frac{-16}{11}$$

$$\Rightarrow 2\bullet\left(-\frac{16}{11}\right)+3y=5 \Rightarrow 3y=5+\frac{32}{11} \Rightarrow 3y=\frac{55+32}{11} \Rightarrow 3y=\frac{87}{11} \Rightarrow y=\frac{87}{11}\bullet\frac{1}{3}=\frac{29}{11}$$

Sistemul are solutia: $\left(-\frac{16}{11};\frac{29}{11}\right)$

2. $$\begin{cases} 2x-3y=5 \\ x+y=10 \rightarrow \bullet 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x-3y=5 \\ 3x+3y=30 \end{cases} \Rightarrow 5x=35 \Rightarrow x=\frac{35}{5}=7 \Rightarrow 2\bullet 7-3y=5 \Rightarrow$$

$$14-3y=5 \Rightarrow -3y=5-14 \Rightarrow -3y=-9 \Rightarrow y=3$$

Sistemul are solutia (7;3)

METODA SUBSTITUTIEI

Exemplu:

1. $\begin{cases} 2x - 3y = 5 \\ x + y = 10 \Rightarrow x = 10 - y \end{cases}$

$\Rightarrow 2x - y = 5 \Rightarrow 2(10 - y) - 3y = 5 \Rightarrow 20 - 2y - 3y = 5 \Rightarrow -5y = -15 \Rightarrow y = 3$

$x = 10 - y \Rightarrow x = 10 - 3 = 7 \Rightarrow S = \{7;3\}$

2. $\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ 5x + 2y = -2 \Rightarrow 5x = -2 - 2y \Rightarrow x = \dfrac{-2 - 2y}{5} \end{cases}$

$2x + 3y = 5 \Rightarrow 2\left(-\dfrac{2 + 2y}{5}\right) + 3y = 5 \Rightarrow -4 - 4y + 15y = 25 \Rightarrow 11y = 29 \Rightarrow y = \dfrac{29}{11}$

$x = -\dfrac{2 + 2y}{5} \Rightarrow x = -\dfrac{2 + 2 \cdot \dfrac{29}{11}}{5} = -\dfrac{22 + 58}{55} = -\dfrac{16}{11}$

S=$\left\{-\dfrac{16}{11}; \dfrac{29}{11}\right\}$

PROBLEME CARE SE REZOLVA CU ECUATII

1. Suma a trei numere întregi consecutive este egală cu -27. Aflaţi cele trei numere.

- *Rezolvare:Notăm cu a; a+1; a+2 cele trei numere consecutive*
- *a+a+1+a+2= – 27*, ***deci*** *3a+3=– 27, de aici 3a= – 30*
- *a= – 10*
- *a+1= – 9*
- ***a+2= – 8***

2**.** Andrei şi Mariana au împreună 27 de lei. Mariana are cu 5 lei mai mult decât AndreI. Ce sumă de bani are fiecare?

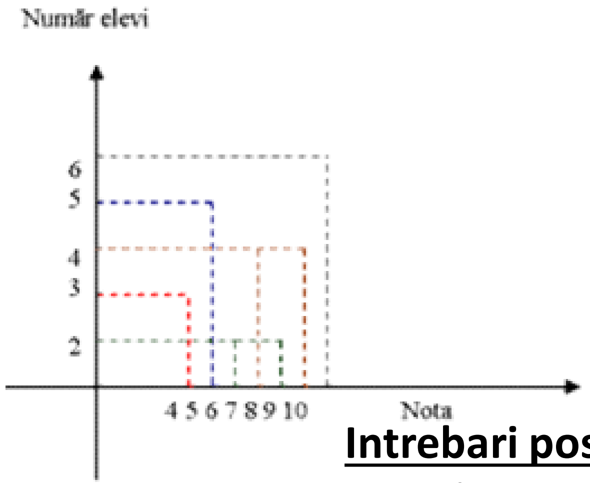
- Notăm cu *a* = suma lui Andrei; *b* = suma Marianei
- *a+b = 27*
- *b = 5+a*
- *a+5+a = 27, rezulta 2a = 22, deci a = 11* lei are Andrei
- *b = 5+11 = 16* lei are Mariana

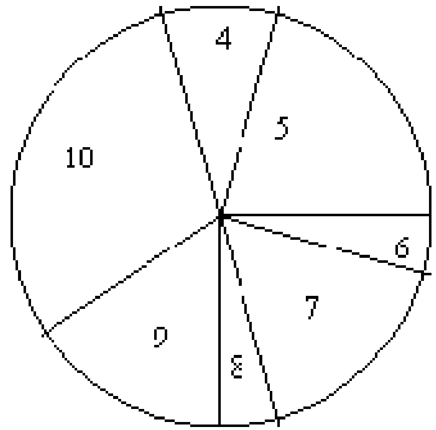
Ioana participă la un concurs de matematică care are 90 de întrebări grilă. Știind că pentru fiecare răspuns corect primește 3 puncte iar pentru fiecare răspuns greșit i se scade 1 punct,

- aflați câte răspunsuri corecte a avut Ioana, dacă punctajul obținut a fost de 170 de puncte
- **Rezolvare:***Notăm cu c = numărul de răspunsuri corecte; g = numărul de răspunsuri greșite*
- *c+g = 90*
- *3c - g = 170*
- *4c = 260*
- *C = 65 răspunsuri corecte.*

Elemente de organizare a datelor

Nota	4	5	6	7	8	9	10
Număr elevi	3	5	2	4	2	4	6





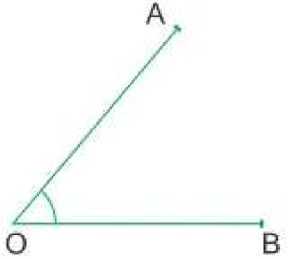
Intrebari posibile

Cati elevi sunt in clasa?
Cati elevi au luat nota 9?
Cati elevi au luat nota peste 8?
Cati elevi nu au nota de trecere?
Ce nota s-a luat de cele mai multe ori?
Care este media clasei la acel test?
Cat la suta din elevi au nota cel putin egala cu 6?

Unghiul

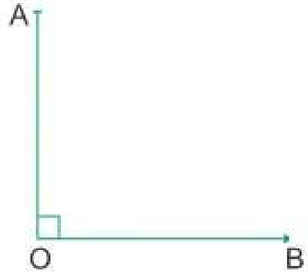
- Dupa masura, unghiurile se clasifica astfel:
- · Unghiurile de 0 grade (cu laturile una peste alta) se numesc **unghiuri nule.**
- · Unghiurile cu o masura intre 0 si 90 de grade se numesc **unghiuri ascutite.**
- · Unghiurile de 90 de grade (ale caror laturi sunt perpendiculare) **se numesc drepte**.
- · Unghiurile cu o masura intre 90 si 180 de grade se numesc **unghiuri obtuze.**
- · Unghiurile de 180 de grade (ale caror laturi sunt una in prelungirea celeilalte) se **numesc alungite**.
- · Unghiurile cu mai mult de 180 de grade se numesc **unghiuri reflexe.**
- De asemenea, daca doua unghiuri masoara impreuna 90 de grade, acestea se numesc **unghiuri complementare**, iar daca masoara impreuna 180 grade se numesc **unghiuri suplementare**.
- Doua unghiuri cu o latura comuna si celelalte laturi situate de o parte si de alta a laturilor comune se numesc **unghiuri adiacente**.

UNGHI ASCUȚIT



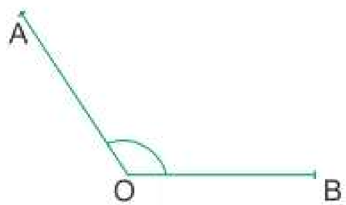
$0^\circ <$ **Măsura** $< 90^\circ$

UNGHI DREPT



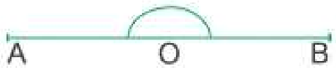
Măsura $= 90^\circ$

UNGHI OBTUZ



$90^\circ <$ **Măsura** $< 180^\circ$

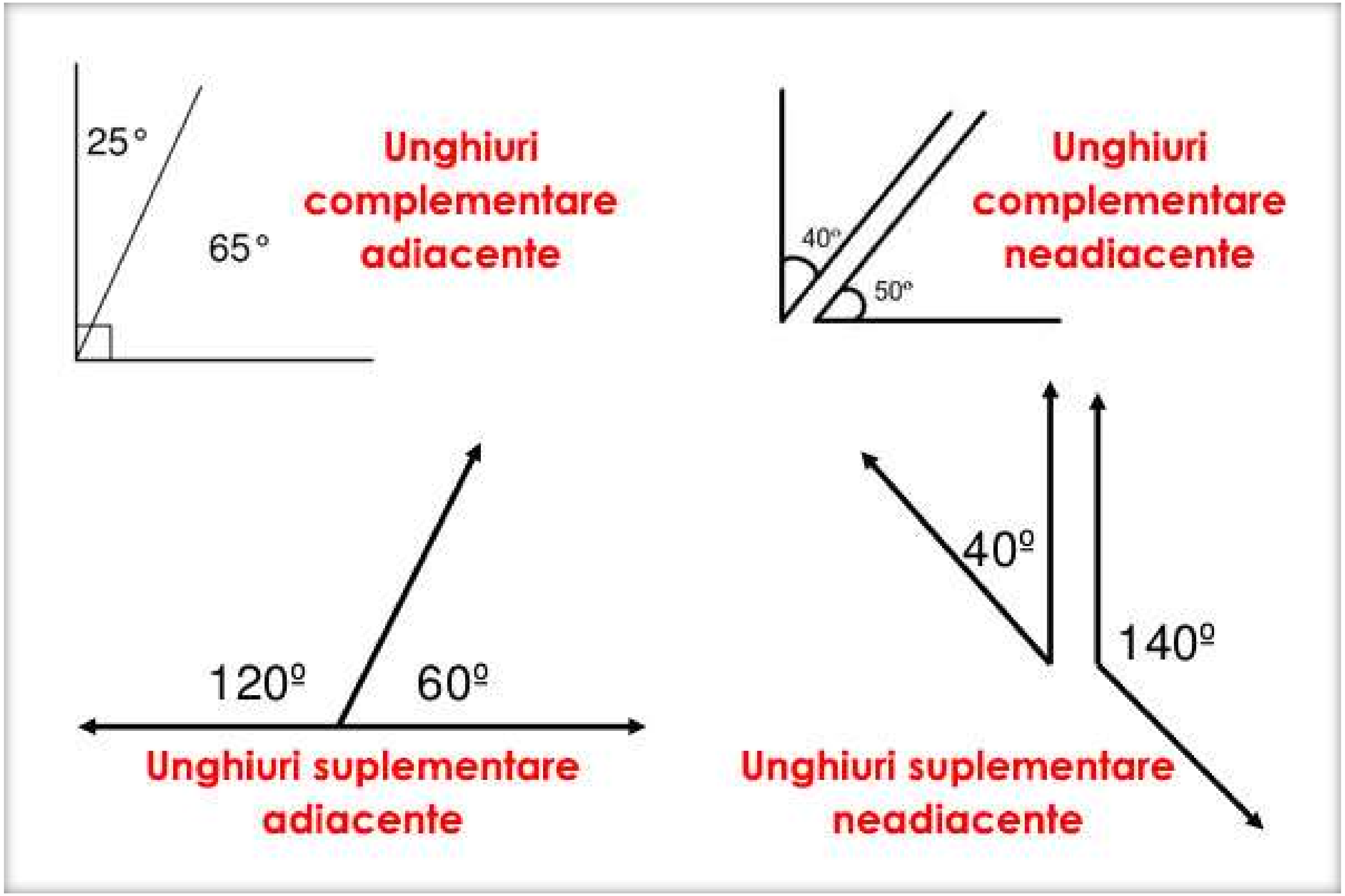
UNGHI ALUNGIT



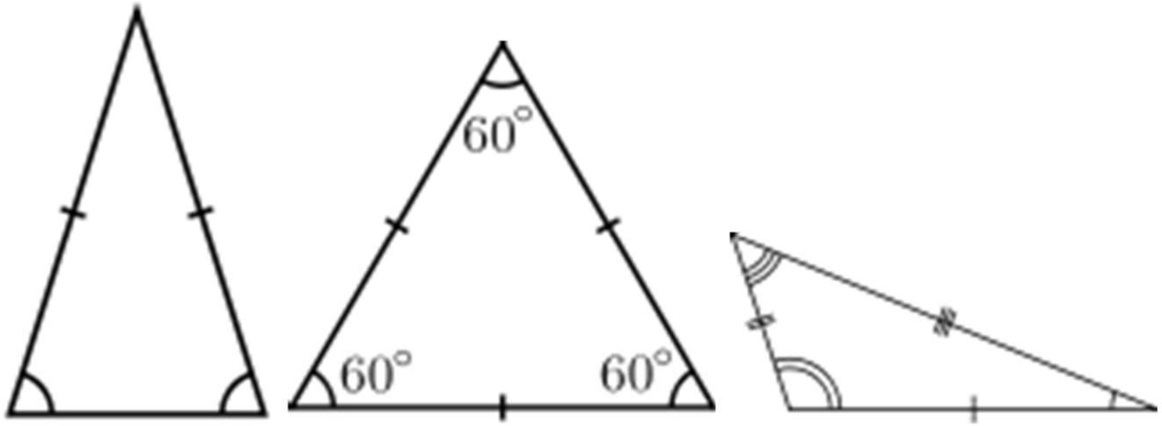
Măsura $= 180^\circ$

UNGHI NUL

Măsura $= 0^\circ$

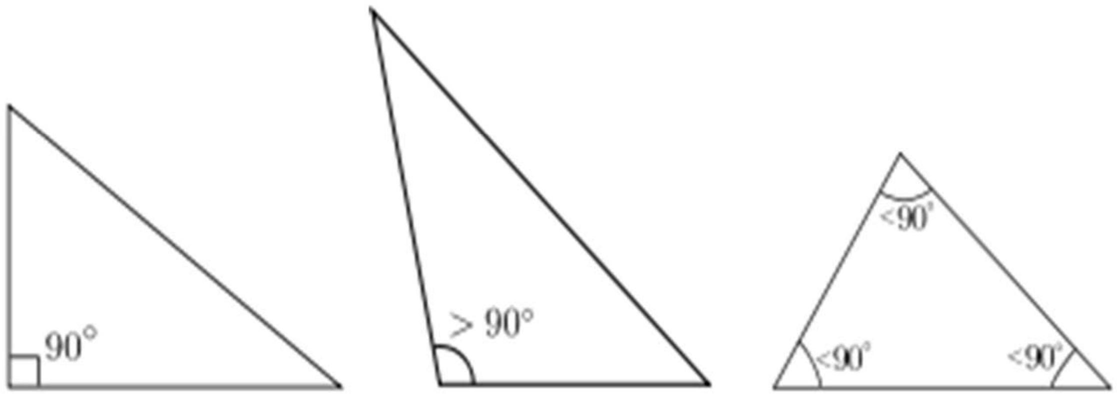

25°
65°
Unghiuri complementare adiacente
40°
50°
Unghiuri complementare neadiacente
120º
60º
Unghiuri suplementare adiacente
40º
140º
Unghiuri suplementare neadiacente

Triunghiul



Isoscel Echilateral Scalen(oarecare)

Triunghiul cu toate unghiurile ascutite este numit **triunghi ascutitunghic**. Daca unul dintre unghiuri este drept, triunghiul este denumit **dreptunghic**. Triunghiul cu un unghi mai mare de 900 se numeste triunghi **obtuzunghic**.



Dreptunghic Obtuzunghic Ascutitunghic

Problema 5

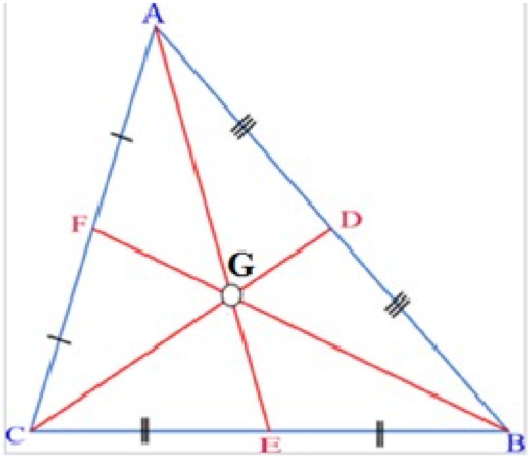
- În triunghiul colorat un unghi are măsura 36°.

  Dacă din măsura celuilalt unghi ascuţit scădem 10°, obţinem:............................

1) 26°
2) 134°
3) 44°
4) 170°

Linii importante in triunghi

-
- **1) MEDIANA**
- **DEFINITIE –*<u>Mediana este</u> segmentul care uneste un varf al triunghiului cu mijlocul laturii opuse.***



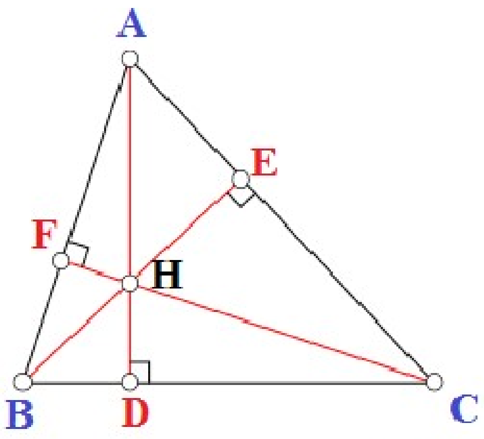
***în ΔABC: AE, BF, CD sunt MEDIANE**
AE∩BF∩CD=G

In triunghiul ABC din desen:

AE este mediana =>E este mijlocul lui [BC] =>[BE]≡[EC]
BF este mediana =>F este mijlocul lui [AC] =>[AF]≡[FC]
CD este mediana =>D este mijlocul lui [AB] =>[BD]≡[AD]

G se afla la 2/3 de varf si 1/3 fata de baza, pe fiecare mediana
AG=2/3*AE
GE=1/3*AE

- **2) INALTIMEA**
- **DEFINITIE –*<u>Inaltimea este</u> segmentul cu un capat intr-un varf al triunghiului, iar celalalt capat in piciorul perpendicularei dusa din acel varf pe dreapta suport a laturii opuse.***



$AD \perp BC$, $D \in BC$ => [AD] înălțime

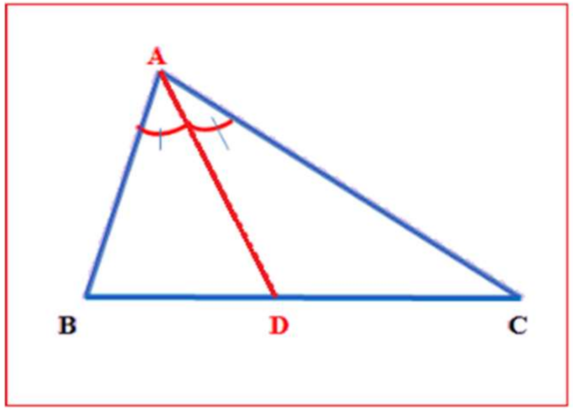
***în ΔABC: AD, BE, CF=înălțimi**

***$AD \cap BE \cap CF$=<u>H=ortocentrul Δ</u>**

OBS –In orice triunghi inaltimile sunt CONCURENTE(se intersecteaza) intr-un punct numit ORTOCENTRUL TRIUNGHIULUI(notat H).

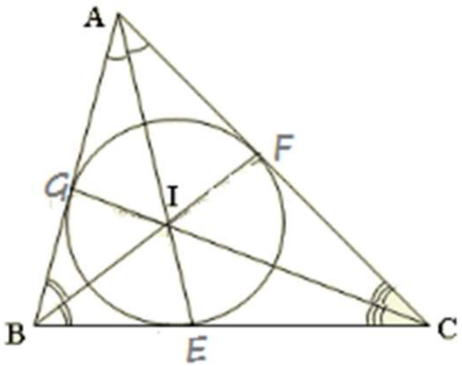
3) BISECTOAREA

DEFINITIE –*<u>Bisectoarea unui triunghi este</u> bisectoarea unui unghi interior al triunghiului. Bisectoarea unui unghi este semidreapta cu originea in varful unghiului, care imparte acest unghi in alte doua unghiuri congruente (unghiuri de masuri egale).*



AD bisectoarea <BAC => <BAD≡<DAC

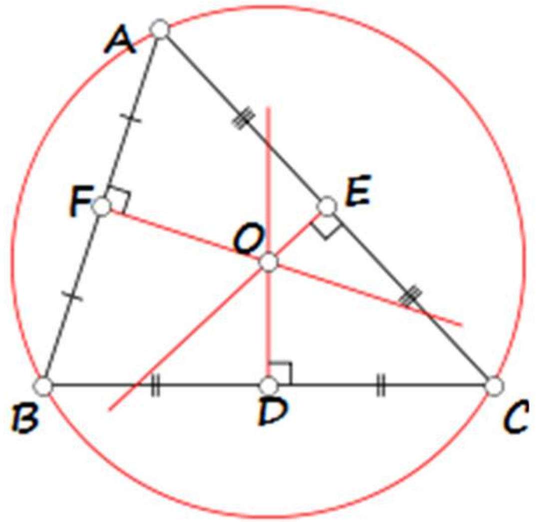
OBS –*In orice triunghi cele 3 bisectoare sunt CONCURENTE(se intersecteaza) intr-un punct numit <u>CENTRUL CERCULUI INSCRIS IN TRIUNGHI(notat I)</u>.*



4) MEDIATOAREA

DEFINITIE –*<u>Mediatoarea unui triunghi este</u> mediatoarea unei laturi a triunghiului. Mediatoarea unei laturi este perpendiculara dusa prin mijlocul unui segment.*

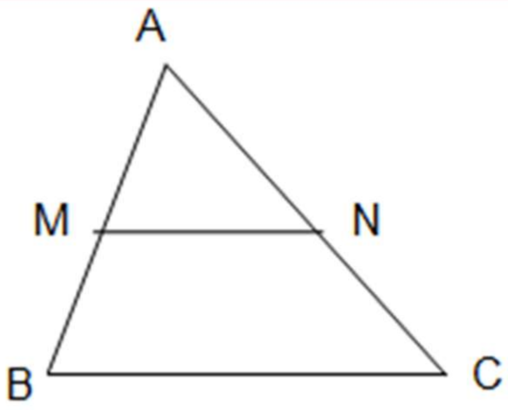
DESEN:



OBS –*In orice triunghi cele 3 mediatoare sunt CONCURENTE(se intersecteaza) intr-un punct numit <u>CENTRUL CERCULUI CIRCUMSCRIS TRIUNGHIULUI(notat O)</u>.*
OD este mediatoare => OD⊥BC si D este mijlocul lui BC adica [BD]≡[DC].

5) LINIA MIJLOCIE

DEFINITIE –*<u>Linia mijlocie este</u> segmentul care uneste mijloacele a doua laturi intr-un triunghi. In orice triunghi pot exista 3 linii mijlocii.*
PROPRIETATE –*In orice triunghi linia mijlocie este paralela cu baza(latura pe care nu o intersecteaza) si are lungimea egala cu jumatate din lungimea bazei.*
DESEN:



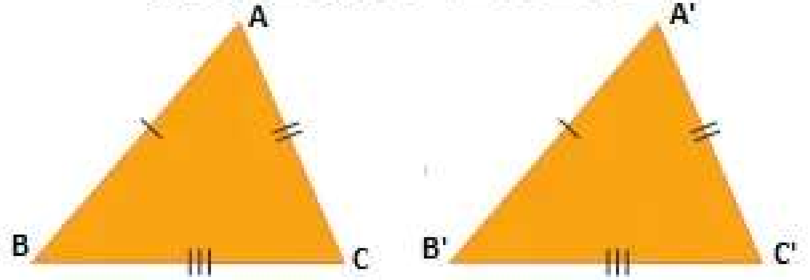
<u>MN este linie mijlocie</u> =>

$MN \parallel BC$

$$MN = \frac{BC}{2}$$

CAZURI DE CONGRUENTA

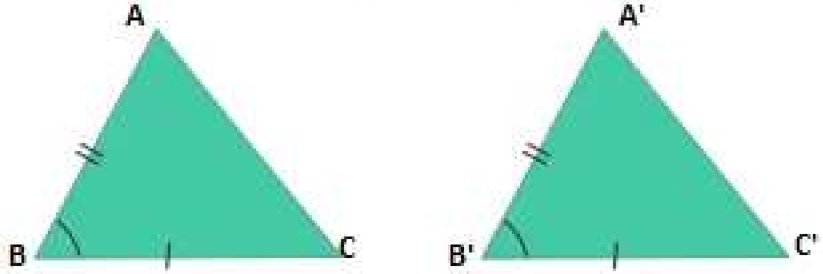
Cazul L.L.L



$[AB]\equiv[A'B']$, $[BC]\equiv[B'C']$, $[AC]\equiv[A'C']$ cazul L.L.L=>

$\Rightarrow \Delta ABC\equiv\Delta A'B'C'$

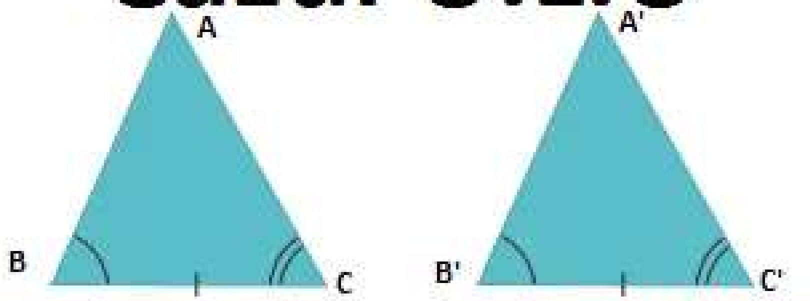
Cazul L.U.L



$[AB]\equiv[A'B']$, $\sphericalangle B\equiv\sphericalangle B'$, $[BC]\equiv[B'C']$ cazul L.U.L=>

$\Rightarrow \Delta ABC\equiv\Delta A'B'C'$

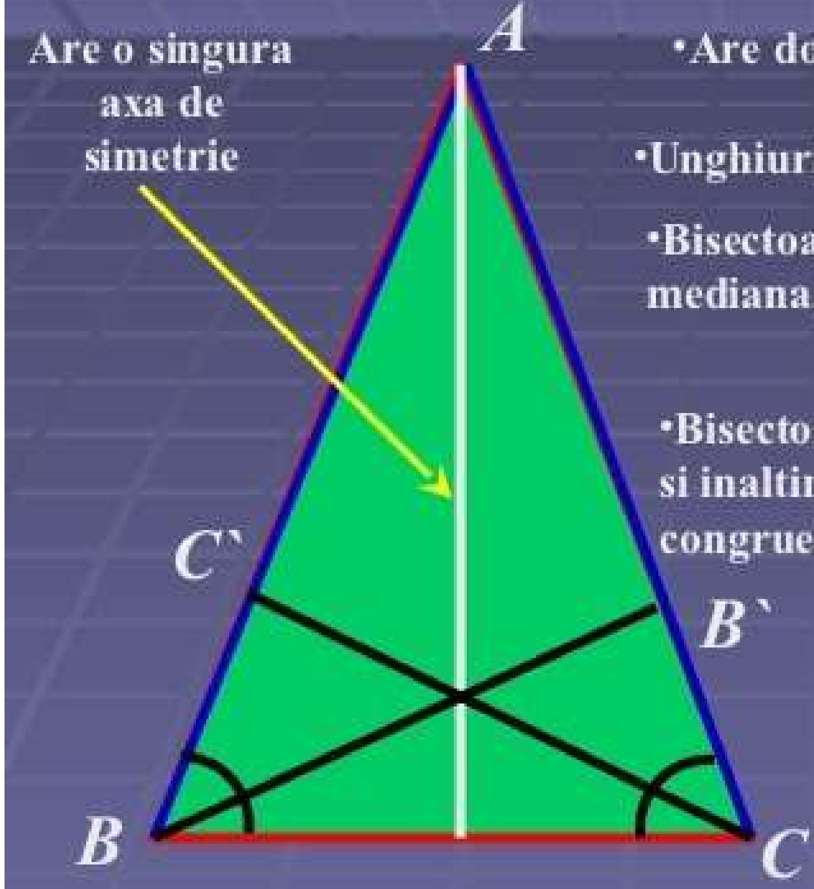
Cazul U.L.U



$\sphericalangle B\equiv\sphericalangle B'$, $[BC]\equiv[B'C']$, $\sphericalangle C\equiv\sphericalangle C'$ cazul U.L.U=>

$\Rightarrow \Delta ABC\equiv\Delta A'B'C'$

PROPRIETĂȚILE TRIUNGHIULUI ISOSCEL



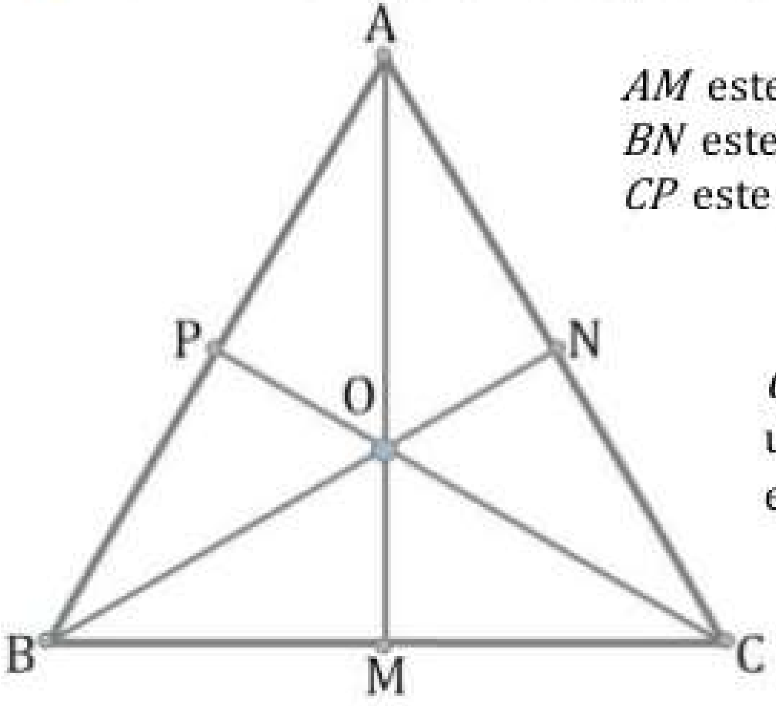
- Are doua laturi congruente: [AB]=[AC].
- Unghiurile de la baza sunt congruente: <B≡<C
- Bisectoarea unghiului de la varf este si mediana, si inaltime si mediatoare.
- Bisectoarele unghiurilor de la baza, medianele si inaltimile corespunzatoare laturilor congruente, sunt respectiv congruente.
- De exemplu, inaltimile BB` si CC` sunt congruente.
- Unghiurile de la baza sunt intotdeauna ascutite!

Triunghiul echilateral – proprietăți

- Toate unghiurile unui triunghi echilateral sunt congruente, având măsura egală cu 60^o.

  $m(\hat{A}) = m(\hat{B}) = m(\hat{C}) = 60^o$

- Toate liniile importante ce pornesc din același vârf coincid.

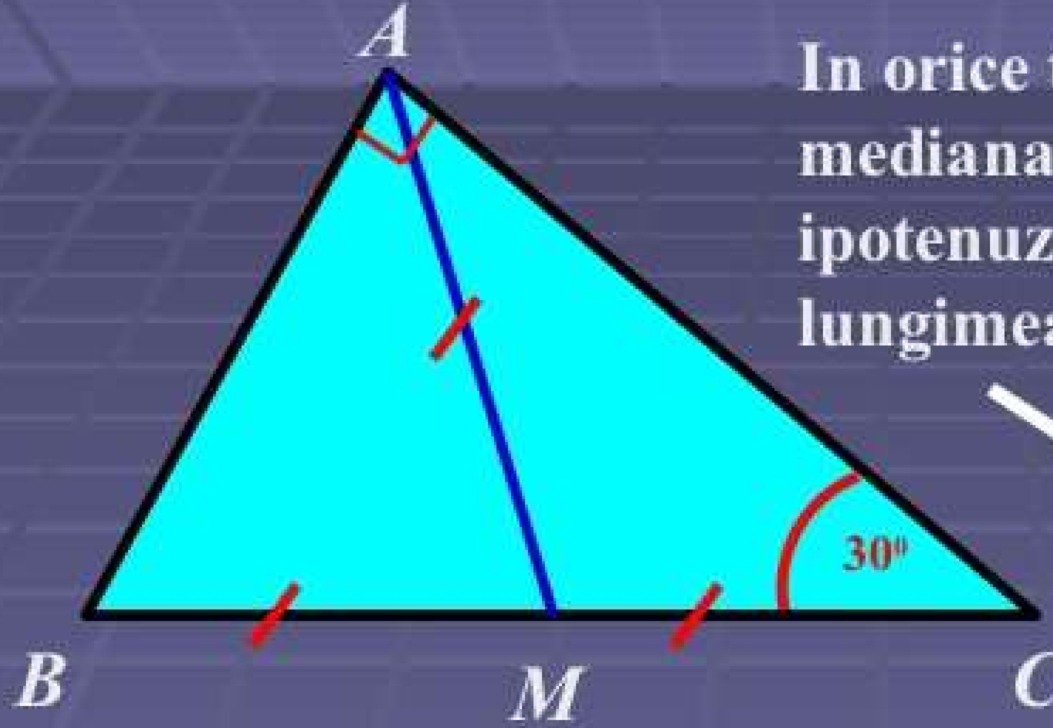


AM este bisectoare, înălțime, mediană și mediatoare.
BN este bisectoare, înălțime, mediană și mediatoare.
CP este bisectoare, înălțime, mediană și mediatoare.

Observație: Un triunghi isoscel care are un unghi cu măsura de 60^o este triunghi echilateral.

TRIUNGHIUL DREPTUNGHIC

PROPRIETATI



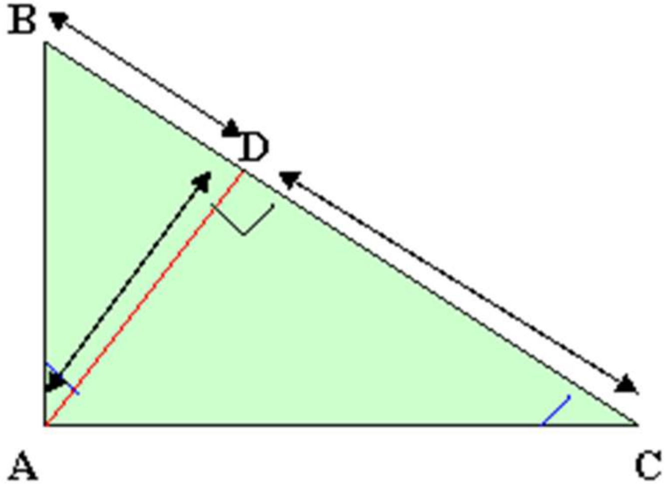
In orice triunghi dreptunghic, mediana corespunzatoare ipotenuzei este jumatate din lungimea acesteia.

$$AM = \frac{BC}{2}$$

Intr-un triunghi dreptunghic cu un unghi de 30^0, lungimea catetei ce se opune acestui unghi este jumatate din lungimea ipotenuzei.

$$AB = \frac{BC}{2}$$

TEOREMA INALTIMII IN TRIUNGHIUL DREPTUNGHIC



Se da Δ ABC dreptunghic in A. Se duce inaltimea AD.Teorema inaltimii spune ca: ***Inaltimeaeste media geometrica a proiectiilo rcatetelor pe ipotenuza.***

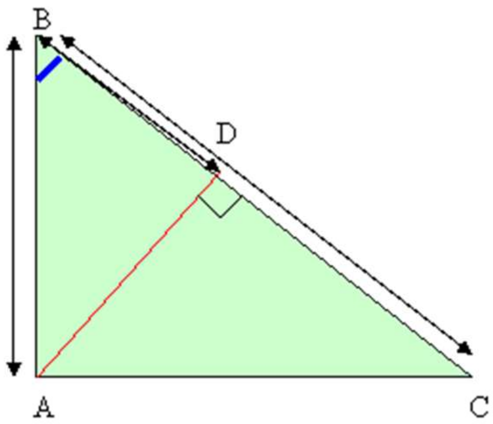
$AD^2 = BD \cdot DC$

Demonstratie:

$\Delta ABD \sim \Delta ADC$ ($\angle BAD \equiv \angle ACD$ fiind unghiuri cu laturi perpendiculare)

Rezulta ca $\frac{AD}{DC} = \frac{BD}{AD} \rightarrow AD^2 = BD \cdot DC$

TEOREMA CATETEI



Intr-un triunghi dreptunghic, cateta este media geometrica a lungimii proiectiei sale pe ipotenuza si ipotenuza.

$$AB^2 = BD \cdot BC$$

Demonstratie:

Δ ABD ~Δ ABC (B este comun)

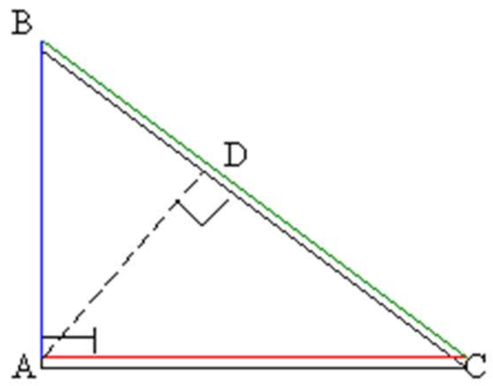
Deci $\rightarrow$AB =BD·BC

Pentru cateta AC$\rightarrow$ AC =DC·BC

TEOREMA LUI PITAGORA

Intr-un triunghi dreptunghic,patratul lungimii ipotenuzei este egal cu suma patratelor lungimilor catetelor.

$$\mathbf{BC^2 = AB^2 + AC^2}$$



In Δ ABC aplicam de doua ori teorema catetei:

$\mathbf{AC^2}$ $=DC \cdot BC$

$\mathbf{AB^2}$ $=BD \cdot BC$

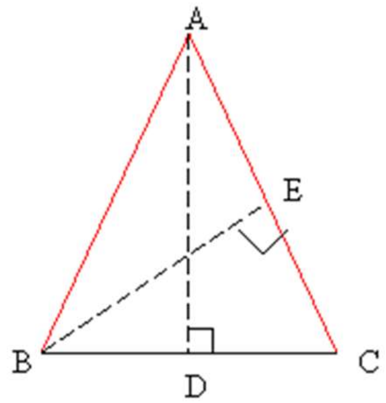
Adunam relatiile: $\mathbf{AC^2 + AB^2}$ $=DC \cdot BC+BD \cdot BC= =BC(DC+BD)=BC \cdot BC$

$\mathbf{AC^2 + AB^2 = BC^2}$

Teorema reciproca.

Daca intr-un triunghi suma patratelor a doua laturi este egala cu patratul laturii a treia, atunci triunghiul este dreptunghic.

Aplicatii.



1. *Sa se calculeze inaltimile intr-un triunghi isoscel ABC in care AB=AC=10 si BC=12.*

In Δ ABC ducemAD$\perp$BC si BE$\perp$AC

In Δ ACD aplicam T.Pitagora:$AD^2=AC^2-DC^2=100-36=64$

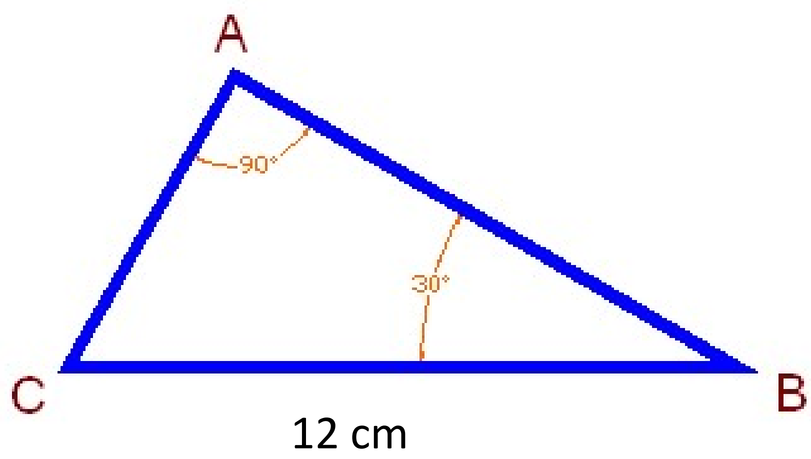
Rezulta ca AD=8.

Dar $AD\cdot BC=BE\cdot AC \Rightarrow BE=\dfrac{AD\cdot BC}{AC}=\dfrac{8\cdot 12}{10}=9{,}6$

Triunghi dreptunghic.

Teorema unghiului de 30^0

Într-un triunghi dreptunghic, cateta care se opune unghiului de 30^0 are lungimea egală cu jumătate din ipotenuză.



Formula de calcul

$$AC = \frac{BC}{2}$$

AC este cateta opusă unghiului de 30^0.

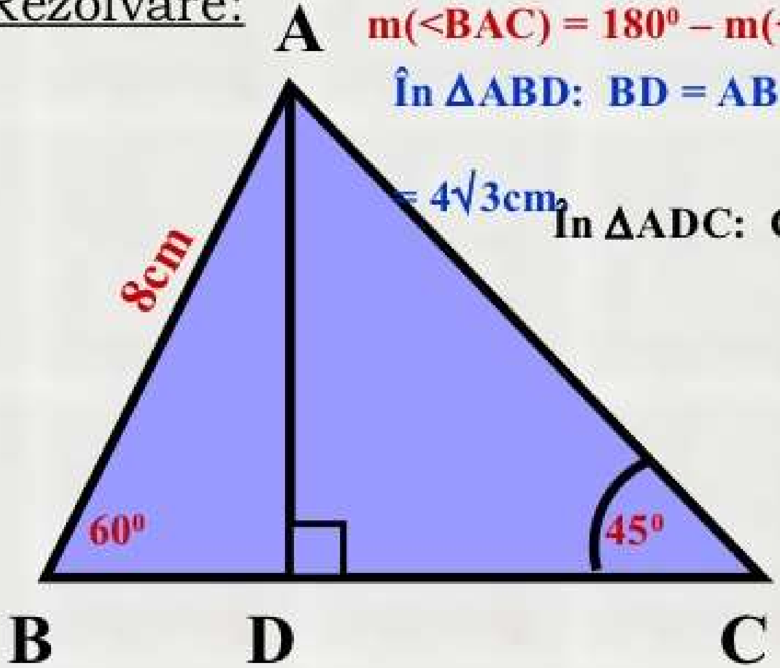
Într-un triunghi dreptunghic se cunoaşte unghiul $B=30^0$ şi lungimea ipotenuzei. Să se afle lungimea catetei opuse unghiului de 30^0.

$$AC = \frac{\quad}{2} =$$

Problema 6

Fie triunghiul ABC cu măsura unghiului B de 60^0, măsura unghiului A de 75^0 şi AB = 8cm. Se cere să se afle perimetrul şi aria triunghiului.

Rezolvare:



$m(\angle BAC) = 180^0 - m(\angle B) - m(\angle C) = 180^0 - 60^0 - 45^0 = 75^0$.

În ΔABD: $BD = AB \cdot \cos 60 = 8 \cdot 0{,}5 = 4$cm.

$AD = AB \cdot \sin 60 = 8 \cdot \sqrt{3}/2 = 4\sqrt{3}$cm.

În ΔADC: $CD = AD = 4\sqrt{3}$cm. (ΔADC=isoscel şi dreptunghic.)

$AC = CD \cdot \sin 45 = 4\sqrt{3} \cdot \sqrt{2}/2 = 2\sqrt{6}$cm.

$$P_{ABC} = AB + AC + BC = 8 + 2\sqrt{6} + 4\sqrt{3} + 4 = 12 + 4\sqrt{3} + 2\sqrt{6}\text{cm}.$$

$$A_{\Delta ABC} = \frac{BC \cdot AD}{2} = \frac{\left(4 + 4\sqrt{3}\right) \cdot 4\sqrt{3}}{2} = 8\left(3 + \sqrt{3}\right)cm^2.$$

1. Triunghiul isoscel ABC are perimetrul de 56cm. Raportul dintre AB si BC este de 2 /3 . Aflati laturile triunghiului.

2. Perimetrul unui triunghi care are toate unghiurile egale este de 18cm. Aflati fiecare latura.

3. Triunghiul ABC are semiperimetrul de 24cm. Latura AB = 8cm, iar $m(\angle B) = 2m(\angle C)$. Aflati celelalte 2 laturi.

4. Despre un triunghi ABC, stim ca are perimetrul de 52cm , 2AB = 3BC, 3BC = 4AC. Aflati fiecare latura.

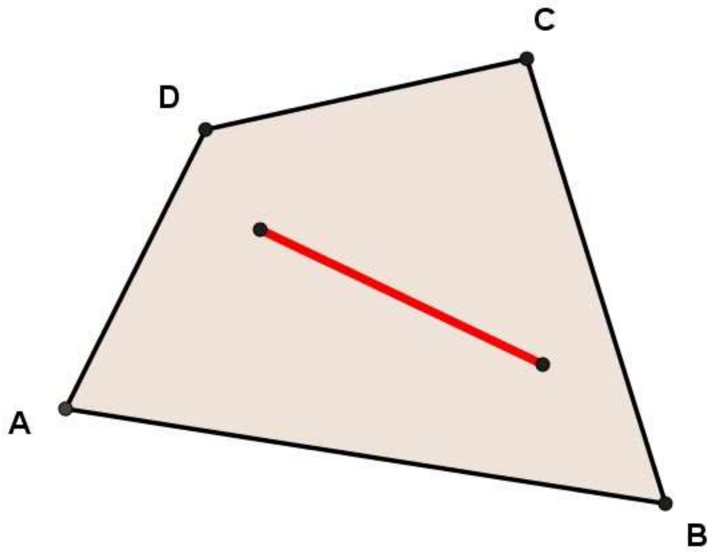
5. Despre un triunghi ABC, ¸stim ca are semiperimterul de 18cm , AB = 2AC, BC = 4AC − 20cm. Aflatti fiecare latura.

1. Dacă [AE] este înălțime în $\Delta ABC, E \in BC$ $și$ $m(< B) = 50°$, atunci $m(< BAE) =$…………
2. Dacă ipotenuza unuiΔ dreptunghic este de 10 cm, atunci mediana corespunzătoare ipotenuzei are lungimea de ……………………
3. Perimetrul unuiΔ isoscel cu laturile de 4 cm și 6 cm este egal cu ………………..
4. Fie ΔABC. Dacă$< B_1$ este unghiul exterior cu vârful în B al ΔABC și $m(< B_1) = 135°$, atunci $m(< B) =$ …………………

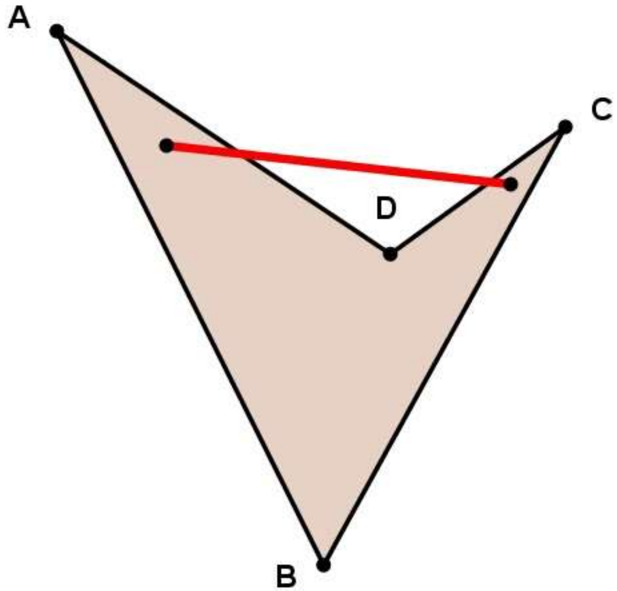
FISA DE LUCRU

Clasificare:

- **Convex** – dacă segmentul care unește <u>oricare</u> două puncte din interiorul patrulaterului se află în întregime în interiorul acestuia.
- **Concav** – dacă <u>există</u> un segment care unește două puncte din interiorul patrulaterului și care nu se află în întregime în interiorul acestuia.

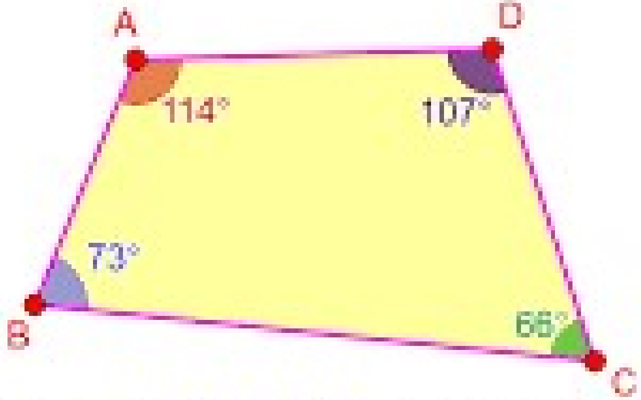


Patrulater convex



Patrulater concav

Suma unghiurilor unui patrulater

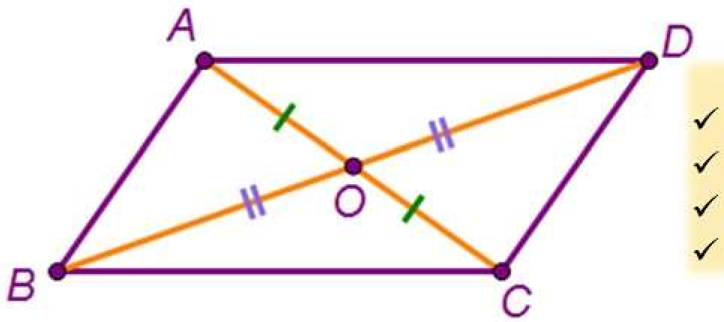


In orice patrulater convex, suma masurilor unghiurilor este 360°.

m(<A) + m(<B) + m(<C) + m(<D) = 360°

$114^\circ + 73^\circ + 66^\circ + 107^\circ = 360^\circ$

PARALELOGRAMUL



Paralelogramul este patrulaterul cu laturile opuse paralele:
$AB \parallel CD, AD \parallel BC.$

Proprietăți:

- ✓ Laturile opuse sunt congruente: $AB = CD, AD = BC.$
- ✓ Unghiurile opuse sunt congruente: $\sphericalangle A \equiv \sphericalangle C,\ \sphericalangle B \equiv \sphericalangle D.$
- ✓ Unghiurile alăturate sunt suplementare: $\sphericalangle A + \sphericalangle B = 180°,\ \sphericalangle B + \sphericalangle C = 180°.$
- ✓ Diagonalele se injumătățesc: $AO = OC, BO = OD.$

Problema 1. Fie ABCD un paralelogram cu $\sphericalangle A = 134°$. Aflați măsurile celorlalte unghiuri.

Rezolvare:

$\sphericalangle C = \sphericalangle A = 134°$ (unghiuri opuse)
$\sphericalangle A + \sphericalangle B = 180°$ (unghiuri alăturate) $\Longrightarrow$
$\Longrightarrow \sphericalangle B = 180° - \sphericalangle A = 180° - 134° = 46°$
$\sphericalangle D = \sphericalangle B = 46°$ (unghiuri opuse).

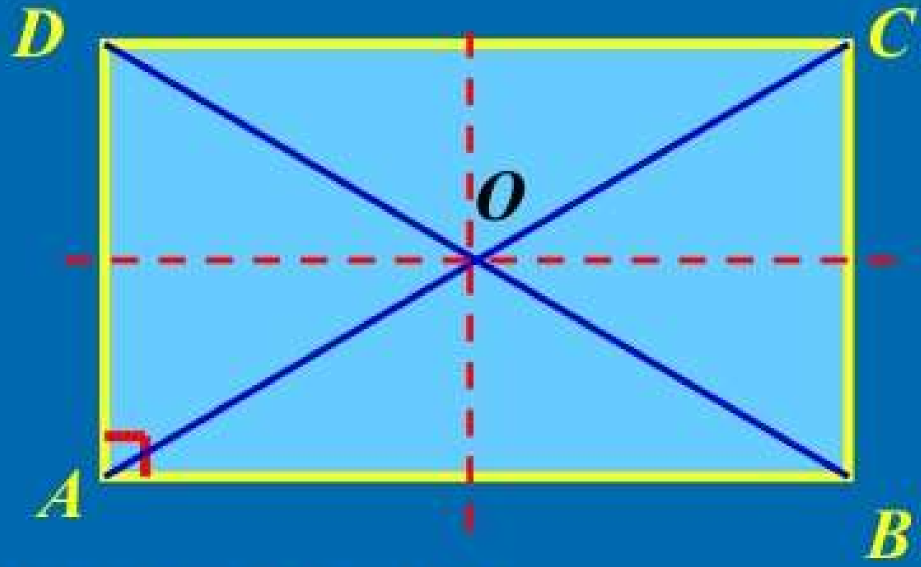
Problema 2. Fie ABCD un paralelogram. Dacă AB=6 cm și perimetrul paralelogramului este 48 cm, aflați lungimea laturii BC.

Rezolvare:

$$P_{ABCD} = 2 \cdot AB + 2 \cdot BC = 48\ cm$$
$$2 \cdot 6 + 2 \cdot BC = 48$$
$$12 + 2 \cdot BC = 48$$
$$2 \cdot BC = 48 - 12$$
$$2 \cdot BC = 36$$
$$BC = 36 : 2 = 18\ cm.$$

DREPTUNGHIUL

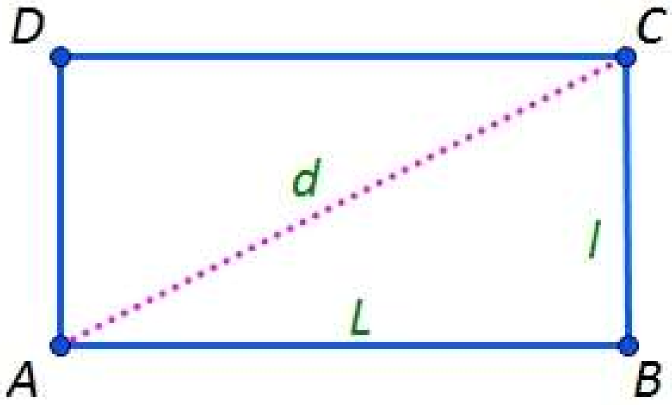
Dreptunghiul este paralelogramul cu un unghi drept (de fapt toate unghiurile sunt de 90^0).



PROPRIETATILE PARTICULARE DREPTUNGHIULUI:

1. **Dreptunghiul are toate unghiurile congruente si deci toate sunt de 90^0.**
2. **Dreptunghiul are diagonalele congruente.**
3. **Dreptunghiul are doua axe de simetrie (vezi pe figura animația).**

Dreptunghiul

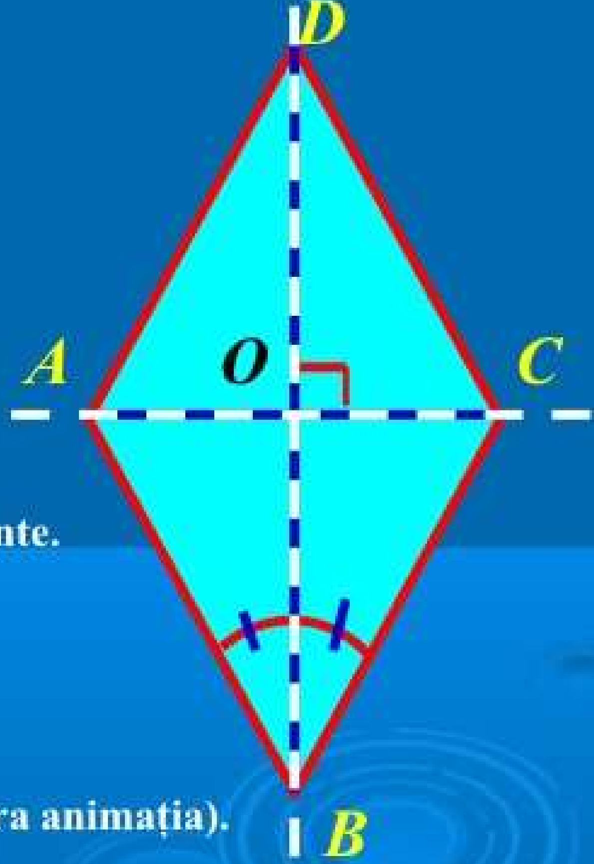


$$\mathcal{A} = L \cdot l = AB \cdot BC$$

$$\mathcal{P} = 2L + 2l = 2 \cdot AB + 2 \cdot BC$$

ROMBUL

Rombul este paralelogramul cu toate laturile congruente.



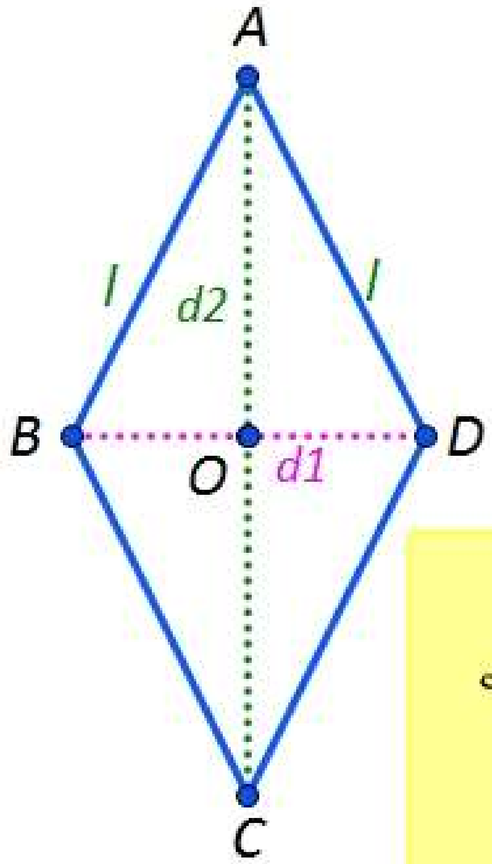
In afara de proprietatile generale ale unui paralelogram, rombul mai are in plus, urmatoarele proprietati:

Teorema. Toate laturile rombului sunt congruente.

Teorema. Intr-un romb diagonalele sunt perpendiculare intre ele si sunt bisectoarele unghiurilor lui.

Rombul are doua axe de simetrie (vezi pe figura animația).

Rombul



$$\mathcal{A} = \frac{d_1 \cdot d_2}{2} = \frac{BD \cdot AC}{2}$$

$$\mathcal{A} = l^2 \cdot \sin\sphericalangle A$$

$$\mathcal{P} = 4l = 4AB$$

Pe langa proprietatile paralelogramului, patratul mai are urmatoarele proprietati:

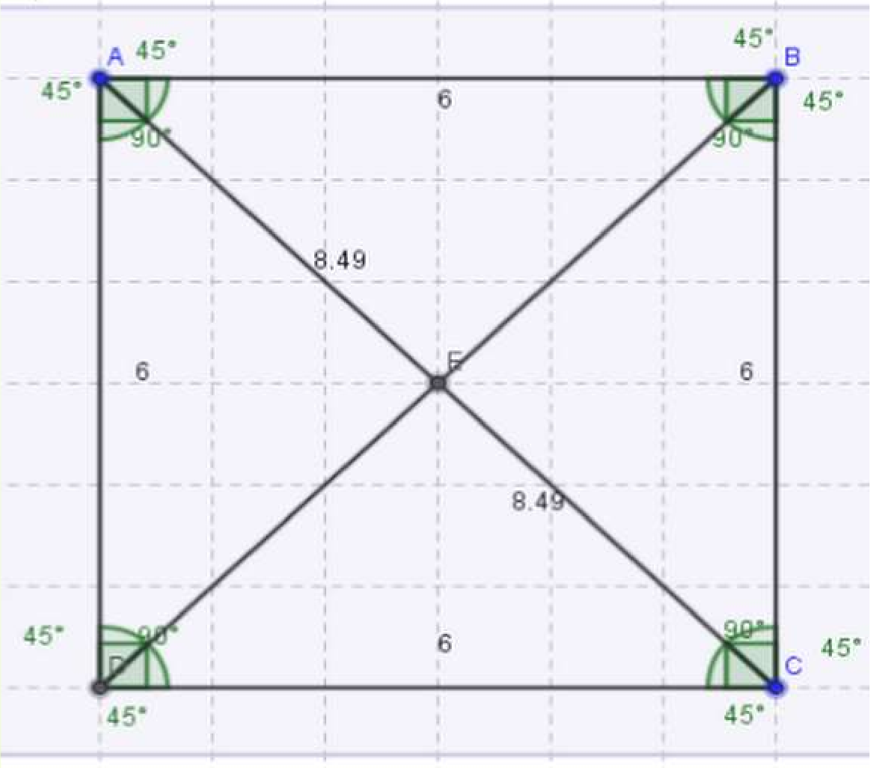
-Are toate laturiile congruente(romb)

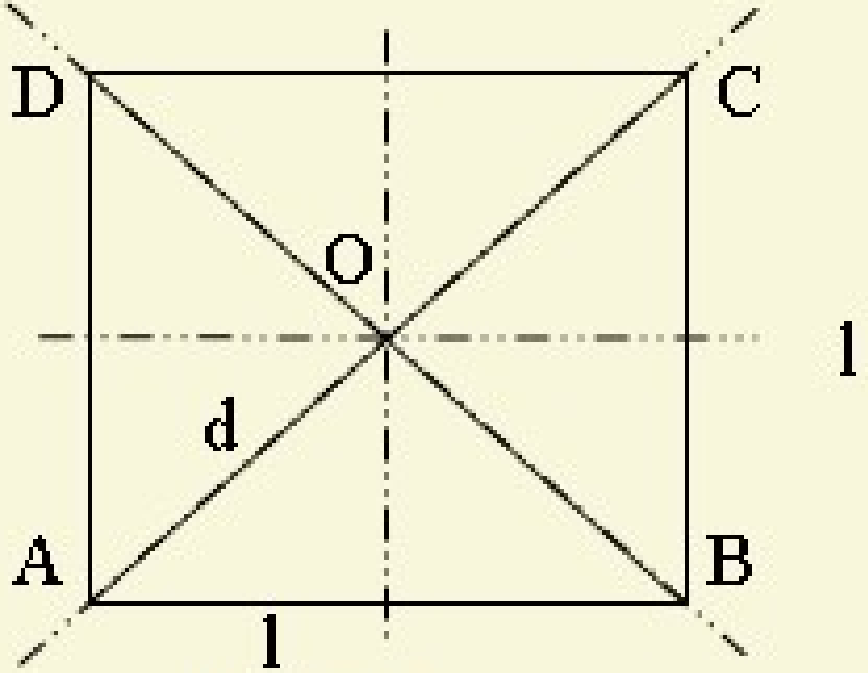
-Are toate unghiurile de 90 de grade (dreptunghi)

-Diagonalele sunt congruente (dreptunghi)

-Diagonalele sunt bisectoarele unghiurilor ce le uneste(romb)

-Diagonalele sunt perpendiculare





$$\mathcal{P} = 4 \cdot l \; ;$$

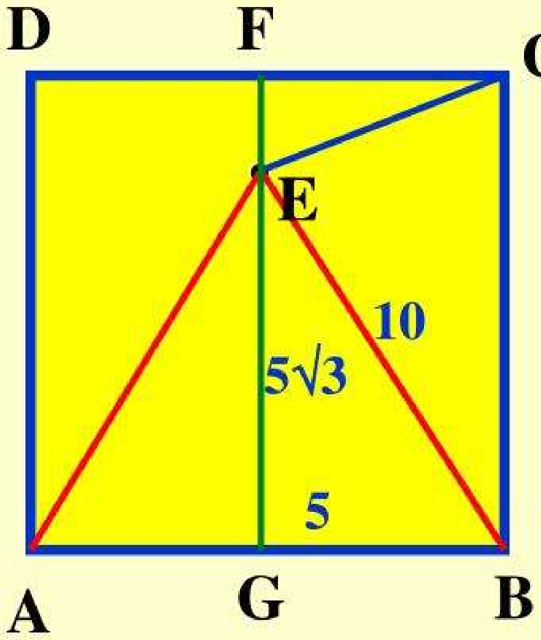
$$\mathcal{A} = l^{2} \; ;$$

$$\mathcal{A} = \frac{d^{2}}{2} \, .$$

PROBLEMA 2

Fie ABCD un patrat de latura AB = 10cm; punctul E se afla in interiorul patratului astfel incat ΔAEB sa fie echilateral. Aflati lungimea lui [EC].

Rezolvare: **Construim perpendiculara FG pe AB ce trece prin E.**



In ΔEGB avem: BE=10cm, BG=5cm.

$$GE^2 = BE^2 - BG^2 \Rightarrow GE^2 = 100\text{-}25=75$$

$$\Rightarrow GE = \sqrt{75} = 5\sqrt{3}cm.$$

FE = GF – GE = 10 - 5√3cm.

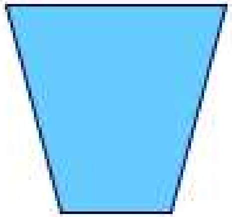
In ΔCEF: $CE^2 = FE^2 + FC^2$

$$CE^2 = \left(10 - 5\sqrt{3}\right)^2 + 5^2 = 200 - 100\sqrt{3}$$

$$CE = \sqrt{200 - 100\sqrt{3}} = 10\sqrt{2 - \sqrt{3}}cm.$$

Realizat de prof. TIT CUPRIAN

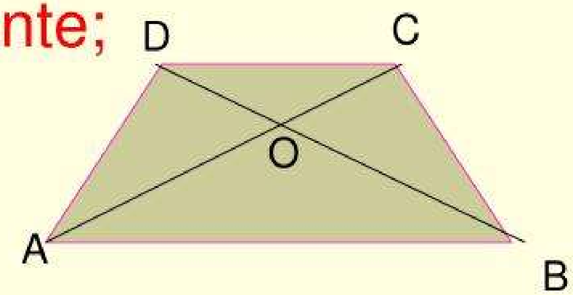
TRAPEZUL



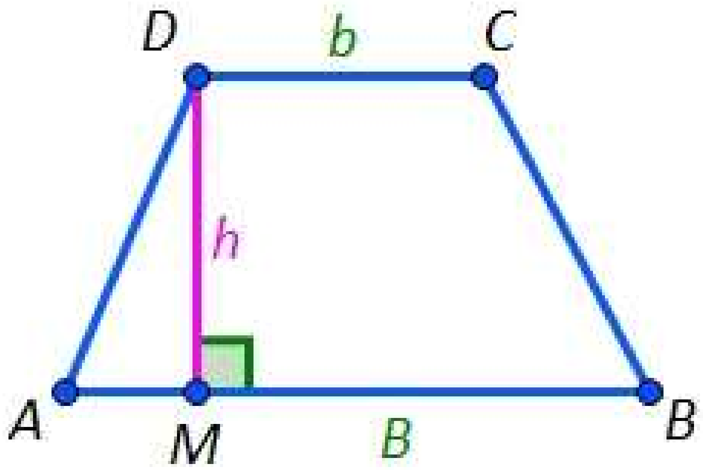
- Trapezul este patrulaterul convex cu două laturi paralele și două laturi neparalele.
- Trapezul cu laturile neparalele congruente se numește trapez isoscel și are diagonalele congruente.
- Trapezul cu un unghi drept se numește trapez dreptunghic.
- Trapezul cu diagonalele perpendiculare se numește trapez ortodiagonal.

TRAPEZUL ISOSCEL

- Este trapezul cu laturile neparalelele congruente;
- Proprietati: Un trapez este isoscel daca si numai daca:
- Unghiurile alaturate bazei sunt congruente;
- Diagonalele sunt congruente;



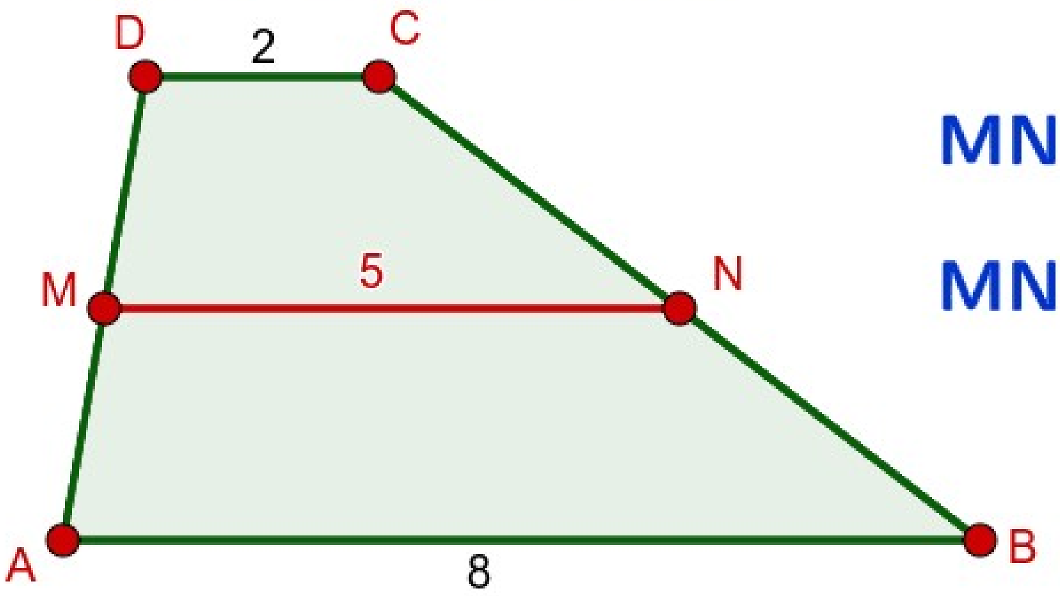
Trapezul



$$\mathcal{A} = \frac{(B+b)\cdot h}{2} = \frac{(AB+CD)\cdot DM}{2}$$

$$\mathcal{P} = AB + BC + CD + DA$$

Linia mijlocie in trapez



$$MN \parallel AB \parallel CD,$$

$$MN = \frac{AB + CD}{2}$$

MN - linie mijlocie a trapezului

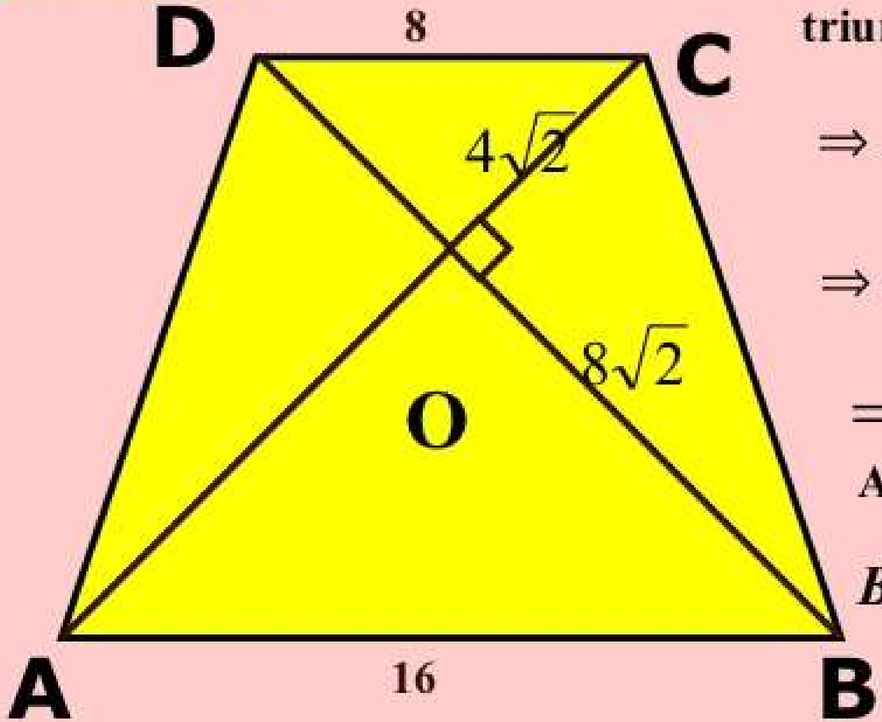
Uneşte laturile neparalelele ale unui trapez.

Este paralelă cu bazele şi este egală cu media lor aritmetică.

Problema 4

Fie ABCD un trapez isoscel cu diagonalele perpendiculare, bazele AB = 16cm și CD = 8cm. Să se calculeze perimetrul trapezului și lungimile diagonalelor.

Rezolvare:



Dacă trapezul este isoscel atunci și triunghiurile AOB și COD sunt isoscele.

$$\Rightarrow AO = \frac{AB}{\sqrt{2}} = \frac{16}{\sqrt{2}} = 8\sqrt{2}.$$

$$\Rightarrow OC = \frac{CD}{\sqrt{2}} = \frac{8}{\sqrt{2}} = 4\sqrt{2}.$$

$$\Rightarrow AC = AO + OC = 12\sqrt{2}.$$

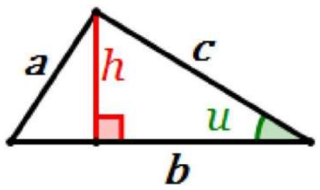
Aplicăm teorema lui Pitagora în ΔBOC

$$BC^2 = BO^2 + OC^2 = 128 + 32 = 160$$

$$\Rightarrow BC = \sqrt{160} = 4\sqrt{10}cm.$$

$$\Rightarrow P_{ABCD} = AB + CD + 2BC = 16 + 8 + 2 \cdot 4\sqrt{10} = 24 + 8\sqrt{10}cm.$$

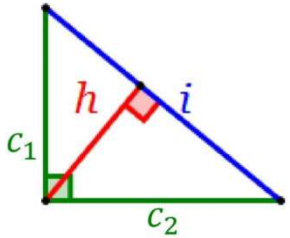
ARII ȘI PERIMETRE



Triunghi

$$A = \frac{b \cdot h}{2}$$

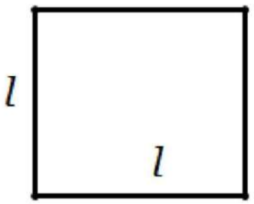
$$A = \frac{b \cdot c \cdot \sin u}{2}$$



Triunghi dreptunghic

$$A = \frac{i \cdot h}{2}$$

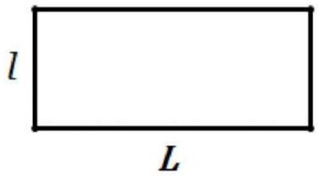
$$A = \frac{c_1 \cdot c_2}{2}$$



Pătrat

$$A = l^2$$

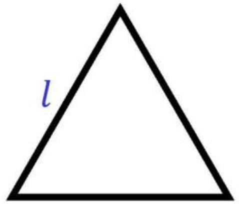
$$P = 4l$$



Dreptunghi

$$A = l \cdot L$$

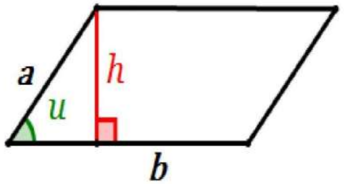
$$P = 2l + 2L$$



Triunghi echilateral

$$A = \frac{l^2\sqrt{3}}{4}$$

$$P = 3l$$

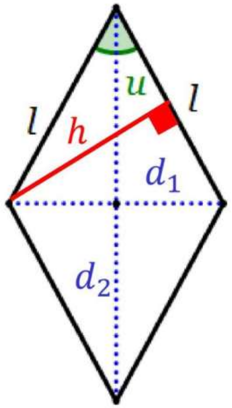


Paralelogram

$$A = b \cdot h$$

$$A = a \cdot b \cdot \sin u$$

$$P = 2a + 2b$$



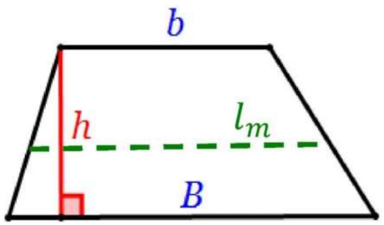
Romb

$$A = \frac{d_1 \cdot d_2}{2}$$

$$A = l \cdot h$$

$$A = l^2 \cdot \sin u$$

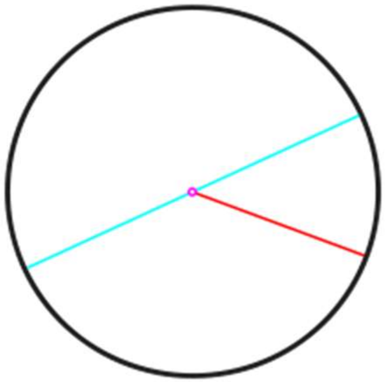
$$P = 4l$$



Trapez

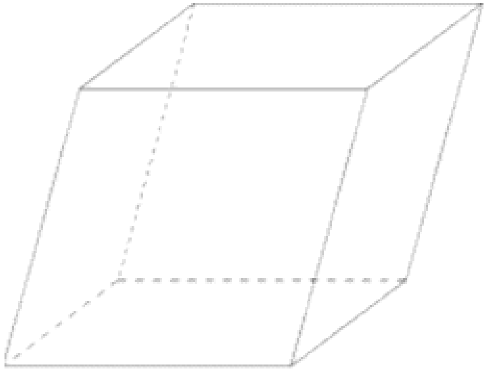
$$A = \frac{(B + b) \cdot h}{2}$$

$$A = l_m \cdot h$$

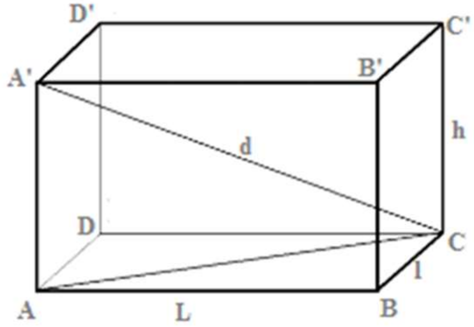


Definitii ale elementelor unui cerc :

- Un *disc* este regiunea planului delimitata de un cerc (aflata in interiorul acestuia).
- O *raza* este un segment de linie care conecteaza centrul unui cerc cu orice punct de pe acesta. Lungimea acestuia se noteaza de obicei cu "r" sau "R".
- Un *diametru* este o coarda care trece prin centrul cercului. Diametrul este compus din doua raze coliniare, lungimea sa fiind de 2R.
- O *sageata* este un segment de linie trasat perpendicular pe o coarda, situat intre mijlocul corzii si circumferinta cercului.
- Un *sector circular* este o parte a discului cuprins intre doua raze.
- Un *segment circular* este o regiune a discului delimitata de un arc de cerc si o coarda care au extremitati comune.
- Un *unghi central* este un unghi format de doua raze ale cercului.
- Segmentul de dreapta determinat de doua puncte ale unui cerc se numeste *coarda*.



Definitie-*Paralelipipedul dreptunghic este o prisma dreapta cu baza dreptunghi.* Fiind dat un **paralelipiped dreptunghic ABCDA'B'C'D'** definim dimensiunile ***L=LUNGIMEA***, ***l=LATIMEA*** si ***h=INALTIMEA(sau adancimea dupa caz)***.



L=AB=A'B'=CD=C'D'
l=AD=A'D'=BC=B'C'
h=AA'=BB'=CC'=DD'
d=DIAGONALA paralelipipedului=A'C.

FORMULE: paralelipipedul dreptunghic fiind o prisma, formulele raman aceleasi, insa putem sa le particularizam astfel:

$$Al = Pb \cdot h = (2L + 2l) \cdot h$$

$$At = 2Ab + Al = 2Ll + 2Lh + 2lh$$

$$V = Ab \cdot h = L \cdot l \cdot h$$

$$d = \sqrt{L^2 + l^2 + h^2}$$

$$Pb = 2L + 2l \quad Ab = L \cdot l$$

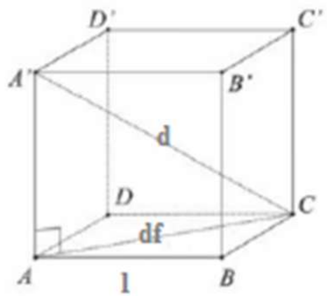
Cubul

Definitie*-Cubul este un paralelipiped dreptunghic cu toate laturile egale*. Daca notam cu ***l*** latura cubului, obtinem urmatoarele **FORMULE:**

$Al = 4 \cdot l^2$	$d_{\text{pătrat}} = l\sqrt{2}$	
$At = 6 \cdot l^2$	$d_{\text{cub}} = l\sqrt{3}$	
$V = l^3$	$Pb = 4l$	$Ab = l^2$

DESEN:

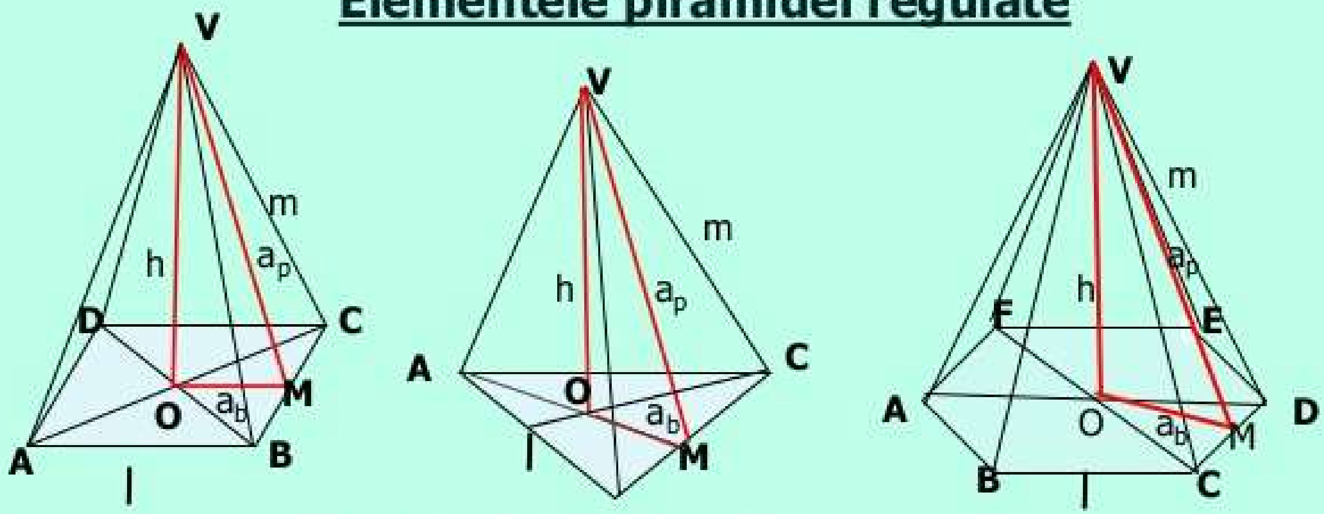
CUBUL



$A_l = 4l^2$; $A_t = 6l^2$; $V = l^3$

$d_f = l\sqrt{2}$; $d = l\sqrt{3}$

Elementele piramidei regulate



piramidă patrulateră regulată
(baza este pătrat)

piramidă triunghiulară regulată
(baza este triunghi echilateral)

piramidă hexagonală regulată
(baza este hexagon regulat)

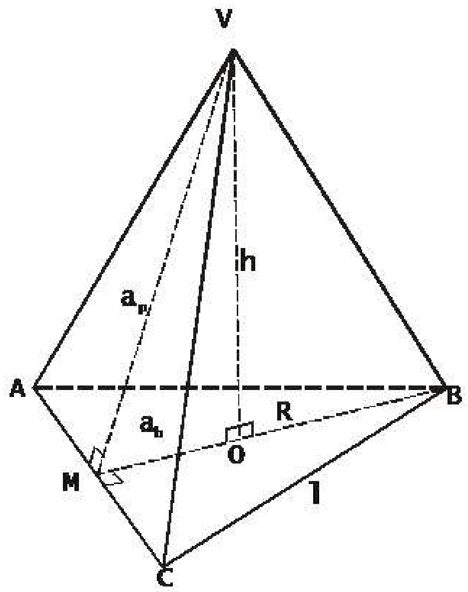
Notaţii folosite:

l - Latura bazei
h - înălţimea piramidei
d- diagonala bazei (la pătrat şi hexagon)

m - muchia bazei
a_p - apotema piramidei
a_b - apotema bazei

Obs.: în piramidele regulate feţele laterale sunt triunghiuri isoscele congruente, toate muchiile laterale sunt congruente
iar apotema piramidei ap este înălţime a feţei laterale (distanţa de la vârful piramidei la o latură a bazei)

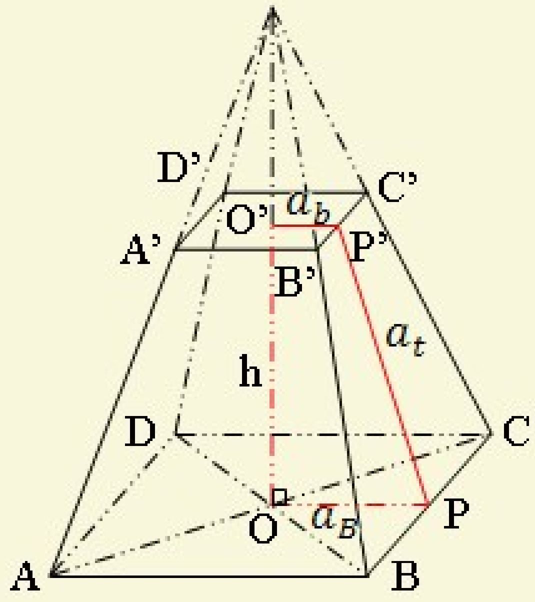
Tetraedrul regulat

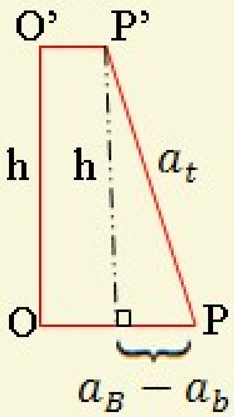


$$A_l = 3\frac{l^2\sqrt{3}}{4}$$

$$A_t = l^2\sqrt{3}$$

$$V = \frac{1}{3}\cdot\frac{l^2\sqrt{3}}{4}\cdot h$$





$$\mathcal{A}_l = \frac{(\mathcal{P}_B + \mathcal{P}_b) \cdot a_t}{2} \ ;$$

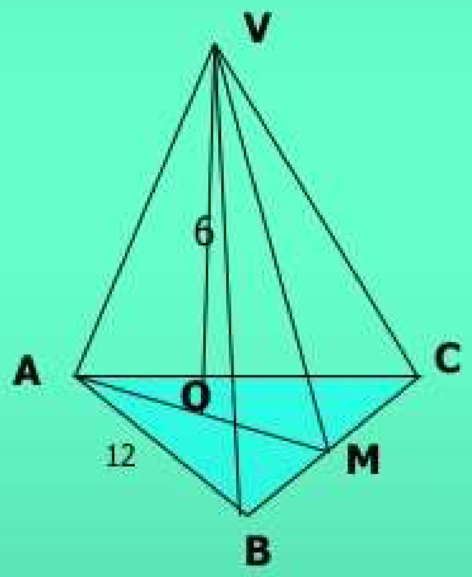
$$\mathcal{A}_t = \mathcal{A}_l + \mathcal{A}_B + \mathcal{A}_b \ ;$$

$$\mathcal{V} = \frac{h\left(\mathcal{A}_B + \mathcal{A}_b + \sqrt{\mathcal{A}_B \cdot \mathcal{A}_b}\right)}{3} \ ;$$

$$a_t{}^2 = h^2 + (a_B - a_b)^2 \ .$$

Aplicaţii

1. Într-o piramidă triunghiulară regulată înălţimea are 6 cm şi latura bazei are 12 cm. Calculaţi aria laterală, aria totală şi volumul piramidei



$$A_l = \frac{P_b \cdot a_p}{2}$$ $P_b=12+12+12=36$ cm

ΔVOM=dreptunghic $\Rightarrow VM^2 = VO^2 + OM^2$

$OM = a_b = \frac{l\sqrt{3}}{6} = 2\sqrt{3}$ cm

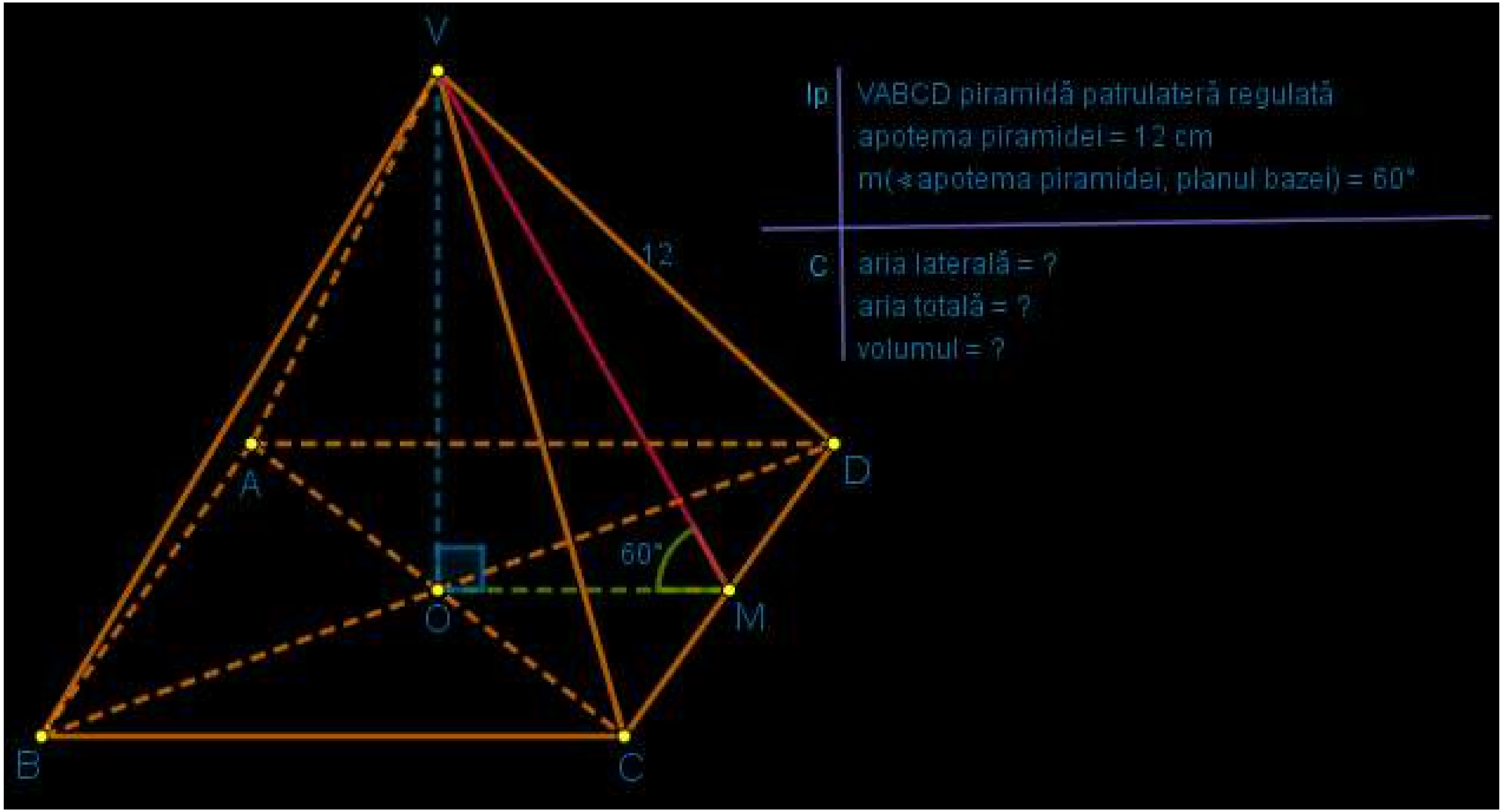
$VM = 4\sqrt{3}$ cm $\Rightarrow A_l = 72\sqrt{3}$ cm²

$A_b = \frac{l^2\sqrt{3}}{4} = 36\sqrt{3}$ cm² $\Rightarrow$

$A_t = 72\sqrt{3} + 36\sqrt{3} = 108\sqrt{3}$ cm²

$$V = \frac{A_b \cdot h}{3} = \frac{36\sqrt{3} \cdot 6}{3} = 72\sqrt{3} cm^3$$

APLICATIE



V
Ip
VABCD piramidă patrulateră regulată
apotema piramidei = 12 cm
m(∢apotema piramidei, planul bazei) = 60°
C
aria laterală = ?
aria totală = ?
volumul = ?
12
A
D
60°
O
M
B
C

Cilindrul

AA' - generatoare (notată. g)

OO' - inaltimea cilindrului (notată. h; in cazul nostru, la cilidrul circular drept, avem g=h)

AO - raza bazei (notată. r)

Aria bazei = aria cercului de la baza, adica:

$$A_b = \pi \cdot r^2$$

Aria laterala:

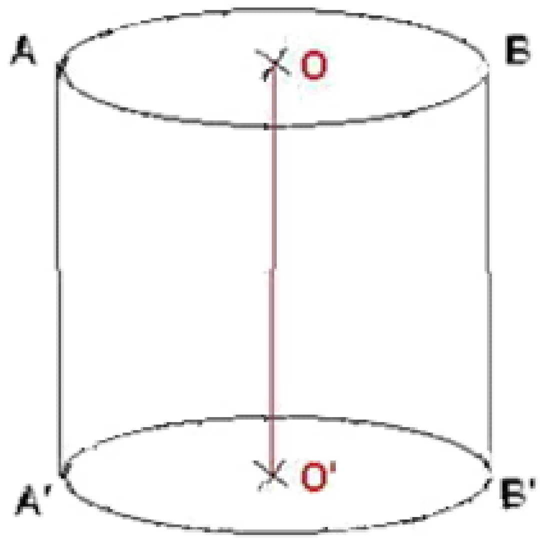
$$A_l = 2\pi \cdot rg$$

Aria totală:

$$A_t = 2\pi \cdot r(r+g)$$

Volumul cilindrului:

$$V = \pi \cdot r^2 g$$



Conul

VA - generatoare (notată. g)

VO - inaltimea conului (notată. h)

AO - raza bazei (notată. r)

Aria bazei = aria cercului de la bază, adică:

$A_b = \pi \cdot r^2$

Aria laterală:

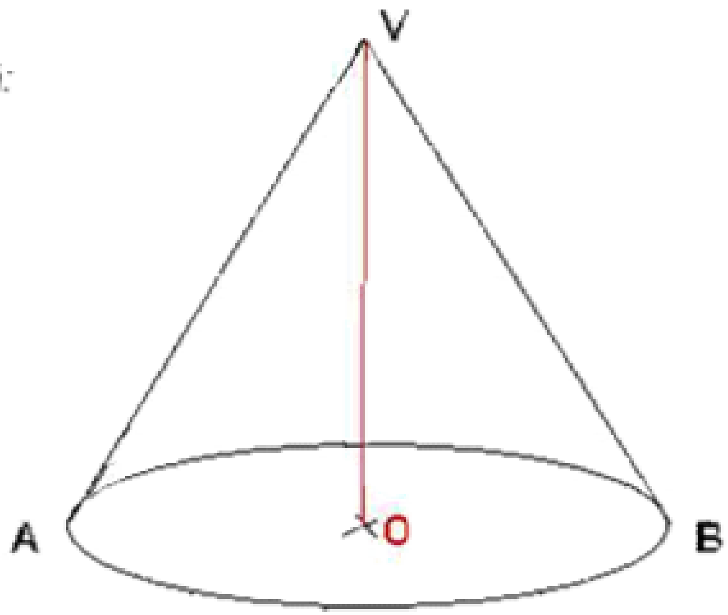
$A_l = \pi \cdot rg$

Aria totală:

$A_t = \pi \cdot r(r + g)$

Volumul conului:

$$V = \frac{\pi \cdot r^2 h}{3}$$



Sfera

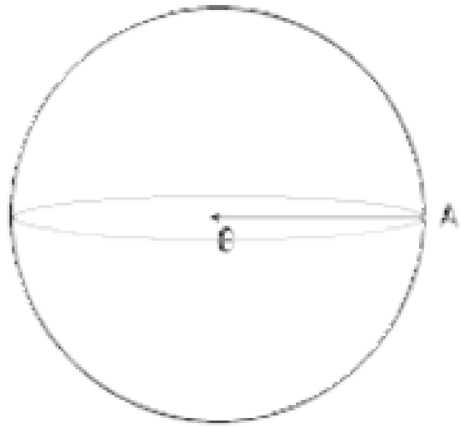
OA - rază (notată. r)

Aria sferei:

$$A_{sferei} = 4\pi \cdot r^2$$

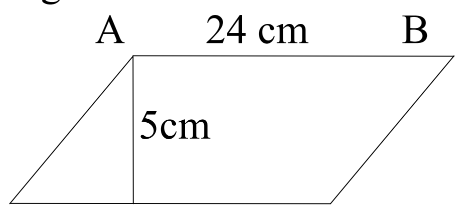
Volumul sferei:

$$V_{sferei} = \frac{4\pi \cdot r^3}{3}$$



APLICATII

1. Un triunghi are o latură egală cu 10 cm, iar înălţimea corespunzătoare acestei laturi egală cu 6 cm. Aria triunghiului este egală cu ... cm^2.
2. Un triunghi dreptunghic are catetele de 7 cm şi respectiv, 8 cm. Aria triunghiului este ……cm^2.
3. Un dreptunghi are lungimea egală cu 10 cm, iar lăţimea egală cu 6 cm. Aria dreptunghiului este egală cu ... cm^2.
4. Un pătrat are latura egală cu 8 cm. Aria pătratului este egală cu ……cm^2.
5. Un romb are diagonalele de 12 şi 16 cm. Aria rombului este egală cu ……cm^2.
6. Aria paralelogramului din figură este egală cu ……cm^2.



1. Un pătrat are lungimea diagonalei egală cu 6 cm. Aria pătratului este egală cu … cm^2.
2. Un trapez ABCD (AB||CD) are AB=24 cm, CD=12 cm şi înălţimea de lungime 5 cm. Aria trapezului este egală cu……cm^2.
3. Un romb are lungimea laturii egală cu 10 cm, iar înălţimea corespunzătoare egală cu 6 cm. Aria rombului este egală cu ... cm^2.
4. Un trapez are linia mijlocie egală cu 10 cm și înălțimea egală cu 6 cm. Aria trapezului este egală cu ... cm^2.

11. In triunghiul ABC avem $m\left(\measuredangle A\right)=37^o$ si $m\left(\measuredangle B\right)=81^o$. Masura unghiului exterior $\measuredangle C$ este .... .

a) 62^o **b)** 143^o **c)** 99^o **d)** 118^o

12. In ΔABC construim inaltimea $AD, D\in\left(BC\right)$. Stiind ca $BC=8$ cm si $A_{\Delta ABC}=64$ cm^2 aflati inaltimea AD

SUBIECTUL II.

1. Trapezul dreptunghic ABCD are AB||CD, $m(\hat{A})=m(\hat{D})=90°$, are AB=8 cm și CD=20 cm, iar aria triunghiului BEC este egală cu 54 cm^2, unde BE⊥DC, E∈(DC).

a) Calculați BE;

b) Calculați aria trapezului ABCD;

c) Calculați aria triunghiului BAC.

2. Rombul ABCD are diagonalele proporționale cu numerele 3 și 4 și aria egală cu 24 cm^2.

a) Calculați lungimile diagonalelor rombului ABCD;

b) Dacă AB=5 cm, calculați DE, unde DE⊥AB, E∈AB.

3. Dreptunghiul ABCD are AB=9 cm și BC=4 cm. Pe laturile AB și CD se consideră Punctele M și N astefl încât $AM=\frac{1}{3}AB$ și $DN=\frac{2}{3}CD$.

a) Calculați aria dreptunghiului ABCD;

b) Calculați aria trapezului AMND;

c) Dacă BN=5 cm, calculați distanța de la M la BN.

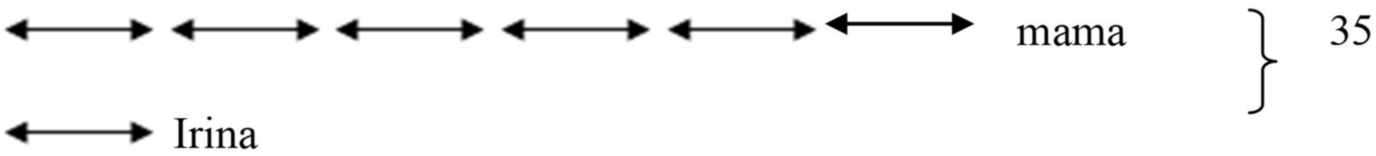
Metoda figurativa - Metoda grafica - Metoda segmentelor

- Metoda segmentelor este de fapt tot metoda figurativa, dar se refera doar la problemele in care reprezentarea datelor problemelor se face cu ajutorul segmentelor

Problema: Mama si Irina au impreuna 35 ani. Stiind ca mama are de 6 ori varsta Irinei, sa seafle cati ani au fiecare.

Var. 1 - metoda grafica

Figurarea datelor - pentru varsta Irinei vom desena un segment, iar pentru varsta mamei vom desena 6 segmente unite astfel:



Dupa cum vedem in total sunt 6 segmente (mama) + 1 (Irina) = 7 segmente (sau parti)
Pentru a afla o parte calculam 35 : 7 = 5 , pentru ca o parte este chiar varsta Irinei, atunci
Irina = 5 ani,
Varsta mamei o putem calcula in doua moduri:

fie 35-5=30 ani
fie 6 parti x 5 = 30 ani

Var. 2 – algebrica

Notam cu x varsta Irinei,
$x + 6x = 35$
$7x = 35$
$x = 35:7$
$x=5$ ani (Irina),35-5=30 (mama)

Metoda falsei ipoteze

- Problemele care se pot rezolva prin aceasta metoda sunt de doua tipuri.Cele de tipul unu necesita o singura ipoteza, iar cele tipul al doilea, doua sau mai multe ipoteze succesive.Metoda se numeste a falsei ipoteze, deoarece se considera ca ipoteza nu corespunde cu adevarul.Pentru exemplificare vom rezolva urmatoarea problema:
-
- Intr-un bloc sunt apartamente cu doua camere si cu trei camere, in total 20 deapartamente si 45 de camere. Cate apartamente au doua camere si cate autrei camere?

- **Rezolvarea I.**
- Presupunem ca in bloc sunt numai apartamente cu douacamere si atunci vor fi
- 20 x 2 camere = 40 camere.
- Diferenta de camere,45-40= 5 camere apare din faptul ca sunt si apartamente cu trei camere. Cele 5 camere le vom imparti, adaugand cate una, 5:1= 5, la 5 apartamente, pentru ca unele au 3camere. Inseamna ca sunt 5 apartamente cu trei camere, iar cu doua camerevor fi
- 20-5=15 apartamente.

- **Rezolvarea II.**
- Presupunem ca in bloc sunt numai apartamente cu treicamere si atunci vor fi
- 20x 3 camere= 60 camere.
- Diferenta de camere,60-45= 15 camereapare din faptul ca sunt si apartamente cu doua camere.
- Vom lua cate o camera de la 15:1=15 apartamente.
- Vor fi 15 apartamente cu doua camere, iar cu trei camere vor fi 20-15= 5 apartamente.

Aplicatie

- Intr-un bloc sunt apartamente cu 4 camere si cu 2 camere, in total 24apartamente si 68 de camere.Cate apartamente sunt de fiecare tip?

Metoda reducerii la unitate

- Intr-o problem care se rezolv cu metoda reducerii la unitate se dau dou marimi. La prima dintre marimi se cunosc dou valori, la cealalt numai o valoare, cea de-a doua valoare a ei urmand a fi aflat. Pentru aflarea acesteia se calculeaz mai intai „valoarea“ unei unitatii din prima marime.

1. 7 stilouri cost 91 de lei. Aflati cati lei cost 12 stilouri de acelai fel.

- **Rezolvare**
- Pentru a afla pretul unei unitati (stilou) efectum: 91 : 7 13 lei cost un stilou.
- Pentru a afla costul a 12 unitati (stilouri) efectum: 13 lei x 12 156 lei.

- 2. Un tren accelerat parcurge 320 km in 4 ore. Daca pana la destinatie mai circul inca 5 ore cu aceeai vitez, ce distanta a parcurs in total?

- **Rezolvare**
- In 4 ore   parcurge 320 km
- In 1 ora parcurge 320 km : 4 ore =80 km/ora
- In 5 ore parcurge 80 km/ora x 5 ore =400 km
- In total a parcurs: 320 km+ 400 km =720 km

Regula de trei simpla

- Problema

24 m de panza au costat 180 de lei. Cat costa 56 m de panza de acelasi fel?

Lungime .... Cost

24 m .... 180 lei

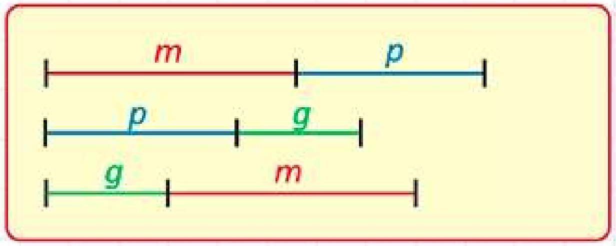
56 m .... x lei

$x = 56 \bullet 180/24 = 420$ lei.

1 2

- Într-un coș de fructe se găsesc mere, pere și gutui. Mere și pere la un loc sunt 30; pere și gutui la un loc sunt 18; gutui și mere în total 24. Câte fructe sunt de fiecare fel în coș?

- Vom reprezenta cele trei mărimi care intervin în problemă prin trei segmente.



- Precizați suma lungimilor celor 6 segmente: ___
- Câte fructe sunt în coș? ___
- Câte mere sunt în coș? ___
- Câte pere sunt în coș? ___
- Câte gutui sunt în coș? ___

MODEL SUBIECT TITULARIZARE INV 2021

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

A. Matematică (15 puncte)

1. Într-un parc dendrologic sunt 1019 arbori din patru specii: brazi, castani, stejari şi tei. Castani sunt cu 55 mai mulţi decât stejari. Stejari sunt cu 75 mai puţini decât tei şi cu 95 mai mulţi decât brazi. Calculaţi câţi arbori din fiecare specie sunt în acest parc. Rezolvaţi problema, utilizând metoda grafică (figurativă). **6 puncte**

2. Ştiind că $A = x - y$, $B = -x + y + 1$ şi $C = -x + y - 1$, calculaţi $A - (B + C)$. **1 punct**

3. Pe latura AB a triunghiului ABC dreptunghic în A, cu $AC = 8$ cm şi $BC = 16$ cm, se consideră punctul D astfel încât suma măsurilor unghiurilor ADC şi ABC să fie 90°. Pe latura BC se consideră punctul E astfel încât $DE \perp BC$.

a) Determinaţi aria triunghiului ABC. **2 puncte**

b) Arătaţi că unghiul CDE are măsura de 60°. **3 puncte**

4. Un bazin în formă de paralelipiped dreptunghic are volumul de 2500000 de litri. Lungimea bazinului este de 50 m, iar adâncimea lui este de 2 m. Calculaţi câţi metri are lăţimea bazinului. **3 puncte**

B. Elemente de pedagogie şcolară (15 puncte)

SUB INV DEF 2020

B. MATEMATICĂ (30 de puncte)

1. În anul şcolar 2019-2020, au frecventat cursurile şcolare, în România, 2 826 455 de elevi, cuprinşi în unităţi de învăţământ cu efective de 449 de elevi, în medie.
La un concurs de matematică, fiecare unitate de învăţământ a fost reprezentată de câte un echipaj format din cinci elevi din cinci categorii de vârstă, trei dintre acestea fiind din învăţământul primar.

a) Aproximaţi, la zeci de mii, numărul 2 826 455. **2 puncte**

b) Scrieţi, sub formă de fracţie zecimală, câtul împărţirii numărului 449 la numărul 27. **2 puncte**

c) Aflaţi, utilizând metoda de 3 simplă, câţi elevi din învăţământul primar au participat la acest concurs. **6 puncte**

2. Pentru fiecare cerinţă de mai jos, scrieţi rezolvările complete.

a) Ştiind că $A = x + y - 2, B = x - y + 2$ şi $C = x + y + 2$, unde $x, y \in Q$, calculaţi $A + 2(B - C)$. **3 puncte**

b) Efectuaţi calculele, prin transformarea cifrelor romane în cifre arabe, iar rezultatul exprimându-l în cifre romane: (MMDCCCXVII – MCMIX) : IV. **4 puncte**

c) Un monument de formă cubică cu latura de 160 cm este vopsit pe toată suprafaţa vizibilă. Aflaţi câţi metri pătraţi are suprafaţa vopsită a monumentului. **3 puncte**

3. Se dă dreptunghiul $ABCD$, cu perimetrul de $210mm$ şi $l = \frac{2L}{5}$, unde l este lăţimea şi L este lungimea.

Pe laturile AB şi, respectiv, CD se iau punctele $E \in AB$ şi $F \in CD$, aflate la $\frac{2}{5}$ de punctul A şi, respectiv, de punctul C.

a) Calculaţi lăţimea dreptunghiului dat, desenând totodată o sferă care are raza egală cu lăţimea calculată. **2 puncte**

b) Arătaţi că $A_{DEBC} = 4A_{ADE}$ (A este aria). **3 puncte**

c) Demonstraţi că patrulaterul $DEBF$ este paralelogram. **5 puncte**

B. *MATEMATICĂ (30 de puncte)*

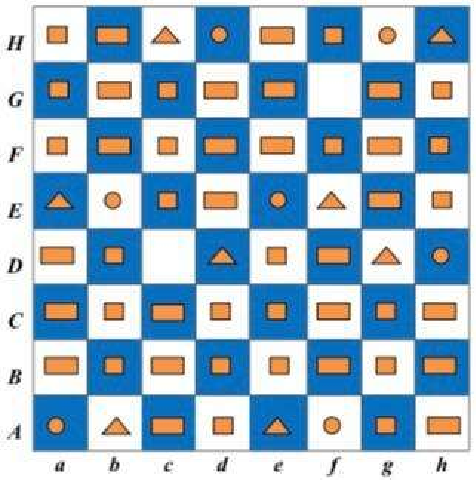
1. În finala Concursului Eurovision din anul 2018, trei țări participante au obținut, în total, 1058 de puncte. Țara câștigătoare, Israel, a obținut un punctaj egal cu suma punctajelor obținute de Cipru și Ungaria, iar Cipru a obținut cu 343 de puncte mai mult decât Ungaria.

a) Rotunjiți, prin adaos până la mii, numărul 1058. **2 puncte**

b) Convertiți numărul 343 din baza 10 în baza 2. **2 puncte**

c) Utilizând metoda grafică (figurativă), aflați ce punctaj a obținut, în finala concursului, fiecare dintre cele trei țări participante. **6 puncte**

2. Un covor artizanal este țesut din pătrate cu figuri geometrice cusute pe ele într-o ordine strictă, fiecare pătrat având latura de 9 cm.



a) Scrieți în care dintre pătratele din care este țesut covorul **nu** au fost cusute figuri geometrice.

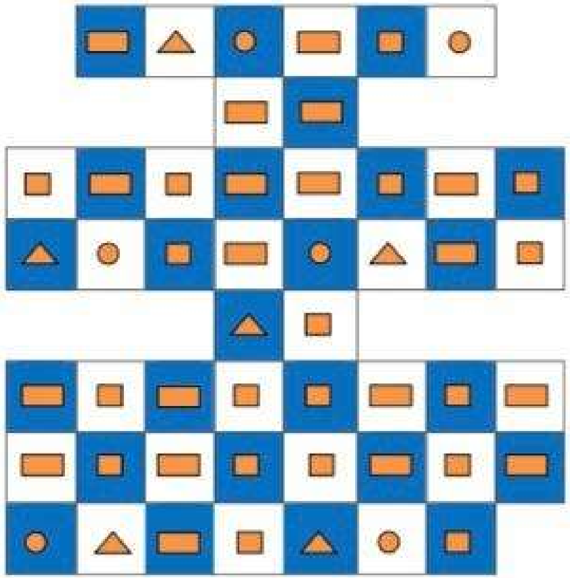
Notă: Identificarea pătratelor se face menționând litera de pe verticală, apoi litera de pe orizontală (de exemplu, Bc). **2 puncte**

b) Numiți care sunt figurile geometrice de pe cele două diagonale ale covorului, luate împreună, aflate în numărul cel mai mic. **2 puncte**

c) Determinați elementele intersecției mulțimilor compuse din figurile geometrice din rândurile notate cu A și B. **2 puncte**

DEF INV 2019

d) Covorul a fost decupat, îndepărtându-se câteva pătrate, conform imaginii de mai jos:



Calculați aria covorului, după decupare. **4 puncte**

3. În triunghiul ABC dreptunghic în A, cu $AB = 12\,\text{cm}$, lungimea laturii AC este egală cu dublul lungimii laturii AB. Punctul D este mijlocul laturii AC, punctul E este piciorul perpendicularei din punctul D pe latura BC, iar punctul F este piciorul perpendicularei din punctul E pe segmentul BD.

a) Calculați aria triunghiului ABC. **2 puncte**

b) Arătați că diferența dintre perimetrul triunghiului BCD și perimetrul triunghiului ABD este egală cu $12\left(\sqrt{5}-1\right)\text{cm}$. **4 puncte**

c) Demonstrați că $\sphericalangle DEF \equiv \sphericalangle CBD$. **4 puncte**

DEF INV 2019

DEF 2018

B. MATEMATICĂ (30 de puncte)

1. Se dă numărul 147.

a) Aproximați acest număr la ordinul sutelor. **2 puncte**

b) Determinați toate numerele $\overline{ab}$ și $\overline{ac}$, cu a, b și c cifre distincte, care verifică relația: $\overline{ab}+\overline{ac}=147$. **4 puncte**

c) Suma dintre un număr natural x, jumătatea lui și sfertul lui este egală cu 147. Calculați numărul x. **4 puncte**

2. Pentru realizarea unor obiecte artizanale, la o șezătoare s-au utilizat mărgele din patru cutii, fiecare cu același număr de mărgele. Din prima cutie s-au consumat $\frac{1}{3}$, din a doua $\frac{7}{24}$, din a treia $\frac{7}{12}$, iar din a patra cutie $\frac{7}{8}$ din numărul de mărgele. La sfârșitul șezătorii, mărgelele rămase au fost așezate completând, pe rând, fiecare cutie la numărul inițial de mărgele.

a) Scrieți numărul care **nu** este nici cel mai mic și nici cel mai mare dintre următoarele numere: $\frac{7}{24}, \frac{7}{12}, \frac{7}{8}$. **2 puncte**

b) Calculați de câte ori este mai mic numărul de mărgele utilizate din a doua cutie decât numărul celor utilizate din a patra cutie. **4 puncte**

c) Explicați în câte cutii se pun mărgele rămase. **4 puncte**

3. Punctul O este intersecția diagonalelor pătratului $MNPQ$ și $MO=4\sqrt{2}cm$. Punctul R este piciorul perpendicularei din punctul O pe latura NP.

a) Arătați că $MN=8$ cm. **2 puncte**

b) Calculați perimetrul patrulaterului $MNRO$. **4 puncte**

c) Demonstrați că RO este mediatoarea segmentului QM. **4 puncte**

DEF 2017

Pentru **redactarea** eseului veți primi **4 puncte** (*organizarea ideilor în scris, abilități de analiză și de argumentare* – 1 punct; *utilizarea limbii literare* – 1 punct; *ortografia, punctuația* – 1 punct; *așezarea în pagină, lizibilitatea, respectarea limitei de spațiu* – 1 punct).

În vederea acordării punctajului pentru redactare, eseul trebuie să aibă minimum două pagini și să dezvolte subiectul propus.

B. MATEMATICĂ (30 de puncte)

1. Se consideră mulțimile $A=\{x\in\mathbb{N}/19\le x\le a\}$ și $B=\{y\in\mathbb{N}/\ y \text{ este număr par}\}$.

a) Pentru $a=24$, scrieți elementele mulțimii A. **2 puncte**

b) Pentru $a=25$, determinați numărul elementelor mulțimii $A\cap B$, precizând totodată elementele mulțimii A. **4 puncte**

c) Dacă mulțimea A are 8 elemente, determinați elementele mulțimii $A-B$, precizând totodată explicit elementele mulțimii A. **4 puncte**

2. Se consideră numerele $a=\frac{8}{11}$, $b=7{,}3$ și $c=\frac{5}{4}$.

a) Calculați produsul numerelor a și c. **2 puncte**

b) Scrieți numerele a, b și c în ordine crescătoare. **4 puncte**

c) Determinați a 1888-a zecimală a numărului a, scriind totodată explicit numărul a ca fracție zecimală. **4 puncte**

3. În triunghiul ABC dreptunghic în A, $AB=6$ cm și $BC=9$ cm. Pe latura AB se consideră punctul D, astfel încât m $(\sphericalangle ACD)=30°$, și se construiește DE, bisectoarea $\sphericalangle BDC$, cu $E\in(BC)$.

a) Calculați perimetrul triunghiului ABC. **2 puncte**

b) Calculați lungimea segmentului CD. **4 puncte**

c) Demonstrați că $m(\sphericalangle ACD)=\frac{m(\sphericalangle BDE)}{2}$. **4 puncte**

DEF 2016

Ministerul Educaţiei Naţionale şi Cercetării Ştiinţifice
Centrul Naţional de Evaluare şi Examinare

B. MATEMATICĂ (15 puncte)

1. Se consideră mulţimile $A = \{x \in \mathbb{N} \mid a < x < 11,\ a \in \mathbb{N}\}$ şi $B = \{y \in \mathbb{N} \mid y$ este divizor al lui $9\}$.

a) Pentru $a = 0$, calculaţi $A \cap B$. **1 punct**

b) Pentru $a = 3$, determinaţi numărul elementelor mulţimii $A - B$, precizând totodată explicit elementele mulţimii A. **2 puncte**

c) Dacă mulţimea A are 10 elemente, determinaţi numărul elementelor mulţimii C obţinută prin intersecţia mulţimii A cu mulţimea numerelor naturale pare, precizând totodată explicit elementele mulţimii C. **2 puncte**

2. Se consideră numerele $a = \frac{6}{5}$, $b = \frac{5}{6}$ şi $c = 1{,}5$.

a) Calculaţi produsul dintre numerele a şi b. **1 punct**

b) Scrieţi numerele a, b şi c în ordine crescătoare. **2 puncte**

c) Determinaţi a 2014-a zecimală a numărului b, scriind totodată explicit numărul b ca fracţie zecimală. **2 puncte**

3. Se consideră pătratul $ABCD$ cu $AB = 4$ cm. Pe laturile AB şi BC se consideră punctele E şi, respectiv, F astfel încât $AE = BF$.

a) Calculaţi lungimea diagonalei pătratului $ABCD$. **1 punct**

b) Arătaţi că $DE = AF$. **2 puncte**

c) Demonstraţi că dreptele AF şi DE sunt perpendiculare. **2 puncte**